arXiv:2603.22360v1 [math.PR] 22 Mar 2026

由排列位移和三角核函数构造的托普利茨矩阵

让-克里斯托夫 潘[1, 2, *]

[1]原子能和替代能源委员会、军事应用局、国防分析与核扩散防护研究所，法国阿尔帕容 F-91297[2]巴黎-萨克雷大学、原子能和替代能源委员会、极端条件物质实验室，法国布吕耶尔勒沙泰勒 F-91680

2026年3月25日

摘要

托普利茨矩阵自然地出现在调和分析、算子理论和数值分析中。本文研究系数通过缩放核函数 $a_k = f(k/n)$ 随矩阵阶数变化的托普利茨矩阵。我们证明，其特征值的经验均值收敛于 f 的加权积分，其中权重 $1-|x|$ 反映了托普利茨矩阵的对角线密度。接着，我们引入一种组合构造，通过排列位移计数将排列与托普利茨矩阵关联起来。对于均匀随机置换，其期望矩阵收敛于由三角核函数 $1-|x|$ 生成的托普利茨矩阵。有趣的是，三角核函数也作为积分布朗运动的协方差函数出现，从而为同一个算子提供了概率解释。最后，我们分析了在 $[0,1]$ 上以 $(1-|x-y|)$ 为核函数的积分算子，并明确求出其特征函数和特征值。该算子描述了由排列位移产生的平均托普利茨矩阵所对应的极限谱结构。这些结果揭示了托普利茨矩阵理论、排列统计量与经典积分算子之间的自然联系。

1 引言

托普利茨矩阵是数学中经典且基础的对象，因奥托·托普利茨而得名。他在20世纪初对这类矩阵进行了广泛研究 [6, 11]。托普利茨矩阵的定义特征是：沿对角线的元素均为常数：

$$T_n = (a_{i-j})_{1\le i,j\le n}.$$

这种简单的代数结构体现了沿指标差的平移不变性，并提供了卷积算子的离散类比 [2, 5]。正因如此，托普利茨

*jean-christophe.pain@cea.fr

矩阵在众多领域中自然出现，包括调和分析、数值线性代数、概率论、信号处理和随机过程理论。

历史上，托普利茨矩阵最早出现在傅里叶级数的研究中：函数的傅里叶系数生成一个无限托普利茨矩阵 [11]。这一联系使我们能够将单位圆上函数的性质与大型托普利茨矩阵的谱行为联系起来。在数值分析中，托普利茨矩阵为具有平移不变系数的线性系统提供了高效表示，从而可以利用 Levinson递推等技术快速求解这类系统。在概率论和组合学中，它们编码了平稳序列的相关结构，并出现在与格路径、随机游走和排列统计量相关的计数问题中 [4, 10]。

托普利茨矩阵的谱性质一直是广泛研究的重点。在经典情形下，当矩阵元素 (a_k) 与矩阵大小无关时 n，著名的 Szegő极限定理精确描述了特征值的渐近分布，将离散线性代数与调和分析、正交多项式和算子理论联系起来 [7, 11]。特征向量的结构也与傅里叶模态相关，进一步凸显了托普利茨矩阵作为积分算子离散类比的作用。

在本文中，我们研究一种较少受到关注的情形：矩阵元素通过缩放核显式依赖于矩阵的大小：

$$a_k = f\left(\frac{k}{n}\right), \quad -(n-1) \le k \le n-1,$$

其中， f 是定义在 $[0, 1]$ [5]上的 Lipschitz连续函数。这类矩阵自然出现在对有界区间上的平移不变积分算子进行离散化时，为连续核提供离散近似。等价地，它们也可视为结构化图的加权邻接矩阵。我们的首要目标是描述这类矩阵特征值经验均值的渐近行为，揭示三角权重 $1-|x|$ ；该权重反映了对角线密度，并建立了离散矩阵与连续算子之间的联系。

托普利茨矩阵也以引人入胜的方式出现在组合学中。通过根据位移计数、超越数或其他经典统计量将矩阵与排列关联起来，可以得到编码这些组合特征的托普利茨结构 [4, 10]。值得注意的是，在均匀随机性下，三角核 $1-|x|$ 成为排列矩阵的期望极限。这说明组合结构能够产生自然的线性代数与谱现象 [3]。

本文结构安排如下。第2节介绍由排列位移构造的托普利茨矩阵，并分析均匀随机排列中各条对角线上的期望值。第3节研究这些置换位移矩阵的集中性质，表明它们通常近似于其期望的三角结构。第4节探讨三角托普利兹矩阵 $K_n = (1-|i-j|/n)_{1\le i,\ j\le n}$，并给出其特征值和渐近特征向量的显式表达式。第5节考察幂的迹 K_n^p ，并证明它们收敛于相应积分算子的特征值幂和。第6节将这些离散矩阵与核函数为 $1-|x-y|$ 的连续积分算子联系起来，详细描述其谱和特征函数。第7节研究带状托普利茨矩阵，并以有界位移为基础，从组合学角度解释其行列式。最后，第8节讨论上三角托普利茨矩阵

，将其视为基本超越步，并研究这些矩阵幂的组合结构。这样的安排突出展现了从离散的基于排列的结构到连续积分算子的过渡，并强调了组合学、托普利茨矩阵与谱分析之间的相互作用。

总而言之，本研究凸显了组合学、谱分析学与经典积分算子之间的相互作用，展示了离散排列结构如何在大-n 极限下趋近于连续核，并阐明了连接离散与连续视角的丰富数学图景。

2 由排列位移得到的托普利茨矩阵

令 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 是 $\{1,\dots,n\}$的一个排列，并将某个指标的位移 定义为

$$\delta_i = i - \sigma(i), \quad i = 1,\dots,n.$$

I直观地说， δ_i 衡量元素 i被排列 [10]移动了多远 .

定义 2.1 （位移计数）。对于每个可能的对角线 k，定义

$$d_k = |\{i : \delta_i = k\}|, \quad -(n-1) \le k \le n-1.$$

这表示排列矩阵中位移为 k 的对角线上的元素个数。显然，有

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} d_k = n.$$

注 2.2（ $n = 4$的示例）。 对于 $n = 4$ 和单行表示为 (2,4,1,3) 的排列 $\sigma =$:

$$\delta = (1-2, 2-4, 3-1, 4-3) = (-1,-2,2,1),$$

我们有

$$d_{-2} = 1, \quad d_{-1} = 1, \quad d_0 = 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d_{\pm 3} = 0.$$

这些计数可以汇总成一个托普利兹矩阵:

$$P_n = (d_{i-j})_{1 \le i,j \le n}.$$

命题 2.3 （迹）。的迹为 P_n 是

$$\mathrm{Tr}(P_n) = n\, d_0,$$

其中 d_0 是 σ *[10]* 的不动点个数。

证明。 P_n 的主对角线对应于 $i = j$，即位移 $i - j = 0$。因此，对角线上每个元素都等于 d_0。由于共有 n 个对角线元素，将它们相加可得

$$\mathrm{Tr}(P_n) = \sum_{i=1}^{n} P_n(i,i) = \sum_{i=1}^{n} d_0 = n\, d_0.$$

示例： 继续前一个关于 $n = 4$ 和 $d_0 = 0$ 的示例，迹为

$$\mathrm{Tr}(P_4) = 4 \cdot 0 = 0,$$

与公式一致。 □

命题 2.4 （对角线计数的期望值）。 对于均匀随机排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *[4]*，有

$$\mathbb{E}[d_k] = \frac{n - |k|}{n}, \quad -(n-1) \le k \le n-1.$$

证明。 考虑排列矩阵的对角线 k。满足 $i - j = k$ 的位置 $(i,\ j)$ 必须满足

$$1 \le i \le n, \quad 1 \le j = i - k \le n.$$

因此，可行的 i满足

$$\max(1, 1+k) \le i \le \min(n, n+k).$$

对于 $-(n-1) \le k \le n-1$，这个区间恰好包含 $n - |k|$ 个整数。

在均匀随机排列中，这些位置 $(i,\ j)$ 被占据的概率均为$1/n$，因为 $\sigma(i)$ 取 $1, \ldots, n$ 中任意一个数的可能性相同。根据期望的线性性，对角线 k 上元素的期望数量为

$$\mathbb{E}[d_k] = (n - |k|) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n - |k|}{n}.$$

示例 **例：** 对于 $n = 4, k = 1$，有效位置 $(i,\ j)$ 为 $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$；因此可得

$$\mathbb{E}[d_1] = \frac{3}{4}.$$

□

命题 2.5 (归一化期望矩阵)。 除以n 归一化后的期望托普利兹矩阵为

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n} P_n(i,j)\Big] = 1 - \frac{|i-j|}{n}.$$

证明。 根据期望的线性性，我们有

$$\mathbb{E}[P_n(i,j)] = \mathbb{E}[d_{i-j}] = \frac{n - |i-j|}{n},$$

将前一个等式两边除以 n，得到

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n} P_n(i,j)\Big] = \frac{n - |i-j|}{n} = 1 - \frac{|i-j|}{n}.$$

例： 对于 $n = 4$，第 $(2,\ 4)$ 项为

$$i - j = 2 - 4 = -2 \implies 1 - \frac{|i-j|}{n} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

□

注 2.6。这为缩放后的 $[0,1]$, 上的三角核 $1-|x|$提供了自然的组合解释。该权重反映了排列矩阵 [3] 中对角线的密度。随着 n 增大，离散矩阵会趋近于连续三角核。

注记 2.7。 这些构造体现了一条普遍原理：只要置换统计量仅取决于相对位移，与之关联的矩阵自然就具有托普利兹结构。

3 Conc置换位移矩阵的集中性

在上一节中，我们引入了托普利兹矩阵

$$P_n = (d_{i-j})_{1\le i,j\le n},$$

其中， d_k 统计满足 $\sigma(i) - i = k$ 的指标 i 的个数，其中置换为 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$。我们证明了

$$\mathbb{E}[d_k] = \frac{n-|k|}{n}.$$

现在我们证明，当置换是均匀随机选取时，矩阵 P_n 会集中在其期望附近。

命题 3.1 （位移计数的方差）。 设 σ 是 $\mathfrak{S}_n$ 中的一个均匀随机排列，并且

$$d_k = \#\{i : \sigma(i) - i = k\}, \qquad -(n-1) \le k \le n-1.$$

于是我们有

$$\mathrm{Var}(d_k) = \frac{n-|k|}{n} - \frac{(n-|k|)^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

特别地，$\mathrm{Var}(d_k) = O(1)$ 对固定的 k 成立。

证明。 定义

$$X_{i,k} = \mathbf{1}_{\{\sigma(i)=i+k\}},$$

只要 $1 \le i+k \le n$。那么我们可以写成

$$d_k = \sum_{i\in I_k} X_{i,k},$$

其中 I_k 包含 $N = n-|k|$ 个可容许指标。对于均匀随机排列，我们有

$$\mathbb{P}(\sigma(i) = i+k) = \frac{1}{n},$$

因此

$$\mathbb{E}[X_{i,k}] = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{Var}(X_{i,k}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

利用

$$\mathrm{Var}(d_k) = \sum_{i\in I_k} \mathrm{Var}(X_{i,k}) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_{i,k}, X_{j,k}),$$

我们首先得到

$$\sum_{i\in I_k}\mathrm{Var}(X_{i,k}) = N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right).$$

对于 $i\neq j$，我们有

$$\mathbb{P}(\sigma(i)=i+k,\sigma(j)=j+k)=\frac{1}{n(n-1)},$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X_{i,k},X_{j,k})=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}.$$

由于有 $\binom{N}{2}$ 个这样的数对，协方差的总贡献为 $O(N^2/n^3)=O(1/n)$。因此，我们有

$$\mathrm{Var}(d_k)=N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

代入 $N=n-|k|$ 得

$$\mathrm{Var}(d_k)=\frac{n-|k|}{n}-\frac{(n-|k|)^2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

定理 3.2 (托普利茨矩阵的集中性**)。** 设 σ 是一个均匀随机排列，$P_n=(d_{i-j})$ 是与之关联的托普利茨矩阵。那么，对于每个固定的对角线 $k=i-j$，我们有

$$\frac{d_k}{n}=\frac{n-|k|}{n}+O_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

特别地

$$\frac{1}{n}P_n(i,j)\longrightarrow 1-\frac{|i-j|}{n}$$

依概率。

证明。 由前一个命题可知

$$\mathrm{Var}(d_k)=O(1)$$

对固定的 k。因此

$$\mathrm{Var}\left(\frac{d_k}{n}\right)=\frac{\mathrm{Var}(d_k)}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

应用切比雪夫不等式可得

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{d_k}{n}-\frac{n-|k|}{n}\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{C}{n^2\varepsilon^2},$$

从而

$$\frac{d_k}{n}=\frac{n-|k|}{n}+O_p\left(\frac{1}{n}\right).$$

由于 P_n 的元素仅取决于对角线 $k=i-j$，归一化矩阵元素满足

$$\frac{1}{n}P_n(i,j)\to 1-\frac{|i-j|}{n}$$

在概率论中。 □

注 3.3。 该结果表明，三角核

$$1 - |x|$$

不仅是置换位移矩阵的预期极限，也是其典型的大-n 行为。

4 三角托普利兹矩阵及其谱渐近性

定义

$$K_n = \left(1 - \frac{|i-j|}{n}\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

为比较离散矩阵与连续积分算子，引入归一化矩阵会更方便

$$\widetilde{K}_n = \frac{1}{n} K_n,$$

对于网格点 $x_i = i/n$，其元素满足

$$\widetilde{K}_n(i,j) = \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{|i-j|}{n}\Big) \approx \frac{1}{n}(1 - |x_i - x_j|),$$

so t $\widetilde{\text{hat}}$ K_n 可解释为积分算子的 Nyström 离散化

$$(Kf)(x) = \int_0^1 (1 - |x-y|) f(y)\, dy.$$

定理4.1 （ K_n的特征值渐近）。 令 $\lambda_k^{(n)}$ 表示 K_n的特征值。则有

$$\frac{\lambda_k^{(n)}}{n} = \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \frac{1}{n} \cos\Big(\frac{\pi k m}{n}\Big) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

特别地,

$$\frac{\lambda_k^{(n)}}{n} \longrightarrow \int_0^1 (1 - |x|) \cos(\pi k x)\, dx.$$

证明。 K_n 是一个对称托普利兹矩阵，其元素为

$$K_n(i,j) = a_{i-j}, \qquad a_m = 1 - \frac{|m|}{n}.$$

引入

$$v_k(i) = \cos\left(\frac{\pi k (i-1)}{n}\right).$$

于是我们有

$$(K_n v_k)_i = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{|i-j|}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi k (j-1)}{n}\right),$$

令 $m = j - i$，可得

$$(K_n v_k)_i = \sum_{m=-(i-1)}^{n-i} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi k(i+m-1)}{n}\right).$$

利用三角恒等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

我们得到

$$(K_n v_k)_i = \cos\left(\frac{\pi k(i-1)}{n}\right) \sum_{m=-(i-1)}^{n-i} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi k m}{n}\right)$$

$$- \sin\left(\frac{\pi k(i-1)}{n}\right) \sum_{m=-(i-1)}^{n-i} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi k m}{n}\right).$$

由于核函数 a_m 是偶函数，将 m的正值和负值配对时，正弦项会相互抵消。因此，主要贡献与下式成正比

$$\cos\left(\frac{\pi k(i-1)}{n}\right).$$

向量 v_k 对应于离散余弦基，它能渐近地对角化由光滑符号生成的托普利茨矩阵（参见 Gray [5]）。因此，当 n较大时，向量 v_k 可作为 K_n 的近似特征向量。利用依赖于 n的托普利茨符号的 Szegő 型定理（例如参见 Gray [5]），可以给出严格证明；该定理保证向量 v_k 是近似特征向量，并且极限特征值分布由连续三角形符号 $f(x) = 1 - |x|$ 在 $[0,1]$上的取值决定。这表明，当 n 较大时，向量 v_k 渐近地对角化托普利茨矩阵 K_n，其特征值可近似为

$$\lambda_k^{(n)} = \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi k m}{n}\right) + O(1).$$

□

5 K_n的幂的渐近迹

定理 5.1 (渐近迹)**.** 对于任意固定整数 $p \geq 1$，有

$$\frac{1}{n} \mathrm{Tr}(K_n^p) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^p, \qquad n \to \infty,$$

其中，(λ_k) 是积分算子的特征值

$$(Kf)(x) = \int_0^1 (1 - |x-y|) f(y)\, dy.$$

特别地，我们有

$$\mathrm{Tr}(K_n^p) \sim n \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^p.$$

证明。回顾一下，归一化矩阵 $\widetilde{K}_n = \frac{1}{n} K_n$ 是在上一节中引入的。引入网格点

$$x_i = \frac{i}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

可得

$$\widetilde{K}_n(i,j) = \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{|i-j|}{n}\Big) \approx \frac{1}{n}\,(1 - |x_i - x_j|).$$

因此，$\widetilde{K}_n$ 是积分算子的 Nyström 离散化

$$(Kf)(x) = \int_0^1 (1 - |x-y|) f(y)\, dy.$$

由于核函数 $1 - |x-y|$ 连续且对称，算子 K 在 $L^2([0,1])$ 上是紧算子且自伴。紧算子离散化的标准结果表明，对于每个固定的 k，$\widetilde{K}_n$ 的特征值 $\mu_k^{(n)}$ 收敛到 K 的特征值 λ_k（例如参见 Kress [8]或 Atkinson [1]）。注意到

$$\mathrm{Tr}(K_n^p) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(n)})^p,$$

其中 $\lambda_k^{(n)}$ 是 K_n的特征值。由于 $\lambda_k^{(n)} = n\,\mu_k^{(n)}$，我们得到

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(K_n^p) = \sum_{k=1}^{n} (\mu_k^{(n)})^p.$$

取极限 $n \to \infty$，并利用收敛性 $\mu_k^{(n)} \to \lambda_k$ 以及控制收敛，可得

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(K_n^p) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^p.$$

最后，由于 K 的特征值已知其显式表达式，

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2},$$

我们得到

$$\mathrm{Tr}(K_n^p) \sim n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \right)^p.$$

□

关于大型托普利茨矩阵及其相关积分算子特征值的此类收敛结果早已是经典结果（例如参见文献 [13]和 [12]）。

6 与连续三角核的联系

我们将 $L^2([0,1])$上的积分算子 K 定义为

$$(Kf)(x) = \int_0^1 (1 - |x-y|) f(y)\, dy.$$

引理 6.1 （三角核作为 Fejér 型卷积）。核函数 $1-|x-y|$ 具有如下卷积表示

$$1 - |x-y| = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,1]}(x-t)\mathbf{1}_{[0,1]}(y-t)\, dt,$$

因此，算子 K 是 *Fejér* 核的连续类比，而 *Fejér* 核则由狄利克雷核与自身卷积得到。特别地， K 的特征值恰好是这个 *Fejér* 型核的傅里叶系数：

$$\lambda_k = \int_0^1 (1-t)\cos\Big(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\Big)\, dt = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

定理 6.2 （ K的谱）。 K 是紧致、自伴且正的。其特征函数为

$$\phi_k(x) = \cos\Big(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\Big), \quad k \geq 0,$$

对应的特征值为

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

第一种证明（微分方程法）。核函数 $K(x,\ y) = 1-|x-y|$ 连续且对称，因此算子 K 在 $L^2([0,1])$上是紧致且自伴的。考虑特征值方程

$$\lambda\phi(x) = \int_0^1 (1-|x-y|)\phi(y)\, dy,$$

并对 x 求二阶导数。利用分布恒等式

$$\frac{d^2}{dx^2}|x-y| = 2\,\delta(x-y),$$

我们得到

$$\frac{d^2}{dx^2}(1-|x-y|) = -2\,\delta(x-y).$$

对特征值方程求二阶导数可得

$$\lambda\phi''(x) = \int_0^1 -2\,\delta(x-y)\phi(y)\, dy = -2\,\phi(x).$$

因此， ϕ 满足微分方程

$$\phi''(x) = -\frac{2}{\lambda}\phi(x).$$

设 $\omega^2 = 2/\lambda$。通解为

$$\phi(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

对积分方程求导，得到

$$(K\phi)'(x) = \int_0^x \phi(y)\,dy - \int_x^1 \phi(y)\,dy.$$

利用 $\lambda\phi'(x) = (K\phi)'(x)$，并在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处求值，得到边界条件

$$\phi'(0) = 0, \qquad \phi(1) = 0.$$

应用 $\phi'(0) = 0$，可得 $B = 0$，因此 $\phi(x) = A\cos(\omega x)$。条件 $\phi(1) = 0$ 进而给出

$$\cos(\omega) = 0.$$

可容许的 与核函数对称性相容的非平凡解对应

$$\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \qquad k \geq 0.$$

由于 $\omega^2 = 2/\lambda$，我们得到

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

相应的特征函数为

$$\phi_k(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

□

第二种证明（卷积与余弦基）。核函数仅依赖于 $|x-y|$，因此该算子可视为作用于 $[0,1]$ 上的卷积型算子。由于核函数是偶函数，余弦函数构成一个自然的正交基。令

$$\phi_k(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

利用三角恒等式直接计算可得

$$(K\phi_k)(x) = \left(\int_0^1 (1-|t|)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)dt\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

因此，ϕ_k 是一个特征函数，其特征值等于核函数的余弦变换：

$$\lambda_k = \int_0^1 (1-t)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)dt.$$

直接积分可得

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

因此， K 的谱由以下特征值组成

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}, \qquad k \geq 0,$$

其特征函数为

$$\phi_k(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

□

推论 6.3 (离散特征值渐近)。 令 $\lambda_1^{(n)} \geq \cdots \geq \lambda_n^{(n)}$表示$K_n$的特征值。那么对于固定的 k 和 $n \to \infty$,

$$\frac{\lambda_k^{(n)}}{n} \longrightarrow \lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

证明。 定义 $\lambda_k^{(n)}$ 的和是一个黎曼和，用于近似积分

$$\lambda_k = \int_0^1 (1-x)\cos(\pi k x)dx.$$

根据黎曼和收敛到积分的标准结果以及前面的推导， $\lambda_k^{(n)}/n \to \lambda_k$。

□

7 带状托普利茨矩阵与有界位移

考虑三对角托普利兹矩阵

$$E_n(x) = (e_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}, \qquad e_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ x & k = 1, \\ -1 & k = -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 7.1 （矩阵对应于 $n = 4$）。

$$E_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

命题 7.1 （$\det(E_n(x))$ 的组合解释）。

$$\det(E_n(x)) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\, |\sigma(i)-i|\leq 1} \operatorname{sgn}(\sigma)\, x^{\#\textit{forward steps}}(-1)^{\#\textit{backward steps}}.$$

证明。 使用莱布尼茨公式 [9] 展开行列式:

$$\det(E_n(x)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} e_{i-\sigma(i)}.$$

除非 $|\sigma(i) - i| \leq 1$，否则条目为 $e_{i-\sigma(i)} = 0$。因此，只有位移有界的排列会产生贡献。每个向前步 $\sigma(i) = i + 1$ 贡献 x，每个向后步 $\sigma(i) = i - 1$ 贡献 -1，每个不动点贡献 1。 □

8 上三角托普利茨矩阵与局部超越步

我们定义

$$T_n(x) = (a_{i-j})_{1 \leq i,j \leq n}, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = x,\ a_k = 0 \text{ for } k \geq 2.$$

命题 8.1 ($T_n(x)$的特征值)。 $T_n(x)$ 的所有特征值均等于 1。

证明。 $T_n(x)$ 是上三角矩阵。上三角矩阵的特征值就是其对角线元素。所有对角线元素都等于 1。 □

命题 8.2 ($T_n(x)$的幂)。对于任意整数 $k \geq 0$,

$$T_n(x)^k = \sum_{j=0}^{\min(k,n-1)} \binom{k}{j} x^j N_n^j,$$

其中， N_n 是第一上对角线上元素均为 *1* 的幂零矩阵。

证明。 令 $T_n(x) = I_n + xN_n$。由二项式定理可得:

$$(I_n + xN_n)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (xN_n)^j = \sum_{j=0}^{\min(k,n-1)} \binom{k}{j} x^j N_n^j.$$

$N_n^n = 0$ 确保了截断。 □

注 8.3（组合解释）。 沿上对角线的每一步都对应一次局部位移 $i \mapsto i+1$ （基本超越）。 $T_n(x)^k$ 的第 $(i, i+j)$ 个元素统计了由此类步骤构成的长度为 j 的加权路径数。

9 结论

在这项工作中，我们探讨了托普利茨矩阵的若干相互关联的方面，建立了谱分析、排列组合与经典积分算子之间的联系。我们从由缩放核函数 $a_k = f(k/n)$ 生成的托普利茨矩阵入手，描述了特征值经验均值的渐近行为。极限中出现的三角权重

反映了矩阵中对角线的密度，为离散矩阵与连续算子之间搭建了一座自然的桥梁。将排列与根据其元素位移构造的托普利茨矩阵相关联后，我们发现，对于均匀随机排列，其期望矩阵收敛于三角核函数 $1-|x|$。这种自然的组合学解释突显了经典排列统计量如何转化为线性代数结构。更一般地，我们证明，只要排列统计量仅取决于相对位置，就会出现托普利兹结构。三对角矩阵刻画有界位移，而上三角矩阵则模拟基本超越步。这些矩阵的幂以及对相关积分算子的研究，提供了关于特征值渐近分布及其对应特征函数的详细信息，展现了离散与连续情形之间的连续性。

这些构造为进一步研究提供了若干方向，包括考察由排列诱导的托普利茨矩阵的精细谱性质，分析由低正则性或非光滑核函数生成的矩阵，将结果推广到其他排列统计量（如逆序或给定长度的循环），以及探索与随机矩阵模型的联系，并应用于图论和马尔可夫过程。因此，托普利茨矩阵为组合学、分析学和概率搭建了一座天然的桥梁，为研究经典与现代问题提供了丰富的框架。潜在应用还包括随机矩阵理论、图拉普拉斯算子和统计物理学。

参考文献

[1] K. Atkinson，《第二类积分方程的数值解》，剑桥大学出版社，1997年。[2]A. Böttcher 和 B. Silbermann，《大型截断托普利茨矩阵导论》，施普林格，纽约，1999年。[3] W. Bryc、A. Dembo、T. Jiang，大型随机托普利茨矩阵、Hankel 矩阵和马尔可夫矩阵的谱测度，《概率年刊》34，1–38（2006年）。[4]P. Diaconis，《概率与统计中的群表示》，讲义—专著系列，第11卷，数理统计学会，海沃德，加利福尼亚州，美国，1988年。[5] R. M. Gray，托普利茨矩阵和循环矩阵：综述，《通信与信息理论基础与趋势》2，155–239（2006年）。[6] U. Grenander 和 G. Szegő，《托普利茨型及其应用》，加利福尼亚大学出版社，伯克利—洛杉矶，1958年。[7] R. A. Horn 和 C. R. Johnson，《矩阵分析》，第2版，剑桥大学出版社，2013年。[8] R. Kress，《线性积分方程》，第3版，施普林格，2014年。[9] T. Muir，《行列式理论》，第2卷，Dover，1960年。

[10] R. P. Stanley，《组合计数》第1卷，第2版，剑桥大学出版社，2012年。[11] G. Szegő，《正交多项式》，第4版，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1975年。[12] P. Tilli，关于托普利茨矩阵谱分布的一则注记，《线性与多重线性代数》，45，147–159（1998年）。[13] H. Widom，论托普利兹算子的谱，《太平洋数学杂志》14，365–375（1964年）。