所有局部最大独立集构成的集合族是一个增广拟阵

Vadim E. Levit数学系阿里埃勒大学，以色列levitv@ariel.ac.il

Eugen Mandrescu计算机科学系霍隆理工学院，以色列eugen_m@hit.ac.il

arXiv:2603.22688v1 [math.CO] 24 Mar 2026

摘要

文献 [12] 证明了 (V(G)，Crown(G)) 和 (V(G)，临界独立集(G)) 都是增广拟阵，并确立了局部最大独立集族 Ψ(G) 的部分增广现象，还在问题 5.5 中提出刻画那些其集合族 Ψ(G) 为增广拟阵的图。我们证明，这个问题在一般情形下有肯定答案：对于每个有限简单图 G，集合系统 (V(G) Ψ(G)) 都是增广拟阵。证明具有构造性。若 S，$T \in \Psi(G)$，则显式选取

$$A = S \setminus N[T], \qquad B = T \setminus N[S]$$

满足

$$T \cup A \in \Psi(G), \qquad S \cup B \in \Psi(G), \qquad |T \cup A| = |S \cup B|.$$

作为一个结构性推论，对于每个固定的 $S \in \Psi(G)$，映射 $T \mapsto S \cup T$ 从 $\Psi(G - N[S])$ 到 $\Psi(G)$ 中包含 S 的成员之间诱导出一个典范双射，并且

$$\alpha(G) = |S| + \alpha(G - N[S]).$$

这一分解还给出了所有包含 S 的最大独立集之交集与并集的显式公式，并给出了包含 S 的局部最大独立集和最大独立集的计数公式。我们还为框架 CritIndep(G) ⊆ Crown(G) ⊆ Ψ(G) 添加了一份简短的可视化指南，并以定理启发的若干自然后续问题作结。

关键词。 增广拟阵；局部最大独立集；冠；临界独立集；贪婪拟阵。

2020年数学主题分类。 主要分类 05C69；次要分类 05B35、05C70。

1 引言

全文中，G 是一个有限简单图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。对于 $X \subseteq V(G)$，由 X 诱导的子图记为 $G[X]$，而 $N(X)$ 和 $N[X] = X \cup N(X)$ 分别表示 X 的开邻域和闭邻域。若集合 $S \subseteq V(G)$ 中任意两个顶点都不相邻，则称其为独立（或稳定）集。我们用 $\alpha(G)$ 表示 G 中独立集的最大基数，并用 Ω(G) 表示所有最大独立集构成的族。

G 中的匹配是一组两两不相交的边；按照惯例，$\mu(G)$表示最大匹配的大小。回顾一下，当且仅当 *Kőnig–Egerváry* 图

$$\alpha(G) + \mu(G) = |V(G)|.$$

我们还使用以下记号

$$\operatorname{core}(G) := \bigcap \Omega(G), \qquad \operatorname{corona}(G) := \bigcup \Omega(G)$$

表示 G 的核心和冠。对于集合 $X \subseteq V(G)$，令 $d(X) = |X| - |N(X)|$。独立集 S 若满足以下条件，则称为临界

$$d(S) = d(G), \text{ where } d(G) = \max\{d(I) : I \text{ is an independent set of } G\}.$$

我们用 CritIndep(G) 表示所有临界独立集构成的集合族。按照 [12], 的定义，独立集 S 若存在从 $N(S)$ 到 S 的匹配，则称为冠；所有冠构成的集合族记为 Crown(G)。

若集合 $S \subseteq V(G)$ 是诱导子图 $G[N[S]]$ 的最大独立集，则称其为局部最大独立集。所有此类集合构成的集合族记为 $\Psi(G)$。$\Psi(G)$ 的重要性可追溯至 Nemhauser–Trotter 定理 [13]: $\Psi(G)$ 的每个成员都可以扩展为 $\Omega(G)$ 的一个成员。Levit 和 Mandrescu 在 [4],开启了对这些集合族的系统性研究，并证明对于每个森林 T，$\Psi(T)$ 都是一个贪婪拟阵。随后，他们进一步分析了使局部最大独立集构成贪婪拟阵的其他图类，包括具有唯一受限最大匹配的二分图 [5], 、具有唯一受限最大匹配的无三角形图 [6], 、良覆盖图 [7], 、极良覆盖图 [10], ，以及若干保留贪婪拟阵结构的图运算 [9]。更广泛的结构研究最终得出了这一一般判据：若 $\Psi(G)$ 满足可达性，则它实际上是一个区间贪婪拟阵 [8, 11]。

2022年的论文 [12] 将这些思想纳入一个由临界独立集、冠和局部最大独立集构成的更大框架。具体而言，已证明以下包含关系：

$$\mathrm{CritIndep}(G) \subseteq \mathrm{Crown}(G) \subseteq \Psi(G).$$

此外，研究证明了 ($V(G)$，CritIndep(G)) 和 ($V(G)$，Crown(G)) 是增广拟阵，并为 $\Psi(G)$ 建立了两个部分增广结果：一个针对 $\Psi(G)$ 中互不相交成员的独立集并，另一个针对具有嵌套闭邻域的成员对 [12, 命题 3.20、定理 5.3、推论 5.4]。同一篇论文还确立了若干与本文直接相关的等式结果。具体而言，

$$\begin{aligned}\mathrm{Crown}(G) = \Psi(G) \iff & G[N[S]] \text{ is a Kőnig–Egerváry graph} \\ & \text{for every } S \in \Psi(G),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{CritIndep}(G) = \mathrm{Crown}(G) = \Psi(G) \iff & G[N[S]] \text{ is a Kőnig–Egerváry graph} \\ & \text{with a perfect matching for every } S \in \Psi(G)\end{aligned}$$

根据 [12, 命题 4.1 和定理 4.13]。具体而言，对于二分图和极良覆盖图，有 Crown(G) = $\Psi(G)$ [12, 推论 4.2 和命题 4.4], ；而对于每个具有完美匹配的 Kőnig–Egerváry 图，CritIndep(G) =Crown(G) 已在 [12, 命题 4.7] 中得到证明。同一篇论文还记录了以下蕴含关系

$$\mathrm{CritIndep}(G) = \mathrm{Crown}(G) \Longrightarrow d(G) = 0,$$

并将刻画满足 CritIndep(G) =冠(G) [12,p. 494] 的图这一任务表述为问题 5.3。其中得到的特例包括二分图的刻画

$$\mathrm{CritIndep}(G) = \mathrm{Crown}(G) = \Psi(G) \quad \text{if and only if} \quad G \text{ has a perfect matching},$$

并且，对于阶至少为二的树，这些等价关系

$$\begin{aligned}\mathrm{CritIndep}(T) = \mathrm{Crown}(T) &\iff \mathrm{CritIndep}(T) = \Psi(T) \\ &\iff d(T) = 0 \\ &\iff T \text{ has a perfect matching}\end{aligned}$$

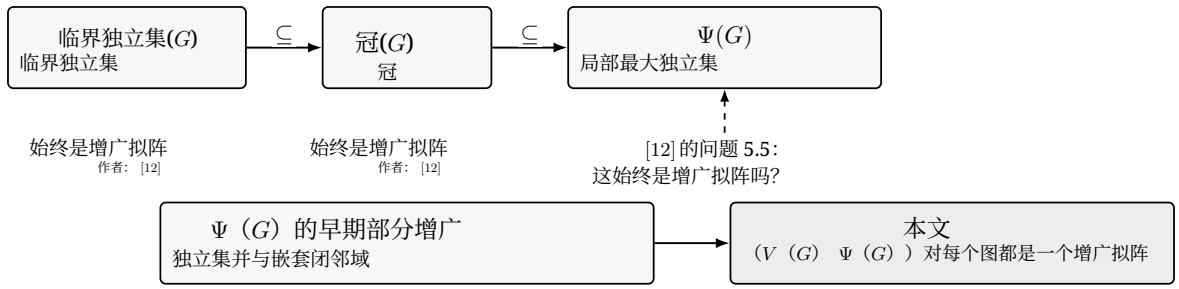


图 1： [12] 所发展的框架以及当前结果的路线图。下文证明的定理将针对 Ψ（G）的两种早期增广机制提升为适用于所有图的完整增广拟阵结论。

由 [12, 推论 4.9 和推论 4.12] 得出。最近，Pereyra [14, 定理 3.6] 通过证明逆命题，恰好解决了问题 5.3，因此

$$\mathrm{CritIndep}(G) = \mathrm{Crown}(G) \quad \text{if and only if} \quad d(G) = 0.$$

他还对 Crown（G）$= \Psi$（G）和临界独立集（G）=Crown（G）=Ψ（G） [14, 定理 3.13 和 3.14]给出了其他等价表述。这引出了以下问题。

问题 1.1。 *[12,* 问题 *5.5]* 刻画其局部最大独立集族为增广拟阵的图。

若非空的 [12], 一对 $(E,\ \mathcal{F})$ 中的 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ 满足以下条件，则称其为增广拟阵：对于每个X, $Y \in \mathcal{F}$，都存在集合 $A \subseteq X \setminus Y$和 $B \subseteq Y \setminus X$，使得

$$Y \cup A \in \mathcal{F}, \qquad X \cup B \in \mathcal{F}, \qquad |Y \cup A| = |X \cup B|.$$

本文旨在说明，无需对 G施加任何限制。

定理 1.2. 对于任意图 G，集合系统 $(V(G)\ \Psi(G))$ 都是增广拟阵。

等价地，对于任意 S，$T \in \Psi(G)$，都存在集合

$$A \subseteq S \setminus T, \qquad B \subseteq T \setminus S$$

使得 $T \cup A \in \Psi(G)$、$S \cup B \in \Psi(G)$ 和 $|T \cup A| = |S \cup B|$。事实上，我们证明总可以选择

$$A = S \setminus N[T], \qquad B = T \setminus N[S].$$

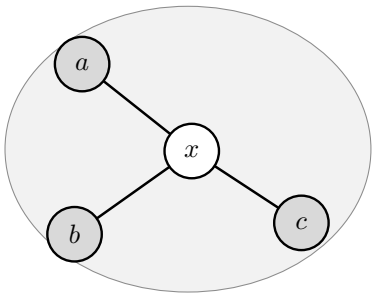
第二个结构性推论（命题 3.6）是闭邻域分解：对于每个固定的 $S \in \Psi(G)$，都有 $\alpha(G) = |S| + \alpha(H)$；令 $H := G - N[S]$，函数

$$T \longmapsto S \cup T$$

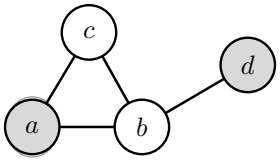
诱导出一个从 $\Psi(H)$ 到包含 S 的 $\Psi(G)$ 中各成员的双射。

在证明定理 1.2 之前，我们先简要介绍整体框架，并通过一个具体示例说明规范增广。

2 示例与图示

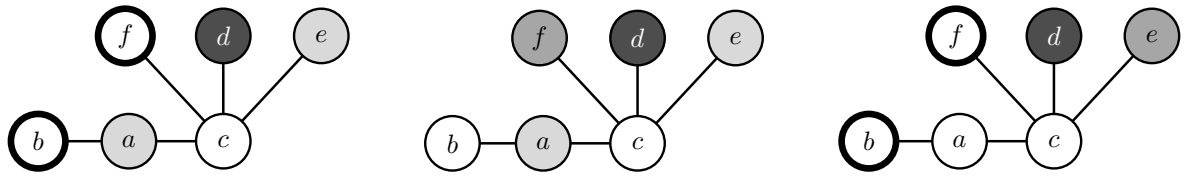


(a) 一个星形图$K_{1,\,3}$。



(b) 一个带悬挂顶点的三角形。

图 2： 两个小例子，将临界独立集(*G*)、冠(*G*)和 Ψ(*G*)这几个族区分开来。图 2a 中的星形图说明等式临界独立集(*G*) =冠(*G*)不成立，而图 2b 中的图说明等式冠(*G*) = Ψ(*G*)不成立。



(a) 这对 S，T。 **(b)** $S^+ = S \cup (T \setminus N[S])$. **(c)** $T^+ = T \cup (S - N[T])$.

图 3： 定理 1.2 的一个具体增广。在面板 (a) 中，灰色顶点属于 $S - T$，双圆圈顶点属于 $T - S$，黑色顶点属于 $S \cap T$。面板 (b) 和 (c) 展示了该定理所得到的两个增广后的局部最大独立集。

例 2.1. 设 G 是图 *2a* 中的星形图。那么 $\{a, b, c\}$ 是唯一的临界独立集，因为

$$d(\{a, b, c\}) = 3 - 1 = 2$$

而 $\{a, b, c\}$ 的每个真子独立集的差都更小。因此 $d(G) = 2$，由 *Pereyra [14,* 定理 *3.6]* 的刻画可得

$$\mathrm{CritIndep}(G) \neq \mathrm{Crown}(G).$$

另一方面，$\{a, b, c\}$ 的每个子集都是冠：其邻域要么为空，要么是单元素集 $\{x\}$，因此可以匹配到该子集本身中。由于每个冠都属于 $\Psi(G)$，由 *[12],* 可得

$$\mathrm{CritIndep}(G) \subsetneq \mathrm{Crown}(G) = \Psi(G).$$

例 2.2。 设 G 为图 *2b* 中的图。单元素集 $\{a\}$ 是一个局部最大独立集，因为 $G[N[\{a\}]]$ 是由 $\{a, b, c\}$ 构成的三角形，而 $\{a\}$ 是该三角形的最大独立集。然而，$\{a\}$ 不是冠：其邻域为 $\{b, c\}$，无法匹配到单元素集中。直接检查可知

$$\mathrm{Crown}(G) = \mathrm{CritIndep}(G) = \{\varnothing, \{d\}, \{a, d\}, \{c, d\}\},$$

并且这些集合的差都为 0，因此 $d(G) = 0$。因此，该图表明，左侧等式 临界独立集(*G*) =冠(*G*) 可以成立，而第二个包含关系 冠(*G*) $\subseteq$ Ψ(*G*) 仍然是严格的，即使对于一个规模较小的连通非二分 *Kőnig–Egerváry* 图也是如此。

例 2.3. 考虑图 *3* 中的图。令

$$S = \{a, d, e\}, \qquad T = \{b, d, f\}.$$

于是 $S, T \in \Psi(G)$。事实上， $G[N[S]]$ 有最大独立集 ***{a, d, e}*** 和 ***{b, d, e}***，而 $G[N[T]]$ 有最大独立集 ***{b, d, f}*** 和 ***{a, d, f}***。规范增广将对侧闭邻域之外的顶点分离出来：

$$S - N[T] = \{e\}, \qquad T - N[S] = \{f\}.$$

因此，定理 *1.2* 得到

$$S^+ = S \cup (T - N[S]) = \{a, d, e, f\} \in \Psi(G)$$

and

$$T^+ = T \cup (S - N[T]) = \{b, d, e, f\} \in \Psi(G),$$

其中 $|S^+| = |T^+| = 4$。

例 2.4。 该定理涵盖了 *[12]* 中的两种增广机制。若 $S, T \in \Psi(G)$ 互不相交，且 $S \cup T$ 是独立的，则 $S \cap N(T) = T \cap N(S) = \varnothing$，因此规范选择给出

$$S \setminus N[T] = S, \qquad T \setminus N[S] = T,$$

因此 $S \cup T \in \Psi(G)$，从而重新得到 *[12,* 命题 *3.20]*。同样，若 $N[S] \subseteq N[T]$，则 $S \setminus N[T] = \varnothing$，因此该定理推出

$$S \cup (T \setminus N[S]) \in \Psi(G) \quad and \quad |S \cup (T \setminus N[S])| = |T|,$$

这恰好就是 *[12,* 定理 *5.3* 和推论 *5.4]*。

3 定理 1.2 的证明

我们使用以下经典引理，通常称为 Berge 最大稳定集引理；例如，参见 [8, 定理 1.2]。为求完整，我们也给出一个简短的 Hall 型证明。

引理 3.1。 设 H 是一个图， M 是 H 的一个最大独立集，且 I 是 H 的任意独立集。那么存在一个从 $I \setminus M$ 到 $M \setminus I$ 的匹配。

证明。 假设不存在这样的匹配。根据 Hall 定理，存在一个集合 $X \subseteq I \setminus M$，使得

$$|N_H(X) \cap (M \setminus I)| < |X|.$$

由于 I 是独立集， X 中的顶点都没有邻点在 $M \cap I$ 中。因此，$(M \setminus N_H(X)) \cup X$ 是 H 的一个独立集，并且

$$|(M \setminus N_H(X)) \cup X| = |M| - |N_H(X) \cap M| + |X| = |M| - |N_H(X) \cap (M \setminus I)| + |X| > |M|,$$

矛盾。 □

引理 3.2。 若 $S, T \in \Psi(G)$，则 $S \cap N(T)$ 与 $T \cap N(S)$ 之间存在完美匹配。特别地，

$$|S \cap N(T)| = |T \cap N(S)|.$$

证明。 考虑诱导子图 $H_S = G[N[S]]$。由于 $S \in \Psi(G)$，集合 S 是 H_S 的最大独立集。集合 $T \cap N[S]$ 是 H_S 的独立集，因此根据引理 3.1，存在一个从

$$(T \cap N[S]) \setminus S = T \cap N(S)$$

into

$$S \setminus (T \cap N[S]) = S \setminus T.$$

图中每个顶点都与 $T \cap N(S)$ 的一个顶点相邻，因此属于 $S \cap N(T)$。于是，存在一个从 $T \cap N(S)$ 到 $S \cap N(T)$ 的匹配。由对称性，也存在一个从 $S \cap N(T)$ 到 $T \cap N(S)$ 的匹配。因此，这两个有限集合的基数相同，且任一匹配都是完美匹配。

□

现在固定 S，$T \in \Psi(G)$，并定义

$$S_0 := S \setminus N[T], \qquad T_0 := T \setminus N[S],$$

$$S^+ := S \cup T_0, \qquad T^+ := T \cup S_0.$$

由于 $T_0 \cap N[S] = \varnothing$ 和 $S_0 \cap N[T] = \varnothing$，集合 S^+ 和 T^+ 是独立的。

引理 3.3。首先，$T_0 \in \Psi(G - N[S])$。其次，对称地，$S_0 \in \Psi(G - N[T]$).

证明。我们证明第一个结论；第二个结论的证明是对称的。令

$$X := S \cap N(T), \qquad Y := T \cap N(S), \qquad C := S \cap T.$$

由引理 3.2，我们有 $|X| = |Y|$。

设 $H := G - N[S]$，并令 R 为 $H[N_H[T_0]]$ 的任意独立集。那么 $R \subseteq N[T_0] - N[S] \subseteq N[T] - N[S]$，因此 R 与 S 完全不相邻。因此，

$$R \cup X \cup C$$

是 $G[N[T]]$ 的一个独立集。由于 $T \in \Psi(G)$，集合 T 是 $G[N[T]]$ 的一个最大独立集。因此，

$$|R| + |X| + |C| \le |T| = |T_0| + |Y| + |C| = |T_0| + |X| + |C|,$$

因此 $|R| \le |T_0|$。这证明 T_0 是 $H[N_H[T_0]]$ 的最大独立集，即 $T_0 \in \Psi(H) = \Psi(G - N[S])$。

□

引理 3.4。S^+，$T^+ \in \Psi(G)$。

证明。我们证明 $S^+ \in \Psi(G)$；对 T^+ 的证明是对称的。设 J 是 $G[N[S^+]]$ 的一个独立集。令

$$J_1 := J \cap N[S], \qquad J_2 := J \setminus N[S].$$

那么 J_1 是 $G[N[S]]$ 的一个独立集，因此 $|J_1| \le |S|$，因为 $S \in \Psi(G)$。

令 $H := G - N[S]$。由于 $N[S^+] = N[S] \cup N[T_0]$，我们有

$$J_2 \subseteq N[T_0] \setminus N[S] = N_H[T_0].$$

此外，J_2 是 $H[N_H[T_0]]$ 的一个独立集。根据引理 3.3，集合 T_0 属于 $\Psi(H)$，因此 $|J_2| \le |T_0|$。所以，

$$|J| = |J_1| + |J_2| \le |S| + |T_0| = |S^+|.$$

因此，S^+ 是 $G[N[S^+]]$ 的最大独立集，所以 $S^+ \in \Psi(G)$。 □

引理 3.5。$|S^+| = |T^+|$.

证明。我们有如下不相交分解

$$S = (S \setminus N[T]) \cup (S \cap N(T)) \cup (S \cap T)$$

and

$$T = (T \setminus N[S]) \cup (T \cap N(S)) \cup (S \cap T).$$

因此，

$$|S^+| = |S| + |T \setminus N[S]| = |S \setminus N[T]| + |S \cap N(T)| + |S \cap T| + |T \setminus N[S]|$$

同理

$$|T^+| = |T| + |S \setminus N[T]| = |T \setminus N[S]| + |T \cap N(S)| + |S \cap T| + |S \setminus N[T]|.$$

根据引理 3.2，中间项的基数相同，因此 $|S^+| = |T^+|$。 □

定理 *1.2* 的证明。族 $\Psi(G)$ 非空，因为 $\varnothing \in \Psi(G)$。设 S，$T \in \Psi(G)$。根据引理 3.4，

$$T \cup (S \setminus N[T]) = T^+ \in \Psi(G)$$

and

$$S \cup (T \setminus N[S]) = S^+ \in \Psi(G).$$

此外，

$$S \setminus N[T] \subseteq S \setminus T, \qquad T \setminus N[S] \subseteq T \setminus S,$$

而引理 3.5 给出 $|T^+| = |S^+|$。因此，对于 $\Psi(G)$，增广性质成立，且有如下明确的选择

$$A = S \setminus N[T], \qquad B = T \setminus N[S].$$

因此，$(V(G)\ \Psi(G))$ 是一个增广拟阵。 □

局部最大独立集的闭邻域分解

主定理有一个有用的结构性补充，它可能更适合后续的递归论证。

命题 3.6（闭邻域分解）。设 $S \in \Psi(G)$ 和 $H := G - N[S]$。定义

$$\Psi_S(G) := \{U \in \Psi(G) : S \subseteq U\}, \qquad \Omega_S(G) := \{M \in \Omega(G) : S \subseteq M\}.$$

于是有以下结论。

(i) $\alpha(G) = |S| + \alpha(H)$。

(ii) 映射 $\Phi_S\colon \Psi(H) \longrightarrow \Psi_S(G)$ $\Phi_S(T) = S \cup T$是一个双射。

(iii) $\Omega_S(G) = \{S \cup Q\colon Q \in \Omega(H)\}$。等价地，包含 S 的 G 的最大独立集恰好是形如 $S \cup Q$ 的集合，其中 $Q \in \Omega(H)$。

(iv) $\bigcap\Omega_S(G)$ 是 $= S \cup$ 的核心，且 $\bigcup\Omega_S(G)$ 是 $= S \cup$ 的冠。

证明。设 I 是 G 的任意独立集。那么 $I \cap N[S]$ 是 $G[N[S]]$ 的独立集，而 $I \setminus N[S]$ 是 H 的独立集。由于 $S \in \Psi(G)$，集合 S 是 $G[N[S]]$ 的最大独立集。因此，

$$|I| = |I \cap N[S]| + |I \setminus N[S]| \leq |S| + \alpha(H).$$

另一方面，如果 $Q \in \Omega(H)$，那么 $S \cup Q$ 在 G中是独立的，因此

$$\alpha(G) \geq |S| + |Q| = |S| + \alpha(H).$$

这就证明了 (i)。

为证明 (ii)，先令 $T \in \Psi(H)$。由于 $T \subseteq V(H) = V(G) \setminus N[S]$，集合 T与 S完全不相邻，因此 $S \cup T$在 G中是独立的。令 J为 $G[N[S \cup T]]$的一个独立集，并设

$$J_1 := J \cap N[S], \qquad J_2 := J \setminus N[S].$$

那么 J_1 是 $G[N[S]]$的一个独立集，因此 $|J_1| \leq |S|$。此外，

$$J_2 \subseteq N[S \cup T] \setminus N[S] = N_H[T],$$

且 J_2 是 $H[N_H[T]]$ 的独立集。由于 $T \in \Psi$（H），我们得到 $|J_2| \leq |T|$。因此

$$|J| = |J_1| + |J_2| \leq |S| + |T| = |S \cup T|,$$

这表明 $S \cup T \in \Psi$（G）。

反过来，令 $U \in \Psi_S(G)$，并记

$$T := U \setminus S.$$

由于 U 是独立集且包含 S，T 的每个顶点都在 $N[S]$ 之外，因此 $T \subseteq V(H)$。令 R 为 $H[N_H[T]]$ 的一个独立集。那么

$$R \subseteq N_H[T] \subseteq N[U] \setminus N[S],$$

并且 $S \cup R$ 是 $G[N[U]]$ 的一个独立集。由于 $U \in \Psi(G)$,

$$|S| + |R| = |S \cup R| \leq |U| = |S| + |T|,$$

因此 $|R| \leq |T|$。所以，$T \in \Psi(H)$。于是映射 Φ_S 是双射，其逆映射为

$$\Psi_S(G) \longrightarrow \Psi(H), \qquad U \longmapsto U \setminus S.$$

最后，(iii) 由 (i) 得出。若 $Q \in \Omega(H)$，则 $S \cup Q$ 在 G 中是独立的，且由 (i)

$$|S \cup Q| = |S| + \alpha(H) = \alpha(G),$$

因此 $S \cup Q \in \Omega_S(G)$。反过来，若 $M \in \Omega_S(G)$，则 $M = S \cup (M \setminus S)$，其中 $M \setminus S \subseteq V(H)$，并且

$$|M \setminus S| = \alpha(G) - |S| = \alpha(H)$$

由 (i) 可得。因此 $M \setminus S \in \Omega(H)$，于是对于某个 $Q \in \Omega(H)$，有 $M = S \cup Q$。

部分（(iv) 立即由（iii）得出。由于 S 包含于 $\Omega_S(G$ 的每个元素中),

$$\Omega_S(G) = \{S \cup Q : Q \in \Omega(H)\}$$

诱导

$$\bigcap \Omega_S(G) = S \cup \bigcap \Omega(H) = S \cup \operatorname{core}(H)$$

and

$$\bigcup \Omega_S(G) = S \cup \bigcup \Omega(H) = S \cup \operatorname{corona}(H).$$

□

推论 3.7（计数公式）。设 $S \in \Psi(G)$ 且设 $H := G - N[S]$。则

$$|\Psi_S(G)| = |\Psi(H)| \qquad \text{and} \qquad |\Omega_S(G)| = |\Omega(H)|.$$

证明。第一个等式由该双射立即得出

$$\Phi_S : \Psi(H) \longrightarrow \Psi_S(G), \qquad \Phi_S(T) = S \cup T,$$

命题 3.6(ii) 的证明。第二个等式由此得出

$$\Omega_S(G) = \{S \cup Q : Q \in \Omega(H)\}$$

由命题 3.6(iii)给出。 □

4 结论与未解问题

定理 1.2 为 [12] 的问题 5.5 给出了最强的可能答案：对于每个图，其所有局部最大独立集构成一个增广拟阵。结合命题 3.6 和推论 3.7，这表明新定理的意义不止于解决一个孤立的问题。它将 [12, 命题 3.20、定理 5.3、推论 5.4],中的部分增广结果提升，并将 [12,引理 3.14]中的分解恒等式从临界独立集(G)推广到整个族$\Psi(G)$；同时，它还给出了所有局部最大独立集，以及包含给定局部最大独立集的所有最大独立集的显式描述，并给出了它们各自的相对核心/冠结构及其基数。

与早期研究比较时，准确区分哪些结果已在 [12] 中证明、哪些是后来补充的，十分重要。2022年那篇论文已通过柯尼希–埃格瓦里邻域刻画了等式 Crown(G) $=\Psi(G)$，并通过具有完美匹配的柯尼希–埃格瓦里邻域刻画了三重等式 CritIndep(G) =Crown(G) $=\Psi(G)$ [12, 命题 4.1 和定理 4.13]。该文还证明了若干特殊情形，包括二分图和极良覆盖图中的 Crown(G) $=\Psi(G)$、具有完美匹配的 Kőnig–Egerváry 图中的 CritIndep(G) =Crown(G)、二分图判据 CritIndep(G) $=$ Crown(G) $=\Psi(G)$ 当且仅当 G 具有完美匹配，以及阶至少为二的树所对应的等价关系 [12, 推论 4.2、命题 4.4、命题 4.7、推论 4.9、推论 4.12]。在结论中， [12] 还指出了如下蕴含关系

$$\mathrm{CritIndep}(G) = \mathrm{Crown}(G) \Longrightarrow d(G) = 0,$$

并将刻画满足 CritIndep(G) =Crown(G) 的图这一任务列为问题 5.3。Pereyra 最近的工作 [14, 定理 3.6] 通过证明逆命题，恰好解决了这一未解问题，从而得出等价关系 CritIndep(G) $=$ Crown(G) 当且仅当 $d(G) = 0$；他的论文还对已刻画的等式 Crown(G) $=\Psi(G)$ 和 CritIndep(G) $=$ Crown(G) $=\Psi(G)$ [14, 定理 3.13 和 3.14]给出了其他表述。因此，应将本文视为完成了 2022年 研究计划的另一部分，即问题 5.5。

从结构观点来看，命题 3.6 表明，局部最大独立集可以进行递归的闭邻域分解，其理念与 Larson 的临界独立性分解 [3] 类似。这一观点也契合 Pereyra 最近提出的未解问题 [14, 问题 4.3 和 4.4], ，他寻求用 Larson 分解来描述 $\Psi(G)$ 和 Crown(G)。这引出了以下研究方向。

问题 4.1。 建立递归式“Ψ-分解”理论。对于选定的 $S \in \Psi(G)$，命题 *3.6* 将独立数分解为

$$\alpha(G) = |S| + \alpha(G - N[S]).$$

研究反复使用这一恒等式如何与可达性、区间贪婪拟阵结构，以及 *successive local pieces* 唯一或规范的图类相互作用。

问题 4.2。 将命题 *3.6* 背后的分解推广到增广拟阵层面。哪些增广拟阵具有有意义的“闭邻域”或“可删除块”概念，使得可行集 X 诱导出类似于

$$r(E) = |X| + r(E - C(X))?$$

令人满意的答案应能在增广拟阵框架下，给出 *Larson* 型分解的更一般对应形式。

问题 4.3。 刻画这样一类图：定理 *1.2* 中的规范增广可以沿着删除操作反复进行，从而为 $\Psi(G)$ 的所有成员生成可达链。据 *[8, 11],*，这正是通用增广拟阵结构 $\Psi(G)$ 可能加强为区间贪婪拟阵的临界条件。

问题 4.4。 为该定理建立一个加权版本。若将一个独立集 S称为加权局部极大，当它在 $G[N[S]]$ 中具有最大权重时，那么对于由此得到的加权族，增广拟阵型交换是否依然成立？即使只有部分肯定结果，也能将本文的定理与 *Nemhauser–Trotter* 定理的优化特性联系起来。

问题 4.5。 为增广拟阵寻找一个算子论模型，在统一框架下刻画以下族：临界独立集(G)、冠(G)以及 $\Psi(G)$。贪婪拟阵与违例空间之间近期建立的联系表明，可以为增广拟阵框架寻求一种较弱的闭包表示或违例型表示。

问题 4.6。 以算法方式利用规范增广。例如，规则

$$(S,T)\longmapsto\big(S\cup(T-N[S]),\ T\cup(S-N[T])\big)$$

能否用于更高效地枚举局部最大独立集，或者将给定的$S\in\Psi(G)$ 扩展为最大独立集，同时在过程中保持局部最优性证书？

参考文献

[1] *Y. Kempner* 和 *V. E. Levit*，贪婪拟阵与违例空间，*Axioms 13*（*2024*年），第 *9* 期，文章 *633*。[2] *C. E. Larson*，关于临界独立性约化的注记，组合学及其应用研究所通报 *51*（*2007*年），*34–46*。[3] *C. E. Larson*，临界独立数与独立性分解，*European Journal of Combinatorics 32*（*2011*年），第 *2* 期，*294–300*。[4] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*， 一个新贪婪拟阵：森林的局部极大稳定集族，*Discrete Applied Mathematics 124*（*2002*年），第 *1–3* 期，*91–101*。[5] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，具有唯一受限最大匹配的二分图中的局部极大稳定集，*Discrete Applied Mathematics 132*（*2003*年），第 *1–3* 期，*163–174*。[6] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，具有唯一受限最大匹配的无三角形图及其相应的贪婪拟阵，*Discrete Applied Mathematics 155*（*2007*年），第 *18* 期，*2414–2425*。[7] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，良覆盖图与贪婪拟阵，载于 *J. Harland* 和 *P. Manyem*（编），计算理论 *2008*：第十四届计算：澳大拉西亚理论研讨会论文集（*CATS 2008*），信息技术研究与实践会议，第 *77* 卷，*ACS*，*2008*年，第 *89–94* 页。[8] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，区间贪婪拟阵与图的局部极大稳定集族，*arXiv:0811.4089*，*2008*年。[9] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，有利于贪婪拟阵的图运算，*Discrete Applied Mathematics 158*（*2010*年），第 *13* 期，*1418–1423*。[10] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，围长至少为四的超良覆盖图与局部极大稳定集贪婪拟阵，*Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 3*（*2011*年），第 *2* 期，*245–252*。[11] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，论局部极大稳定集贪婪拟阵，*Discrete Mathematics 312*（*2012*年），第 *3* 期，*588–596*。[12] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，临界集、冠与局部最大独立集，*Journal of Global Optimization 83*（*2022* 年），第 *3* 期，*481–495*。[13] *G. L. Nemhauser* 和 *L. E. Trotter Jr.*，顶点打包：结构性质与算法，*Mathematical Programming 8*（*1975*年），*232–248*。[14] *K. Pereyra*，关于具有 *CritIndep(G)* $=$ *Crown(G)* 的图，*HAL* 预印本 *hal-05557006v1*，*2026*年。