arXiv:2603.22308v1 [math.HO] 18 Mar 2026

熟悉的复数域中的无穷小量

Todor D. Todorov，加利福尼亚州立理工大学荣休教授，美国加利福尼亚州圣路易斯-奥比斯波，邮编 93407，ttodorov@calpoly.edu

2026年3月25日

摘要

摘要：我们通过观察复数域 $\mathbb{C}$ 包含非零无穷小量，证明了它含有非阿基米德子域。我们的观察基于 E. Steinitz 提出的一条代数旧定理，文中对此作了详细讨论。作者对 $\mathbb{C}$ 中存在无穷小量感到惊讶，读者或许也会如此，因为 $\mathbb{C}$ 通常以实数域 $\mathbb{R}$来定义，而实数域是阿基米德的。另一个耐人寻味之处在于，$\mathbb{R}$ 在19世纪（由戴德金、柯西等人）被引入，恰恰是为了使莱布尼茨—牛顿无穷小微积分中的无穷小量变得多余。看来数学永远无法彻底摆脱无穷小量——无论我们是否喜欢，它们都无处不在。在文章最后一节，我们将说明这一结果如何契合分析学，包括标准分析和非标准分析。我们将结合微积分史上的实例以及分析学近期的一流成果，试图让读者相信，无穷小量在分析学中的存在能简化其形式语言并提高其效率。我们的研究动机与简化 Colombeau 型特定广义函数代数的性质有关，文中对此作了简要讨论。

关键词：全序域；非阿基米德域；实闭域；代数闭域；Artin-Schreier 定理；Steinitz 定理；Erd¨os,

Gillman–Henriksen 定理；Puiseux-Newton级数；Levi-Civit´a级数；Hahn 级数；Robinson 非标准数；Robinson 渐近数。

2020 年数学主题分类：主要分类：46F30；次要分类：26E35；12D15；12F20；12L10；13F25；01A50。

1 引言

我们证明，复数域 $\mathbb{C}$ 包含一个非阿基米德子域 $\mathcal{R}$ （第 5 节）。因此，$\mathcal{R}$中的非零无穷小量也是 $\mathbb{C}$的元素。域 $\mathcal{R}$ 在 $\mathbb{C}$上定义了一个绝对值；当 $\mathcal{R}$ 包含 $\mathbb{R}$的一个副本时，这个绝对值是通常绝对值的（真）扩张。我们既从纯粹的代数观点，也从分析学的角度讨论这一结果（第9节）。

本文采用的集合论框架（第 2 节）是集合论中最常见、最流行的一组公理：ZFC（带选择公理的策梅洛–弗兰克尔公理）。有时我们也会用到 GCH（广义连续统假设），主要是为了简化论述。

将 $\mathcal{R}$ 嵌入 $\mathbb{C}$ 的存在性，是 E. Steinitz 提出的一个古老代数定理的推论（第4节）。熟悉 Steinitz 定理的读者可以跳过本节，直接阅读下一节。实际上，我们将证明， $\mathbb{C}$ 中包含的非阿基米德域 $\mathcal{R}$ 不止一个，而是有许多个，甚至可能无限多个（彼此不同构），并列举其中一些（例 6.1）。在第 7 节中，我们简要讨论其中一些域之间的同构。在第 8 节中，我们推广第 5 节的结果，并证明不仅 $\mathbb{C}$，所有 κ复数域也都包含无穷小量。我们还将给出代数基本定理的一个推广版本，其中涉及具有任意大不可数基数的代数闭域（定理 8.2）。

在第9节中，我们从分析学的角度讨论 $\mathbb{C}$中的无穷小量，既涉及标准分析，也涉及非标准分析。我们还提及非标准分析的一些较新成果，其中有些成果至少目前还没有标准对应物（注 9.4）。实际上，我们的研究动机之一，是尝试简化 Colombeau 型广义函数代数的某些性质；这些性质在（例 6.1）和（注 9.4）末尾有简要讨论。

我们努力使本文便于精通数学不同分支的数学家阅读。为此，我们

在第3-4节中提供了一份内容丰富的定义与事实清单（采用索引引用样式），涵盖纯数学的不同分支，并附有相关引文。许多读者可能会选择跳过其中至少一节（或快速浏览）。此外，例 6.1中的一些例子源自非标准分析，我们在第9节的讨论中也用到了这些例子。没有非标准分析背景的读者完全可以跳过“本文中的非标准部分”，因为我们的主要结果—— $\mathbb{C}$中的无穷小量——并不依赖于非标准数学。

据我们所知，我们观察到 $\mathbb{C}$包含无穷小量，这一发现鲜为人知，而且很可能是新的。尤其是，迄今为止，数学研究中涉及域 $\mathbb{C}$、 ${}^*\mathbb{C}$ 和 ${}^\rho\mathbb{C}$ 的工作，肯定尚未观察到并利用这些同构$\mathbb{C} \cong {}^*\mathbb{C} \cong {}^\rho\mathbb{C}$ （第5节）（Oberguggen- berger &Todorov [24], Vernaeve [42], Todorov& Vernaeve [37], Todorov [38]–[40]）。

我们只能推测，为什么数学家们熟悉 Steinitz 定理已久，却没有注意到 $\mathbb{C}$中存在无穷小量。从技术上说，在 Steinitz 定理 [33]于 1910年发表后不久，就有可能作出这样的观察，因为 Newton 早在遥远的 1736年就使用过 Puiseux-Newton级数构成的非阿基米德域 $\mathbb{R}\{t\}$ 。实际上，要作出我们的观察，无须更多条件。一种可能的解释（在摘要中曾简略提及）是，无穷小量在现代数学中长期以来已经不再流行。如今主修数学的学生很可能从未听说过无穷小的概念。为什么？原因可追溯至微积分的历史。为了说明这一点，我们不妨回顾一下 Leibniz 如何推导例如公式$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$。按照“定义”，$\frac{d}{dx}(x^3)$是由以下算法得出的：

步骤*1*：令 x 为“固定的普通量”（用现代语言来说，即固定的实数），令 $dx \neq 0$ 为“非零量”（用现代语言来说，即取非零值的变量）。我们计算：

$$\frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3 - x^3}{dx} = 3x^2 + 3xdx + dx^2.$$

步骤*2*：令 $dx = 0$，结果为：$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$。

请注意，如今的现代计算机能够按照类似的算法对实函数进行符号求导（Shamseddine, Berz [32]）。

然而，从纯数学的角度来看，步骤1（$dx \neq 0$）与步骤2（$dx = 0$）之间显然缺乏一致性，甚至可以将其表述为一个无穷小悖论："$dx \neq 0$ 和 $dx = 0$"。为了避免这一悖论，Leibniz（Newton、Euler 等人）引入了非零无穷小量的概念；dx 必须是一个非零无穷小量，这样便可以省略项 $3xdx + dx^2$，同时保留上述公式右侧的 $3x^2$。然而，人们始终怀疑非零无穷小量是否存在（以及能否将其作为避免上述悖论的工具），这在历史上促成了反无穷小运动，并逐渐导致无穷小量从数学中被清除（Hall & Todorov [11]）。这场运动始于19世纪，由波尔查诺、魏尔斯特拉斯等人发起；尽管20世纪中叶出现了非标准分析（Robinson [29]），这场运动至今仍未消退。对于想了解宗教改革、反宗教改革和英国内战背景下无穷小量前史的读者，我们推荐 Alexander 的优秀著作 [1]。

在处理 $\mathbb{C}$ 中的无穷小量时，我们面临以下哲学上的两难选择：

1. 无穷小量存在于 $\mathbb{C}$ 之中，无论我们是否意识到这一点——就像在一滴水中游动的微生物，肉眼看不见一样。也许，绝对值 $|\cdot|_{\mathcal{R}}$（具有非阿基米德域 $\mathcal{R}$）就是我们的"显微镜"，能让无穷小量"显现"出来？**或者**

2. $\mathbb{C}$中没有无穷小量（本应如此）。我们（人类）通过人为地将一个非阿基米德域嵌入 $\mathbb{C}$，在 $\mathbb{C}$ 中创造无穷小量？

众所周知，数学无法回答任何哲学问题，而我们也不打算回答这些问题。尽管如此，我们还是更愿意相信，无穷小量确实存在于 $\mathbb{C}$ 中（就像一滴水中的微生物），只是只有那些想要观察它们的人才能观测到它们。

2 集合论框架

我们的集合论框架采用通常的 ZFC（带选择公理的策梅洛-弗兰克尔公理），并假设 GCH（广义连续统假设）具有如下形式：$2^{\kappa} = \kappa_+$ 对于所有基数 κ（或等价地，$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ 对于所有序数 α）。这里，κ_+ 表示 κ的后继基数。

特别地，在 $\kappa = \aleph_0$的情况下，GCH 简化为 CH（连续统假设），可写成 $\mathfrak{c} = \aleph_1$，因为 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$。这里，$\aleph_0 = \mathsf{card}(\mathbb{N})$，而 $\mathfrak{c} = \mathsf{card}(\mathbb{R})$。根据选择公理（AC），我们有公式 $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_1\kappa_2 = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$，对于任意两个基数 κ_1 和 κ_2均成立，此外假设它们中至少有一个是无限基数。

事实上，对于我们的主要观察—— $\mathbb{C}$ 包含非零无穷小量——并不需要广义连续统假设（也不需要连续统假设）。我们采用广义连续统假设，主要是为了方便：这样便能建立例 6.1 中某些域之间的同构，也更容易计算它们的基数。不过，只要可能，我们都会尽量明确指出结果对广义连续统假设、连续统假设（甚至选择公理）的依赖（如果有的话）。除此之外，我们不要求读者具备集合论方面的专门知识。

3 预备知识：有序域

为方便读者，我们列出关于全序域的一些基本定义和事实。关于更详尽的论述，请参阅 Lang [13], Hunderford [12] 和 Waerden [43]。熟悉这一主题的读者可以直接跳到下一节。

1. 按照惯例，我们分别用 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ 表示自然数、有理数、实数和复数的集合，同时也使用 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。如果 S 是一个集合，我们用 $\mathcal{P}(S)$ 表示 S 的幂集。

2. 若 $\mathbb{K}$ 是全序域（有序域）且 $x \in \mathbb{K}$，我们令 $|x| = \max\{-x, x\}$，其中 max 是相对于 $\mathbb{K}$ 上的序而言的。我们称

   (a) 若对某个 $n \in \mathbb{N}$，x 满足 $|x| \leq n$，则称其为有限。
   (b) 若对所有 $n \in \mathbb{N}$，x 满足 $|x| < 1/n$，则称其为无穷小。(c) 若对所有 $n \in \mathbb{N}$，x 满足 $n < |x|$，则称其为无限大。

   回想一下，每个全序域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$ 的一个副本。因此，n 和 $1/n$ 都属于 $\mathbb{K}$（这也说明了上述定义是合理的）。

3. 我们分别用 $\mathcal{F}$、$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{K}$ 中的有限数、无穷小数和无限大数的集合。我们还用 $\mathcal{U} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{I}$ 表示

环 $\mathcal{F}$ 的单位元群。我们注意到 $\mathcal{F} \cup \mathcal{L} = \mathbb{K}$、 $\mathcal{F} \cap \mathcal{L} = \varnothing$ 和 $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$。此外，如果 $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$，那么 $x \in \mathcal{I}$ 当且仅当 $1/x \in \mathcal{L}$。有时我们用 $x \approx y$ 代替 $x - y \in \mathcal{I}$。

4. 全序域 $\mathbb{K}$ 称为阿基米德域，当且仅当 $\mathcal{L} = \varnothing$。后者等价于以下任一条件： $\mathcal{I} = \{0\}$或 $\mathcal{F} = \mathbb{K}$。因此， $\mathbb{K}$ 是非阿基米德域，当且仅当以下条件之一成立： $\mathcal{L} \neq \varnothing$、 $\mathcal{I} \neq \{0\}$或$\mathcal{F} \neq \mathbb{K}$。

5. 若全序域 $\mathbb{K}$中任意一个嵌套开区间序列的交集都非空，则称其为代数饱和的。更一般地，若某个无限基数 κ满足： $\mathbb{K}$ 中任何具有有限交性质且基数为 κ的开区间族都有非空交集，则称 $\mathbb{K}$ 为代数 κ_+饱和的。此外，若 $\mathbb{K}$是 κ_+-饱和的，其中 $\kappa_+ =$ 为 $\mathbb{K}$的基数，则称其为完全饱和的。

6. 除了上文提到的内容，全序域 $\mathbb{K}$是阿基米德域，当且仅当 $\mathbb{K}$是实数域 $\mathbb{R}$的有序子域（可嵌入为有序子域）。因此，任何包含 $\mathbb{R}$的真副本（作为有序子域）的全序域 $\mathbb{K}$ 都是非阿基米德域。另一方面，显然，代数饱和的有序域必定是非阿基米德域。或许，最简单的一个非饱和非阿基米德域例子是不包含 $\mathbb{R}$副本的域 $\mathbb{Q}(t) = \frac{\mathbb{Q}[t]}{\mathbb{Q}[t]}$，即一个带有有理数系数的一元有理函数域。首先，我们将 $\mathbb{Q}$嵌入 $\mathbb{Q}(t)$，映射为 $q \mapsto q\,t^0$；然后通过给多项式环 $\mathbb{Q}[t]$规定序，将 $\mathbb{Q}(t)$变为全序域：非零多项式 $P \in \mathbb{Q}[t]$为正，当且仅当 P 中 t 的最低次幂前面的系数为正。例如，$2t^2 - 100t^3 > 0$，因为 $2 > 0$。我们注意到， t、 t^2、 $2t^2 - 100t^3$、...都是正无穷小。特别地， t是正无穷小，因为对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\frac{1}{n} - t > 0$。类似地，t^{-1}、 t^{-2}、 $\frac{1}{2t^2-100t^3}$、.....都是 $\mathbb{Q}(t)$中的正无穷大元素。

7. 域 $\mathcal{R}$若满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ 总能推出 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，则称其为形式实（或可排序）。域 $\mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}(t)$是形式实域，而 $\mathbb{C}$ 不是。

8. 形式实域 $\mathcal{R}$ 若满足以下条件，则称其为实闭

(a) 对于每个 $a \in \mathcal{R}$，要么是 a，要么 $-a$ 有一个平方根。

(b) 每个 $P \in \mathcal{R}[x]$ （系数属于 $\mathcal{R}$）的奇数次多项式在 $\mathcal{R}$ 中都有一个根。

9. $\mathbb{R}$ 是实闭域，但 $\mathbb{Q}$不是。同样， $\mathbb{Q}(t)$也不是实闭域。本文后文将给出更多实闭域的例子（阿基米德和非阿基米德的例子均有）（例 6.1）。

10. 每个实闭域 $\mathcal{R}$ 在唯一的序下都是全序域：若存在某个 $y \in \mathcal{R}$使得 $x = y^2$，则 $x \geq 0$ 属于 $\mathcal{R}$。因此， $\mathcal{R}$ 是零特征域，因为 $\mathcal{R}$ 包含 $\mathbb{Q}$ 作为子域。

11. 若 $\mathcal{R}$ 是实闭域，则 $\mathcal{F}/\mathcal{I}$ 是阿基米德实闭域。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{R}$的子域，而 $\mathcal{R}$是 $\mathcal{F}$ 的极大子环（一个代表元域）。选择公理保证了 $\mathcal{A}$ 的存在。于是，由于 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{F}/\mathcal{I}$同构， $\mathcal{A}$ 是阿基米德实闭域。我们称 $\mathcal{A}$为 $\mathcal{R}$ 的阿基米德部分，有时也记作 $\mathcal{A}(\mathcal{R})$或$\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$，因为 $\mathcal{R}$在同构意义下唯一确定 $\mathcal{A}$。因此，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}(i)$分别是 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$的子域。注意，若 $\mathcal{R}$ 是阿基米德的，则 $\mathcal{A}(i) = \mathcal{R}(i)$，因为 $\mathcal{A} = \mathcal{R}$。然而，若 $\mathcal{R}$ 是非阿基米德的，则域扩张 $\mathcal{R}$: $\mathcal{A}$ 必为超越扩张，因此 $\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{R}$ 和 $\mathcal{A}(i) \subsetneqq \mathcal{R}(i)$。

12. 令 $\mathcal{R}$ 为一个实闭域，并令 $\mathcal{R}(i)$ 为将 i 添入 $\mathcal{R}$ 后得到的域。我们定义 $\mathcal{R}$-绝对值 $|\cdot|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathcal{R}(i)$，其定义采用熟知的公式 $|x + iy|_{\mathcal{R}} = \sqrt{x^2 + y^2}$，其中 x， $y \in \mathcal{R}$。我们注意到，绝对值的值域为 $\mathrm{ran}(|\cdot|_{\mathcal{R}}) = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\}$。显然， $|\cdot|_{\mathcal{R}}$ 具有绝对值的通常性质。此外，对所有 $x \in \mathcal{R}$，都有 $|x|_{\mathcal{R}} = \max_{\mathcal{R}}\{-x, x\}$，其中 $\max_{\mathcal{R}}$ 是相对于 $\mathcal{R}$ 中的序而言的。由 $|\cdot|_{\mathcal{R}}$ 所确定的 $\mathcal{R}(i)$ 上的拓扑，与 $\mathcal{R}$ 上的序拓扑所诱导的 $\mathcal{R}(i)$ 上的乘积拓扑一致。更多详情请参见第9节。

13. 对所有 $z \in \mathcal{A}(i)$，都有 $|z|_{\mathcal{R}} = |z|$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个阿基米德部分，而 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的通常绝对值。此外，在特殊情形 $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ 下，$|\cdot|_{\mathcal{R}}$ 显然化为 $\mathbb{C}$ 上的通常绝对值。

14. 与上述情况相反，请回想一下，如果每个非常数多项式 $P \in \mathbb{K}[x]$ （系数属于 $\mathbb{K}$）都至少有

一个根属于 $\mathbb{K}$，那么域 $\mathbb{K}$就是代数闭的。域 $\mathbb{C}$ 是代数闭的，但 $\mathbb{R}$ 和$\mathbb{Q}$（t）不是。

15. 设 $\mathcal{R}$ 是一个形式实域。那么，当且仅当 $\mathcal{R}(i)$ 是代数闭时， $\mathcal{R}$ 是实闭（Artin 和 Schreier [2]）。

16. 设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{K}$ 的一个子域，并假设域扩张 $\mathbb{K}:\mathbb{F}$ 是超越的。称 $\mathbb{K}$ 的子集 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{K}$: $\mathbb{F}$ 的一个超越基，如果：（a） $\mathcal{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数无关；（b）域扩张 $\mathbb{K}:\mathbb{F}(\mathcal{B})$ 是代数的。由佐恩引理可知 $\mathcal{B}$ 存在。 $\mathcal{B}$ 的基数称为 $\mathbb{K}:\mathbb{F}$ 的超越次数，通常记作 trd($\mathbb{K}$:$\mathbb{F}$)，即 trd($\mathbb{K}$:$\mathbb{F}$) $=$ card $\mathcal{B}$（Hunderford [12]）。此外，我们有如下公式：

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{card}(\mathbb{K}) = \max\{\aleph_0, \operatorname{card}\mathbb{F}, \operatorname{trd}(\mathbb{K}:\mathbb{F})\}.$$

事实上，根据定义，card ($\mathbb{K}$) $=$card ($\mathbb{F}(\mathcal{B})$)，因为按 $\mathcal{B}$ 的定义，域扩张 $\mathbb{K}:\mathbb{F}(\mathcal{B})$ 是代数的。另一方面，根据 $\mathbb{F}(\mathcal{B})$ 的定义，card ($\mathbb{F}(\mathcal{B})$) $=$max$\{\aleph_0,$ card $\mathbb{F}$, card $\mathcal{B}\}$，因为 $\mathcal{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数无关。

17. 令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{K}$ 的素子域（即包含 $\mathbb{K}$的单位元的 $\mathbb{K}$的最小子域），并像之前一样，假设域扩张 $\mathbb{K}$: $\mathbb{F}$是超越的。在这种情况下，超越次数 trd($\mathbb{K}$: $\mathbb{F}$)称为 $\mathbb{K}$ 的绝对超越次数，简记为 trd($\mathbb{K}$)。

4 同构域：Steinitz 定理

我们回顾代数中关于代数闭域和实闭域之间同构的两个经典定理。我们还将介绍 Steinitz 定理的若干推论，这些推论最终将引出下一节的主要结果。熟悉 Steinitz 定理的读者可以跳过本节，直接阅读下一节。

4.1 定理（Steinitz）。任意两个特征相同且绝对超越次数相同的代数闭域都同构。

证明。关于原始结果，请参阅（Steinitz [33], 第125页）。关于较新的阐述，也可参阅（Hunderford [12], 第六章，定理1.12，第317页）。 □

在某些情况下，我们可以在讨论中省去绝对超越次数 这一概念。

4.2 推论（不可数基数）。 具有相同特征和相同不可数基数的所有代数闭域彼此同构。

证明。 由定理 4.1 可得此结论，因为对于不可数域，绝对超越次数与域的基数相同。事实上，设 $\mathbb{K}$ 是一个基数为 $\mathbb{K} > \aleph_0$ 的代数闭域，并令 $\mathbb{F}$ 表示它的素子域。我们注意到，第 3 节末尾的公式 (1) 化简为 $\operatorname{card}(\mathbb{K}) = \max\{\aleph_0, \operatorname{trd}\mathbb{K}\}$，因为 $\operatorname{card}\ \mathbb{F} \leq \aleph_0$ 且 $\operatorname{trd}(\mathbb{K} : \mathbb{F}) = \operatorname{trd}\mathbb{K}$，这是因为 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{K}$的素子域。另一方面，由上述公式可得 $\operatorname{card}(\mathbb{K}) = \operatorname{trd}\mathbb{K}$（正如所需），因为根据假设，$\operatorname{card}\ \mathbb{K} > \aleph_0$。 □

上述推论为域 $\mathbb{C}$的以下“代数定义”提供了依据。请注意，实数域 $\mathbb{R}$ 仅通过其基数 $\mathfrak{c}$参与其中；定义中甚至没有提到 $\mathbb{R}$ 是一个戴德金完备拓扑域。（与之相对，请比较第9节。）

4.3 定义（ $\mathbb{C}$的代数定义）。 $\mathbb{C}$（根据定义）是一个零特征、基数为 $\mathfrak{c}$ 的代数闭域。

4.4 推论（两个域）。对于任意两个满足 $\mathit{card}(\mathcal{R}_1) = \mathit{card}(\mathcal{R}_2) > \aleph_0$ 的实闭域 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$，域 $\mathcal{R}_1(i)$ 与 $\mathcal{R}_2(i)$ 同构。特别地，对于任意基数为 $\mathfrak{c}$ 的实闭域 $\mathcal{R}$（阿基米德或非阿基米德），$\mathcal{R}(i)$ 与 $\mathbb{C}$ 同构。此外，若 $\sigma : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$ 是一个同构，则对所有 $q \in \mathbb{Q}$，都有 $\sigma(q) = q$，且 $\sigma(i) = i$ 或 $\sigma(i) = -i$。因此，对于所有 x、$y \in \mathcal{R}$，根据 $\sigma(i) = \pm i$ 的不同，分别有 $\sigma(x + iy) = \sigma(x) \pm i\sigma(y)$。

证明。 这是推论 4.2 的直接推论，同时考虑到根据 Artin-Schreier 定理（第 3 节），$\mathcal{R}_1(i)$ 和 $\mathcal{R}_2(i)$ 都是代数闭域，并且这两个域都是零特征的（因为 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$都是零特征的）。此外，$\operatorname{card}(\mathcal{R}_1(i)) = \operatorname{card}(\mathcal{R}_2(i))$，因为 $\operatorname{card}(\mathcal{R}_n(i)) = \operatorname{card}(\mathcal{R}_n)$，$n = 1, 2$。特别地，$\mathcal{R}(i)$ 和 $\mathbb{C}$ 同构，因为 $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ 和 $\mathbb{R}$是实闭域。最后，$\sigma(i) = \pm i$ 可由以下事实推出：$\sigma(i)$ 是 $\mathbb{C}$ 中 $x^2 + 1 = 0$ 的两个解之一。 □

下一个定理是 Steinitz 定理在实闭域情形下的对应定理。

4.5 定理（Erd¨os，Gillman，Henriksen）。任意两个基数相同且不可数的实闭全饱和域 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 彼此同构。

证明。参见（Erd¨os、Gillman 和 Henriksen [8], 定理 2.1，第 543 页）。需要指出的是，这一结果要求广义连续统假设（GCH），除此之外还要求更常见的 ZFC。 □

5 代数中的无穷小量

下面的主要结果具有数学观察的性质，是由第4节讨论的内容直接得出的。我们的框架纯属代数性质（定义 4.3）。从分析学角度对 $\mathbb{C}$的讨论将留待第9节。

5.1 定理（主要结果）。$\mathbb{C}$ 包含一个非阿基米德全序子域 $\mathcal{R}$。因此，$\mathcal{R}$ 中的非零无穷小量也是 $\mathbb{C}$的元素。

证明。假设 $\mathcal{R}$ 是基数为 $= \mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域。此类域的存在性留待下一节的例 6.1 说明。根据推论4.4，域 $\mathcal{R}(i)$ 与 $\mathbb{C}$ 同构。令 $\sigma : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$ 为它们之间的任意一个同构。$\mathbb{C}$ 的子域 $\sigma[\mathcal{R}]$ 也是实闭域。此外，$\sigma[\mathcal{R}]$也是非阿基米德的，因为实闭域中的代数运算唯一确定其序。事实上，设 x是 $\mathcal{R}$中的一个正无穷小，即对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $0 < x < 1/n$ 。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$ ，也有 $0 < \sigma(x) < 1/n$，因为 $\sigma(1/n) = 1/n$。后者意味着 $\sigma(x)$ 是 $\sigma[\mathcal{R}]$中的一个正无穷小。显然，$\sigma(x) \in \mathbb{C}$。 □

5.2 定义（$\mathbb{C}$中的无穷小量）。设 $\mathcal{R}$ 是一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域，且 $\sigma : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$ 是一个域同构。我们通过公式 $|\sigma(x + iy|_{\sigma[\mathcal{R}]} = \sigma(\sqrt{x^2 + y^2})$ 定义绝对值 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$（其值域为 $\text{ran}(|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}) = \{\sigma(\mathcal{R}) : \underline{x \in \mathcal{R},\ x \geq 0}\}$），对所有 $x,\ y \in \mathcal{R}$均成立。对于有限、无穷小、有限但非无穷小量的集合，以及

无穷大量 $\mathbb{C}$ 有:

$$\mathcal{F} = \{\sigma(x+iy) \in \mathbb{C} : \sqrt{x^2+y^2} \leq n \text{ for some } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{I} = \{\sigma(x+iy) \in \mathbb{C} : \sqrt{x^2+y^2} < 1/n \text{ for all } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{U} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{I} = \{\sigma(x+iy) \in \mathbb{C} : 1/n \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq n \text{ for some } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{L} = \{\sigma(x+iy) \in \mathbb{C} : n < \sqrt{x^2+y^2} \text{ for all } n \in \mathbb{N}\},$$

分别，其中我们利用了以下事实：对于所有$q \in \mathbb{Q}$， $\sigma(q) = q$。

5.3 定理 (代数数与超越数**)**。设 $\mathcal{R}$ 是基数为 $\mathfrak{c}$的非阿基米德实闭域（同上）。设 $\mathbb{A}$表示实代数数域， $\mathbb{A}(i)$ 表示所有代数数构成的域。那么：

(i) $\mathbb{A}(i) \setminus \{0\} \subset \mathcal{U}$。因此，非零代数数既不可能是无穷小，也不可能是 $\mathbb{C}$ 中的无穷大量（无论如何选择 $\mathcal{R}$和 σ）。（*ii*） $\mathbb{C}$ 中的非零无穷小量和无限大的数全都是超越数，即 $\mathcal{I} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{A}(i)$ 和 $\mathcal{L} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{A}(i)$。（*iii*）设 $z \in \mathbb{A}(i)$ 且 $dx \in \mathcal{I}$。那么， $z + dx \in \mathbb{A}(i)$ 当且仅当 $dx = 0$。（*iv*）对于任意基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域 $\mathcal{R}$ 以及任意超越数 $z \in \mathbb{C}$，都存在一个同构 $\sigma_1 : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$，使得 $\sigma_1(z) \notin \mathcal{U}$。因此，集合 $\{\sigma_1(z)\ 1/\sigma_1(z)\}$中的两个数，一个是非零无穷小量，另一个是 $\mathbb{C}$中的无穷大量。

证明。(i) 假设 $z \in \mathbb{A}(i) \setminus \{0\}$。我们有 $P(z) = 0$，其中某个多项式$P(t) = q_0 t^d + q_1 t^{d-1} + \cdots + q_d$满足该式，且 $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$和 $q_k \in \mathbb{Q}$,$k = 0$, 1，.....， d, 因为 $\mathbb{A}(i)$ 是代数闭域。因此 $|z|_{\sigma[\mathcal{R}]} \leq 1 + \frac{d}{|q_0|} \max_{1 \leq k \leq n} |q_k|$, 这里考虑到了对所有 $q \in \mathbb{Q}$， $|q|_{\sigma[\mathcal{R}]} = |q|$。后者意味着，对任意满足 $1 + \frac{d}{|q_0|} \max_{1 \leq k \leq n} |q_k| \leq n$ 的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $|z|_{\sigma[\mathcal{R}]} \leq n$。因此 $z \in \mathcal{F}$。类似地， $1/z \in \mathcal{F}$（因为$1/z \in \mathbb{A}(i) \setminus \{0\}$）。因此， $z \in \mathcal{U}$，证毕。

(ii) 等价于 (i)。

(iii) 设 $z+dx \in \mathbb{A}(i)$，并假设（以求矛盾） $dx \neq 0$。因此 $dx = z+dx-z \in \mathbb{A}(i)\backslash\{0\}$，由 (i) 可得 $dx \in \mathcal{U}$，这与假设 $dx \in \mathcal{I}$ 矛盾。反过来， $dx = 0$ （显然）蕴含 $z+dx \in \mathbb{A}(i)$，因为根据假设 $z \in \mathbb{A}(i)$。

(iv) 设 $\sigma : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$ 是一个同构， x 是 $\mathcal{R}$ 中的一个非零无穷小，而 $\sigma(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 中相应的非零无穷小（如定理 5.1 的证明所示）。设 $z \in \mathbb{C}$ 是一个超越数。我们将 $\{\sigma(x)\}$ 和 $\{z\}$ 分别扩充为同一域扩张 $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$ （第 3 节）的两个超越基 $\mathcal{B}_x := \{\sigma(x)\} \cup \mathbb{B}_x$ 和 $\mathcal{B}_z := \{z\} \cup \mathbb{B}_z$。令 $\varphi : \mathbb{Q}(\mathcal{B}_x) \mapsto \mathbb{Q}(\mathcal{B}_z)$ 表示由 $\varphi(\sigma(x)) = z$ 和 $\varphi[\mathcal{B}_x] = \mathcal{B}_z$ 定义的同构。由于 $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张， φ 可扩张为一个自同构 $\widehat{\varphi} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ （Hunderford，第 VI 章；及／或 Milne，第 7 章）；并且我们仍有 $\widehat{\varphi}(\sigma(x)) = z$。现在，由公式 $\sigma_1 = \widehat{\varphi} \circ \sigma$ 定义的同构 $\sigma_1 : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$ 正是我们所求，因为 $z = \sigma_1(x)$ 是一个非零无穷小。

□

在 $\mathbb{C}$ 中拥有无穷小量的“奢侈”（正如生活或科学中的任何奢侈一样）并非“免费”。以下注释说明了这一点。

5.4 注 （付出的代价）。设 $\sigma : \mathcal{R}(i) \mapsto \mathbb{C}$ 是一个同构，其中$\mathcal{R}$ 是基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域（定理 5.1 ），并且进一步假设 $\mathcal{R}$ 包含 $\mathbb{R}$ 的一个副本。（例 6.1 中的域： $\mathbb{R}\{t\}$、 $\mathbb{R}\langle t\rangle$、$\mathbb{R}[t]$、 ${}^*\mathbb{R}$、 ${}^*\mathbb{A}$ 和 ${}^*\mathbb{R}_\alpha$ 均满足这些假设。）注意，域扩张 $\mathbb{C}: \sigma[\mathbb{R}]$ 是超越的（因为 $\mathcal{R}: \mathbb{R}$ 是超越的），与之相反， $\mathbb{C} : \mathbb{R}$是代数的。因此，不存在自同构 $\Phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ 使得 $\Phi[\mathbb{R}] = \sigma[\mathbb{R}]$，因为这两个域扩张都是伽罗瓦扩张（Hunderford [12],第 VI 章）和/或（Milne [22], 第 7 章）。

基数为 $\mathfrak{c} = \operatorname{card}\mathbb{R}$ 的非阿基米德实闭域的 6 个例子

为了完成定理 5.1 的证明，我们必须证明存在基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域 $\mathcal{R}$ 。没有非标准分析背景的读者或许会决定跳过最后两三个源自非标准分析的例子。正如我们在

引言中提到的，只需一个例子，比如 $\mathcal{R} = \mathbb{R}\{t\}$，就足以支持定理 5.1。

6.1 示例 （基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域）。 下面 $\mathcal{R}$列出的所有域都是基数为 $\mathfrak{c} = \text{card } \mathbb{R}$ 的实闭域。前两个示例中的域是阿基米德的，其余的是非阿基米德的。此外，其中一些域包含 $\mathbb{R}$ 的一个副本，而另一些则不包含：

1. 我们从实数域 $\mathbb{R}$ 开始。

2. 令 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为一个超越实数（例如 $\alpha = \pi$ 或 $\alpha = e$），并令$\mathcal{B}_\alpha$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个子集，使得 $\{\alpha\} \cup \mathcal{B}_\alpha$ 构成域扩张 $\mathbb{R}$的超越基：$\mathbb{Q}$（见第 3 节末尾）。令 $\mathbb{R}_\alpha$ 为 $\mathbb{Q}(\mathcal{B}_\alpha)$ 在 $\mathbb{R}$中的实闭包。则 $\mathbb{R}_\alpha$ 是一个基数为 $\mathfrak{c}$的阿基米德实闭域，它不包含 $\mathbb{R}$ 的一个副本，因为 $\alpha \notin \mathbb{R}_\alpha$。因此， $\mathbb{R}_\alpha(i)$ 是 $\mathbb{C}$ 的真子域（因为 $\mathbb{R}_\alpha$ 是$\mathbb{R}$的真子域），同时， $\mathbb{R}_\alpha(i)$ 根据定理 5.1 与 $\mathbb{C}$ 同构。

3. 令 $\mathbb{R}_\alpha(t)$表示系数属于 $\widehat{\mathbb{R}_\alpha}$的有理函数域（按 t 为正无穷小的方式排序），并令 $\mathbb{R}_\alpha$ 为 $\mathbb{R}_\alpha(t)$的实闭包$\widehat{\ }$。那么 $\mathbb{R}_\alpha$ 是基数为$\prec\mathfrak{c}$的非阿基米德实闭域。因此，根据定理 5.1， $\mathbb{R}_\alpha(i)$与 $\mathbb{C}$ 同构。

4. $\mathbb{R}\{t\}$ 上的普赛序列域（也称为*Puiseux-Newton*级数）（系数为实数，Prestel [26]）定义如下：

$$\mathbb{R}\{t\} =: \Big\{ \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n (\sqrt[m]{t})^n : \mu \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

普赛序列由艾萨克·牛顿于 [23] 1736年引入，并用于计算行星轨道。后来，维克多·普赛于 [27]-[28]重新发现了 $\mathbb{R}\{t\}$ 。显然， $\mathbb{R}\{t\}$ 的基数为 $\mathfrak{c}$。实际上， $\mathbb{R}\{t\}$是实系数洛朗级数域 $\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{Z}}\rangle$ 的实闭包，因此它是一个实闭域。

5. 实系数*Levi-Civit´a [14]* 级数 构成的域定义为

$$\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle =: \Big\{ \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r t^r : a_r \in \mathbb{R} \text{ and } \operatorname{supp}(\sum_{r\in\mathbb{R}} a_r t^r) \text{ is a left-finite set} \Big\}.$$

其中 $\text{supp}(\sum_{r\in\mathbb{R}} a_r t^r) = \{r \in \mathbb{R} : a_r \neq 0\}$。回顾一下， S 是$\mathbb{R}$ 的左有限 子集，当且仅当对所有 $r \in \mathbb{R}$， $\{s \in S : s \leq r\}$ 都是有限集。域$\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$ 是一个基数为 $\mathfrak{c}$的实闭域。如今，Levi-Civit´a 级数用于在计算机中对实函数的导数进行符号计算（Shamseddine, Berz [32]）。

6. 系数取自 $\mathbb{R}$ 且赋值群为$(\mathbb{R}, +, <)$ 的 Hahn（广义）级数域定义为

$$\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}] =: \Big\{ \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r t^r : a_r \in \mathbb{R} \text{ and } \text{supp}(\sum_{r\in\mathbb{R}} a_r t^r) \text{ is a well ordered set} \Big\},$$

（Hahn [10]）。例如， $1+t^{1/2}+t^{2/3}+t^{3/4}+\cdots \in \mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]\setminus\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$，因为 $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq \infty$所以，集合 $\{0, 1/2, 2/3, \dots\}$是良序的，但不是左有限的。$\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$ 是基数为 $\mathfrak{c}$的实闭域。Hahn 级数是在研究希尔伯特第二问题的过程中发展起来的。

7. Robinson 非标准数域 ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim_{\mathcal{U}}$。这里， $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$表示实数序列构成的环， $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子，而 $(a_n) \sim_{\mathcal{U}} (b_n)$ 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上，当且仅当 $\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$。我们用 $\langle a_n\rangle$ 表示 (a_n) 的等价类。我们将 $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ 嵌入$r \mapsto \langle r, r, \dots\rangle$。因此，card $({}^*\mathbb{R})$ = card $(\mathbb{R})$ $= \mathfrak{c}$。根据转移原理（Davis [7], ，第28页），域 ${}^*\mathbb{R}$ 是实闭域，因为 $\mathbb{R}$ 是实闭域。此外， ${}^*\mathbb{R}$是非阿基米德域；特别是，$\langle n\rangle$ 是无限大的正数，因为 $\{n \in \mathbb{N} :$ 对于任意（固定的） $m \in \mathbb{N}, \ m < n\} \in \mathcal{U}$。我们应该提到，尽管 A. Robinson [29] 通常被公认为非标准分析的创始人，但上述 ${}^*\mathbb{R}$ 的超幂构造最早见于 Luxemburg [19] （另见 Stroyan 与 Luxemburg [34]）。关于这一主题的介绍，还可参阅（Loeb 与 Wolff [17]）以及（Lindstrøm [16]）。

8. 令 $\mathbb{A}$ 表示实代数数域。回顾一下， $\mathbb{A}$ 是一个基数为 $\aleph_0$ 的阿基米德实闭域。令 ${}^*\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\sim_{\mathcal{U}}$ 表示 $\mathbb{A}$ 的非标准扩张。域 ${}^*\mathbb{A}$是一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域（需要用到连续统假设）。此外，

${}^*\mathbb{A}$ （非典范地）包含 $\mathbb{R}$ 的一个副本。事实上， $\mathcal{A}$ 的每个子域 ${}^*\mathbb{A}$ 是 $\mathcal{F}({}^*\mathbb{A})$（一个代表元域）的极大子环，与 $\mathbb{R}$ 同构，因为 $\mathcal{F}({}^*\mathbb{A})/\mathcal{I}({}^*\mathbb{A})$ 与 $\mathbb{R}$ (Davis [7],

定理 2.5，第 52 页）。这里， $\mathcal{F}({}^*\mathbb{A})$ 和 $\mathcal{I}({}^*\mathbb{A})$ 分别表示 ${}^*\mathbb{A}$ 中有限元素和无穷小元素的集合。佐恩引理保证了这样一个极大域 $\mathcal{A}$ 的存在。

9. 与上例类似， ${}^*\mathbb{R}_\alpha$ 在 $\mathbb{R}_\alpha$ 上的非标准扩张是一个基数为 $\mathfrak{c}$的非阿基米德实闭域；它（与 ${}^*\mathbb{A}$一样，但与 $\mathbb{R}_\alpha$不同）包含 $\mathbb{R}$的一个副本。

10. 令 $\rho \in {}^*\mathbb{R}$ 为一个（固定的）正无穷小量。*Robinson* 的渐近数域定义为 ${}^\rho\mathbb{R} = \mathcal{M}_\rho/\mathcal{N}_\rho$，其中

$$\mathcal{M}_\rho = \{x \in {}^*\mathbb{R} : |x| \leq \rho^{-n} \text{ for some } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{N}_\rho = \{x \in {}^*\mathbb{R} : |x| < \rho^{n} \text{ for all } n \in \mathbb{N}\},$$

（Robinson [30], Lightstone 与 Robinson [15]）。注意， $e^{1/\rho} \notin \mathcal{M}_\rho$ 且 $e^{-1/\rho} \in \mathcal{N}_\rho$。域 ${}^\rho\mathbb{R}$ 是实闭且球完备的（Luxemburg [21], Pestov [25]）。近年来，域 ${}^\rho\mathbb{C}$ 被用作*Colombeau*型广义函数代数的标量域（Oberguggenberger 与 Todorov [24], Todorov 与 Ver- naeve [37], Todorov [38]-[41]）。更多详情请参阅第9节。

11. 让我们将域 $\mathbb{R}\{t\}$、 $\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$、 $\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$ 中的 $\mathbb{R}$ 替换为任意一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的实闭域（阿基米德或非阿基米德）。结果将是另一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域。例如，以下域： $\mathbb{R}_\alpha\{t\}$、 $\mathbb{R}_\alpha\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$、 $\mathbb{R}_\alpha[t^{\mathbb{R}}]$、 ${}^*\mathbb{R}\{t\}$、 ${}^*\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$、 ${}^*\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$、 ${}^*\mathbb{A}\{t\}$、 ${}^*\mathbb{A}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$，

${}^*\mathbb{A}[t^{\mathbb{R}}]$、 ${}^*\mathbb{R}_\alpha\{t\}$、 ${}^*\mathbb{R}_\alpha\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$、 ${}^*\mathbb{R}_\alpha[t^{\mathbb{R}}]$、 ${}^\rho\mathbb{R}\{t\}$、 ${}^\rho\mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle$和 ${}^\rho\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$等，都是基数为 $\mathfrak{c}$ 的非阿基米德实闭域。

显然，上述所有域两两不同构。设 $\mathcal{R}$是例 6.1中所列基数为 $\mathfrak{c}$ 的任一实闭域（阿基米德或非阿基米德）。那么根据推论4.4， $\mathbb{C} \cong \mathcal{R}(i)$，其中 $\cong$ 表示同构，因为 $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$。特别地，

$$\mathbb{C} \cong {}^*\mathbb{C} \cong {}^\rho\mathbb{C}, \tag{2}$$

其中 ${}^*\mathbb{C} = {}^*\mathbb{R}(i)$表示 $\mathbb{C}$ 的非标准扩张，而 ${}^\rho\mathbb{C} = {}^\rho\mathbb{R}(i)$是*Robinson* 的复渐近数域。据我们所知，文献中迄今尚未注意到同构 (2)。

7 唯一性（差一个同构）

例 6.1 中列出的众多域中，有些在附加某些假设后实际上是相同的或同构的。例如，若 ρ_1/ρ_2 是 ${}^*\mathbb{R}$ 中的一个有限但非无穷小量的元素，且ρ_1, $\rho_2 \in {}^*\mathbb{R}$是某些正无穷小，则有 $\mathcal{M}_{\rho_1} = \mathcal{M}_{\rho_2}$。后者意味着 $\mathcal{N}_{\rho_1} = \mathcal{N}_{\rho_2}$，因为 $\mathcal{M}_{\rho_1}$和 $\mathcal{M}_{\rho_2}$ 是凸环。在这种情况下， ${}^{\rho_1}\mathbb{R}$ 和 ${}^{\rho_2}\mathbb{R}$ 不只是同构，而是完全相同。本节在 ZFC（第 2 节）的基础上进一步假设 CH，并证明例 6.1 中列出的许多域实际上是同构的。我们希望本节的讨论能够带来简化，并使概念更加清晰。

1. 回顾一下，域 ${}^*\mathbb{R}$ 是代数饱和的。原始结果可参见 Luxemburg [20], p.18-86)，相关论述也可参见 (Lindstrøm [16], Thm.1.2.5, p.12)。因此，对于任意两个定义在 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$，根据定理 4.5（该定理需要连续统假设）， $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\sim_{\mathcal{U}_1}}$ 和 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\sim_{\mathcal{U}_2}}$ 同构。

2. 与上述情况相反，域 ${}^{\rho}\mathbb{R}$ 并未饱和，因此定理 4.5 不可直接应用。然而，结果表明，每个域 ${}^{\rho}\mathbb{R}$ 都同构于 ${}^*\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$，即系数取自 ${}^*\mathbb{R}$、赋值群为 $(\mathbb{R}, +, <)$ 的 Hahn 域。因此，对于 ${}^*\mathbb{R}$ 中任意两个正无穷小 ρ_1 和 ρ_2，${}^{\rho_1}\mathbb{R}$ 和 ${}^{\rho_2}\mathbb{R}$ 同构（Todorov & Wolf [35]）。后者需要连续统假设。

3. 我们有两个自嵌入 ${}^*\mathbb{R} \hookrightarrow {}^{\rho}\mathbb{R}$ 和 ${}^{\rho}\mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$（二者都不是规范的）。

   - 嵌入 ${}^*\mathbb{R} \hookrightarrow {}^{\rho}\mathbb{R}$ 由以下两者之间的同构得出：
     ${}^*\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$以及上文提到的 ${}^{\rho}\mathbb{R}$。
   - 为了证明嵌入 ${}^{\rho}\mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$，我们利用这样一个事实： ${}^{\rho}\mathbb{R}$与 ${}^*\mathbb{R}$的任意子域 $\mathbb{M}$ 同构，而 $\mathbb{M}$ 是 $\mathcal{M}_{\rho}$（一个代表元域）的极大子环。佐恩引理保证了这样的极大域 $\mathbb{M}$ 存在（Todorov 与 Wolf [35], Todorov [36],§14）。

4. 基于同构 ${}^{\rho}\mathbb{R} \cong {}^*\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}]$，我们可以消去 ${}^{\rho}\mathbb{R}$ 并

写成

$$\mathbb{R}\{t\} \subset \mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle \subset \mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}] \subset {}^*\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}] \hookrightarrow {}^*\mathbb{R},$$
$$\mathbb{R}\{t\} \subset \mathbb{R}\langle t^{\mathbb{R}}\rangle \subset \mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}] \hookrightarrow {}^*\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}[t^{\mathbb{R}}],$$

其中 $\subset$ 表示"子域"（因此也表示"子集"），而 $\hookrightarrow$ 表示"域嵌入"。

8 κ-复数

我们推广定理 5.1 的结果，并证明每个κ-复数域 $\mathbb{C}_\kappa$ （定义如下）都包含非零无穷小量。

8.1 定义 （κ-复数）。 设 κ 是一个无限基数，且$\mathbb{C}_\kappa$ 是一个零特征、基数为 κ_+的代数闭域。我们将 $\mathbb{C}_\kappa$ 的元素称为 κ-复数。

在下一个定理中，我们将证明对每个无限基数κ， $\mathbb{C}_\kappa$ 都存在。关于 κ_+-良好自由超滤子 （下文将用到）的概念，请参阅 Chang & Keisler [5] ；关于该主题的阐述，也请参阅（Lindstrøm [16],附录）。

8.2 定理 （广义代数学基本定理）。 对每个无限基数 κ，都存在一个在同构意义下唯一的、零特征且基数为 κ_+的代数闭域。因此，对每个无限基数 κ， $\mathbb{C}_\kappa$ 都存在。

证明。 $\mathbb{R}$ 是一个实闭域，因为每个实系数多项式都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。因此，若此类多项式的次数为奇数，其图像必定至少与 x 轴相交一次。由此，根据 Artin-Schreier [2] 定理（即所谓的代数基本定理）， $\mathbb{R}(i)$ 是一个零特征的代数闭域。接下来，设 I 是一个基数为 κ 的集合，并且 $\mathcal{V}$ 是 I 上一个 κ_+-良好的自由超滤子。令 $\mathbb{R}^I/\sim_{\mathcal{V}}$ 表示 $\mathbb{R}$ 对应的非标准扩张。因此（无论 $\kappa = \aleph_0$ 还是 $\kappa > \aleph_0$），域 $\mathbb{R}^I/\sim_{\mathcal{V}}$ 根据转移原理（Davis [7], ，第 28 页）都是实闭域，因为 $\mathbb{R}$ 是实闭域，而 $\mathbb{R}^I/\sim_{\mathcal{V}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的非标准扩张。此外，$\mathbb{R}^I/\sim_{\mathcal{V}}$ 的基数为 κ_+，因为根据假设，超滤子 $\mathcal{V}$ 是 κ-良好的。通常使用较简单的记法 ${}^*\mathbb{R}$（以及 card $({}^*\mathbb{R}) = \kappa_+$）来代替 $\mathbb{R}^I/\sim_{\mathcal{V}}$。采用这种记法，根据 Artin-Schreier 定理， ${}^*\mathbb{R}(i)$ 必定是一个零特征的代数闭域

而且 ${}^*\mathbb{R}(i)$ 的基数为 κ_+，因为 $\text{card}({}^*\mathbb{R}) = \kappa_+$。根据推论 4.2 并应用于零特征的情形，${}^*\mathbb{R}(i)$ 的这些性质唯一确定了 ${}^*\mathbb{R}(i)$，使其在同构意义下唯一。特别地，${}^*\mathbb{R}(i)$ 与 $\mathbb{C}_\kappa$ 同构，从而证明了 $\mathbb{C}_\kappa$ 的存在性。 □

8.3 注（可数域）。令 $\mathbb{A}(i)$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的代数数域（这里 $\mathbb{A}$ 表示实代数数域）。域 $\mathbb{A}(i)$ 是代数闭域，具有零特征，且 $\text{card}\,(\mathbb{A}(i)) = \aleph_0$。然而请注意，上述定理不包括可数域；原因在于它们不满足“在同构意义下唯一”的条件；两个具有零特征的可数代数闭域可能同构，也可能不同构。

8.4 定理。每个 $\mathbb{C}_\kappa$ 都包含非零无穷小量，其意义是 $\mathbb{C}_\kappa$ 包含非阿基米德子域。

证明。我们已经知道，在 $\kappa = \aleph_0$ 的情形下，$\mathbb{C}_\kappa$ 包含非零无穷小量，因为 $\mathbb{C}_{\aleph_0}$ 与 $\mathbb{C}$ 同构（第5节）。在 $\kappa > \aleph_0$ 的情形下，我们注意到，对于每个基数为 κ_+ 的实闭域 $\mathcal{R}$，$\mathbb{C}_\kappa$ 都与 $\mathcal{R}(i)$ 同构。因此，作为基数大于 $\mathfrak{c}$ 的全序域，$\mathcal{R}$ 必定是非阿基米德的。于是，$\mathcal{R}$ 可以嵌入为 $\mathbb{C}_\kappa$ 的子域，从而为 $\mathbb{C}_\kappa$ 提供非零无穷小量。 □

8.5 注 (关于记号的警告)。 星号记号（如同数学中的任何记号一样）并不完美。例如，当 $\text{card}\,(I) > \aleph_0$ 时，域 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\sim_{\mathcal{U}}}$ 和 $\mathbb{R}^I/{\sim_{\mathcal{V}}}$ 显然不同构。事实上，$\text{card}\,(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\sim_{\mathcal{U}}}) = \mathfrak{c}$，而 $\text{card}\,(\mathbb{R}^I/{\sim_{\mathcal{V}}}) = \kappa_+ > \mathfrak{c}$，其中 $\kappa = \text{card}\,(I)$。尽管如此，我们通常对两者都使用相同的记号 ${}^*\mathbb{R}$。${}^*\mathbb{C}$及其对应的渐近数域 ${}^\rho\mathbb{R}$ 和 ${}^\rho\mathbb{C}$ 也是如此。例如，在 (Oberguggenberger & Todorov [24]) 中，我们有 $\text{card}\,({}^*\mathbb{C}) = \text{card}\,({}^\rho\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$；而在 (Todorov & Vernaeve [37]) 中，$\text{card}\,({}^*\mathbb{C}) = \text{card}\,({}^\rho\mathbb{C}) = \mathfrak{c}_+$。为避免误解，建议读者留意 ${}^*\mathbb{R}$ 的饱和（因此也就是基数）的选择；这一选择通常会在所读文本的开头明确说明。

9 分析学中的无穷小量

到目前为止，我们主要从代数观点讨论了 $\mathbb{C}$(定义 4.3) 中的无穷小量，以及 $\mathbb{C}_\kappa$ (第 8 节) 中的无穷小量。在上一

节中，我们为 $\mathbb{C}_\kappa$（以及 $\mathbb{C}$）赋予了不同的拓扑，这些拓扑通常彼此不同胚，并简要比较讨论了标准、非标准和非标准渐近分析。

9.1 定义（$\mathbb{C}_\kappa$上的拓扑）。设 κ 是一个无限基数，$\mathbb{C}_\kappa$ 表示由 κ 个复数组成的域（定义 8.1）。设 $\mathcal{R}$ 是一个基数为 κ_+ 的实闭域，且 $\sigma : \mathcal{R}$ $(i) \mapsto \mathbb{C}_\kappa$ 表示一个域同构（第 8 节）。

1. 我们定义绝对值 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]} : \mathbb{C}_\kappa \mapsto \mathbb{C}_\kappa$，使得对所有 $x, y \in \mathcal{R}$，都有 $|\sigma$ $(x + iy|_{\sigma[\mathcal{R}]} = \sigma(\sqrt{x^2 + y^2})$，并赋予 $\mathbb{C}_\kappa$ 由 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$ 生成的拓扑。相应的拓扑域记作 $(\mathbb{C}_\kappa, |\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]})$。2. 在特殊情形 $\kappa = \aleph_0$ 下，我们将简写为 $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]})$，而不写作 $(\mathbb{C}_{\aleph_0}, |\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]})$（因为 $\mathbb{C}_{\aleph_0}$ 与 $\mathbb{C}$ 同构，而后者在同构意义下唯一确定 $\mathbb{C}$——定义 4.3）。3. 如果对于绝对值 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$，$z \in \mathbb{C}_\kappa$（尤其是 $z \in \mathbb{C}$）满足对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $0 \leq |z|_{\sigma[\mathcal{R}]} < 1/n$，我们就称其为无穷小。类似地，如果对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $|z|_{\sigma[\mathcal{R}]} \leq n$，则称 z 相对于 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$ 是有限的；如果对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $n < |z|_{\sigma[\mathcal{R}]}$，则称 z 相对于 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$ 是无限大的。

绝对值 $|\cdot|_{\mathcal{R}}$ 在 $\mathbb{C}_\kappa$ 上赋予从 $\sigma[\mathcal{R}]$上的序拓扑继承而来的乘积拓扑。此外，$|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$ 可用于在 $\mathbb{C}$中局部化无穷小量。

9.2 引理（相对于绝对值的无穷小）。$\mathbb{C}_\kappa$ 相对于 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$ 不含非零无穷小量，当且仅当 $\mathcal{R}$ 是阿基米德域；当且仅当 $\sigma[\mathcal{R}]$ 是阿基米德域；当且仅当 $\kappa = \aleph_0$。

证明。对于绝对值的值域，有 ran$(|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}) = \{x \in \sigma[\mathcal{R}] : x \geq 0\}$。因此，ran$(|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]})$不含正无穷小，当且仅当 $\sigma[\mathcal{R}]$不含非零无穷小量，当且仅当 $\sigma[\mathcal{R}]$ 是阿基米德域，当且仅当 $\mathcal{R}$ 是阿基米德域。最后，后者等价于 $\kappa = \aleph_0$，因为 card $(\mathbb{C}_\kappa) = \aleph_1 = \mathfrak{c} =$ card $(\mathcal{R})$（第 2 节）。

□

9.3 例子。我们逐一考察例 6.1 中的例子及其在第 8 节中的对应例子。

1. $\mathbb{C}$在特定情形下相对于 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$ 不含非零无穷小量（因此也不含无限大的元素）而言，即 $\mathcal{R}=\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R}=\mathbb{R}_{\alpha}$，其中 α 是一个超越实数（例 6.1）。

2. $(\mathbb{C},\ |\cdot|_{\sigma[\mathbb{R}]})$，通常简记为 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}(i)$，是在形如 $(\mathbb{C},\ |\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]})$ 且为巴拿赫代数的结构中，唯一的拓扑域。后者源于这样一个事实： $\mathbb{R}$ 因此，$\sigma[\mathbb{R}]$是戴德金完备的（上确界完备）。

3. 令 $\mathcal{R}$ 为例 6.1 中除域 $\mathcal{R}=\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R}=\mathbb{R}_{\alpha}$ （如上所述）以外的任意一个实闭域。则相对于 $|\cdot|_{\sigma[\mathcal{R}]}$, $\mathbb{C}$ 确实含有非零无穷小（因此也含有无穷大量）（例 6.1 中的域 $\mathcal{R}=\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R}=\mathbb{R}_{\alpha}$ 是仅有的阿基米德域）。

4. 令 ${}^{*}\mathbb{R}$ 为基数为 $\mathfrak{c}$的 $\mathbb{R}$ 的非标准扩张（例 6.1）。拓扑域 $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\sigma[{}^{*}\mathbb{R}]})$ 通常记作 ${}^{*}\mathbb{C}$，并限制 card $({}^{*}\mathbb{C})=\mathfrak{c}$ ；也简记为 ${}^{*}\mathbb{R}(i)$，其中 card $({}^{*}\mathbb{R})=\mathfrak{c}$。它是例 6.1 中唯一的 $\mathfrak{c}$- 饱和拓扑域，其含义是：相对于 $|\cdot|_{\sigma[{}^{*}\mathbb{R}]}$，$\mathbb{C}$中的任意嵌套开圆盘序列（更一般地，任意内集序列）都有非空交集（Lindstrøm [16], Loeb [17]）。更一般地，令 $\mathbb{C}_{\kappa}$ 为基数为 κ_{+} 的 κ-复数域（定义 8.1）。那么拓扑域 $(\mathbb{C}_{\kappa}, |\cdot|_{\sigma[{}^{*}\mathbb{R}]})$ 通常也记作 ${}^{*}\mathbb{C}$，并限制 card $({}^{*}\mathbb{C})=\kappa_{+}$；或简记为 ${}^{*}\mathbb{R}(i)$，其中 card $({}^{*}\mathbb{R})=\kappa_{+}$（注 8.5）。域 ${}^{*}\mathbb{C}=(\mathbb{C}_{\kappa}, |\cdot|_{\sigma[{}^{*}\mathbb{R}]})$ 是 κ_{+}-饱和的，其含义是：相对于 $|\cdot|_{\sigma[{}^{*}\mathbb{R}]}$， $\mathbb{C}_{\kappa}$ 中任意一个由基数为 κ 的开圆盘（更一般地，内集）组成且具有有限交性质的族，都有非空交集（Lindstrøm [16], Loeb [17]）。

5. 令 ${}^{\rho}\mathbb{R}$ 表示基数为 $\mathfrak{c}$ 的 Robinson 渐近数域（例 6.1）。拓扑域 $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\sigma[{}^{\rho}\mathbb{R}]})$ 通常记作 ${}^{\rho}\mathbb{C}$，并满足限制 card $({}^{\rho}\mathbb{C})=\mathfrak{c}$；等价地，也记作 ${}^{\rho}\mathbb{R}(i)$，其中 card $({}^{\rho}\mathbb{R})=\mathfrak{c}$。域 ${}^{\rho}\mathbb{C}$ 不是饱和的，但它是康托完备的，即 $\mathbb{C}$ 中相对于 $|\cdot|_{\sigma[{}^{\rho}\mathbb{R}]}$ 的任意嵌套闭圆盘序列的交集都非空（Todorov &Wolf [35]）。类似地，拓扑域 $(\mathbb{C}_{\kappa}, |\cdot|_{\sigma[{}^{\rho}\mathbb{R}]})$ 通常也记作 ${}^{\rho}\mathbb{C}$，并满足限制 card $({}^{\rho}\mathbb{C})=\kappa_{+}$；等价地，也记作 ${}^{\rho}\mathbb{R}(i)$,

其中 card($^{\rho}\mathbb{R}$) $= \kappa_{+}$。与前面一样， $^{\rho}\mathbb{C}$ 是康托完备的，但不是饱和的。

6. 我们已经知道，从纯粹的代数观点来看，在 card ($^{*}\mathbb{C}$) $=$ card ($^{\rho}\mathbb{C}$) $= \kappa_{+}$ 的情况下，有同构 $\mathbb{C}_{\kappa} \cong {}^{*}\mathbb{C} \cong {}^{\rho}\mathbb{C}$ 。特别是，在 card ($^{*}\mathbb{C}$) $=$ card ($^{\rho}\mathbb{C}$) $= \mathfrak{c}$ 的情况下，有 $\mathbb{C} \cong {}^{*}\mathbb{C} \cong {}^{\rho}\mathbb{C}$ 。与此相反，拓扑域 ($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[\mathbb{R}]}$)、($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]}$) 和 ($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[^{\rho}\mathbb{R}]}$) 两两不同胚。事实上，($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[\mathbb{R}]}$) 是戴德金完备的（上确界完备的），而另外两个则不是（因为它们相对于各自的绝对值都包含非零无穷小量）。另一方面，后两个域也不同胚，因为 ($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]}$) 是饱和的，而 ($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[^{\rho}\mathbb{R}]}$) 则不是饱和的。同样，拓扑域 ($\mathbb{C}_{\kappa}$, $|\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]}$) 和 ($\mathbb{C}_{\kappa}$, $|\cdot|_{\sigma[^{\rho}\mathbb{R}]}$) 也不同胚，因为前者是饱和的，而后者不是。这些拓扑域在复分析和泛函分析中的表现截然不同，这正是下一条注的主题。

9.4 注 (标准分析与非标准分析)。 1. 众所周知，拓扑域 ($\mathbb{C}$, $|\cdot|_{\sigma[\mathbb{R}]}$) 是（标准）复分析与泛函分析的通用框架。它之所以成功，是因为 $\mathbb{R}$是戴德金完备的，因此， $\mathbb{C}$ 是一个巴拿赫代数。

2. 域 $^{*}\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \ |\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]})$ 及其“更大”的对应物 $^{*}\mathbb{C} = (\mathbb{C}_{\kappa}, \ |\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]})$ 是非标准复分析与非标准泛函分析的框架（Davis [7], Lindstrøm [16], Loeb [17]）。根据转移原理（Davis [7], 第1章，定理7.3），标准分析中的每个结果（用域 $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \ |\cdot|_{\sigma[\mathbb{R}]})$ 的术语表述）都可以用域 $^{*}\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \ |\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]})$ 或 $^{*}\mathbb{C} = (\mathbb{C}_{\kappa}, \ |\cdot|_{\sigma[^{*}\mathbb{R}]})$ 的术语等价地表述，即用非标准分析的语言表述。此外，非标准版本的陈述更简单，因为与其标准对应物相比，它们涉及的量词更少（Cavalcante [4]）。下面是一个典型例子：设 c 是 $D \subseteq \mathbb{C}$ 的一个聚点，且 $f: \ D \mapsto \mathbb{C}$是一个复值函数。设$L \in \mathbb{C}$。那么下列命题等价：

$$(\forall dx \in \mathcal{I}(^{*}\mathbb{R}))(c + dx \in {}^{*}D \Rightarrow {}^{*}f(c + dx) - L \in \mathcal{I}(^{*}\mathbb{R})), \quad (3)$$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{+})(\exists \gamma \in \mathbb{R}_{+})(\forall z \in D)(|z - c| < \gamma \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon), \quad (4)$$

$$\lim_{x \mapsto c} f(z) = L. \quad (5)$$

这里， $\mathcal{I}(^*\mathbb{R})$表示 $^*\mathbb{R}$ 中的无穷小量集合，而 $^*D$ 和 $^*f$ 分别是 D 和 f的非标准扩张。

3. 对微积分史感兴趣的读者或许会注意到，（3）非常像旧时 Leibniz/Euler 无穷小微积分中的一个收敛判据。只要去掉 $^*\mathbb{R}, ^*D$ 和 f 前面的星号，并用 17 至 19 世纪数学的语言表述这一命题，这一点就会尤其明显。微积分最初是以无穷小量的形式创立的，只需一个量词（而非三个不可交换的量词），对此我们不应感到惊讶。

4. 一个较近的例子展示了如何利用非标准方法的简洁性：Bernstein–Robinson *[3]* 对希尔伯特空间上多项式紧算子的不变子空间问题给出了开放问题的解答（相关论述另见 Davis [7], 第 5 章第 3 节）。标准方法的解答则在若干年后才出现（Lomonosov [18]）。

5. 非标准方法高效性的另一个例子，来自最近对局部群的希尔伯特第五问题的解决（Gold-bring [9]）。据我们所知，这一问题迄今尚无标准方法的解答。与前一个例子一样，减少量词的数量（相较于早先尝试用标准方法解决同一问题时所用的量词数量）起到了决定性作用。

6. 正如我们已经指出的，标准分析学中的每个命题，在非标准分析中都有一个对应的命题。然而，反过来却不总是成立：非标准分析中有些结果在标准分析中没有对应结果。例如，在 Colombeau 型广义函数代数中，狄拉克δ泛函会表现为逐点函数 $\delta : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{C}$（Vernaeve [42]）。这在标准分析学中是不可能的，因为 δ 在 $^*\mathbb{R}$中的某些无穷小数处取无限大的值。下文讨论的非标准渐近分析中也有类似结果。回顾一下，若结合交换微分代数 G 包含 Schwartz 分布 $\mathcal{D}'$ 的一个副本（作为微分向量子空间），且 G 中的乘积在 $\mathcal{D}'$ 中C^∞-函数的环上退化为通常的逐点乘积（Colombeau [6]），则称其为*Colombeau* 型广义函数代数。每个这样的代数都解决了

Schwartz 分布的乘法问题，因为 $\mathcal{D}'$ 本身不具有结合乘法（Schwartz [31]）。

7. 域 ${}^{\rho}\mathbb{C} = (\mathbb{C},\ |\cdot|_{\sigma[\rho\mathbb{R}]})$ 及其“更大”的对应域 ${}^{\rho}\mathbb{C} = (\mathbb{C}_{\kappa},\ |\cdot|_{\sigma[\rho\mathbb{R}]})$ 构成了非标准渐近分析 （Robinson [30],Lightstone 与 Robinson [15]）的框架。如前所述，域 ${}^{\rho}\mathbb{C}$曾被用作*Colombeau* 型广义函数代数的标量域 （Oberguggenberger 与 Todorov [24], Todorov 与 Vernaeve [37], Todorov [38]-[41]）。

9.5 注 （总结）。 我们证明，即使是熟悉的（且广受欢迎的）复数域 $\mathbb{C}$，也包含非零无穷小量。我们试图让读者相信，无穷小量不仅是现代数学中不可避免的，而且实际上非常有用：与标准数学相比，它们能够通过减少量词的数量来简化数学推理；正如很久以前，无穷小量在微积分的创立过程中取得了惊人的成功（或许也是不可或缺的）。非标准方法的简洁性在无穷小量充足时尤为明显——这就是所谓的饱和。

致谢：作者感谢 Ivan Penkov 在准备稿件期间就这一主题进行了许多富有成果的讨论。

利益冲突声明：作者声明，据其所知，不存在可能影响本文工作的经济利益冲突或个人关系。

资金声明：作者声明，本文的研究工作未获得任何组织的资助，包括拨款。未获得任何资金支持。

参考文献

[1] Amir Alexander，《无穷小量：一种危险的数学理论如何塑造现代世界》，《科学美国人》/Farrar, Straus and Giroux，纽约，第一版，2014年。

[2] E. Artin和E.Schreier，实数域的代数构造¨，汉堡大学数学研讨班论文集5（1927年），第85-99页。

[3] Allen Bernstein和Abraham Robinson，*K. T. Smith*和*P. R. Halmos*不变子空间问题的解，《太平洋数学杂志》16:3（1966年）421-431。[4]Ray Cavalcante，通过无穷小量减少实分析中的量词数量，硕士论文，数学系，加利福尼亚州立理工大学，圣路易斯-奥比斯波，2007年（http://arxiv.org/abs/0809.4814v1）。[5] C. C. Chang和H. Jerome Keisler，模型论，《逻辑与数学基础研究》第73卷，爱思唯尔，阿姆斯特丹，1998年。[6] J. F. Colombeau，新的广义函数与分布的乘法，北荷兰出版社-阿姆斯特丹-纽约-牛津，数学研究84，1984年。[7] Martin Davis，应用非标准分析，多佛出版公司，米尼奥拉，纽约，2005年（原出版于1977年）。[8] P. Erd¨os、L. Gillman和M. Henriksen，实闭域的同构定理，《数学年刊》第61卷第3期，1955年5月，第542-560页。[9] IsaacGoldbring，局部群的希尔伯特第五问题，《数学年刊》第二辑，第172卷第2期，2010年9月。.[10] H. Hahn，关于非阿基米德序¨系统，K. Akad. Wiss. 会议录116 （1907年），第601-655页。[11]James F. Hall和Todor D. Todorov，有序域、从数学中清除无穷小量以及无穷小微积分的严谨性，《保加利亚物理学杂志》第42卷（2015年），99-127页——专刊献给Christo Yankov Christov教授诞辰一百周年（参见 http://arxiv.org/abs/1509.03798）。[12] Thomas W. Hunderford，代数，《数学研究生教材》第73卷，施普林格出版社，2003年。[13] S. Lang，代数，艾迪生-韦斯利，第三版，1071年。

[14]T. Levi-Civita，《关于当前无穷大与无穷小作为分析元素》（1892-1893），《数学著作》，第 1 卷，博洛尼亚（1954），第 1–39 页。[15] A. H. Lightstone 和 A. Robinson，《非阿基米德域与渐近展开》，北荷兰出版社-阿姆斯特丹-纽约-牛津，第 13 卷，1975年。[16] T. Lindstrøm，《非标准分析入门》。载于：Cutland N（编）《非标准分析及其应用》。剑桥大学出版社，伦敦，1988年，第 1-105 页。[17] Peter A. Loeb 和 Manfred Wolff（编），《面向数学工作者的非标准分析》，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特/波士顿/伦敦，2000年。[18]V. I. Lomonosov，《与完全连续算子相交换的算子族的不变子空间》，《泛函分析及其应用》，第 7 卷，第 3 期，第 213-214 页（https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01080698）。[19] W. A. J. Luxemburg，《非标准分析：*A. Robinson* 关于无穷小与无穷大数理论的讲义》，加州理工学院，美国加利福尼亚州帕萨迪纳，1973年（©W. A. J. Luxemburg 1962）。[20] W. A. J. Luxemburg，《单子的一般理论》，载于 Luxemburg（编），《模型论在代数、分析学与概率论中的应用》，第 18-86 页，Holt，纽约，1969年。[21] W. A. J. Luxemburg，《关于 *A. Robinson* 引入的一类赋值域》，《以色列数学杂志》**25**（1976），第 189–201 页。[22] J.S. Milne，《域与伽罗瓦理论》，PDF（版本 5.10，2022年9月），（https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf）。[23] 艾萨克·牛顿（1736年）[1671]，《流数法与无穷级数；及其在曲线几何中的应用》，Colson, John 译，伦敦：Henry Woodfall，第 378 页（由拉丁文译出）（https://archive.org/details/methodoffluxions00newt）。

[24]M. Oberguggenberger 和 T. Todorov，《将 *Schwartz*分布嵌入渐近函数代数》，《国际数学与数学科学杂志》，第 21 卷，第 3 期（1998年），第417-428页。[25] V. Pestov，《关于 *A. Robinson* 创造的赋值域及与之相关的某些结构》，《以色列数学杂志》**74** （1991），第65-79页。[26] A. Prestel，《形式实域讲义》，《数学讲义》1093，Springer，纽约，1984年。[27]Victor Alexandre Puiseux（1850），《代数函数研究》´《》（PDF）。《纯粹与应用数学杂志》15：365-480。[28] Victor Alexandre Puiseux（1851）。《代数函数新研究》´《》（PDF）。《纯粹与应用数学杂志》16：228-240。[29] A. Robinson，《非标准分析》，North Holland，阿姆斯特丹，1966年。[30] A. Robinson，《某些非阿基米德域上的函数论》，《美国数学月刊》80（6），第二部分：数学基础论文（1973），第 87–109 页。[31] L. Schwartz，《论分布乘法的不可能性》´《》，《巴黎科学院报告》，巴黎 239（1954），第 847-848 页。[32] Khodr Shamseddine，Martin Berz《*Levi-Civita*域上的分析：简要概述》，《当代数学》，第 508 卷，第 215?237 页（2010）。[33]Ernst Steinitz，《域的代数理论》¨《》《纯粹与应用数学杂志》137（1910年）：167-309。（http://eudml.org/doc/149323），（doi:10.1515/crll.1910.137.167）[34] K. D. Stroyan 和 W. A. J. Luxemburg，《无穷小理论导论》，Academic Press，纽约，1976年。[35]T. Todorov 和 R. Wolf，《*A. Robinson* 渐近数的 *Hahn*域表示》，载于《非线性代数分析及其应用》，2000年广义函数国际会议（ICGF）论文集，A. Delcroix、M. Hasler、J.- A. Marti 和 V.Valmorin 编，Cambridge Scientific Publishers，剑桥科滕纳姆，2004年，第357-374 页（可见于 ArxivMathematics：[http://arxiv.org/abs/math/0601722]）。

[36] Todor D. Todorov，讲义：*J.F. Colombeau*广义函数理论的非标准方法，奥地利维也纳大学，2006年5月，（可从 ArxivMathematics 获取：http://arxiv.org/abs/1010.3482）。[37] Todor Todorov 和 Hans Vernaeve，广义函数的完整代数与非标准渐近分析，载于：*Logic and Analysis*，Springer，第1卷，第3期，2008年，第205-234页。[38] Todor D. Todorov，广义函数非线性理论的公理化方法与拉普拉斯变换的一致性，载于：*IntegralTransforms and Special Functions*，第22卷，第9期，2011年9月，第695-708页。[39] Todor D. Todorov，*Colombeau*理论的代数方法，载于：*SanPaulo Journal of Mathematical Sciences*，**7**（2013），第2期，第127-142页[40] Todor D. Todorov，广义函数代数中的稳态解：闪电、避雷针与超导性，Novi Sad Journal of Mathematics，第45卷，第1期，2015年。[41] Todor D. Todorov，广义函数 *Egorov*代数的非标准版本。载于：Cardona, D.、Restrepo, J.、Ruzhansky, M.（编）Extended Abstracts 2021/2022。GMC 2021。数学趋势，第3卷。Birkh¨auser，Cham，第209-217页。[42] Hans Vernaeve，分布到代数中的最优嵌入，爱丁堡数学学会会刊（2003）**46**，第373-378页。[43] B. L. van Der Waerden代数，第一卷，Ungar Publishing，纽约，第三次印刷，1970年。