arXiv:2603.22351v1 [math.HO] 22 Mar 2026

点周围闭合折线的绕数

Э. 阿尔金、A. 米罗什尼科夫、A. 斯科片科夫

目录

1. 引言 1 2. 绕数：定义与讨论 1 3. 绕数的基本性质 4 4. 绕数与交点 6 参考文献 8

1. 引言

绕数是指 平面上的有向闭合折线 l 围绕一个不在折线上的点 O 旋转时的圈数：向量的起点位于点 O，终点沿折线 l 按给定方向移动。本文介绍绕数的直接、初等且严格的定义（§2）及其基本性质（§3、§4）。这个定义比一些教科书中给出的定义更简单。例如，[Wn] 以及著名著作 [Ro15] 中，绕数是通过更复杂的提升／积分概念来定义的。而要论证提升／积分的存在性，则必须使用本文所给出的初等定义。

我们将展示如何轻松计算绕数：利用可加性（命题 3.3）或计算交点（命题 4.2.a 和 4.4.a）处的（符号）；这些是数学分析中重要的 斯托克斯定理的离散版本。

我们将用绕数的语言给出博苏克-乌拉姆定理低维情形的初等表述（定理 3.1）。该定理因其在拓扑学、组合学和数理经济学中的应用而闻名 [Ma03]。

绕数可以推广为映射的度，这是数学中的基本不变量之一 [Ro15、Sk20]。关于绕数的应用，例如参见 [Ro15、AS、AMS]。关于绕数及相关概念的更多内容，参见 [Wn、Va81、To84、Ta88], [KK18，定理2], [Sk18，§2]。

阅读本文的大部分内容不需要预备知识（超出中学课程范围），但需要具备数学素养。

2. 绕数：定义与讨论

下文讨论的所有点、闭折线和折线都位于平面上。

设 $O, A, B, A_1, \dots, A_m$ 为点。

假设 $A \neq O$ 和 $B \neq O$（但也可能是 $A = B$）。有向角（或定向角）$\angle AOB$ 是指数 $t \in (-\pi, \pi]$，使得向量 $\overrightarrow{OB}$ 与将 $\overrightarrow{OA}$ 逆时针旋转 t 角后得到的向量同向。（如果您能够

本文基于城市锦标赛夏季会议（https://turgor.ru/lktg/index.php）以及莫斯科物理技术学院的《拓扑学导论（拓扑中的离散结构与算法）》课程的材料编写（该课程由 И. Жильцов 和 А. Рухович 共同主讲，https://old.mccme.ru//circles//oim/home/combtop13.htm#fivt）。感谢 Е. Бордачева（Дженжер）和 О. Никитенко 与我们共同整理这些材料。

将平面上的向量视为复数，那么可以将这个条件改写为 $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$。）

我们将不加证明地使用以下命题（与公理相近）：

命题 2.1. 对于平面上的任意点 A, B, C，以及一个不在 AB, BC, CA线段并集上的点 O，

- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = \pm 2\pi$，如果 O 位于点 A, B, C的凸包内，
- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 0$，否则。

注意，如果在有向角的定义中取 $t \in [0, 2\pi)$，那么类似的命题将不成立。

闭折线是一个有序点集（点不一定互不相同）。[1] 本文中，我们有时用$(A_1, \ldots, A_n)$ 表示有序点集 $A_1 \ldots A_n$（允许 $n = 1$）。

严格来说，闭折线绕不在其上的点 O 的**绕数** $l = A_1 \ldots A_m$ 定义为

$$w(l) = w(l, O) := \frac{\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1}{2\pi}.$$

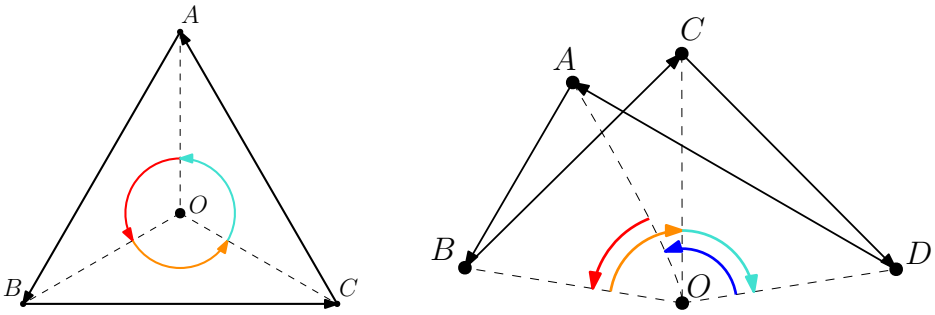

图 2.1. $w(ABC) = +1$ 和 $w(ABCD) = 0$

例如，在图 2.1 $w(ABC) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1$ 和2

.

$$\pi \cdot w(ABCD) = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle BOD + \angle DOB = 0$$

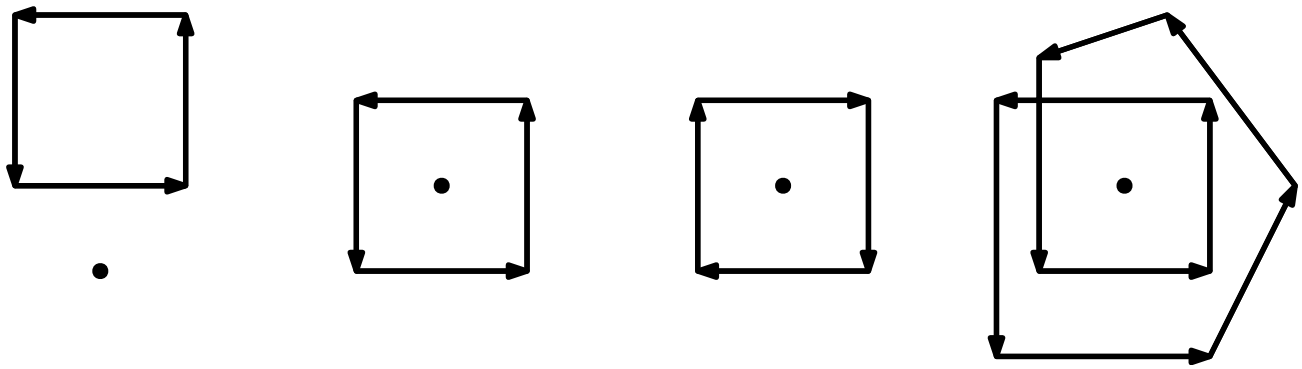

图 2.2. 绕数分别为 0，$+1$，-1，$+2$

[1] 因此，闭折线（此处的定义）不是平面的子集。尽管如此，有时我们将闭折线 $A_1 \ldots A_m$ 视为若干线段的并集 A_iA_{i+1}，例如，我们会说“折线不经过某一点”。

命题 2.2. 绕数
(a) 任意凸多边形的曲线；*(b)* 任意一条不自交的闭折线，绕外部（内部）的任意一点，其绕数等于 0 (±1)。见图 2.2。

（a）的证明。 用 Ω 表示给定的凸多边形，用∂Ω 表示它的曲线。

如果点 O 位于 Ω 外部，那么过 O 作 Ω 的两条支撑直线。取两点 A、B，它们分别是这些支撑直线与多边形曲线 ∂Ω 的交点。于是有$w(\partial\Omega) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOA) = 0$。

如果点 O 位于 Ω 内，则画一个以O为中心的正三角形 ABC。取射线 OA、OB、OC 与 ∂Ω 的三个交点 A'、B'、C'。它们将曲线∂Ω 分成三条折线。于是有

$$w(\partial\Omega) = \frac{1}{2\pi}(\angle A'OB' + \angle B'OC' + \angle C'OA') = \frac{3}{2\pi}\angle A'OB' = \frac{3}{2\pi}\angle AOB = \pm 1.$$

□

根据讲述方式的不同，(b) 点既可以是若尔当定理 [Sk20, §14],的推论，也可以是其证明中的一个引理。

设 ABC 是一个三角形， O 是其内部一点。那么 $w(ABCABC) = 2w(ABC) = \pm 2$。这个例子表明，对于线段并集相同的不同折线，其绕数可能不同。不仅如此，还存在一条闭折线 l，使得对于任意点 $O \in \mathbb{R}^2 - l$，都有 $w(l) = 0$。例如，对于任意点 A、B 和 C，折线 A、AB、$ABCB$ 都是这样的例子。

例 2.3。 对于任意整数 n 和点 O，存在一条闭折线，其绕 O 的绕数等于 n。

构造。 如果 $n = 0$，则一个例子是由一个点组成的闭折线。如果 $n \neq 0$，则取正三角形 ABC，其中心为 O，当 $n > 0$ 时取逆时针方向，否则取顺时针方向。定义闭折线 l 为 $l := \underbrace{ABC\ldots ABC}_{n| \text{ 次}}$。根据命题 2.2.a，有 $w(l) = |n| \cdot w(ABC) = n$。 □

命题 2.4。 绕数 $w(A_1 \ldots A_m)$ 是一个整数。

证明。 对于 $j = 1, \ldots, m$，记 $t_j := \angle A_j O A_{j+1}$，其中 $A_{m+1} = A_1$。于是

$$\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow e^{it_m}\overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1})}\overrightarrow{OA_{m-1}} \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1}+\cdots+t_1)}\overrightarrow{OA_1}.$$

因此，$(t_m + t_{m-1} + \cdots + t_1)/2\pi$ 是一个整数。 □

另一种证明的提示： 鉴于命题 2.1，

$$\angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1 \equiv \angle A_{m-1}OA_1 \mod 2\pi.$$

命题 2.4 的另一种证明由命题 2.2.a 和 3.5给出。

注 2.5 （推广）。 (a) 对闭合绕数 $w(l, O)$曲线 l定义连续 。后者定义为从圆周 $S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$到去掉一点的平面的连续映射 l :。由于映射 l 一致连续，因此存在整数 $m > 0$，使得对于圆周 S^1 划分为 m 等长圆弧的任意划分，以及同一圆弧上的点 x, y，点 $l(x)$和 $l(y)$都不关于 O对称。对于 $k = 1, \ldots, m$，将第 k 段圆弧的端点记为 A_k。定义

$$2\pi \cdot w(l, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1.$$

这个定义是正确的（例如，参见 [Sk20，§3]）。

(b) 将整数 *1*-循环 $w(C,\ O)$ 绕点 [Sk，§4] C 的转数 O定义为数；该点不属于 C中的任何线段

$$w(C,O)=\sum_{AB\in C}\angle AOB.$$

类似于命题 2.4，绕数 $w(C,\ O)$ 是整数。还有哪些命题可以推广到 1-循环?

3. Простейшие свойства числа оборотов

定理 3.1 （博尔苏克–乌拉姆）。 设闭折线 $A_1\dots A_{2k}$ 不经过点 O，且关于 O 对称（即对于每个$j=1$，……，k，O 是线段 A_jA_{k+j} 的线段中点）。则折线绕点 O 的绕数为奇数。

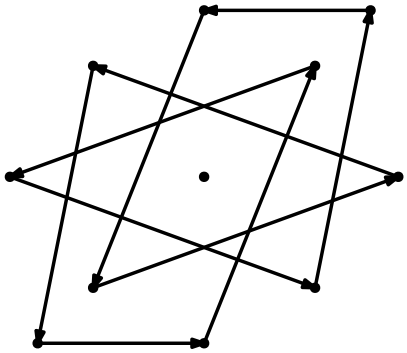

Рис. 3.1. 关于点 O对称的闭折线 l；$w\ (l)\ =3$

以下记号和结果将会很有用。

折线 是指一个有序点集（不必互不相同）。[2]

设 $l=A_1\dots A_m$ 是一条不经过点 O 的折线。我们用公式定义实数 $w'(l)\ =w'(l,O)$

$$2\pi\cdot w'(l)=2\pi\cdot w'(l,O):=\angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3+\ldots+\angle A_{m-1}OA_m.$$

显然，

- $w'(A_1\dots A_mA_1)\ =w(A_1\dots A_m)$;

对每个 $j=1$，…，m，- $w'(A_1\dots A_m)\ =w'(A_1\dots A_j)\ +w'(A_j\dots A_m)$;

- 如果点 A_2，…，A_{m-1} 位于角 $\angle A_1OA_m$ 内，那么 $2\pi w'(A_1\dots A_m)\ =\angle A_1OA_m$。

命题 3.2。 对于某个整数 n，有 $\angle A_1OA_m=2\pi w'(A_1\dots A_m)\ +2\pi n$。

证明。 显然，$2\pi w(A_1\dots A_m)\ =2\pi w'(A_1\dots A_m)\ +\angle A_mOA_1$。根据命题 2.4即可得到所需结论。 □

定理 *3.1* 的证明。 由于对称性，$w'(A_1\dots A_{k+1})\ =w'(A_{k+1}\dots A_{2k}A_1)$。于是

$$w(A_1\dots A_{2k})=w'(A_1\dots A_{2k}A_1)=w'(A_1\dots A_{k+1})+w'(A_{k+1}\dots A_{2k}A_1)=$$
$$=2w'(A_1\dots A_{k+1})\overset{(1)}{=}2\left(\frac{\angle A_1OA_{k+1}}{2\pi}+n\right)=1+2n$$

对于某个整数 n。这里等式 (1)由命题 3.2得出。 □

[2]在数学中，有时不同的事物会有相同的形式化表示——这时，区别就体现在我们如何处理这些事物上。例如，许多不同的事物都可以用“集合”这一概念来形式化。因此，为了更清楚地说明对这些形式上相同的对象所进行的运算，我们会用不同的名称来称呼它们。例如，在本文中，有序点集既称为折线，也称为闭折线。再如，为了更清楚地说明乘法运算，我们把“数列”称为“该数列的生成函数”。

将由折线 l 按相反顺序遍历得到的折线记为 l^{-1}。显然，对于任意点 $O \notin l$，$w'(l) = -w'(l^{-1})$。

折线的拼接 $l_1 = A_1 \dots A_m C$ 与 $l_2 = C B_1 \dots B_k$ 称为折线

$$l_1 l_2 := A_1 \dots A_m C B_1 \dots B_k.$$

闭折线的拼接 $l_1 = A_1 \dots A_m C$ 与 $l_2 = B_1 \dots B_k C$ 称为闭折线

$$l_1 l_2 := A_1 \dots A_m C B_1 \dots B_k C.$$

用这些记号表示

$$w'(l_1 l_2) = w'(l_1) + w'(l_2)$$

对于任意点 O 和折线 l_1, l_2，它们不经过 O。这个显然的等式已在定理 3.1 的证明中使用过。

命题 3.3。 设 O、A、B 是三个两两不同的点。设 l_1、l_2、l_3 是连接点 A 与点 B 且不经过点 O 的折线。那么$w(l_1 l_2^{-1}) + w(l_2 l_3^{-1}) = w(l_1 l_3^{-1})$。

证明。有

$$w(l_1 l_2^{-1}) + w(l_2 l_3^{-1}) = w'(l_1) + w'(l_2^{-1}) + w'(l_2) + w'(l_3^{-1}) = w'(l_1) + w'(l_3^{-1}) = w(l_1 l_3^{-1}).$$

□

例 3.4 (参见 [AMS，§2.A]中的构造)。设 O，A，B 是三个两两不同的点。对于任意三个整数 n_1，n_2，n_3，只要 $n_1 + n_2 = n_3$，就存在三条折线 l_1，l_2，l_3，连接点 A 与点 B，且不经过点 O，并满足

$$w(l_1 l_2^{-1}) = n_1, \qquad w(l_2 l_3^{-1}) = n_2 \quad и \quad w(l_1 l_3^{-1}) = n_3.$$

命题 3.5. 设闭折线 $A_1 \dots A_m$ 不经过点 O。设点 P 满足：O 不在任何线段 $PA_1, \dots, PA_m$ 上。则

$$w(A_1 \dots A_m) = \sum_{i=1}^{m} w(PA_i A_{i+1}), \quad где \quad A_{m+1} = A_1.$$

证明。记 $a_i := A_i A_{i+1}$ 并且 $p_i = PA_i$ 对每个 $i = 1, \dots, m$。于是，反复应用命题 3.3可得

$$w(A_1 \dots A_m) = w(a_1 \dots a_m) = \sum_{i=1}^{m} w(p_{i-1} a_i p_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} w(PA_i A_{i+1}), \quad \text{где} \quad p_0 = p_m.$$

□

命题 3.6。 设 $A_0 A_1 A_2$ 是一个正三角形，点 O 是它的中心。对于$j = 0$，1，2，用 l_j 表示一条不与射线 OA_j 相交且连接 A_{j+1} 与 A_{j+2} 的折线，其中编号按模 *3* 计算。那么 $w(l_0 l_1 l_2) = \pm 1$。

证明。可以认为三角形的顶点是按逆时针方向编号的。根据命题3.2，有 $w'(l_0) = \frac{1}{3} + k$，其中 k 是某个整数。在下一段中，我们将证明 $k = 0$。等式 $w'(l_1) = w'(l_2) = \frac{1}{3}$ 的证明类似。那么 $w(l_0 l_1 l_2) = w'(l_0) + w'(l_1) + w'(l_2) = 1$。

用 $B_1 \dots B_m$ 表示折线 l_0 上依次相邻的顶点。对于 $j = 1, \dots, m-1$，令 $t_j := \angle B_j O B_{j+1} \in (-\pi, \pi)$。若存在 $j = 1, \dots, m-1$，使得 $T_j := t_1 + \dots + t_j \notin \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$，那么对于其中最小的 j，线段 $B_j B_{j+1}$ 将与射线 OA_0 相交。因此，对于任意 $j = 1, \dots, m-1$，都有 $T_j \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$。特别地，$T_{m-1} \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$。同时，$T_{m-1} = 2\pi w'(l_0)$ 对某个整数 k 成立。因此，$k = 0$。□

其他证明见第 §4 节及 [AS，§3]节末。

4. 转数与交点

命题 4.1. 取点 P_0 和 P_1，用一条不与闭折线 l相交的折线连接。则 $w(l, P_0) = w(l, P_1)$。

提示： 使用 连续性论证 或由引理4.5.a.

如果任意三点不共线，且连接这些点的任意三条线段没有公共内点，那么这些点就处于一般位置。本节后续内容中，所有考察的折线 的顶点，以及所有折线对 和的顶点，两两不同，并且（除非另有说明）处于一般位置。

命题 4.2。 取一条闭折线和一条非闭折线 l 和 p。用P_0 和 P_1 表示折线 p的起点和终点。则

(a) $w(l, P_1) - w(l, P_0) \equiv |l \cap p|$ 模 2。
(b) $w(l, P_1) \equiv |l \cap p|$ 模 2，如果点 P_0 位于距离折线 l足够远的位置（例如，在折线 l的凸包之外）。

证明概要。 （b）由（a）得出，因为 $w(l, P_0) = 0$。 （a）如果 p不与 l相交，那么根据命题 4.1 可得 $w(l, P_1) - w(l, P_0) = 0 = |l \cap p|$。
否则，可以认为 p是一条线段，它与 $l = A_1A_2 \dots A_m$相交于唯一点，且该点属于线段 A_1A_2。选取点 X，使得 P_0 位于三角形 A_1XA_2内部。于是 P_1 位于三角形 A_1XA_2之外。用公式 $l' := A_1XA_2 \dots A_m$定义闭折线 l'。有

$$w(l, P_1) = w(l, P_1) + w(A_1XA_2, P_1) = w(l', P_1) \overset{(1)}{=} w(l', P_0) = w(l, P_0) + w(A_1XA_2, P_0) = w(l, P_0) \pm 1$$

根据命题 4.1，等式（1）在此成立。
另一种方法： 可以应用引理 4.5.b（甚至可以使用其模 2 版本）。 □

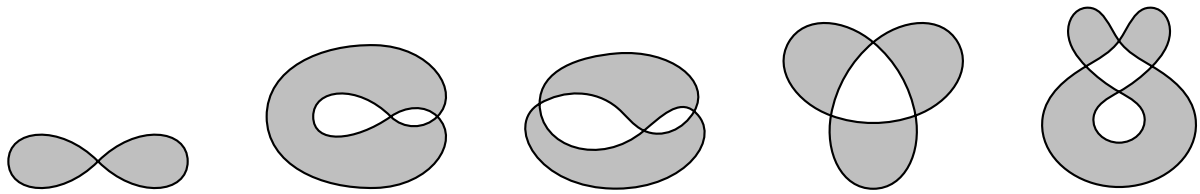

图 4.1. 补集和内部的模 2 棋盘式着色

平面的任意一个（开）子集都可分解为 连通分支，使得同一分支中的任意两点都可以用一条位于该子集内的折线连接，而来自不同分支的任意两点则不能这样连接。闭折线 $\mathbb{R}^2 - l$ 的补集 l 允许进行“棋盘式着色”：沿折线的某条线段相邻的补集区域被涂成不同的颜色，参见图 4.1 [Sk18，命题 2.1。1] 闭折线的模 *2* 内部 l 定义为棋盘式着色中黑色区域的并集（规定“无穷”区域为白色）。下面给出一个不使用棋盘式着色的等价直接定义。 模 *2* 内部定义为所有点 $X \in \mathbb{R}^2 - l$的集合，其中存在一条折线 p，

- 连接点 X 与一个距离 l足够远的点，
- 与 l 相交于奇数个点，并且
  - 使得折线 l 和 p 的所有顶点两两不同，且除 X外均处于一般位置。

这个定义的正确性可由偶数引理推出[Sk18，引理 1.3.2.b]：如果两条闭折线的顶点两两不同且处于一般位置，那么这两条折线相交于偶数个点。（这个引理也是命题4.2.a 对于 $P_0 = P_1$ 的一个特例。）

命题 4.3（由命题4.2.b 推出）。点 O 位于闭折线 l 的模 *2* 内部，当且仅当 w（l）为奇数。

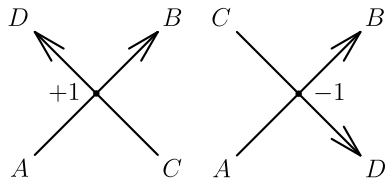

图 4.2. 交点的符号

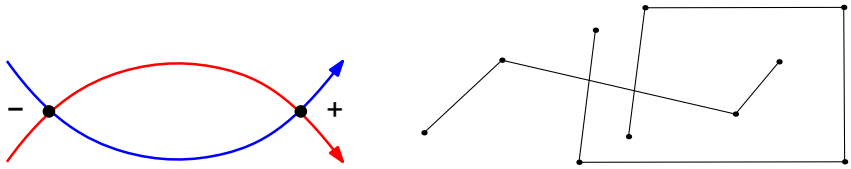

图 4.3. 平面上相交于偶数个点的两条折线：交点符号之和左图为零，右图不为零

设点 A、B、C、D 中任意三点都不在同一直线上。**将有向线段** $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的交点记为 $+1$，若沿交点绕行时 ABC 为顺时针方向，则其符号为 -1，否则为 $+1$（图 4.2）。对于折线 l 和 p，用 $l \cdot p$ 表示它们交点符号之和（图 4.3）。

命题 4.4。取闭折线和非闭折线 l 和 p。用 P_0 和 P_1 表示折线 p 的起点和终点。那么

(a) $w(l, P_1) - w(l, P_0) = l \cdot p$。***(b)*** $w(l, P_1) = l \cdot p$，如果点 P_0 距离折线 l 足够远。

命题 4.4 的证明与命题 4.2 类似，或者可由引理 4.5.b.

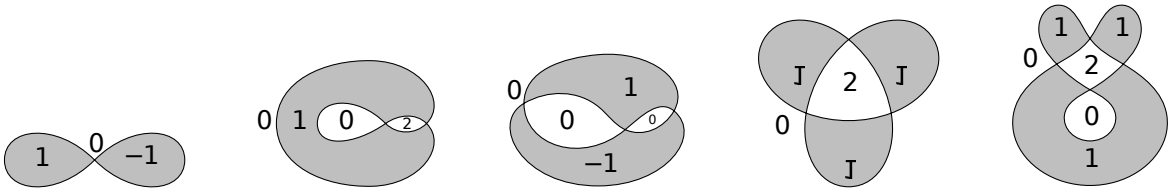

图 4.4. 补集的“着色”，依据绕数（至多相差折线方向的改变）

取闭折线 l (图 4.4)。根据命题 4.1，补集 $\mathbb{R}^2 - l$ 同一连通分支内各点的绕数相同。根据命题 4.4.a，沿某一线段相邻的连通分支，其绕数相差 ± 1。将补集 $\mathbb{R}^2 - l$ 用整数进行这样的“着色”，称为 莫比乌斯-亚历山大着色。对于折线 $A \ldots B$ 和 $C \ldots D$，记作

$$\partial(A \ldots B \times C \ldots D) := w'(A \ldots B, D) - w'(C \ldots D, B) - w'(A \ldots B, C) + w'(C \ldots D, A).$$

当每条折线的任一端点都不在另一条折线的线段并集上时，这个绕数有定义。（将折线视为分段线性映射 $l, p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$。那么，$\partial(l \times p)$ 就是点 (x, y) 沿着正方形 $[0,1]^2$ 的边界逆时针移动一周时，向量 $l(x) - p(y)$ 的绕数。）

对于图 l、p 中的折线 4.3 左侧和右侧的 $\partial(l \times p)$ 分别等于 0 和 ± 2（请验证！）。

引理 4.5. *(a)* 对于任意两条不相交的折线 l 和 p，有 $\partial(l \times p) = 0$。*(b)* 对于任意两条折线 l 和 p，有 $\partial(l \times p) = l \cdot p$。

证明概要。(a) 如果 $l = AB$ 和 $p = CD$，那么引理成立，因为$\angle ADB + \angle DBC + \angle BCA + \angle CAD = 0$ 对于任意不相交的线段 AB 和 CD。（只需使这些角的和落在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内。）

将一般情形归结为已讨论的情形。对于任意折线 l_1, l_2, p，有

$$\partial(l_1 l_2 \times p) = \partial(l_1 \times p) + \partial(l_2 \times p) \quad \text{и} \quad \partial(p \times l_1 l_2) = \partial(p \times l_1) + \partial(p \times l_2).$$

因此

$$\partial(l \times p) = \sum_{\substack{EF \text{ — отрезок ломаной } l \\ GH \text{ — отрезок ломаной } p}} \partial(EF \times GH) = 0.$$

(b) 同 (a) 中第 (a) 点。 □

利用命题 *3.6* 证明命题 *4.1*。(根据 A. Абзалилов 的文本编辑而成。)定义折线 a_j ：$= A_{j+1}A_{j+2}$ 以及闭折线m_j ：$= l_j a_j^{-1}$。于是

$$w(l_0 l_1 l_2) \overset{(1)}{=} w(m_0) + w(m_1) + w(m_2) + w(a_0 a_1 a_2) \overset{(2)}{=} w(A_0 A_1 A_2) = \pm 1 \quad \text{где}$$

- 等式 (1) 是对命题的反复应用 3.3;
- 等式 (2) 可由等式 $w(m_0) = w(m_1) = w(m_2) = 0$推出，这些等式将在下一段中证明。

任取 $j = 0, 1, 2$。在射线 OA_j 上存在一点 P_j 位于折线 m_j的凸包之外。因此 $w(m_j, P_j) = 0$。线段 OP_j与折线 m_j不相交。因此，$w(m_j) = 0$ 根据命题 4.1。 □

参考文献

[AMS] Э. Алкин、A. Мирошников、A. Скопенков，《图嵌入平面的近似不变量》，arXiv:2410.09860v2.[AS] Э. Алкин、A. Скопенков，《闭折线的同伦分类》，https://old.mccme.ru//circles//oim/homotclass.pdf.[KK18] A. Канель-Белов、П. Кожевников，《有向多边形覆盖的重数》，Квант，第5期（2018年），20–24，https://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-05.pdf.[Ma03] J. Matoušek，《使用博苏克-乌拉姆定理：组合学与几何学中的拓扑方法讲义》。Springer Verlag，2008年.[Ro15] J. Roe，《绕行：拓扑、几何与分析中的绕数》，AMS，2015年.[Sk18] A. Скопенков，《平面图绘制的不变量》，Мат. просвещение，31（2023年），74–127。arXiv:1805.10237.[Sk20] A. Скопенков，《从几何角度看代数拓扑》，莫斯科，МЦНМО，2020年（第2版）。本书部分内容的更新版：http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf[Sk] A. Скопенков，《从算法角度看代数拓扑》，http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf.[Ta88]С. Табачников，《论平面曲线》，Квант，第11期（1988年），59–63，https://kvant.mccme.ru/1988/11/o_ploskih_krivyh.htm[To84] A. Тоом，《多边形有多少个面积？》，Квант，第12期（1984年），9–12，https://kvant.mccme.ru/1984/12/skolko_ploshchadej_u_mnogougol.htm[Va81] Н. Вагутен，《面积公式》，Квант，第4期（1981年），17–20，https://kvant.mccme.ru/1981/04/formula_

[Wn] https://ru.wikipedia.org/wiki/Порядок_点_相对于_曲线

plosh

所有作者：莫斯科物理技术学院。*A.Скопенков*：莫斯科独立大学，HTTPS://USERS.MCCME.RU/SKOPENKO/。

闭曲线绕点的绕数

E. ALKIN, A. MIROSHNIKOV, A. SKOPENKOV

摘要：本文以通俗易懂的方式，给出绕数的一个初等、直接且严谨的定义，并介绍其最简单的性质。这个定义比某些教科书中的定义更简明。我们说明如何轻松计算绕数：利用可加性或计算（带符号的）交点。在绕数的框架下，我们对博苏克–乌拉姆定理的低维情形给出一个初等的表述和证明。本文先以英文版本呈现，随后附有俄语版本。

目录

1. 引言 2. 绕数：定义与讨论 3. 绕数的最简单性质 2
4. 绕数与交点 4
16参考文献 8

1. 引言

闭合有向折线 绕数 在平面上绕点 l 的 O （该点不在 l 上）是指：起点为 O的向量，其端点沿给定方向遍历 l 时所转过的圈数。本文给出绕数的一个初等、直接且严谨的定义（§2）以及其最简单的性质（§3、§4）。这个定义比一些教科书中的定义更简单。例如，在 [Wn] 以及优秀著作 [Ro15], 中，绕数的定义采用了更复杂的提升／积分概念。因此，要论证提升／积分的存在性，就需要用到本文给出的初等定义。

我们说明如何简便地计算绕数：利用可加性（命题 3.3），或者计算（带符号的）交点数量（命题4.2.a 和 4.4.a；它们是数学分析中重要的 斯托克斯定理 的离散版本）。

借助绕数的语言，我们对博苏克–乌拉姆定理的低维情形给出一个初等表述和证明（定理 3.1）。该定理因其在拓扑学、组合学和数理经济学中的应用而闻名 [Ma03]。

绕数推广为映射的度，这是数学中的基本不变量之一 [Ro15，Sk20]。有关绕数的应用，例如参见 [Ro15，AS，AMS]。关于绕数及相关概念的更多内容，参见 [Wn，Va81，To84，Ta 88], [KK18，定理2], [Sk18，§2]。

学习本注释的大部分内容不需要预备知识（高中课程内容除外），但需要具备一定的数学素养。

本文依据城市锦标赛夏季会议（https://turgor.ru/lktg/index.php）的材料，以及莫斯科物理技术学院的课程《拓扑学导论（拓扑学中的离散结构与算法）》编写（该课程由 I. Zhiltsov 和 A. Rukhovich 共同讲授，https://old.mccme.ru//circles//oim/home/combtop13.htm#fivt）。感谢 E. Boracheva (Dzhenzher) 和 O. Nikitenko 参与有益的讨论。

2. 绕数：定义与讨论

本文其余部分中，所有点、闭折线和折线均视为位于平面内。

设 $O, A, B, A_1, \dots, A_m$ 为点。

假设 $A \neq O$ 和 $B \neq O$（但可能 $A = B$）。有向角（亦称定向角）$\angle AOB$ 是数 $t \in (-\pi, \pi]$，使得向量 $\overrightarrow{OB}$ 与向量 $\overrightarrow{OA}$ 逆时针旋转角度 t 后得到的向量同向。（如果可以把平面中的向量视为复数，那么可以将此条件改写为 $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$。）

我们将不加证明地使用以下命题（近似于一条公理）：

命题 2.1. 对于平面中的任意点 A, B, C，以及任意一个不在这些线段 AB, BC, CA 并集上的点 O，

- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = \pm 2\pi$，如果 O 位于点 A、B、C 的凸包内，
- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 0$，否则。

注意，如果在有向角的定义中取 $t \in [0, 2\pi)$，那么类似的结论就不成立。

一条**闭折线**是一个有序点集（点不一定互不相同）。[1] 本文有时将有序点集 $(A_1, \dots, A_n)$ 记作 $A_1 \dots A_n$（$n = 1$ 是允许的）。

设 $l = A_1 \dots A_m$ 是一条不经过点 O 的闭折线。严格来说，l 绕 O 的**绕数**定义为

$$w(l) = w(l, O) := \frac{\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1}{2\pi}.$$

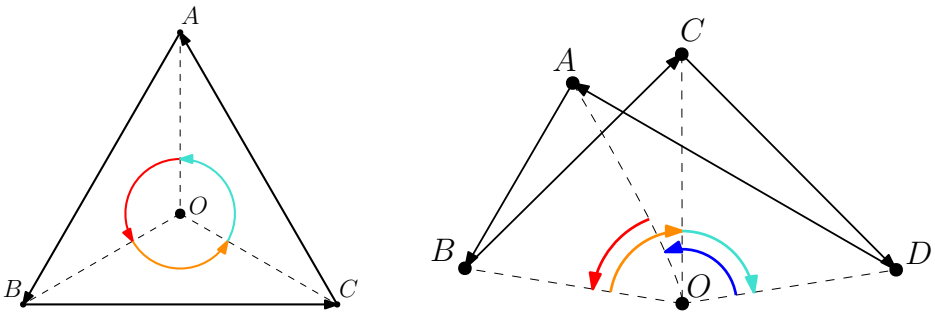

图 2.1. $w(ABC) = +1$ 和 $w(ABCD) = 0$

例如，在图 2.1 $w(ABC) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1$ 和 $2\pi \cdot w(ABCD) = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle BOD + \angle DOB = 0$.

命题 2.2。 下列对象的绕数

（*a*）任意凸多边形的边界；（*b*）围绕外部（内部）任意一点的任意简单闭多边形线等于 0 （± 1）。见图 2.2。

Proo（*a*）部分的 *f*。记给定的凸多边形为 Ω，记其边界为 $\partial\Omega$.

如果点 O 位于 Ω 外部，过 O 作两条 Ω 的支撑直线。从这些支撑直线与多边形边界 $\partial\Omega$ 的交点中取两点 A, B。于是 $w(\partial\Omega) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOA) = 0$。

[1] 因此，闭折线（如这里所定义的）并不是平面的子集。不过，有时我们将闭折线 $A_1 \dots A_m$ 视为线段 A_iA_{i+1} 的并集；例如，我们会说“折线不经过某一点”。

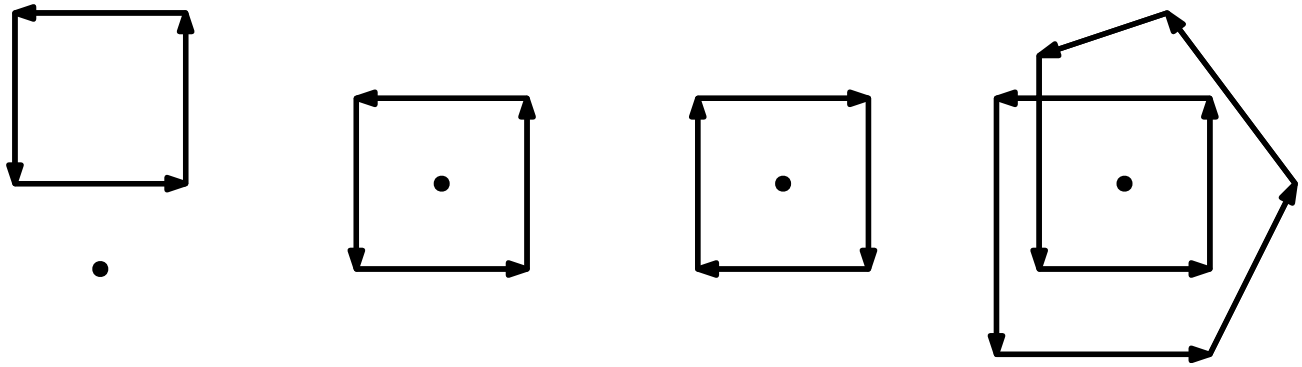

图 2.2. 绕数分别为 0、 $+1$、 -1、 $+2$

如果点 O 位于 Ω 内部，以 O为中心作一个等边三角形 ABC。取三点A', B', C'，它们是射线 OA, OB, OC与 $\partial\Omega$的交点。这些点将边界 $\partial\Omega$分成三条折线。我们有

$$w(\partial\Omega) = \frac{1}{2\pi}(\angle A'OB' + \angle B'OC' + \angle C'OA') = \frac{3}{2\pi}\angle A'OB' = \frac{3}{2\pi}\angle AOB = \pm 1.$$

□

根据论述方式，(b) 部分要么是*Jordan* 定理 [Sk20第 1 节4]，要么是其证明中的引理。

设 ABC 是一个三角形， O 是其内部的一个点。那么 $w(ABCABC) = 2w(ABC) = \pm 2$。这个例子表明，具有相同线段并集的不同折线，其绕数可能不同。此外，存在一条闭折线 l，使得对于每个点 $O \in \mathbb{R}^2 - l$，都有 $w(l) = 0$。例如，对于任意点 A、 B 和 C，折线 A、 AB、 $ABCB$ 都是这样的例子。

例2.3. 对于任意整数 n 和任意点 O，存在一条闭折线，其绕点 O 的绕数等于 n。

构造。若 $n = 0$，一个例子是由单个点组成的闭折线。若$n \neq 0$，取一个以 O为中心的等边三角形 ABC，当 $n > 0$时按逆时针方向定向，否则按顺时针方向定向。根据公式 $l := \underbrace{ABC \dots ABC}_{|n| \text{ 次}}$定义闭折线 l. By 命题 2.2.a，有 $w(l) = |n| \cdot w(ABC) = n$。 □

命题 2.4。 绕数 $w(A_1 \dots A_m)$ 是一个整数。

证明。 对于 $j = 1, \dots, m$ 表示 $t_j := \angle A_j O A_{j+1}$，其中 $A_{m+1} = A_1$。于是

$$\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow e^{it_m}\overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1})}\overrightarrow{OA_{m-1}} \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1}+\dots+t_1)}\overrightarrow{OA_1}.$$

因此，$(t_m + t_{m-1} + \dots + t_1)/2\pi$ 是一个整数。 □

另一种证明的提示：根据命题2.1，

$$\angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1 \equiv \angle A_{m-1}OA_1 \mod 2\pi.$$

命题2.4的另一种证明由命题2.2a 和3.5给出。

注 2.5 (推广)。 (a) 定义闭合定向连续曲线 l 的绕数 $w(l, O)$。后者定义为连续映射 $l : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$，它将圆映射到去掉一点后的平面。由于映射 l 是一致连续的，存在一个整数 $m > 0$，使得对于将圆 S^1 细分为 m 条等长弧的任意细分，以及同一弧上的任意两点 x、 y，点 $l(x)$ 和 $l(y)$ 不关于 O 对称。对于 $k = 1, \dots, m$，用 A_k 表示第 k 条弧的端点。定义

$$2\pi \cdot w(l, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1.$$

这是良定义的（例如，参见 [Sk20, §3]）。

（b）绕数 $w(C, O)$ 整数 1-循环 [Sk，§4] C 绕点 O 且不属于 C 的任何线段，定义为

$$w(C,O) = \sum_{AB\in C} \angle AOB.$$

与命题2.4类似，数 $w(C, O)$ 是一个整数。还有哪些命题可以推广到 1-循环?

3. 绕数的最简单性质

定理 3.1 （博苏克–乌拉姆）。设 $A_1 \dots A_{2k}$ 是一条不经过点O 的闭折线，且该点是这条折线的对称中心（即， O 是线段A_jA_{k+j} 的中点，对每个 $j = 1$，……， k均成立）。那么，这条闭折线绕 O 的绕数是奇数。

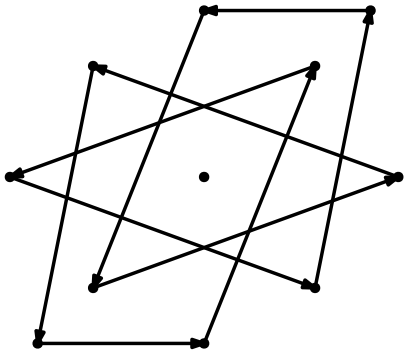

图 3.1。一条闭折线 l，关于点 O 对称；$w(l) = 3$

以下记号和结果将会用到。

一条**折线**是一个有序点集（各点不一定互不相同）.[2]

设 $l = A_1 \dots A_m$ 是一条不经过点 O 的折线。按如下公式定义实数 $w'(l) = w'(l, O)$

$$2\pi \cdot w'(l) = 2\pi \cdot w'(l,O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m.$$

显然，

- $w'(A_1 \dots A_mA_1) = w(A_1 \dots A_m)$;
- $w'(A_1 \dots A_m) = w'(A_1 \dots A_j) + w'(A_j \dots A_m)$，对每个 $j = 1, \dots, m$ 均成立;
- 如果点 A_2、. . .、 A_{m-1} 位于角 $\angle A_1OA_m$ 内，那么 $2\pi w'(A_1 \dots A_m) = \angle A_1OA_m$。

Pro位置 3.2。存在某个整数 n，使得 $\angle A_1OA_m = 2\pi w'(A_1 \dots A_m) + 2\pi n$.

证明。显然， $2\pi w(A_1 \dots A_m) = 2\pi w'(A_1 \dots A_m) + \angle A_mOA_1$。命题 2.4 推出所需结论。□

*P*定理 *3.1*的证明。根据对称性， $w'(A_1 \dots A_{k+1}) = w'(A_{k+1} \dots A_{2k}A_1)$。该 n

$$w(A_1 \dots A_{2k}) = w'(A_1 \dots A_{2k}A_1) = w'(A_1 \dots A_{k+1}) + w'(A_{k+1} \dots A_{2k}A_1) =$$

$$= 2w'(A_1 \dots A_{k+1}) \overset{(1)}{=} 2\left(\frac{\angle A_1OA_{k+1}}{2\pi} + n\right) = 1 + 2n$$

存在某个整数 n。这里等式 (1) 由命题 3.2得出。□

[2]在数学中，不同的事物有时会有相同的形式化；此时，区别体现在我们如何处理这些事物上。例如，许多不同的事物都可以用“集合”这一概念来形式化。于是，为了让对它们进行的运算更容易理解，我们会给形式上相同的对象取不同的名称。例如，在本文中，有序点集既称为折线，也称为闭折线。再如，为了使乘法更加直观，我们把“数列”称为“该数列的生成函数”。

将由沿相反方向遍历折线 l 所得到的折线记为 l^{-1}。显然，对于任意点 $O \notin l$， $w'(l) = -w'(l^{-1})$。

折线 $l_1 = A_1 \dots A_m C$ 与 $l_2 = C B_1 \dots B_k$ 的拼接所得的折线

$$l_1 l_2 := A_1 \dots A_m C B_1 \dots B_k.$$

闭折线 $l_1 = A_1 \dots A_m C$ 与 $l_2 = B_1 \dots B_k C$ 的拼接所得的闭折线

$$l_1 l_2 := A_1 \dots A_m C B_1 \dots B_k C.$$

用此记号表示

$$w'(l_1 l_2) = w'(l_1) + w'(l_2)$$

对于任意点 O 以及不经过 O 的折线 l_1， l_2。这个显然的等式已在定理 3.1 的证明中使用过。

命题 3.3. 设 O、 A、 B 是两两不同的点。设 l_1、 l_2、 l_3 是连接点 A 与点 B 且不经过点 O 的折线。那么 $w(l_1 l_2^{-1}) + w(l_2 l_3^{-1}) = w(l_1 l_3^{-1})$。

证明。我们有

$$w(l_1 l_2^{-1}) + w(l_2 l_3^{-1}) = w'(l_1) + w'(l_2^{-1}) + w'(l_2) + w'(l_3^{-1}) = w'(l_1) + w'(l_3^{-1}) = w(l_1 l_3^{-1}).$$

□

例 3.4 （参见 [AMS, §2.A]）。 设 O， A， B 是三个两两不同的点。对于任意三个整数 n_1， n_2， n_3 满足 $n_1 + n_2 = n_3$，存在三条折线 l_1， l_2， l_3，它们连接点 A 与点 B，且不经过点 O，使得

$$w(l_1 l_2^{-1}) = n_1, \qquad w(l_2 l_3^{-1}) = n_2 \quad and \quad w(l_1 l_3^{-1}) = n_3.$$

命题 3.5. 设 $A_1 \dots A_m$ 是一条不经过点 O 的闭折线。设 P 是一个点，满足 O 不在线段 PA_1，....., PA_m 中的任何一条上。那么

$$w(A_1 \dots A_m) = \sum_{i=1}^{m} w(P A_i A_{i+1}), \quad where \quad A_{m+1} = A_1.$$

证明。 记 $a_i : = A_i A_{i+1}$ 并对每个 $p_i = PA_i$， $i = 1$， ....., m。多次应用命题 3.3，得到

$$w(A_1 \dots A_m) = w(a_1 \dots a_m) = \sum_{i=1}^{m} w(p_{i-1} a_i p_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} w(P A_i A_{i+1}), \quad \text{where} \quad p_0 = p_m.$$

□

命题 3.6. 设 $A_0 A_1 A_2$ 是一个等边三角形， O 是它的中心。对于 $j = 0$， 1， 2，用 l_j 表示一条不与射线 OA_j 相交、且连接 A_{j+1} 与 A_{j+2} 的折线，其中编号按模 3 计算。那么 $w(l_0 l_1 l_2) = \pm 1$。

证明。我们可以假设三角形的顶点按逆时针方向编号。根据命题 3.2，有 $w'(l_0) = \frac{1}{3} + k$，其中 k 是某个整数。下一段中，我们证明 $k = 0$。等式 $w'(l_1) = w'(l_2) = \frac{1}{3}$ 可以用类似的方法证明。于是 $w(l_0 l_1 l_2) = w'(l_0) + w'(l_1) + w'(l_2) = 1$。

将折线 l_0 的连续顶点记为 $B_1 \dots B_m$。对于 $j = 1, \dots, m-1$，令 $t_j := \angle B_j O B_{j+1} \in (-\pi, \pi)$。若存在某些 $j = 1, \dots, m-1$ 使得 $T_j := t_1 + \dots + t_j \notin (-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$，那么对于最小的此类 j，线段 $B_j B_{j+1}$ 将与射线 OA_0 相交。因此，对于每个 $j = 1, \dots, m-1$，都有 $T_j \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$。特别地， $T_{m-1} \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$。另一方面，$T_{m-1} = 2\pi w'(l_0) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$，其中 k 是某个整数。因此， $k = 0$。□

其他证明见 §4 以及 [AS, §3]末。

4. 绕数与交点

命题 4.1. 设 P_0 和 P_1 是由一条折线连接的点，该折线不与闭折线 l相交。则 $w(l, P_0) = w(l, P_1)$。

提示： 使用 连续性方面的考虑 或由引理 4.5.a.

若一组点中任意三点不共线，且连接这些点的任意三条线段没有公共内部点，则称这组点处于一般位置。在本节其余部分中，所有折线 的顶点，以及所有折线对 和 的顶点，两两不同，并且（除非另有说明）处于一般位置。

命题 4.2。 设 l 为一条闭折线， p 为一条非闭折线。用P_0 和 P_1 分别表示 p的起点和终点。则（

a) $w(l, P_1) - w(l, P_0) \equiv |l \cap p|$ 模 2。

(b) $w(l, P_1) \equiv |l \cap p|$ 模 2，如果点 P_0 与 l 相距足够远（例如，位于 l 的凸包之外）。

证明思路。（b）部分由（a）部分推出，因为 $w(l, P_0) = 0$。

（a）如果 p 不与 l相交，那么命题4.1 给出 $w(l, P_1) - w(l, P_0) = 0 = |l \cap p|$。

否则，我们可以假设 p 是一条线段，它仅在一点处与 $l = A_1A_2 \dots A_m$ 相交，且该点属于线段 A_1A_2。选取一点 X，使得 P_0 位于三角形 A_1XA_2 内部。于是 P_1 位于三角形 A_1XA_2 外部。根据公式 l' 定义闭折线 $l' := A_1XA_2 \dots A_m$。我们有

$$w(l, P_1) = w(l, P_1) + w(A_1XA_2, P_1) = w(l', P_1) \overset{(1)}{=} w(l', P_0) = w(l, P_0) + w(A_1XA_2, P_0) = w(l, P_0) \pm 1.$$

这里的等式 (1) 由命题 4.1 得出。

另一种方法： 可以应用引理 4.5.b（甚至可以应用它的模 2 版本） . □

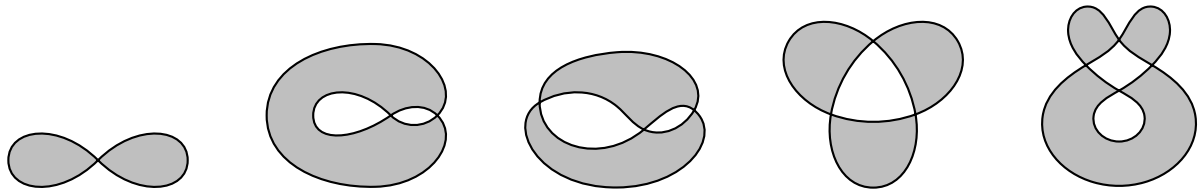

图 4.1. 补集的棋盘格着色与模 2 内部

平面的任意（开）子集都分解为若干连通分支，同一连通分支中的任意两点都可以用一条完全位于该子集内的折线连接，而不同连通分支中的任意两点则无法如此连接。闭折线的补集 $\mathbb{R}^2 - l$ l 允许进行一种“棋盘格着色”，使得沿 l 的某条线段相邻的连通分支着色不同，见图 4.1 [Sk18，命题 2.1。1]。 模 2 的内部 l 是棋盘格着色中黑色区域的并集（假设“无穷远”区域为白色）。下面给出一个不使用棋盘格着色的等价直接定义。模 *2* 的内部 是满足以下条件的所有点的集合 $X \in \mathbb{R}^2 - l$： 存在一条折线 p，

- 将点 X 与一个距离 l足够远的点连接，
- 与 l 相交于奇数个点，并且
- 使得 l 和 p 的所有顶点两两不同，并且（除 X外）处于一般位置。

根据奇偶性引理，该结论定义良好 [Sk18，引理 1.3.2.b]: 如果两条闭折线的顶点两两不同且处于一般位置，那么这两条折线相交于偶数个点。（此引理是命题 4.2.a 对 $P_0 = P_1$ 的一个特例。）

命题 4.3 （由命题 4.2.b 推出）。 点 O 位于闭折线 2 的内部（模 l）当且仅当 $w(l)$ 为奇数。

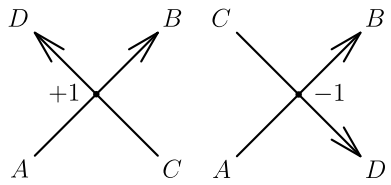

图4.2. 交点的符号

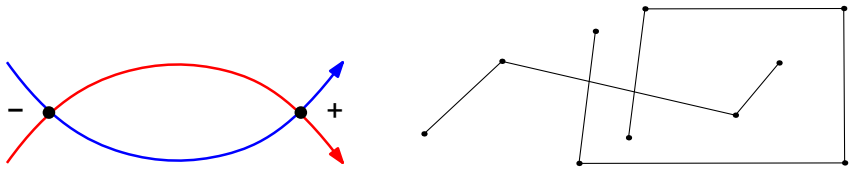

图 4.3. 平面内两条折线相交于偶数个点，其符号之和为零（左）或非零（右）

假设点 A、B、C、D 不在同一直线上。有向线段 **交点** 的符号定义如下：若沿线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的行进方向为顺时针，则其符号为 $+1$；否则 ABC，符号为-1（图 4.2）。对于折线 l 和 p，记 $l \cdot p$ 为它们交点的符号之和（图 4.3）。

命题 4.4. 设 l 是一条闭折线，p 是一条非闭折线。用 P_0 和 P_1 分别表示 p 的起点和终点。那么

(a) $w(l, P_1) - w(l, P_0) = l \cdot p$. ***(b)*** $w(l, P_1) = l \cdot p$，如果点 P_0 离 l 足够远。

命题 分命题 4.4 的证明与命题 4.2 类似，或可由引理 4.5.b 得出。 .

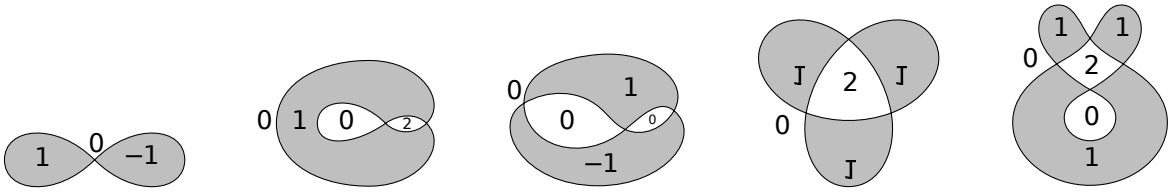

图 4.4. 按绕数对补集进行“着色”（允许反转折线的方向）

考虑一条闭折线 l（图 4.4）。根据命题4.1，补集 $\mathbb{R}^2 - l$ 同一连通分支内各点的绕数相等。根据命题 4.4.a，沿某条线段相邻的连通分支，其绕数相差 ± 1。这种用整数对补集 $\mathbb{R}^2 - l$ 进行的“着色”称为 *Möbius–Alexander* 着色。

对于折线 $A \dots B$ 和 $C \dots D$，定义

$$\partial(A \dots B \times C \dots D) := w'(A \dots B, D) - w'(C \dots D, B) - w'(A \dots B, C) + w'(C \dots D, A).$$

当两条折线中任一条的端点都不落在另一条折线的边的并集上时，这个数有定义。（将折线表示为分段线性映射 $l, p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$。那么 $\partial(l \times p)$ 是向量 $l(x) - p(y)$ 的绕数，其中点 (x, y) 沿正方形 $[0,1]^2$ 的边界 $\partial([0,1]^2)$ 逆时针移动。）

对于图 4.3 l 中左侧和右侧的折线，分别有 $\partial(l \times p)$ 等于0 和 ± 2(请验证！)

引理 4.5。 ***(a)*** 对任意不相交的折线 l 和 p，有 $\partial(l \times p) = 0$。***(b)*** 对任意折线 l 和 p，有 $\partial(l \times p) = l \cdot p$。

证明概要。(a) 如果 $l = AB$ 和 $p = CD$，则引理成立，因为$\angle ADB + \angle DBC + \angle BCA + \angle CAD = 0$ 对任意不相交线段 AB 和 CD都成立。（只要这个角度和属于 $(-2\pi, 2\pi)$ 即可。）

Re将一般情形归结为这一情形。对于任意折线 l_1, l_2, p，有 e

$$\partial(l_1 l_2 \times p) = \partial(l_1 \times p) + \partial(l_2 \times p) \quad \text{and} \quad \partial(p \times l_1 l_2) = \partial(p \times l_1) + \partial(p \times l_2).$$

因此，

$$\partial(l \times p) = \sum_{\substack{EF \text{ is a segment of } l \\ GH \text{ is a segment of } p}} \partial(EF \times GH) = 0.$$

(b) 与 (a) 类似。 □

命题的证明 *3.6* 使用命题 *4.1*。(根据 A. Abzalilov 的文本编辑而成。) 定义折线 a_j：$= A_{j+1}A_{j+2}$ 以及闭折线 m_j：$= l_j a_j^{-1}$。那么

$$w(l_0 l_1 l_2) \overset{(1)}{=} w(m_0) + w(m_1) + w(m_2) + w(a_0 a_1 a_2) \overset{(2)}{=} w(A_0 A_1 A_2) = \pm 1, \quad \text{where}$$

- 等式 (1) 是通过多次使用命题 3.3 得到的；
  - 等式 (2) 可由下一段证明的等式 $w(m_0) = w(m_1) = w(m_2) = 0$ 推出。

任取 $j = 0, 1, 2$。在射线 OA_j 上存在一点 P_j 位于折线 m_j各点的凸包之外。于是 $w(m_j, P_j) = 0$。线段 OP_j与折线 m_j不相交。因此，根据命题 $w(m_j) = 0$，结论成立。4.1。□

参考文献

[AMS] E. Alkin, A. Miroshnikov, A. Skopenkov, 《平面图几乎嵌入的不变量》，俄语，arXiv:2410.09860v2。[AS] E. Alkin, A. Skopenkov, 《闭折线的同伦分类》，俄语，https://old.mccme.ru//circles//oim/homotclass.pdf。[KK18] A. Kanel-Belov, P. Kozhevnikov, 《有向多边形的覆盖重数》，Kvant，第5期（2018年），20–24页，俄语，https://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-05.pdf。[Ma03] J. Matou˘sek, 《运用博苏克-乌拉姆定理：组合学与几何中的拓扑方法讲义》。Springer Verlag, 2008年。[Ro15] J. Roe, 《绕行：拓扑、几何与分析中的绕数》，AMS，2015年。[Sk18] A. Skopenkov, 《平面图绘制的不变量》。Arnold Math. J.，6（2020年），21–55页；完整版本：arXiv:1805.10237。[Sk20] A. Skopenkov, 《几何视角下的代数拓扑》，俄语，MCCME，莫斯科，2020年（第二版）。部分内容的更新版：http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf。英文译本的一部分：https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf。[Sk] A. Skopenkov, 《算法视角下的代数拓扑》，书稿，主要为俄语，http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf。[Ta88] S. Tabachnikov, 《论平面曲线》，Kvant，第11期（1988年），59–63页，俄语，https://kvant.mccme.ru/1988/11/o_ploskih_krivyh.htm[To84] A. Toom, 《一个多边形有多少个区域？》，Kvant，第12期（1984年），9–12页，俄语，https://kvant.mccme.ru/1984/12/skolko_ploshchadej_u_mnogougol.htm[Va81] N. Vaguten, 《面积公式》，Kvant，第4期（1981年），17–20页，俄语，https://kvant.mccme.ru/1981/04/formula_ploshchadi.htm[Wn] https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number

全体作者：莫斯科物理技术学院。*A.Skopenkov*：莫斯科独立大学，
HTTPS://USERS.MCCME.RU/SKOPENKO/。