arXiv:2603.22441v1 [math.CO] 23 Mar 2026

判别式超平面排列交格中的超立方体嵌入与中位数结构 $\mathcal{B}(n,\ k)$

PRAGNYA DAS

摘要。我们利用回路支撑研究判别式排列 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的交格的度量结构。我们证明，与 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 相关联的覆盖图可等距嵌入超立方体中，因此它是一个部分立方体和中位图，其距离由汉明距离给出，测地线则可用对称差描述。我们还证明了随机回路族重叠的泊松极限和尖锐阈值，揭示了其内在的超立方体几何结构。

1. 引言

超平面排列及其交格在组合学、几何学和拓扑学中发挥着核心作用。交格编码了关于该排列的重要组合信息，并且与代数和拓扑不变量密切相关。（参考文献见 [2] ）。

重要的排列族之一是由 Manin 和 Schechtman [3] 引入的判别式排列 $\mathcal{B}(n,k)$。判别式排列是由一般位置的 $\mathbb{R}^k$ 中 n 个超平面的平行平移之间的退化条件所产生的超平面排列，是经典辫子排列的推广。其组合结构与高阶 Bruhat 序以及定向拟阵理论中的概念密切相关。 [3, 5]

判别式排列的一个基本性质是，其超平面由（$k\ +1$）元子集索引，其中 $[n]$（例如，参见 [3, 2]）。这些子集对应于最小退化条件，称为该排列的回路。因此，回路集自然赋予了约翰逊图 $J(n,k\ +1)$ 的结构。

本文研究与判别式排列自然相关的图结构。在这一背景下会出现两种图。第一种是由该排列的回路构成的约翰逊图。第二种是交格 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的覆盖图，其顶点对应于超平面的非空交集，边则表示格中的覆盖关系。

约翰逊图是代数图论中的经典对象，也是距离正则图的一个重要族（参见 [1, 7]）；而交格的覆盖图则呈现出不同的性质。它按秩自然分级，并反映了回路超平面之间的一系列退化条件。理解该图的度量结构，有助于揭示局部组合约束如何组织交格的整体几何结构。

我们首先考察 $\mathcal{B}(n,\ k)$ 的回路结构；它诱导出约翰逊图 $J(n,k\ +1)$，并刻画各个回路之间的相互作用。在此基础上，我们再通过格元素的回路支撑推广到一般格元素，并为 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的覆盖图建立度量描述。我们证明，格元素之间的距离由可行支撑的对称差决定，从而构造出到超立方体的等距嵌入。因此，覆盖图是一个偏立方体，并且，

2020 数学主题分类。 05B35（主要）；52C35、05C12、60C05（次要）。关键词与短语。 判别式超平面排列；交格；中位图；部分立方体；超立方体嵌入；泊松近似。

是一个中位图。
我们进一步通过引入依赖偏序集来描述最短路径的结构，该偏序集决定回路修改的可容许序列，并证明测地线对应于该偏序集的线性扩张。我们还证明，格中的每个区间都与一个超立方体同构，揭示出强烈的局部立方结构。

最后，我们研究随机回路支撑集。我们证明，在稀疏区域中，随机支撑之间的重叠可用泊松近似描述，并且交存在一个尖锐阈值。因此，随机格元素之间的距离集中在接近其最大值的位置，这反映了底层超立方体嵌入的高维几何特征。

本文组织如下。第 3 节回顾判别式排列及其交格的基本性质。第 2 节简要介绍了本文的所有结果。第 4 节研究回路上的约翰逊图。第 5 节通过回路支撑确立度量结构，并证明超立方体嵌入和中位数性质。第 6 节分析区间的凸性与立方体结构。第 7 节研究随机支撑的渐近行为。

这些结果表明，判别式排列的交格具有统一的立方几何，其中局部和全局度量性质均由回路支撑之间简单的组合相互作用所决定。

2. 主要结果

我们概述本文所确立的主要结构性和度量结果。设$C_{n,k} = \left({}^{[n]}_{k+1} \right)$表示回路集合，对于$X \in L(B(n,k))$，令$F(X)$表示其（可行）回路支撑 可行的回路支撑 .

- **度量结构**。 我们证明，格元素之间的距离由其支撑的对称差决定：

$$d(X,Y) = |F(X) \triangle F(Y)|.$$

特别地，$L(B(n,k))$的覆盖图可等距嵌入超立方体$\{0,1\}^{C_{n,k}}$。

- **立方与中位数结构**。 我们证明，覆盖图是一个偏立方体，而且还是一个中位图。三个格元素的中位数由其支撑集上的逐坐标多数规则给出。

- **测地线结构**。 我们根据回路修改的可容许序列刻画格元素之间的最短路径。这些序列由一个依赖偏序集支配，而测地线与该偏序集的线性扩张一一对应。

- **区间结构**。 我们证明，在$L(B(n,k))$中，每个区间 $[X,Y]$ 都与一个超立方体同构。特别地，区间具有由$F(Y) \setminus F(X)$的子集决定的布尔格结构。
- **渐近行为**。 我们研究随机回路支撑，并证明在稀疏区域中，重叠满足泊松近似，同时交还存在一个尖锐阈值。因此，随机格元素之间的距离集中在接近其最大值的范围内。

综合来看，这些结果表明，判别式排列的交格具有统一的立方几何，其中局部和全局的度量性质均由回路支撑之间简单的组合交互所支配。

3. 预备知识

我们回顾与判别式排列及其交格相关的基本定义和记号。

3.1. **判别式排列**。 考虑n 个超平面 $\{H_i^0\}_{i\in[n]=\{1,\dots,n\}}$，其中$n$ 和k 为整数，且$n \geq k+1$，它们在 $\mathbb{R}^k$ 中处于一般位置；其所有平行平移构成集合 $\mathbb{S}$。判别式排列记作 $\mathcal{B}(n,k)$，描述这些平移后的超平面变为仿射相关时出现的退化条件，即，

$$\mathcal{B}(n,k) = \{D_I \subset \mathbb{S} \mid I \subset [n], |I| = k+1\},$$

其中，与指标I 对应的超平面仿射相关。
判别式排列的一个基本性质是，其超平面自然地由指标集 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ [3]的子集标记。几何上，超平面$D_I \in \mathcal{B}(n,k)$表示由$k+1$ 平移超平面构成、且由I 中的元素索引的超平面变为仿射相关这一条件。由于 $\mathbb{R}^k$ 中的$k+1$ 个超平面仿射相关是一种最小退化条件，子集I 便成为该排列组合结构中的回路。因此， $\mathcal{B}(n,k)$的回路集合与 $[n]$, 的所有$(k+1)$-子集构成的一一对应关系，并且本文将所有此类回路的集合记为$C_{n,k} = \binom{[n]}{k+1}$。

3.2. **交格**。 超平面配置的组合结构由其交格编码。对于判别式排列 $\mathcal{B}(n,k)$，我们将此格记为 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$。

$\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的元素是所有形如 D_I 的超平面的非空交集，其中 $I \in C_{n,k}$。因此，每个格元素都可以写成如下形式

$$X = \bigcap_{I\in\mathcal{F}} D_I$$

对于某个族 $\mathcal{F} \subseteq C_{n,k}$。
该格　　按反向包含偏序排列。换言之，对于两个格元素 X 和 Y，我们定义

$$X \leq Y \quad \text{if and only if} \quad Y \subseteq X.$$

ˆ 在此排序下，最小元素 0 对应于整个环境空间 [2]。

3.3. **极小定义族与回路支撑**。 格元素 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 可以表示为多个回路超平面的交。其中一种表示是极小回路定义族。

定义 3.1. 若一族回路 $\{I_1, \dots, I_r\}$ 满足以下条件，则称其为 极小定义族，对应于 X

$$X = \bigcap_{i=1}^{r} D_{I_i}$$

且移除任意回路 I_j 都会严格扩大该交集。

极小定义族描述了非冗余退化条件的集合，并为格元素提供了有用的局部描述。虽然它们提供了格元素的一种表示方式，却无法描述全局结构性质。因此，本文改用如下定义的典范支撑表示：
对于 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$，定义

$$F(X) = \{I \in C_{n,k} : X \subseteq D_I\}.$$

该表示是典范的，并且唯一确定 X，因为 $X = \bigcap_{I\in F(X)} D_I$。

De定义 3.2(可行支撑)。 回路的一个族 $F \subseteq C_{n,k}$ 称为可行的，如果交集　　n

$$X_F := \bigcap_{I\in F} D_I$$

非空。

注 3.3。 只有可行族才对应于交格$L(B(n,k))$中的元素。特别是，每个格元素$X \in L(B(n,k))$都由其支撑唯一表示

$$F(X) = \{I \in C_{n,k} : X \subseteq D_I\},$$

并且满足

$$X = \bigcap_{I \in F(X)} D_I \neq \emptyset.$$

反过来，任意子集$F \subseteq C_{n,k}$未必定义一个格元素，除非相应的交非空。

在本文中，我们将始终默认把所有支撑族限制为可行族。

3.4. **秩结构**。 交格 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$是一个分次偏序集，其中$X \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$的秩定义为

$$\mathrm{rk}(X) = \mathrm{codim}(X).$$

因此，秩记录了定义X的独立退化条件的数量。该格分解为秩层

$$L(B(n,k)) = \bigsqcup_{r \geq 0} L_r, \quad L_r = \{X \in L(B(n,k)) : \mathrm{rk}(X) = r\}.$$

虽然这种分级提供了自然的分层方式，但本文研究的度量结构主要由回路支撑而非秩所决定。

在接下来的章节中，我们使用支撑表示$F(X)$，它提供了一种自然的方式，将格元素表示为$C_{n,\,k}$的子集，以研究 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$的覆盖图。我们还将证明，覆盖图可等距嵌入超立方体，并呈现丰富的度量结构。

4. 回路上的约翰逊图

如上一节所述，判别式排列 $\mathcal{B}(n,k)$的回路由 $[n]$的$(k+1)$子集编索引。本节将研究由这些回路的集合自然诱导出的图结构。

4.1. **回路图的定义**。

定义 4.1。 判别式排列 $\mathcal{B}(n,k)$ 的回路图 是一个图，其顶点集为$C_{n,k}$，当且仅当两个顶点I 和J 相邻时，

$$|I \cap J| = k.$$

等价地，两个回路相邻，当且仅当其中一个可以通过恰好替换一个元素从另一个得到，因为每个回路都包含$k+1$ 个指标。

Pr命题 4.2。 上述定义的回路图与约翰逊图 $J(n,k+1)$同构。

证明。 根据定义，约翰逊图$J(n,r)$的顶点集由 $[n]$，的r 元子集组成；当两个顶点的交的大小为$r-1$ 时，它们相邻。取$r = k+1$，即可得到邻接条件

$$|I \cap J| = k,$$

这与上文定义的邻接关系一致。因此，回路图恰好是约翰逊图 $J(n,k+1)$。□

接下来，我们列出判别式排列的回路结构所具有的所有基本性质，这些性质继承自约翰逊图的组合结构；约翰逊图是代数组合图论中研究得十分透彻的对象。

4.2. **基本性质**。

命题 4.3。 约翰逊图 $J(n,k+1)$ 具有以下性质（例如参见 [1, 第 9], [7]章），判别式排列的回路结构也具有这些性质：

(1) 该图是度为$(k+1)(n-k-1)$的正则图。(2) 对称群 S_n 在顶点上传递作用，因此该图是顶点传递的。(3) 顶点 I 与 J 之间的距离满足

$$d(I,J) = (k+1) - |I \cap J|.$$

(4) 直径等于

$$\min\{k+1, n-k-1\}.$$

4.3. **几何解释**。 约翰逊图也有一种自然的多面体解释。它是超单纯形的 1-骨架

$$\Delta(n,k+1) = \{x \in [0,1]^n : x_1 + \cdots + x_n = k+1\}.$$

这个多面体的顶点对应于恰有$k+1$ 个 1 的 0-1向量，它们与 $[n]$ 的（$k+1$）个子集一一对应。当一个值为 1 的坐标被一个值为 0 的坐标替换时，两个顶点相邻，这恰好对应于约翰逊图的邻接关系。这种几何解释凸显了判别式排列回路结构中存在的强对称性。

4.4. **与格的度量结构的联系**。 回路上的约翰逊图结构为交格的度量行为提供了一个局部模型。

如上所述，约翰逊图$J(n,k+1)$ 的顶点对应于各个回路，而两个回路I 和J 之间的距离由$d(I,J) = (k+1) - |I \cap J|$给出。因此，距离取决于重叠部分的大小，或者等价地，取决于子集的对称差。

当格元素由其回路支撑表示时，这一观察自然可以推广到一般的格元素。事实上，对于 $X,Y \in L(B(n,k))$，支撑 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 是 $C_{n,k}$ 的子集，并且将证明覆盖图中的距离满足

$$d(X,Y) = |F(X) \triangle F(Y)|.$$

从这个意义上说，约翰逊图刻画了单个回路层面的度量行为，而交格的覆盖图则是其高维推广，其中顶点对应的是回路族，而非单个回路。

此外，覆盖图的超立方体嵌入可以看作约翰逊图的超单纯形实现的一种自然推广：回路对应于超立方体中一个固定权重切片的顶点，而一般的格元素则对应于回路的任意可行子集。从固定大小子集到一般支撑的转变，促成了立方几何的形成。

因此，约翰逊图为 $L(B(n,k))$ 的整体度量结构提供了基本的组合构件，并为后续章节发展的超立方体几何提供了指导模型。

在下一节中，我们将这一视角从单个回路拓展到一般的格元素，并用每个元素的回路支撑来表示它。这将对$\mathcal{L}(B(n,k))$的覆盖图给出全局描述，表明它是超立方体的一个等距子图。

5. 通过回路支撑构建度量结构

交格 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$具有丰富的组合结构，但其度量性质并不显而易见。特别是，覆盖图中的距离取决于退化条件如何累积，因此两个格元素之间的距离该如何度量，事先并不清楚。

基于极小定义族的朴素方法并不充分，因为这类表示并不唯一。为解决这一问题，我们采用基于回路支撑的典范表示，从而能够以唯一且自然的方式编码每个格元素。

5.1. 典范支撑表示与局部移动。对于$X \in L(\mathcal{B}(n,k))$，典范支撑表示$F(X)$记录所有包含$X$ 的回路超平面，并对X满足的退化条件给出典范描述。

回顾一下，在全文中，我们将所有支撑族都限制为可行的支撑族。 .

命题 5.1。对于每个 $X \in L(\mathcal{B}(n,k))$，有

$$X = \bigcap_{I \in F(X)} D_I.$$

特别地，映射 $X \mapsto F(X)$ 是单射。

证明。 根据定义，$F(X)$ 由所有包含 X 的回路超平面组成，因此显然

$$X \subseteq \bigcap_{I \in F(X)} D_I.$$

反过来，假设 x 属于每个满足 $X \subseteq D_I$ 的 D_I 。由于 X 本身就是定义它的所有超平面的交，满足所有这些超平面的任何点都必属于X。因此等式成立。
如果 $F(X) = F(Y)$，那么 X 和Y 都是同一族超平面的交，因此 $X = Y$。 □

理解格 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 结构的一种自然方式，是组合地诠释其中的每个交。因此，我们不直接处理超平面的交，而是记录其中包含哪些回路超平面。

为形式化这一点，我们将每个元素 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 与其支撑相关联。支撑表示使我们能够如下将格元素编码为二进制向量；定义

$$\varphi : L(\mathcal{B}(n,k)) \to \{0,1\}^{C_{n,k}}, \quad \varphi(X) = \chi_{F(X)}.$$

每个坐标对应一个回路，并记录该回路是否包含X。
这样，每个格元素都被视为高维超立方体中的一个点，而交格的组合结构开始呈现出二进制向量的特征。

接下来，我们研究覆盖图中的距离，因为这能让我们从格的组合定义过渡到显式的几何模型。为了理解距离，我们首先分析覆盖关系。

引理 5.2. 如果 X 和 Y 在覆盖图中相邻，那么它们的支撑恰好相差一个回路，即*ff,*

$$|F(X) \triangle F(Y)| = 1.$$

证明. 覆盖关系对应于秩变化一，这意味着添加或移除一个独立退化条件。

就支撑而言，这对应于恰好添加或移除一个回路超平面。其他回路不会发生变化，否则秩就会保持不变，或变化超过一。□

引理 5.2 表明，我们可以每次修改一个回路的支撑，从而在格中移动。现在的问题是，这样的修改是否总能对应有效的格元素。

引理 5.3. 设 $X \in L(\mathcal{B}(n,k))$ 且 $I \in C_{n,k}$. 那么，只要族 $F(X) \cup \{I\}$ 和 $F(X) \setminus \{I\}$ 定义了非空超平面交集，它们就对应格元素。

证明。 回想一下，回路的每个子集都对应于相应超平面的交集：

$$X_F = \bigcap_{J \in F} D_J.$$

因此，任意可行族 $F \subseteq C_{n,k}$ 都定义了一个格元素。

现在考虑 $F(X)$。

(1) 添加一个回路。 族 $F(X) \cup \{I\}$ 对应于交

$$X' = X \cap D_I.$$

由于 X 非空且 D_I 是一个超平面，因此该交要么等于 X ，要么使余维增加一。特别地，它定义了一个有效的格元素。

(2) 移除一个回路。 族 $F(X) \setminus \{I\}$ 对应于移除一个约束，这会扩大交：

$$X'' = \bigcap_{J \in F(X) \setminus \{I\}} D_J.$$

这仍是一个非空交，因此是一个有效的格元素。

因此，只要所得支撑仍然可行，添加或移除单个回路就会得到一个有效的格元素。 □

5.2. **度量结构与等距嵌入。** 理解了局部结构之后，我们现在转向对距离的全局描述。

定理 5.4 (度量表示)**.** 对于所有的 $X,Y \in L(\mathcal{B}(n,k))$，覆盖图中的距离满足

$$d(X,Y) = |F(X) \triangle F(Y)|.$$

证明。 我们证明这两个不等式。

任意路径中的每一步都会改变支撑中的一个回路。因此，从 X 到 Y 的任何路径都必须至少修改一次 $F(X) \triangle F(Y)$ 中的每个元素。因此

$$d(X,Y) \geq |F(X) \triangle F(Y)|.$$

现在我们构造一条长度为此值的路径。

Let

$$A = F(X) \setminus F(Y), \quad B = F(Y) \setminus F(X).$$

我们先逐一移除 A中的回路，然后添加 B中的回路。

根据引理 5.3 以及支撑的可行性，每个中间族都定义了一个格元素　　nt.

这产生了一条长度为 $|A| + |B| = |F(X) \triangle F(Y)|$ 的路径。

由于两个界相等，因此等号成立。 □

距离公式表明，支撑表示不仅方便，而且是精确的。

定理 5.5. 映射 φ 是一个等距嵌入。特别地， $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的覆盖图是一个偏立方体。

证明。 根据定理 5.4，X 与Y 之间的距离等于 $\varphi(X)$ 与$\varphi(Y)$之间的汉明距离。因此， φ 保距，并定义了一个到超立方体的等距嵌入。 □

定理 5.6（中位图性质）。$L(B(n,k))$ 的覆盖图是一个中位图。也就是说，对于任意三个顶点 X、Y、$Z \in L(B(n,k))$，存在唯一的顶点 M，使得

$$d(X,Y) = d(X,M) + d(M,Y), \quad d(X,Z) = d(X,M) + d(M,Z), \quad d(Y,Z) = d(Y,M) + d(M,Z).$$

证明。由定理 5.5，映射

$$\phi : L(B(n,k)) \to \{0,1\}^{C_{n,k}}, \quad \phi(X) = \chi_{F(X)},$$

是一个等距嵌入，其中距离对应于汉明距离。
设 $x = \phi(X)$、$y = \phi(Y)$ 和 $z = \phi(Z)$。在超立方体 $\{0,1\}^{C_{n,k}}$ 中，唯一的中位数按坐标定义为

$$m_I = \mathrm{maj}(x_I, y_I, z_I), \quad I \in C_{n,k}.$$

定义

$$F(M) = \{I \in C_{n,k} : m_I = 1\} = (F(X) \cap F(Y)) \cup (F(Y) \cap F(Z)) \cup (F(Z) \cap F(X)).$$

我们证明 $F(M)$ 是可行的。
设 $I \in F(M)$。那么，I 至少属于下列三个支撑中的两个：$F(X)$、$F(Y)$、$F(Z)$。不妨设 $I \in F(X) \cap F(Y)$。于是，X 和 Y 都位于超平面 D_I 中，因此它们的交 $X \cap Y$ 包含于 D_I 中。

因此，由 $F(X) \cap F(Y)$ 索引的每个超平面都包含非空集合 $X \cap Y$。对于 $F(Y) \cap F(Z)$ 和 $F(Z) \cap F(X)$，同样成立。

现在考虑族 $F(M)$。$F(M)$ 中的每个约束都至少由下列非空集合中的一个满足：

$$X \cap Y, \quad Y \cap Z, \quad Z \cap X.$$

由于 X、Y、Z 都是超平面的交集，因此这些集合都是仿射子空间，并且其中任意两个都是超平面的一致交集。由此可知，由 $F(M)$ 索引的约束集合是相容的，因此

$$\bigcap_{I \in F(M)} D_I \neq \emptyset.$$

因此，$F(M)$ 定义了一个格元素 M。
根据构造，$\phi(M) = m$。由于超立方体中的中位数是唯一的，并且 ϕ 是等距嵌入，M 是位于 X、Y、Z 中每一对顶点之间最短路径上的唯一顶点。这就证明了该结果。□

5.3. **测地线结构**。现在我们描述覆盖图中的最短路径。

定义 5.7（依赖偏序集）。设 X、$Y \in L(B(n, k))$，并定义

$$A = F(X) \setminus F(Y), \quad B = F(Y) \setminus F(X).$$

考虑集合

$$S = A \cup B.$$

我们在 S 上定义偏序 $\preceq$ 如下：
对于 I、$J \in S$，若在所有通过可行支撑将 $F(X)$ 变换为 $F(Y)$ 的单回路修改序列中，对应于 I 的修改都必须先于对应于 J 的修改发生，则称 $I \preceq J$。
等价地，若不存在任何可行序列使 J 先于 I 执行，则 $I \preceq J$。

定理 5.8 (测地线刻画)。设 X、$Y \in L(B(n,k))$。那么，X 与 Y 之间的每条测地线，都是通过恰好修改一次 $F(X) \triangle F(Y)$ 中的各个回路，并按照依赖偏序集 $(S, \preceq)$ 所规定的顺序得到的。

特别地，测地线与 $(S, \preceq)$ 的线性扩张之间存在双射。

证明。 根据距离公式，我们有

$$d(X,Y) = |F(X)\triangle F(Y)| = |S|.$$

因此，任意测地线都必须恰好修改 S 中的每个回路一次。
路径中的每一步都对应于添加或移除一个回路，并且中间支撑必须始终保持可行。因此，当且仅当每个中间支撑都对应一个可行族时，一系列修改才定义一条有效路径。

根据依赖偏序集的定义，如果先执行 J 再执行 I 会违反可行性，那么对应于 I 的修改必须先于对应于 J 的修改。因此，任何有效的修改序列都必须遵循偏序 $\preceq$。

反过来，$(S, \preceq)$ 的任意线性扩张都会给出一个遵循所有可行性约束的回路排列，因此可产生一条从 X 到 Y 的有效路径。由于每个回路恰好修改一次，这样的路径长度为 $|S|$，因此它是一条测地线。

这建立了测地线与依赖偏序集的线性扩张之间的双射。 □

注 5.9. 如果 S 中的所有回路都彼此独立，即不存在可行性约束，那么依赖偏序集就是平凡的，测地线的数量为 $|S|!$。
这反映了覆盖图中的测地线与超立方体中的最短路径类似这一事实：超立方体中的每个坐标都恰好修改一次。

6. 区间的凸性与立方体结构

上一节得到的超立方体嵌入表明，$\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的度量结构或许能得到更强的几何描述。虽然我们现在已经从整体上理解了距离，但自然会想知道这种立方体行为是否也局部存在于格的区间之中。我们证明事实确实如此：每个区间都继承了一种典范的立方体结构。

6.1. **区间结构与凸性**。令 $X,Y \in L(\mathcal{B}(n,k))$ 且 $X \le Y$。那么 $F(X) \subseteq F(Y)$.
因此，区间 $[X,Y]$ 中的每个元素 Z 都满足 $F(X) \subseteq F(Z) \subseteq F(Y)$。因此，区间中的元素恰好对应于位于两个固定集合之间的支撑。现在我们证明这种描述与度量结构相容。

定理 6.1. 对于任意 $X, Y \in L(\mathcal{B}(n,k))$，区间 $[X,Y]$ 在覆盖图中是凸的。

证明。设 $Z_1, Z_2 \in [X,Y]$。那么

$$F(X) \subseteq F(Z_1), F(Z_2) \subseteq F(Y).$$

从 Z_1 到 Z_2 的任意最短路径，每次只改变 $F(Z_1)\triangle F(Z_2)$ 中的一个回路。由于这两个支撑都位于 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 之间，所有中间支撑也都位于二者之间。因此，路径上的每个顶点都仍然属于 $[X,Y]$。□

6.2. **区间的立方体结构**。 现在我们通过明确描述区间来加强前面的结果。

定理 6.2. 对于任意 $X, Y \in L(\mathcal{B}(n,k))$，区间 $[X,Y]$ 同构于维数为 $|F(Y) \setminus F(X)|$ 的超立方体。

证明。 令 $S = F(Y) \setminus F(X)$。每个元素 $Z \in [X,Y]$ 都可以通过选择一个子集 $T \subseteq S$ 并定义

$$F(Z) = F(X) \cup T.$$

这就给出了 $[X, Y]$ 与 2^S 之间的一个双射。如果两个元素的支撑相差一个回路，则称它们相邻；这对应于超立方体中的邻接关系。因此，$[X, Y]$ 与 $Q_{|S|}$ 同构。 □

我们在图 1 中展示了区间的立方体结构。该结果表明，观察到的立方结构

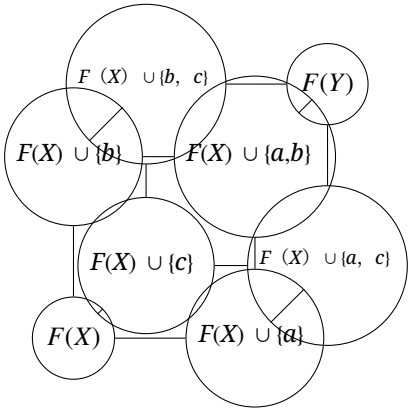

图 1。格 $[X, Y]$ 在 $L(B(n,k))$ 中的一个区间表示为三维立方体。每个顶点对应一个形如 $F(X) \cup T$ 的可行支撑，其中 $T \subseteq \{a, b, c\} = F(Y) \setminus F(X)$。边对应于添加一个回路，且距离与汉明距离一致。

在全局层面成立的性质实际上也在局部层面成立。覆盖图不仅是偏立方体，而且每个区间都分解为一个典范超立方体，其维数由端点之间独立回路扩张的数量决定。特别地，该格具有正则度量几何，其中全局距离和局部子结构均由同一组合原理支配。

7. 电路支撑的渐近行为

前几节建立的几何描述表明，$\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 的覆盖图具有立方结构，其中距离由回路支撑的对称差决定。特别地，两个格元素 X 和 Y 之间的距离取决于重叠 $|F(X) \cap F(Y)|$ 的大小。这自然引出了以下问题：当回路数量变大时，两个回路支撑之间重叠部分的典型大小是多少？

本节将在概率框架下探讨这一问题。我们证明，在稀疏区域，随机回路族之间的交叠通常可以忽略不计，因此距离会集中在其可能达到的最大值附近。这一现象体现了该格所蕴含的高维超立方体几何。

现在我们研究随机回路支撑集之间交叠的典型行为，以及其对覆盖图度量结构的影响。令 $N = \binom{n}{k+1}$ 表示回路总数。令 F 和 G 为 $C_{n,k}$ 中独立均匀选取的、大小为 r 的子集。定义

$$T = |F \cap G|.$$

量 T 衡量支撑之间的重叠，并直接影响格中的距离。我们首先分析其分布。

定理 7.1 (带误差界的泊松近似)。 随机变量 T 服从参数为 $(N,\ r,\ r)$的超几何分布。

若 $r = o(\sqrt{N})$，则 T 依分布收敛于参数为

$$\lambda = \frac{r^2}{N}.$$

此外，存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对每个整数 $t \geq 0$,

$$\left|\mathbb{P}(T = t) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^t}{t!}\right| \leq C\frac{r^3}{N^2}.$$

证明。 由于 F 和G 均匀地从大小为 r 的集合中选取，因此它们的交集 T 的大小服从参数为（$N,\ r,\ r$）的超几何分布。
当 $r = o(\sqrt{N})$ 时，相关指示变量之间的依赖关系可以忽略不计。根据不放回抽样的泊松近似标准结果（参见 [10]），T 与参数为 $\lambda = r^2/N$ 的泊松随机变量之间的全变差距离，至多为r^3/N^2 的某个常数倍。

当$n \to \infty$时，这个界趋于零，从而证明依分布收敛。 □

泊松近似表明，在稀疏区域中，重叠通常很小。现在，我们通过确定交何时以高概率发生来进一步细化这一结果。

定理 7.2 (交的尖锐阈值)。 设 $r = r(n)$且 $N = \binom{n}{k+1}$。则:

- 若 $r = o(\sqrt{N})$，则 $\mathbb{P}(F \cap G \neq \emptyset) \to 0$,
- 若 $r = \omega(\sqrt{N})$，则 $\mathbb{P}(F \cap G \neq \emptyset) \to 1$。

证明。 我们计算

$$\mathbb{P}(F \cap G = \emptyset) = \frac{\binom{N-r}{r}}{\binom{N}{r}}.$$

这可以写成

$$\mathbb{P}(F \cap G = \emptyset) = \prod_{i=0}^{r-1}\left(1 - \frac{r}{N-i}\right).$$

取对数并利用 $\log(1-x) = -x + O(x^2)$，我们得到

$$\log \mathbb{P}(F \cap G = \emptyset) = -\frac{r^2}{N} + O\left(\frac{r^3}{N^2}\right).$$

取指数可得

$$\mathbb{P}(F \cap G = \emptyset) = \exp\left(-\frac{r^2}{N} + O\left(\frac{r^3}{N^2}\right)\right).$$

如果 $r = o(\sqrt{N})$，那么 $r^2/N \to 0$，因此 $\mathbb{P}(F \cap G = \emptyset) \to 1$。如果 $r = \omega(\sqrt{N})$，那么 $r^2/N \to \infty$，因此 $\mathbb{P}(F \cap G = \emptyset) \to 0$。 □

现在，我们将这些概率结果转化为关于格的几何信息。

定理 7.3（度量集中）。 设 X_F 和 X_G 是分别对应于大小为 r 的支撑 F 和 G 的格元素。那么

$$d(X_F, X_G) = 2r - 2|F \cap G|.$$

此外，如果 $r = o(\sqrt{N})$，那么

$$\mathbb{P}(d(X_F, X_G) = 2r) \to 1.$$

证明。 根据对称差恒等式，

$$d(X_F, X_G) = |F \triangle G| = |F| + |G| - 2|F \cap G| = 2r - 2|F \cap G|.$$

根据定理 7.2，当 $r = o(\sqrt{N})$ 时，我们有 $\mathbb{P}(|F \cap G| = 0) \to 1$。代入距离公式即可得出结果。□

综合这些结果可知，在稀疏区域中，随机支撑之间的重叠可以忽略，因此对应的格元素之间的距离接近最大值。这为覆盖图中观察到的高维立方几何提供了概率解释。

因此，回路支撑的渐近行为进一步表明，判别式排列的交格呈现出稳健的立方几何，无论是在局部（通过区间）还是在整体上（通过度量集中）。

8. 结论

本文从度量角度研究了判别式排列的交格 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$。通过用回路支撑对格元素进行编码，我们证明覆盖图具有典范立方几何：距离由对称差决定，并形成到超立方体的等距嵌入。这一结构在局部也依然成立，因为每个区间本身都是一个立方体，揭示出一种强而统一的组合凸性。渐近分析进一步表明，在稀疏区域中，随机回路族之间的重叠可以忽略，因此典型元素之间的距离接近最大值。总之，这些结果表明，格的局部和整体几何都由同一个潜在的立方原理支配。这确立了 $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ 是一类由超平面排列产生的自然中位图。

从这一视角自然引出了未来的研究方向。进一步完善度量描述将颇有意义，尤其是要理解稀疏区域之外的极值距离和典型距离，并探究这种立方结构是否会呈现更强的几何性质。更广泛地说，一个重要问题是：类似的度量与概率现象是否也会出现在其他类别超平面配置的交格中，这或许意味着这些组合对象背后存在更一般的几何框架。

参考文献

[1] C. Godsil 和 G. Royle，《代数图论》，数学研究生教材 207，Springer，2001 年。[2] P. Orlik 和 H. Terao，《超平面配置》，数学科学基础丛书，第 300 卷，Springer，柏林，1992 年。[3] Yu. I. Manin 和 V. V. Schechtman，超平面配置、高阶辫群与高阶 Bruhat 序，《纯数学高级研究》**17**（1989），289–308。[4] G. M. Ziegler，《多面体讲义》，数学研究生教材，第 152 卷，Springer，纽约，1995 年。[5] A. Bj¨orner、M. Las Vergnas、B. Sturmfels、N. White 和 G. Ziegler，《定向拟阵》，第 2 版，剑桥大学出版社，1999 年。[6] A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers，《图的谱》，Springer，纽约，2012 年。[7] A. E. Brouwer、A. M. Cohen 和 A. Neumaier，《距离正则图》，Springer，1989 年。[8] R. P. Stanley，《计数组合学，第 1 卷》，第 2 版，剑桥大学出版社，剑桥，2011 年。[9] R. P. Stanley，《计数组合学，第 2 卷》，剑桥大学出版社，剑桥，1999 年。[10] A. D. Barbour、L. Holst、S. Janson，《泊松近似》，牛津概率研究，1992 年。

印度，印度信息技术学院科塔分校数学系。电子
邮箱地址：pragnya.hmas@iiitkota.ac.in