具有非最小耦合的标量-张量理论中的黑洞解重构

K. K. Ernazarov

引力与宇宙学研究所，俄罗斯人民友谊大学（俄罗斯人民友谊大学），俄罗斯联邦莫斯科米克卢霍-马克莱街*6*号，邮编*117198*，

arXiv:2603.22517v1 [gr-qc] 23 Mar 2026

摘要

我们研究乔丹框架中具有非最小耦合的标量-张量理论。该模型的作用量包含势能项 $U(\varphi)$ 和耦合函数$f(\varphi)$。我们针对以 Buchdahl 参数化形式表示的一般静态球对称度规，探讨重构过程：$ds^2 = (A(u))^{-1}\,du^2 - A(u)dt^2 + C(u)d\Omega^2,$ ，其中给定 $A(u) > 0$ 和 $C(u) > 0$。该过程给出了$U(\varphi(u))$、 $f(\varphi(u))$ 和 $d\varphi/du$的关系式，从而可在给定度规的情况下得到运动方程的精确解。这种方法的关键在于函数 $f(\varphi(u))$ 满足的一阶线性微分方程的解。我们通过两个示例说明这一形式体系：a）以 Reissner-Nordstr¨om-(反)德西特度规为起点；b）以 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(反)德西特度规为起点。

1 引言

一个多世纪以来，广义相对论（GR）一直是我们理解引力的基石，它将引力描述为由质量和能量引起的时空曲率。尽管取得了非凡的成功，人们对更完备引力理论的探索从未停止。在众多提出的替代理论中，引力标量-张量理论是最经久不衰、研究最深入且具有充分物理动机的爱因斯坦理论扩展之一。这些理论在广义相对论的度规张量场之外引入了一个额外的标量场，从而提供了一个更丰富、更灵活的框架，用于探索从自然常数变化到神秘的宇宙加速膨胀等现象。

标量-张量理论的核心创新在于引入了一种新的自由度：标量场，通常记作 ϕ。广义相对论的作用量仅依赖于里奇标量 R（它描述时空曲率），而标量-张量理论的作用量则同时包含 R和标量场 ϕ，以及其动能和势能。一般作用量可写成一种常与伯格曼-瓦格纳类理论相关的形式 [1],[2]:

$$S = \int d^4z\,|g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f(\phi)}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{2}\omega(\phi) g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - U(\phi) \right) + S_m[\psi, g_{MN}], \qquad (1.1)$$

在这种表述中，$f(\phi)$ 是一个将标量场直接与曲率耦合的函数，体现了非最小耦合。这是标量-张量理论的标志。函数 $\omega(\phi)$ 充当“布兰斯-迪克耦合参数”，而 $U(\phi)$ 是一种势，可赋予标量场质量或驱动宇宙加速。最后一项 S_m 表示所有物质场 (ψ) 的作用量，它们只与度规 g_{MN} 普遍耦合。这种普遍耦合至关重要，因为它确保弱等效原理成立——所有试验物体在外部引力场中的下落速率相同，这一事实已通过高精度实验得到验证。

布兰斯-迪克理论是最简单的情形，其中 $f(\phi) = \phi$ 且 $\omega(\phi)$ 为常数，并且不存在势。在该模型中，标量场的倒数充当有效引力常数（$G_{eff} \sim \frac{1}{\phi}$），因此 G 的变化性是一项核心预言。

标量-张量理论中一个丰富而有时令人困惑的方面，是共形变换的运用。从数学上讲，可以对度规（$g_{MN} \to \tilde{g}_{MN} = \Omega^2(\phi) g_{MN}$）进行变换，以不同形式重写作用量。在所谓的 *Jordan frame*中，标量场与曲率非最小耦合，而物质沿度规 g_{MN}的测地线运动。在变换后的框架，即 *Einstein frame*中，作用量的引力部分看起来与广义相对论中的完全相同，但标量场变为最小耦合，并开始与物质直接相互作用。哪个框架才是“物理的”，长期以来一直存在争论。尽管经典预言通常与框架无关，但这场争论凸显了标量-张量理论与广义相对论之间的深刻差异，尤其是在违反强等效原理这一问题上。违反该原理意味着，具有质量且自身引力显著的物体（如中子星）的运动可能取决于其内部组成；这也是实验检验的重要目标。

在这一科学研究领域，我们可以找出源自伯格曼-瓦格纳类理论、具有非最小耦合的主要标量-张量引力理论。它们是：

- 巴克理论 [3], ，其中有效引力常数确实是一个常数：

$$f(\phi) = \phi, \quad \omega(\phi) = \frac{4 - 3\phi}{2\phi(\phi - 1)}. \tag{1.2}$$

巴克的标量-张量理论是替代引力理论中一个重要且概念清晰的分支。该理论以局域引力常数为常数这一条件 G（由此确定耦合函数 $\omega(\phi)$）为定义，是研究标量-张量引力所产生影响的宝贵理论模型，同时自动满足许多关于引力常数变化的局域实验约束。它的主要价值在于能够生成精确的宇宙学解和天体物理解，为研究标量场在宇宙动力学中的作用提供了实验室，涵盖从初始奇点到黑洞形成，以及引力本质等问题。

- 施温格理论 [4, 5]:

$$f(\phi) = \phi, \quad \omega(\phi) = \frac{K - 3\phi}{2\phi^2}, \quad K = \text{const} > 0. \tag{1.3}$$

施温格的标量-张量理论是替代引力理论中一个重要且实用的分支。它是诺德特韦特类中一个较为简单、便于解析处理的模型。它的主要价值在于能够生成精确的宇宙学解，为理论研究提供了

一个实验平台，用于研究标量场在早期宇宙动力学中的作用、暗能量的本质，以及超越爱因斯坦理论的引力行为。

本文结构如下：第2节简要介绍具有非最小耦合的标量-张量引力理论，重点介绍重构方法。关于该方法的更详细分析已发表于我们的先前工作 [12]。由式（2.29）显然可知，主方程是一个齐次一阶微分方程。第3节将第2节中得到的重构方法结果应用于 Reissner-Nordstr¨om-（反）德西特度规以及 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-（反）德西特度规。附录详细分析了拉格朗日量（2.6）的推导。最后，本文讨论研究结果并给出总结性评述。

2 具有非最小耦合的重构标量-张量理论

标量-张量理论通常被视为具有非最小（共形或非共形）耦合标量场的广义相对论：

$$f(\phi) = 1 - \xi\phi^2, \quad \omega(\phi) = 1, \quad \xi = \text{const}. \tag{2.1}$$

该理论分为四种情形，$\psi(\phi)$) 的表达式各不相同，相关讨论见 [6]: (a) $\xi = 1/6$ （共形耦合），(b) $0 < \xi < 1/6$, (c) $\xi > 1/6$ 和 (d) $\xi < 0$。

本文讨论在 $\omega(\phi) = 1$ 情形下，对于任意函数 $f(\phi)$ 的非最小耦合标量-张量理论解。乔丹框架中的作用量形式如下：

$$S = \int d^4z\,|g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f(\phi)}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - U(\phi) \right), \tag{2.2}$$

其中，$\kappa^2 = 8\pi\frac{G_N}{c^4}$ (G_N 是牛顿引力常数，c 是光速），ϕ 是标量场，$g_{MN}dz^M dz^N$ 是符号为 $(-,+,+,+)$ 的 $4d$ 度规，$R[g]$ 是标量曲率，$U(\phi)$ 是势，$f(\varphi)$ 和 $\omega(\phi)$ 是任意函数（$f(\phi) > 0$ 描述了标量场 ϕ 与曲率之间的非最小耦合）。

我们研究度规为

$$ds^2 = g_{MN}(z)dz^M dz^N = e^{2\gamma(u)}du^2 - e^{2\alpha(u)}dt^2 + e^{2\beta(u)}d\Omega^2 \tag{2.3}$$

定义在流形上的

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_* \times S^2. \tag{2.4}$$

这里，$\mathbb{R}_* = (r_h, +\infty)$，其中 r_h 是黑洞视界，S^2 是带有度规 $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$的二维球面，其中 $0 < \theta < \pi$ 和 $0 < \varphi < 2\pi$。

将度规 (2.3) 代入作用量，可得

$$S = 4\pi \int du \left(L + \frac{dF_*}{du} \right), \tag{2.5}$$

其中拉格朗日量 L 为

$$L=\frac{f(\phi)}{\kappa^2}\left(e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\beta}+2\dot{\alpha}\right)+e^{\alpha+\gamma}\right)+\frac{1}{\kappa^2}\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}-\frac{1}{2}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\phi}^2-e^{\alpha+\gamma+2\beta}U\left(\phi\right), \tag{2.6}$$

全导数项与我们的讨论无关。本文中以及下文中，我们记作 $\dot{x}=\frac{dx}{du}$。关系式 (2.5) 的推导见附录，其中给出了关于 F_* 项的显式关系式。

利用度规 (2.3)，从作用量 (2.2) 推导出的运动方程等价于由拉格朗日量 (2.6) 得到的拉格朗日方程，其形式如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\gamma}=\frac{f}{\kappa^2}\left(-e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\beta}+2\dot{\alpha}\right)+e^{\alpha+\gamma}\right)-\frac{1}{\kappa^2}\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)\\+\frac{1}{2}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\phi}^2-e^{\alpha+\gamma+2\beta}U\left(\phi\right)=0,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\frac{1}{\kappa^2}\frac{d}{du}\left(2fe^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}+\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\right)\\-\frac{f}{\kappa^2}\left(e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\beta}+2\dot{\alpha}\right)+e^{\alpha+\gamma}\right)+\frac{1}{\kappa^2}\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}\left(e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)\right)-\\\frac{1}{2}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\phi}^2-e^{\alpha+\gamma+2\beta}U\left(\phi\right)=0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\beta}=\frac{2}{\kappa^2}\frac{d}{du}\left(fe^{\alpha-\gamma+2\beta}\left(\dot{\beta}+\dot{\alpha}\right)+\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\right)-\\\frac{2}{\kappa^2}\left(fe^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\beta}+2\dot{\alpha}\right)+\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)\right)-\\e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\phi}^2-2e^{\alpha+\gamma+2\beta}U\left(\phi\right)=0,\end{aligned} \tag{2.9}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\kappa^2}\frac{df}{d\phi}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}-e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\phi}\right)\\-\left(\frac{1}{\kappa^2}\dot{\phi}\frac{d^2f}{d\phi^2}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}-e^{\alpha+\gamma+2\beta}\frac{dU}{d\varphi}\right)=0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

现在，我们采用满足 $\alpha=-\gamma$的 Buchdahl径向规范（不失一般性）。对于度规 (2.3)，我们得到

$$ds^2=\left(A\left(u\right)\right)^{-1}du^2-A\left(u\right)dt^2+C\left(u\right)d\Omega^2, \tag{2.11}$$

其中

$$e^{2\gamma(u)} = (A(u))^{-1}, \quad e^{2\alpha(u)} = A(u) > 0, \quad e^{2\beta(u)} = C(u) > 0. \tag{2.12}$$

下文中我们使用以下恒等式

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{A}}{2A}, \qquad \dot{\beta} = \frac{\dot{C}}{2C}. \tag{2.13}$$

我们令（不失一般性） $\kappa^2 = 1$。此外，我们记

$$f(\phi(u)) = f, \qquad U(\phi(u)) = U \tag{2.14}$$

因此

$$\frac{d}{du}f = \frac{df}{d\phi}\frac{d\phi}{du} \Longleftrightarrow \dot{f} = \frac{df}{d\phi}\dot{\phi}, \tag{2.15}$$

$$\frac{d}{du}U = \frac{dU}{d\phi}\frac{d\phi}{du} \Longleftrightarrow \dot{U} = \frac{dU}{d\phi}\dot{\phi}. \tag{2.16}$$

将 (2.7) 乘以 (-2)，并利用关系式 (2.12)、(2.13)、(2.15)，得到

$$\left(C\dot{A} + 2A\dot{C}\right)\dot{f} + 2\left(AK + \frac{\dot{C}\dot{A}}{2} - 1\right)f - CA\dot{\phi}^2 + 2CU = 0, \tag{2.17}$$

这里以及下文中，我们使用以下记号

$$K \equiv \left(\frac{\dot{C}}{2C}\right)^2 C. \tag{2.18}$$

将 (2.8) 乘以 2，并利用关系式 (2.12)、(2.13)、(2.15)、(2.18)，得到

$$2AC\ddot{f} + \left(2A\dot{C} + C\dot{A}\right)\dot{f} + 2\left(\frac{\dot{C}\dot{A}}{2} - AK + A\ddot{C} - 1\right)f + CA\dot{\phi}^2 + 2CU = 0. \tag{2.19}$$

类似地，利用（2.12）、（2.13）、（2.15）和（2.18），我们将方程（2.9）改写为

$$2AC\ddot{f} + \left(A\dot{C} + 2C\dot{A}\right)\dot{f} + \left(\dot{C}\dot{A} + A\ddot{C} + C\ddot{A} - 2AK\right)f + CA\dot{\phi}^2 + 2CU = 0. \tag{2.20}$$

现在，将方程（2.10）乘以 $2\dot{\phi}$ 可得

$$\left(2A\ddot{C} + C\ddot{A} + 3\dot{A}\dot{C}\right)\dot{f} - 2\left(C\dot{A} + A\dot{C}\right)\dot{\phi}^2 - 2AC\dot{\phi}\ddot{\phi} - \left(2A\dot{C} + C\dot{A}\right)\left(\ddot{f} - \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\dot{f}\right) + 2AC\dot{U} = 0. \tag{2.21}$$

这里我们施加以下限制

$$\dot{\phi} \neq 0 \quad \text{for} \quad u \in (u_-, u_+), \tag{2.22}$$

其中区间 (u_-, u_+) 属于 $\mathbb{R}_* = (u_-, +\infty)$。那么，关系式 (2.21) 和 (2.10) 在此区间内等价。

将方程 (2.19) 与 (2.17) 相加，并将结果除以 $4C$，可得函数 $U = U(\phi(u))$ 的关系式

$$U = -\frac{1}{2C}\left[CA\ddot{f} + \left(2A\dot{C} + \dot{A}C\right)\dot{f} - \left(2 - \dot{C}\dot{A} - A\ddot{C}\right)f\right]. \tag{2.23}$$

关系式 (2.23) 可写为

$$U = E_U\ddot{f} + F_U\dot{f} + G_U f, \tag{2.24}$$

其中

$$E_U = -\frac{A}{2}, \tag{2.25}$$

$$F_U = -\frac{1}{2C}\left(2A\dot{C} + \dot{A}C\right), \tag{2.26}$$

$$G_U = \frac{1}{2C}\left(2 - \dot{C}\dot{A} - A\ddot{C}\right). \tag{2.27}$$

用 (2.19) 减去 (2.17)，再将结果除以 $2AC$，可得 $\dot{\varphi}$ 的关系式

$$h(u) = \dot{\phi}^2 = \frac{1}{C}\left(2K - \ddot{C}\right)f - \ddot{f}. \tag{2.28}$$

用 (2.20) 减去 (2.19)，可得函数 $f = f(\varphi(u))$ 的主方程

$$F\dot{f} + Gf = 0, \tag{2.29}$$

其中

$$F = \left(\dot{A}C - A\dot{C}\right), \tag{2.30}$$

$$G = \left(2 + \ddot{A}C - A\ddot{C}\right). \tag{2.31}$$

利用标准方法可以轻松求得微分方程（2.29）的解。该解为

$$f = C_0\exp\left(-\int\frac{G}{F}du\right), \tag{2.32}$$

其中 $u \in (u_-,\ u_+)$，C_0 是任意常数。

3 示例

在此，我们考虑将第2节中获得的结果应用于 Reissner-Nordström-(反)德西特度规和 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(反)德西特度规。此前，各种科学论文经常讨论这些度规中基于标量-张量引力理论的解，例如 [7]- [9] 等。本节介绍了我们基于具有非最小耦合的重构的标量-张量理论获得的更多原创性结果。

3.1 Reissner-Nordstr¨om-(反）德西特度规

这里，我们给出重构示例，以检验并验证所考虑的重构方案。我们将重构的标量-张量理论应用于 Reissner-Nordstr¨om-(反）德西特（RN-(A)dS）黑洞解的度规：

$$ds^2 = (A(u))^{-1} du^2 - A(u)\, dt^2 + C(u)\, d\Omega^2, \tag{3.1}$$

其中

$$A(u) = \left(1 - \frac{2\mu}{u}\right) + \frac{Q^2}{u^2} - \frac{\lambda}{3}u^2,$$
$$C(u) = u^2, \tag{3.2}$$

对于给定的度规，函数 F(u) 和 G(u) 的主方程 (2.29)（定义见 (2.30) 和 (2.31)）分别表示为

$$F = \frac{2}{u}\left(3\mu u - 2Q^2 - u^2\right), \tag{3.3}$$

$$G = \left(\frac{2Q}{u}\right)^2. \tag{3.4}$$

求解主方程 $Ff + Gf = 0$，我们得到

$$f(\phi(u)) = C_0 \cdot \exp\left(-\int \frac{G}{F} du\right) = \frac{C_0 u}{\sqrt{3\mu u - 2Q^2 - u^2}} \exp\left(-\frac{\arctan\left(\frac{3\mu - 2u}{\sqrt{8Q^2 - 9\mu^2}}\right)}{\sqrt{\frac{8Q^2}{9\mu^2} - 1}}\right) > 0 \tag{3.5}$$

and

$$\dot{f} = -\frac{2C_0 Q^2}{(3\mu u - 2Q^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\arctan\left(\frac{3\mu - 2u}{\sqrt{8Q^2 - 9\mu^2}}\right)}{\sqrt{\frac{8Q^2}{9\mu^2} - 1}}\right),$$
$$\ddot{f} = \frac{3C_0 Q^2 (3\mu u - 2Q - u)(u - 2\mu)^2}{(3\mu u - 2Q^2 - u^2)^{\frac{7}{2}}} \exp\left(-\frac{\arctan\left(\frac{3\mu - 2u}{\sqrt{8Q^2 - 9\mu^2}}\right)}{\sqrt{\frac{8Q^2}{9\mu^2} - 1}}\right). \tag{3.6}$$

这里， C_0 是一个任意常数。函数 $f(\phi(u))$ 必须始终为正，因此任意常数 C_0 只能取正值。

在此情况下，对于由公式 (2.25)、(2.26)、(2.27) 给出的标量势 $U(u)$，我们得到以下关系式：

$$E_U = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{u}\right) - \frac{Q^2}{2u^2} + \frac{\Lambda}{6}u^2 \tag{3.7}$$

$$F_U = \Lambda u - \frac{2}{u} + \frac{3\mu}{u^2} - \frac{Q^2}{u^3}, \tag{3.8}$$

$$G_U = \Lambda + \frac{Q^2}{u^4} \tag{3.9}$$

因此，利用 (2.23) 和 (3.6)，我们得到势函数的以下关系式

$$U = \frac{C_0\left(3\Lambda\left(\frac{u^6}{3} - 2\mu u^5 + \left(3\mu^2 + \frac{5Q^2}{3}\right)u^4 + \frac{8Q^2u^2(Q^2-2\mu u)}{3}\right) + 3Q^2(\mu - Q)(\mu + Q)\right)}{(3\mu u - 2Q^2 - u^2)^{\frac{5}{2}}u} \times \exp\left(-\frac{\arctan\left(\frac{3\mu-2u}{\sqrt{8Q^2-9\mu^2}}\right)}{\sqrt{\frac{8Q^2}{9\mu^2}-1}}\right). \tag{3.10}$$

由关系式 (2.28) 可得

$$\dot{\phi}^2 = h(u), \tag{3.11}$$

$$h(u) = \frac{6C_0Q^2(u-2\mu)}{(3\mu u - 2Q^2 - u^2)^{\frac{5}{2}}}\exp\left(-\frac{\arctan\left(\frac{3\mu-2u}{\sqrt{8Q^2-9\mu^2}}\right)}{\sqrt{\frac{8Q^2}{9\mu^2}-1}}\right). \tag{3.12}$$

由公式 (3.10)、(3.12) 可见，为使函数 $f(\phi(u))$、U 和 $h(u)$ 为实函数，必须满足以下条件

$$Q < \frac{3\mu}{2\sqrt{2}}, \tag{3.13}$$

以及在这些点

$$u_{*1} = \frac{3\mu}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9\mu^2}}\right) \tag{3.14}$$

and

$$u_{*2} = \frac{3\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9\mu^2}}\right) \tag{3.15}$$

这些函数没有被形式化定义。因此， u_{*1} 和 u_{*2} 是函数$f(\phi(u))$、 U和 $h(u)$的断点。

正如我们的研究所示，当条件 (3.13) 满足时，实函数 $f(\phi(u))$、 U 和 $h(u)$ 仅在区间 $u \in (u_{*1}, u_{*2})$ 内有定义。从物理角度来看，函数 $f(\phi(u))$ 和 $h(u)$ 必须始终为正。若考虑这一条件，这些函数的定义域会进一步缩小，变为 $u \in (u_0, u_{*2})$，其中 $u_0 = 2\mu$。由 (3.12) 可见，函数 $h(u)$ 在点 $u_0 = 2\mu$ 处为零。

3.2 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(Anti)de-Sitter 度规

在极端情形下，当 $\mu = Q$ 时，我们从 Reissner-Nordstr¨om-(Anti-)de Sitter 度规得到一个新的度规。这个度规可称为 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(Anti)de-Sitter (BBMB-(A)dS) 度规，其形式如下：

$$ds^2 = -\left(\left(1 - \frac{\mu}{u}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3}u^2\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu}{u}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3}u^2}du^2 + u^2 d\Omega^2. \tag{3.16}$$

如上所示，快度函数 $A(u)$ 和中心函数 $C(u)$ 的形式为：

$$A(u) = \left(1 - \frac{\mu}{u}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3}u^2, \qquad C(u) = u^2. \tag{3.17}$$

若 $\Lambda = 0$，Bocharova、Bronnikov、Melnikov [10] 和 Bekenstein [11] 研究了该作用量的黑洞解。

众所周知，Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(反)德西特（ BBMB-(A)dS）黑洞的天体物理参数和性质尚未在理论研究中得到充分探讨。我们已成功计算出该度规下黑洞的一些天体物理参数。事件视界 p_h 是黑洞最重要、最引人入胜的特征。简单来说，它就是边界，也就是“有去无回的点”。一旦某个物体（无论是恒星、一粒尘埃，还是光）越过这条边界，就再也无法返回，必然会落入黑洞中心（奇点）。正如我们的计算所示，在 $\Lambda > 0$的情况下存在三个正视界：

$$u_{h1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}}{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \quad - \text{Inner horizon}, \tag{3.18}$$

$$u_{h2} = \frac{1+\sqrt{1-4\mu\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}}{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \quad - \text{Event horizon.} \tag{3.19}$$

若 $\Lambda < \frac{3}{16\mu^2}$（非极端），则有两个正根。

$$u_{h3} = \frac{\sqrt{1+4\mu\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}-1}{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \quad - \text{Cosmological horizon.} \tag{3.20}$$

当 $\Lambda < 0$ 时，不存在任何视界（裸奇点）。$\Lambda = 0$ 的情况被视为极端情形，我们发现存在一个视界 $u_h = \mu$。

最内稳定圆轨道（ISCO）u_c 和光子球 u_{ph} 是黑洞周围两个不同的临界半径。它们界定了广义相对论中轨道力学的范围。关键区别在于，ISCO 对应有质量粒子（最后一个稳定轨道），而光子球对应无质量粒子（最后一个圆轨道，始终不稳定）。

BBMB-(A)dS黑洞的光子球等于 $u_{ph} = 2\mu$。最内稳定圆轨道（ISCO）可通过求解下列方程得到：

$$A(u_c)\ddot{A}(u_c) - 2(\dot{A}(u_c))^2 + \frac{3A(u_c)\dot{A}(u_c)}{u_c} = 0. \tag{3.21}$$

在特殊情况下，当 $\Lambda = 0$ 时，最内稳定圆轨道（ISCO）为 $u_{c1} = 4\mu$。当 $\Lambda > 0$（德西特）时，与 4μ（$u_c < 4\mu$）相比，ISCO 半径减小；而当 $\Lambda < 0$（反德西特）时，ISCO 半径则与 4μ（$u_c > 4\mu$）相比增大。

现在，让我们考虑将基于重构的标量-张量理论（含非最小耦合）得到的结果应用于 BBMB-(A)dS度规。对于式 (2.30)、(2.31) 中的函数F 和 G，我们得到

$$F = -\frac{2(u-\mu)(u-2\mu)}{u}, \tag{3.22}$$

$$G = \left(\frac{2\mu}{u}\right)^2, \tag{3.23}$$

因此，主方程 (2.29) 的解为：

$$f = -C_0\left(1 - \left(\frac{u}{u-\mu}\right)^2\right). \tag{3.24}$$

由 (2.25)、(2.26) 和 (2.27) 计算函数 E_U、 F_U 和 G_U，可得

$$E_U = -\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\mu}{u}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3}u^2\right], \tag{3.25}$$

$$F_U = \Lambda u - \frac{\mu^2}{u^3} + \frac{3\mu}{u^2} - \frac{2}{u}, \tag{3.26}$$

$$G_U = \Lambda + \left(\frac{\mu}{u^2}\right)^2 \tag{3.27}$$

因此，我们由式（2.24）得到

$$U = -\frac{C_0\Lambda u\Big(u-2\mu\Big)\left(\Big(u-\mu\Big)^2+\mu^2\right)}{\Big(u-\mu\Big)^4}. \tag{3.28}$$

从最后一个公式可以看出，当 u 足够大时:

$$U \sim -C_0\Lambda.$$

由关系式（2.28）可得

$$h(u) = \dot{\phi}^2 = -\frac{6C_0\mu^2}{(u-\mu)^4}, \tag{3.29}$$

该方程的解为

$$\phi - \phi_0 = \pm\sqrt{-6C_0}\left(\frac{\mu}{u-\mu}\right), \tag{3.30}$$

其中 ϕ_0 是一个常数。由式（3.30）可知，对于正则标量场，解必须满足 $C_0 < 0$。反解这个关系式可得

$$u = \pm\left(\frac{\mu\sqrt{-6C_0}}{\phi-\phi_0}\right) + \mu. \tag{3.31}$$

由式（3.24）和（3.31）可知

$$f(\phi) = -\left(\frac{(\phi-\phi_0)^2}{6} \pm \sqrt{-\frac{2C_0}{3}}(\phi-\phi_0)\right). \tag{3.32}$$

按照要求，该函数必须始终为正，因此耦合函数 $f(\phi)$ 的最终形式如下:

$$f(\phi) = \sqrt{-\frac{2C_0}{3}}(\phi-\phi_0) - \frac{(\phi-\phi_0)^2}{6} > 0, \tag{3.33}$$

其中，正则标量场 ϕ 定义在定义域 $\phi \in (\phi_0, \phi_0 + 2\sqrt{-6C_0})$ 内；也就是说，函数 $\phi(u)$的定义域区间取决于负常数 C_0。

4 结论

过去四分之一个世纪以来，观测宇宙学使标量-张量理论重新受到关注。宇宙膨胀正在加速这一发现意味着，要么广义相对论中存在一种神秘的“暗能量”成分，要么引力本身在最大尺度上需要进行修正。标量-张量理论为此类修正提供了一个自然的框架。

本文研究了乔丹框架中具有非最小耦合的标量-张量理论。该模型的作用量包含势能项 $U(\phi)$、耦合函数$f(\phi)$。

我们探讨了对径向坐标 u采用 Buchdahl 参数化的一般静态球对称度规的重构过程: $ds^2 =(A(u))^{-1}\,du^2 - A(u)dt^2 + C(u)d\Omega^2,$ ，其中给定 $A(u) > 0$ 和 $C(u) > 0$。与参考文献 [12] 中的做法类似，我们得到了 $U(\phi(u))$ 、 $f(\phi(u))$ 和 $\frac{d\phi}{du}$ 的关系式，由此可在给定度规的情况下得到运动方程的精确解。所考虑的解由主方程的解确定，而主方程是关于函数 $f(\phi(u))$ 的一阶线性微分方程。我们证明了对于所有 $A(u) > 0$ 和 $C(u) > 0$，主方程均存在解。

本文研究具有非最小耦合的标量-张量引力理论，重点关注重构方法。通过 Reissner-Nordstr¨om-(反)德西特度规和 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(反)德西特度规的示例，展示了基于重构方法所得结果的应用。研究结果以显式形式给出了势 U 、正则标量场 $\phi(u)$ 的定义域以及耦合函数 $f(u)$。此外，我们还明确给出了所研究度规中的耦合函数 $f(\phi)$ 和 $h(u)$。除此之外，我们还求得了 Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein-(反)德西特黑洞的一些主要天体物理参数。在 BBMB-(A)dS度规中，我们以显式形式定义了正则标量场 $\phi(u)$

我们预计，针对静态球对称度规（用 Buchdahl 参数化表示）提出的重构形式体系，可以扩展到标量-张量引力理论的某些推广形式，例如包含理想流体 [13]或非线性电动力学 [14], [15] 等的理论。

致谢

作者感谢 V.D. Ivashchuk 教授就论文草稿提出了许多宝贵的讨论意见。

附录

A 拉格朗日量

这里我们推导公式

$$\sqrt{-g}\left(\frac{f(\phi)R(g)}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}g^{MN}\partial_M\varphi\partial_N\varphi - U\left(\varphi\right)\right) = L + \frac{dF_*}{du}, \tag{A.1}$$

的度规

$$ds^2 = g_{MN}dz^M dz^N = e^{2\gamma(u)}du^2 - e^{2\alpha(u)}dt^2 + e^{2\beta(u)}d\Omega^2, \tag{A.2}$$

其中

$$L = \frac{f(\phi)}{\kappa^2}\left(e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\beta}+2\dot{\alpha}\right)+e^{\alpha+\gamma}\right)+\frac{1}{\kappa^2}\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}- \frac{1}{2}e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\phi}^2 - e^{\alpha+\gamma+2\beta}U(\phi)+\frac{dF_*}{du}, \tag{A.3}$$

and

$$F_* = -\frac{f(\phi)}{\kappa^2}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}. \tag{A.4}$$

事实上，度规 (A.2) 的标量曲率为

$$R\big(g\big) = 2e^{-2\beta} - 2e^{-2\gamma}\left(\dot{\alpha}^2+2\dot{\alpha}\dot{\beta}+3\dot{\beta}^2-\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)\dot{\gamma}+\ddot{\alpha}+2\ddot{\beta}\right), \tag{A.5}$$

将其乘以 $f(\phi)\ |g|^{\frac{1}{2}} = f(u)e^{\alpha+\gamma+2\beta}$ 后得到

$$f(\phi)R\big(g\big)\ |g|^{\frac{1}{2}} = f(\phi)\left(2e^{\alpha+\gamma}-2e^{\alpha+2\beta-\gamma}\left(\dot{\alpha}^2+2\dot{\alpha}\dot{\beta}+3\dot{\beta}^2-\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)\dot{\gamma}+\ddot{\alpha}+2\ddot{\beta}\right)\right). \tag{A.6}$$

利用 $|g|^{\frac{1}{2}} = e^{\alpha+\gamma+2\beta}$，得到

$$\frac{f(\phi)R\big(g\big)}{2\kappa^2}\ |g|^{\frac{1}{2}} = \frac{f(\phi)}{\kappa^2}\left(e^{\alpha-\gamma+2\beta}\dot{\beta}\left(\dot{\beta}+2\dot{\alpha}\right)+e^{\alpha+\gamma}\right)+\frac{1}{\kappa^2}\dot{\phi}\frac{df}{d\phi}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}+\frac{dF_*}{du}, \tag{A.7}$$

其中

$$F_* = -\frac{f(\phi)}{\kappa^2}\left(\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)e^{\alpha-\gamma+2\beta}. \tag{A.8}$$

利用 $g^{MN}\partial_M\varphi\partial_N\phi = g^{uu}\dot{\phi}^2 = e^{-2\gamma}\dot{\phi}^2$ 和公式 (A.7)，得到关系式 (A.1)、(A.3)、(A.4)。

参考文献

[1] P.G. Bergmann，关于标量-张量理论的评论。《国际理论物理学杂志》，1，（1968），https://doi.org/10.1007/BF00668828,

[2]R. V. Wagoner，标量-张量理论与引力波，《物理评论 D》1，3209（1970年），https://doi.org/10.1103/PhysRevD.1.3209,

[3] B.M. Barker，具有常数 G 的广义引力标量-张量理论，《天体物理学杂志》219，5（1978年）。

[4] J. Schwinger，《粒子、源与场》（Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，第1卷，1970年）。

[5] [30] William Bruckman，《标量-张量引力理论中电静态与磁静态解的生成》，arXiv: gr-qc/9407003。[6] K.A. Bronnikov、S. V. Bolokhov、M. Skvortsova、R. Ibadov、F. Shaymanova，《标量-张量引力中的电真空时空稳定性》，《欧洲物理学杂志C》84，1027（2024年），https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13420-2

[7]K.A. Bronnikov、K. Badalov、R. Ibadov，《任意静态球对称时空作为标量-张量引力的解》。《引力与宇宙学》29（2023年）。https://doi.org/10.1134/S0202289323010036

[8]L. Perivolaropoulos、F. Skara，《引力背景中的标量快子不稳定性：存在性与增长率》。《物理评论 D》102（2020年），104034，https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.104034

[9] V. K. Oikonomou，《模仿F(R)引力中的Reissner–Nordstr¨om反德西特黑洞》。《宇宙》2016年，2，10。https://doi.org/10.3390/universe2020010

[10] N.M. Bocharova、K.A. Bronnikov和V.N. Melnikov，《爱因斯坦方程与无质量标量场系统的一个精确解》，《莫斯科大学学报：物理与天文学》1970年，第6期，706–709。

[11] J. D. Bekenstein，《爱因斯坦共形标量方程的精确解》，Annals Phys. 82（1974年）535–547。

[12] K. K. Ernazarov, V. D. Ivashchuk，标量-爱因斯坦-高斯-博内模型中静态球对称 $4d$ 度规的重构问题。《欧洲物理学杂志C》85：756（2025年），[arXiv:2503.00244 [gr-qc]]

[13] V. Faraoni, S. Giardino, A. Giusti, R. Vanderwee，标量场作为完美流体：最小耦合标量场和爱因斯坦框架标量-张量引力的热力学，《欧洲物理学杂志C》83，24（2023年）。https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11186-7

[14]G. Alencar, K.A. Bronnikov, M.E. Rodrigues 等，非线性电动力学中的黑反弹时空。《欧洲物理学杂志 C》84，745（2024年）。https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13119-4[15]I. Zh. Stefanov, S. S. Yazadjiev, M. D. Todorov，耦合 Born-Infeld 非线性电动力学的标量-张量黑洞，《物理评论 D》75，084036（2007）。https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.084036