arXiv:2603.22694v1 [math.QA] 24 Mar 2026

通过 CMKZ 2-联络的 2-全纯对无穷小 2-编织进行 Cartier 积分，II：五边形子

Cameron Kemp

诺丁汉大学数学科学学院，大学公园，诺丁汉 NG7 2RD，
英国。

电子邮件：cameron.kemp@nottingham.ac.uk

2026年3月25日

摘要

这是本系列上一篇论文（arXiv:2508.01944）的续篇。我们重新阐释 Cirio 和 Martins 的工作，以引出我们的基本猜想：Drinfeld-Kohno（李）2-代数的上同调是平凡的。随后我们证明，这一猜想蕴含如下结论：给定一个相干全对称无穷小 2-编织 t，凡是由四项关系子以及对 t 进行胡须运算构成、且在零变换上自同态的每个修改都必为零。这一推论的意义在于，在我们的框架下，只需构造编织幺半 2-范畴的数据，它便会自动满足公理。最后，我们利用 Cirio 和 Martins 在复直线上 4 个可区分粒子的构形空间上定义的 Knizhnik-Zamolodchikov 2-联络 Y_4，构造五边形子。特别地，我们用到了 Bordemann、Rivezzi 和 Weigel 在 Y_4 中的五边形。

关键词： Knizhnik-Zamolodchikov 2-联络、编织幺半 2-范畴、变形量子化、无穷小 2-编织、高阶规范理论、单值化

MSC 2020： 17B37, 18N10, 53D55, 32S40

目录

1 基本猜想 72 六边形子级数的代数构造 3 五边形子级数的构造

10

12

我们的 2-范畴量子化问题

为了理解第 1 节的背景并使本文相对自成一体，我们必须先概述 [Kem25a] 中有关无穷小 2-编织和编织幺半 2-范畴的相关内容。

首先回顾一下，集中于次数 $\{-1,0\}$ 的上链复形范畴 $\mathrm{Ch}^{[-1,0]}$ 是对称幺半范畴，其幺半积由截断张量积 $\boxtimes$ 给出，对称编织则由交换 τ 给出。随后可以将此范畴用作

富集的基底（如 [Rie14 第 3] 章或 [Kel82]中所述），并研究由 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴、$\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-函子和 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-自然变换构成的 2-范畴 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0]}$。与富集范畴论中的通常情形一样，2-范畴本身 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0]}$ 也是对称幺半的，其幺半积由局部截断张量积 $\boxtimes$给出。具体而言，给定一对 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 C 和 D，我们将 $\mathsf{C}\boxtimes\mathsf{D}$ 定义为：其对象是形如 UV 的并置，其中 $U\in$ 属于 C，$V\in$ 属于 D；其态射则由截断 f，$g:=f\boxtimes g$ 给出，其中 $f\in$ 属于 C，$g\in$ 属于 $\mathsf{D}[V,V\prime]$。这个对称幺半 2- 范畴 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0]}$ 使我们能够简洁地定义对称严格幺半 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$- 范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes,I,\gamma)$。这类对称严格幺半结构的相关无穷小变形，是 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-自然变换的一种弱化变体。

定义 0.1. 给定 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 C,D 以及 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-函子 $F,G\colon\mathsf{C}\ \to\mathsf{D}$，一个 **伪自然变换** $\xi\colon F\Rightarrow G\colon\mathsf{C}\ \to\mathsf{D}$ 由以下两部分数据组成：

(i) 对于每个对象 $U\in\mathsf{C}$，一个次数为 0 的态射 $\xi_U\in\mathsf{D}[F(U)\ G(U)]^0$。

(ii) F 对于每一对对象 $U,U'\in\mathsf{C}$，一个同伦 $\xi_{(\cdot)}\colon\mathsf{C}[U,U\prime]\to\mathsf{D}\ [F(U)\ G(U\prime)]\,[-1]$。

这两部分数据必须满足以下两条公理：对于所有 $f\in\mathsf{C}[U,U']$和 $f'\in\mathsf{C}[U'U'']$，

$$G(f)\,\xi_U-\xi_{U'}\,F(f)=\partial(\xi_f)+\xi_{\partial(f)}\quad,\tag{0.1a}$$

$$\xi_{f'f}=\xi_{f'}\,F(f)+G(f')\,\xi_f\quad.\tag{0.1b}$$

定义 0.2. 给定一个对称严格幺半 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes,I,\gamma)$，若伪自然变换 $t\colon\ \otimes\ \Rightarrow\ \otimes\colon\mathsf{C}\boxtimes\mathsf{C}\ \to\mathsf{C}$ 满足：对于$f\in\mathsf{C}[U,U']$, $g\in\mathsf{C}[V,V\prime]$和 $h\in\mathsf{C}[W,W\prime]$,，则称其为一个**无穷小 2-编织**：

$$t_{U(VW)}=t_{UV}\otimes1_W+(\gamma_{VU}\otimes1_W)(1_V\otimes t_{UW})(\gamma_{UV}\otimes1_W)\quad,\tag{0.2a}$$

$$t_{f,g\otimes h}=t_{f,g}\otimes h+(\gamma_{V'U'}\otimes1_{W'})(g\otimes t_{f,h})(\gamma_{UV}\otimes1_W)\quad,\tag{0.2b}$$

and

$$t_{(UV)W}=1_U\otimes t_{VW}+(1_U\otimes\gamma_{WV})(t_{UW}\otimes1_V)(1_U\otimes\gamma_{VW})\quad,\tag{0.3a}$$

$$t_{f\otimes g,h}=f\otimes t_{g,h}+(1_{U'}\otimes\gamma_{W'V'})(t_{f,h}\otimes g)(1_U\otimes\gamma_{VW})\quad.\tag{0.3b}$$

若无穷小 2-编织与对称编织 γ 相交织，则称其为**对称**（或 γ-**等变**），即：

$$\gamma_{U,V}\,t_{U,V}=t_{V,U}\,\gamma_{U,V}\quad,\qquad\gamma_{U',V'}\,t_{f,g}=t_{g,f}\,\gamma_{U,V}\quad.\tag{0.4}$$

我们分别将 (0.2) 和 (0.3) 记为

$$t_{1(23)}=t_{12}+t_{13}\quad,\qquad t_{(12)3}=t_{13}+t_{23}\quad.\tag{0.5}$$

在通常的 1-范畴理论语境中，无穷小编织 t 的自然性 意味着它满足**四项关系**，

$$[t_{12},t_{13}+t_{23}]=0=[t_{23},t_{12}+t_{13}]\quad.\tag{0.6}$$

在我们的语境中，无穷小 2-编织 t 的伪自然性 以一种非常特殊的方式妨碍四项关系成立。

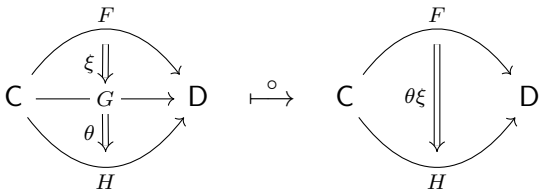
定义 0.3. 给定伪自然变换 $\xi,\xi'\colon\ F\Rightarrow G\colon\mathsf{C}\ \to\mathsf{D}$，一个**修正**$\Xi\colon\ \xi\Rrightarrow\xi'$由以下数据构成：对每个对象 $U\in\mathsf{C}$，给出一个态射 $\Xi_U\in\mathsf{D}[F(U)\ G(U)]^{-1}$，使得

$$\partial(\Xi_U)=\xi_U-\xi'_U\tag{0.7a}$$

并且，对于每个 $f\in\mathsf{C}[U,V]$,

$$\Xi_V F(f)+\xi_f=\xi'_f+G(f)\,\Xi_U\quad.\tag{0.7b}$$

四项关系的障碍是一种特殊的修正，它见证了伪自然变换的两种不同合成之间缺乏交换性。具体来说，**垂直合成**

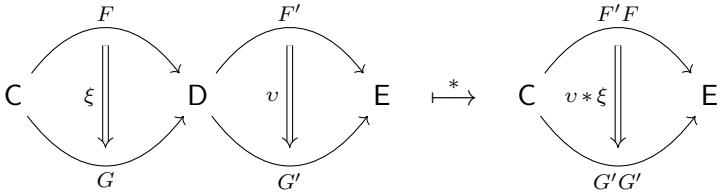


(0.8a)

通过设定以下内容来定义，对于 $f \in \mathsf{C}[U,V]$：

$$(\theta\xi)_U := \theta_U \xi_U \qquad , \qquad (\theta\xi)_f := \theta_f \xi_U + \theta_V \xi_f \tag{0.8b}$$

而**水平合成**



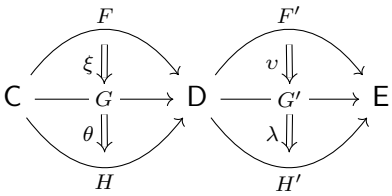
(0.9a)

定义如下：

$$(\upsilon * \xi)_U := \upsilon_{G(U)} F'(\xi_U) \qquad , \qquad (\upsilon * \xi)_f := \upsilon_{G(f)} F'(\xi_U) + \upsilon_{G(V)} F'(\xi_f) \quad . \tag{0.9b}$$

垂直合成（0.8）和水平合成（0.9）均满足结合律，并分别具有显然的单位 Id_F 和 $\mathrm{Id}^{\mathrm{id}_\mathsf{C}}$。伪自然同构 $\xi : F \Rightarrow G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$是指存在逆 $\xi^{-1} : G \Rightarrow F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 且二者在垂直合成（0.8）下互逆。

定义 0.4. 给定任意如下形式的可合成图表



(0.10a)

该**交换子**是修正

$$*^2_{\lambda,\theta|\upsilon,\xi} : (\lambda * \theta)(\upsilon * \xi) \;\Rrightarrow\; \lambda\upsilon * \theta\xi \qquad , \qquad \left(*^2_{\lambda,\theta|\upsilon,\xi}\right)_U := \lambda_{H(U)}\, \upsilon_{\theta_U} F'(\xi_U) \quad . \tag{0.10b}$$

定义 0.3 中的修正有三个不同层次的合成，不过我们只详细说明其中最高的两个：

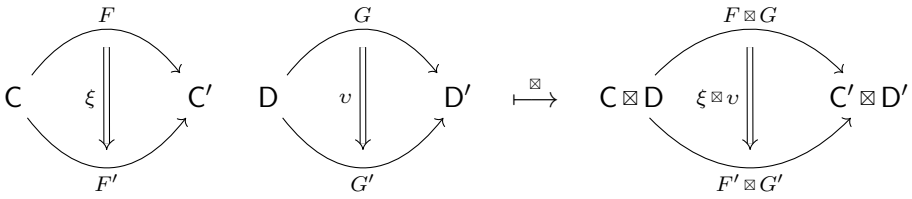
(i) 给定 $\Xi : \xi \Rrightarrow \xi' \Rrightarrow \xi'' : F \Rightarrow G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，**侧向合成** $\Xi' \cdot \Xi : \xi \Rrightarrow \xi''$ 定义为对所有 $U \in \mathsf{C}$，令 $(\Xi' \cdot \Xi)_U := \Xi'_U + \Xi_U$。此合成满足结合律；相对于**消失修正** $0 : \xi \Rrightarrow \xi$，它具有单位元；并且相对于由 $\overleftarrow{\Xi}_U := -\Xi_U$ 定义的**逆向** $\overleftarrow{\Xi} : \xi' \Rrightarrow \xi$，它是可逆的。

(ii) 给定 $\Xi : \xi \Rrightarrow \xi' : F \Rightarrow G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 和 $\Theta : \theta \Rrightarrow \theta' : G \Rightarrow H : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，**垂直合成** $\Theta\Xi : \theta\xi \Rrightarrow \theta'\xi' : F \Rightarrow H$ 定义为令 $(\Theta\Xi)_U := \Theta_U \xi'_U + \theta_U \Xi_U$。这种合成也满足结合律和单位律。我们将 Θ经 ξ 的**胡须运算** 定义为修正 $\Theta\xi : \theta\xi \Rrightarrow \theta'\xi$，其分量为 $(\Theta\xi)_U := \Theta_U \xi_U$；$\Xi$ 经 θ 的胡须运算也类似。修正 Ξ 在垂直合成下可逆，当且仅当 ξ 和 ξ' 都是伪自然同构；此时其逆为 $\Xi^{-1} := \xi^{-1} \overleftarrow{\Xi} \xi'^{-1} : \xi^{-1} \Rrightarrow \xi'^{-1} : G \Rightarrow F$。

备注 0.5. 修正的水平合成也满足结合律和单位律。此外，垂直合成 $\circ$ 具有函子性，而水平合成 $*$ 是严格幺的拟函子，因此我们得到一个由 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0],\mathrm{ps}}$ 个 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴、$\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-函子、伪自然变换和修正构成的三范畴。这个三范畴唯一的弱性源于定义 0.4 中交换子的非平凡性。

△

为了确定阻碍四项关系成立的交换子，我们还必须描述**幺半群合成**



(0.11a)

其定义为，对 $f \in \mathsf{C}[U,U']$ 和 $g \in \mathsf{D}[V,V']$，令：

$$(\xi \boxtimes \upsilon)_{UV} := \xi_U \boxtimes \upsilon_V \quad , \quad (\xi \boxtimes \upsilon)_{f,g} := \xi_f \boxtimes G'(g)\upsilon_V + \xi_{U'} F(f) \boxtimes \upsilon_g \quad . \tag{0.11b}$$

修正也允许进行幺半群合成；总而言之，$\boxtimes$ 是一个结合且含幺的 3-函子，因此 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0],\mathrm{ps}}$ 是一个幺半三范畴。此外，$\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$上的对称编织 τ 在 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0],\mathrm{ps}}$上诱导出一个对称编织。最后，我们提到，$\mathsf{dgCat}^{[-1,0],\mathrm{ps}}$ 实际上是一个闭的对称幺半三范畴，因为伪自然变换和修正可以相加并缩放，而修正 $\Xi\colon \xi \Rrightarrow \xi'$ 可以求导为伪自然变换 $\partial(\Xi) := \xi - \xi'$。

注 0.6。 为方便起见，我们常将修正的侧向合成记作 $\Xi' \cdot \Xi = \Xi' + \Xi = \Xi + \Xi'$，反向合成记作 $\overleftarrow{\Xi} = -\Xi$，尽管这些修正具有不同的（余）定义域；具体使用哪一种，将由上下文明确。△

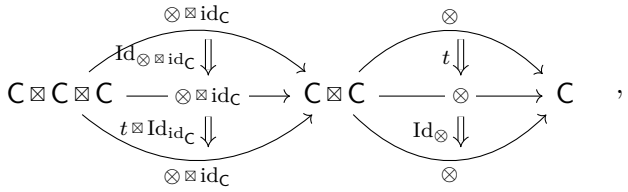
现在，我们可以利用伪自然变换的线性性以及上述三个复合，将式（0.2）改写为

$$t * \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C} \boxtimes \otimes} = \mathrm{Id}_\otimes * (t \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}}) + \mathrm{Id}_\otimes * \Big([\gamma^{-1} \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}}] [(\mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}} \boxtimes t) * \mathrm{Id}_{\tau_{\mathsf{C},\mathsf{C}} \boxtimes \mathrm{id}_\mathsf{C}}] [\gamma \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}}] \Big) \tag{0.12a}$$

并将式（0.3）改写为

$$t * \mathrm{Id}_{\otimes \boxtimes \mathrm{id}_\mathsf{C}} = \mathrm{Id}_\otimes * (\mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}} \boxtimes t) + \mathrm{Id}_\otimes * \Big([\mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}} \boxtimes \gamma^{-1}] [(t \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}}) * \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C} \boxtimes \tau_{\mathsf{C},\mathsf{C}}}] [\mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}} \boxtimes \gamma] \Big) \ . \tag{0.12b}$$

事实上，式（0.12）正是指标记法（0.5）背后的精确定义。在可能的情况下，我们会使用这种简单得多的指标记法，例如，考虑如下可合成图表



(0.13a)

定义0.4 告诉我们，交换子（0.10）具有如下具体形式

$$*^2_{\mathrm{Id}_\otimes,\, t \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_\mathsf{C}} \mid t,\, \mathrm{Id}_{\otimes \boxtimes \mathrm{id}_\mathsf{C}}} : t_{12} t_{(12)3} \Rrightarrow t_{(12)3} t_{12} \quad . \tag{0.13b}$$

利用修正的线性，我们可以将（0.13b）改写为**左四项关系子**

$$\mathcal{L} : [t_{12}, t_{13} + t_{23}] \Rrightarrow 0 \tag{0.13c}$$

其分量为

$$\mathcal{L}_{UVW} = t_{t_{UV},1_W} \quad . \tag{0.13d}$$

同样，我们还有一个**右四项关系子**

$$\mathcal{R} : [t_{23}, t_{12} + t_{13}] \Rrightarrow 0 \tag{0.14a}$$

其分量为

$$\mathcal{R}_{UVW} = t_{1_U,t_{VW}} \quad . \tag{0.14b}$$

Using（0.7a），我们看到了这些修正阻碍四项关系的具体方式 s:

$$\partial(\mathcal{L}_{UVW}) = (t_{UV} \otimes 1_W)t_{(UV)W} - t_{(UV)W}(t_{UV} \otimes 1_W) \quad , \tag{0.15a}$$

$$\partial(\mathcal{R}_{UVW}) = (1_U \otimes t_{VW})t_{U(VW)} - t_{U(VW)}(1_U \otimes t_{VW}) \quad . \tag{0.15b}$$

给定对称严格单体 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{C}}^{[-1,0]}$ -范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes, I, \gamma)$ 上的一个对称无穷小 2-编织 t 和一个变形参数 $\hbar$，可选取拟设编织为 $\sigma = \gamma\, e^{i\pi\hbar t}$，并选取拟设结合子为 $\alpha = \Phi(t_{12}, t_{23})$，其中 Φ 是 Drinfeld 的 KZ 级数（参见 [Kas95，命题 XIX.6.4], [BRW25，定理 20] 或下文定义 2.2）。如 [Kem25a，第 5],节所示，四项关系子 L 和 R 通过在 $\hbar$的二阶处阻碍六边形公理，使通常的变形量子化论述变得复杂。预见到这些阻碍，我们不得不在范畴论中提升一个层级，因此我们引入了 [Kem25a，定义 2.25] 中的编织（严格单位）单体 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes, I, \alpha, \sigma, \Pi, \mathsf{H}^L, \mathsf{H}^R)$ 的定义：将编织单体双范畴的定义（如 [Sch14，定义 C.2]或[JY21，定义 12.1.6]）具体化到由 $\mathsf{dgCat}^{[-1,0],\mathrm{ps}}$提供的我们的语境中。特别地，结合子$\alpha$ 和编织 σ 不满足通常的五边形和六边形公理；相反，这些公理分别受到五边形子 Π 和六边形子 $\mathsf{H}^{L/R}$ 修正的阻碍，即:

$$\Pi \ : \alpha_{234}\,\alpha_{1(23)4}\,\alpha_{123} \Longrightarrow \alpha_{12(34)}\,\alpha_{(12)34} \quad , \tag{0.16a}$$

$$\mathcal{H}^L : \ \alpha_{231}\,\sigma_{1(23)}\,\alpha \ \Longrightarrow \ \sigma_{13}\,\alpha_{213}\,\sigma_{12} \quad , \tag{0.16b}$$

$$\mathcal{H}^R : \ \alpha_{312}^{-1}\,\sigma_{(12)3}\,\alpha^{-1} \Longrightarrow \ \sigma_{13}\,\alpha_{132}^{-1}\,\sigma_{23} \quad . \tag{0.16c}$$

这些数据（0.16）须满足五个高阶相干条件，每个条件都要求其相应的表达式为零:

(i) **结合多面体**,

$$\begin{aligned}
&\Big(\alpha_{345}\Pi_{12(34)5} + \alpha_{\alpha_{345}}\alpha_{(12)(34)5}\Big)\alpha_{(12)34} + \Big(\alpha_{345}\alpha_{2(34)5}\alpha_{\alpha_{234}} - \Pi_{2345}\alpha_{1((23)4)5}\Big)\alpha_{1(23)4}\alpha_{123} \\
&+ \alpha_{345}\alpha_{2(34)5}\alpha_{1(2(34))5}\Pi_{1234} + \alpha_{23(45)}\Big(\alpha_{1(23)(45)}\alpha_{\alpha_{123}} - \Pi_{1(23)45}\alpha_{123}\Big) - \Pi_{123(45)}\alpha_{((12)3)45} \\
&+ \alpha_{12(3(45))}\Pi_{(12)345} \quad .
\end{aligned} \tag{0.17a}$$

(ii)**左四面体**,

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big[\alpha_{341}\alpha_{2(34)1}\sigma_{\alpha_{234}} - \Pi_{2341}\sigma_{1((23)4)}\Big]\,\alpha_{1(23)4} + \Big[\sigma_{14}\Pi_{2314} + \alpha_{\sigma_{14}}\alpha_{(23)14}\Big]\,\sigma_{1(23)}\Big)\alpha_{123} \\
&- \alpha_{23(41)}\mathcal{H}^L_{1(23)4}\alpha_{123} + \Big(\sigma_{14}\alpha_{314}\alpha_{\sigma_{13}} + \mathcal{H}^L_{134}\alpha_{2(13)4}\Big)\,\alpha_{213}\sigma_{12} - \sigma_{14}\alpha_{314}\alpha_{2(31)4}\mathcal{H}^L_{123} \\
&+ \alpha_{341}\Big(\mathcal{H}^L_{12(34)}\alpha_{(12)34} + \sigma_{1(34)}\Big[\alpha_{21(34)}\alpha_{\sigma_{12}} - \Pi_{2134}\sigma_{12}\Big] + \alpha_{2(34)1}\sigma_{1(2(34))}\Pi\Big) \quad .
\end{aligned} \tag{0.17b}$$

(iii)**右四面体**,

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big[\alpha_{412}^{-1}\alpha_{4(12)3}^{-1}\sigma_{\alpha_{123}^{-1}} - \Pi_{4123}^{-1}\sigma_{(1(23))4}\Big]\alpha_{1(23)4}^{-1} + \Big[\sigma_{14}\Pi_{1423}^{-1} + \alpha_{\sigma_{14}}^{-1}\alpha_{14(23)}^{-1}\Big]\sigma_{(23)4}\Big)\alpha_{234}^{-1} \\
&+ \alpha_{(41)23}^{-1}\mathcal{H}^R_{1(23)4}\alpha_{234}^{-1} + \sigma_{14}\alpha_{142}^{-1}\Big(\alpha_{\sigma_{24}}^{-1}\alpha_{243}^{-1}\sigma_{34} + \alpha_{1(42)3}^{-1}\mathcal{H}^R_{234}\Big) + \mathcal{H}^R_{124}\alpha_{1(24)3}^{-1}\alpha_{243}^{-1}\sigma_{34} \\
&+ \alpha_{412}^{-1}\Big(\mathcal{H}^R_{(12)34}\alpha_{12(34)}^{-1} + \sigma_{(12)4}\Big[\alpha_{(12)43}^{-1}\alpha_{\sigma_{34}}^{-1} - \Pi_{1243}^{-1}\sigma_{34}\Big] + \alpha_{4(12)3}^{-1}\sigma_{((12)3)4}\Pi_{1234}^{-1}\Big) \quad .
\end{aligned} \tag{0.17c}$$

(iv) **六面体**,
$\sigma_{14}\alpha_{142}^{-1}\sigma_{24}\alpha_{31(24)}\Big(\alpha_{\sigma_{13}}\alpha_{132}^{-1}\sigma_{23}-\alpha_{(31)24}\mathcal{H}_{123}^{R}\Big)-\alpha_{412}^{-1}\Big(\Pi_{3412}\alpha_{34}^{-1}{}_{()12}\sigma_{(12)(34)}\alpha_{(12)34}+\mathcal{H}$
$_{(12)34}^{L}\Big)\alpha_{123}^{-1}+\alpha_{3(41)2}\alpha_{341}\Big(\sigma_{1(34)}\alpha_{134}\Big[\alpha_{13}^{-1}{}_{()42}\alpha_{13}^{-1}{}_{(42)}\mathcal{H}_{234}^{L}+\Pi_{1342}^{-1}\alpha_{342}\sigma_{2(34)}\alpha_{234}\Big]\alpha_{1(23)4}+\mathcal{H}$
$_{12(34)}^{R}\alpha_{234}\alpha_{1(23)4}-\alpha^{-1}{}_{(34)12}\sigma_{(12)(34)}\alpha_{12}^{-1}{}_{(34)}\Pi_{1234}\alpha_{123}^{-1}\Big)-\Big(\alpha_{412}^{-1}\sigma_{(12)4}\alpha_{124}^{-1}\Pi_{3124}+\mathcal{H}$
$_{124}^{R}\alpha_{31(24)}\alpha_{(31)24}\Big)\alpha_{312}^{-1}\sigma_{(12)3}\alpha_{123}^{-1}+\Big(\Big[\sigma_{14}\alpha_{142}^{-1}\Pi_{3142}-\alpha_{\sigma_{14}}\alpha_{314}\Big]\alpha_{31}^{-1}{}_{()}$
$_{42}\sigma_{24}-\sigma_{14}\alpha_{142}^{-1}\alpha_{\sigma_{24}}\Big)\sigma_{13}\alpha_{(13)24}\alpha_{132}^{-1}\sigma_{23}+\alpha_{3(41)2}\Big(\sigma_{14}\alpha_{314}\Big[\alpha_{\sigma_{13}}^{-1}\sigma_{24}\alpha_{13}^{-1}{}_{(24)}-\sigma_{13}\alpha^{-1}{}_{(13)42}\alpha_{\sigma_{24}}^{-1}\Big]+$
$\mathcal{H}_{134}^{L}\alpha^{-1}{}_{(13)42}\alpha_{13}^{-1}{}_{(42)}\sigma_{24}\Big)\alpha_{324}\sigma_{23}\alpha_{1(23)4}+\alpha_{3(41)2}\sigma_{14}\alpha_{314}\alpha_{31}^{-1}{}_{()42}\sigma_{13}\sigma_{24}\alpha_{13}^{-1}{}_{(24)}$
$\Big(\Pi_{1324}\alpha_{132}^{-1}\sigma_{23}+\alpha_{324}\alpha_{\sigma_{23}}\Big)\quad.$ (0.17d)

(v)**Breen 多胞体**,

$$\sigma_{\sigma_{12}}+\alpha_{321}\Big(\mathcal{H}_{213}^{R}\alpha_{213}\sigma_{12}-\sigma_{23}\alpha_{231}^{-1}\mathcal{H}^{L}+\sigma_{\sigma_{23}}\alpha\Big)+\Big(\mathcal{H}_{132}^{L}\alpha_{132}^{-1}\sigma_{23}-\sigma_{12}\alpha_{312}\mathcal{H}^{R}\Big)\alpha\quad. \tag{0.17e}$$

如 [Kem25a命题 5 所示，14], 拟设结合子

$$\alpha=\Phi(t_{12},t_{23})=1-\tfrac{1}{6}\pi^2\hbar^2[t_{12},t_{23}]+\mathcal{O}(\hbar^3) \tag{0.18}$$

满足五边形公理，直到 $\hbar^2$ 阶（含该阶）为止，因此我们可以选择一个为零的五边形子；这样做可使其满足结合多面体公理（0.17a），直到 $\hbar^2$ 阶（含该阶）为止。将拟设结合子（0.18）与拟设编织一同代入

$$\sigma=\gamma e^{i\pi\hbar t}=\gamma\Big(1+i\pi\hbar t-\tfrac{1}{2}\pi^2\hbar^2t^2+\mathcal{O}(\hbar^3)\Big) \tag{0.19}$$

（0.16）中，对于一个对称无穷小 2-编织，得到:

$$-\tfrac{1}{6}\pi^2\hbar^2\gamma_{1(23)}(2\mathcal{L}+\mathcal{R})+\mathcal{O}(\hbar^3):\alpha_{231}\,\sigma_{1(23)}\,\alpha\implies\sigma_{13}\,\alpha_{213}\,\sigma_{12}\quad, \tag{0.20a}$$
$$-\tfrac{1}{6}\pi^2\hbar^2\gamma_{(12)3}(\mathcal{L}+2\mathcal{R})+\mathcal{O}(\hbar^3):\alpha_{312}^{-1}\,\sigma_{(12)3}\,\alpha^{-1}\Longrightarrow\sigma_{13}\,\alpha_{132}^{-1}\,\sigma_{23}\quad. \tag{0.20b}$$

如 [Kem25a第 5 节所示，2], 修正（0.20）未必满足四条公理（0.17b）-（0.17e），但如果对称无穷小 2-编织 t满足 Cirio 和 Martins 发现的一些额外条件 [CFM15]。

定义 0.7. 给定一个对称严格单体 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 $(\mathsf{C},\otimes,I,\gamma)$，一个**相干**无穷小 2-编织 t 满足，对于所有 $U,V,W\in\mathsf{C}$,

$$-(\gamma_{VU}\otimes 1_W)\mathcal{R}_{VUW}(\gamma_{UV}\otimes 1_W)=\mathcal{L}_{UVW}+\mathcal{R}_{UVW}=-(1_U\otimes\gamma_{WV})\mathcal{L}_{UWV}(1_U\otimes\gamma_{VW})\quad. \tag{0.21}$$

A 对称无穷小 2-编织 t 若满足以下条件，则称为**全对称**：对于所有 $U,V,W\in\mathsf{C}$,

$$t_{\gamma_{UV},1_W}=0\quad. \tag{0.22}$$

鉴于这些性质足以在 $\hbar^2$ 阶解决变形量子化问题，我们假设存在一个相干全对称无穷小 2-编织 t，并寻求如下形式的修正:

$$\Pi:\Phi(t_{23},t_{34})\Phi(t_{12}+t_{13},t_{24}+t_{34})\Phi(t_{12},t_{23})\Longrightarrow\Phi(t_{12},t_{23}+t_{24})\Phi(t_{13}+t_{23},t_{34}) \tag{0.23a}$$

and

$$R:\Phi(t_{12}\,,t_{13})e^{i\pi\hbar t_{(12)3}}\Phi(t_{23}\,,t_{12})\Longrightarrow e^{i\pi\hbar t_{13}}\Phi(t_{23}\,,t_{13})e^{i\pi\hbar t_{23}}\quad. \tag{0.23b}$$

如 [Kem25a，注 522],所述，全对称无穷小 2-编织为我们提供了

$$R_{321}:\Phi(t_{23},t_{13})e^{i\pi\hbar t_{1(23)}}\Phi(t_{12},t_{23})\Longrightarrow e^{i\pi\hbar t_{13}}\Phi(t_{12},t_{13})e^{i\pi\hbar t_{12}} \tag{0.23c}$$

因此，我们将候选六边形变换定义为 $\mathcal{H}^R:=\gamma_{(12)3}R$ 和 $\mathcal{H}^L:=\gamma_{1(23)}L$，其中 $L:=R_{321}$。

1 基本猜想

本节在定义 1.5 中引入 Drinfeld-Kohno 2-代数的概念，以便陈述我们的基本猜想。正如备注 1.7所解释的那样，若猜想1.6成立，那么后两节将给出一个自成一体的解法，解决如何将无穷小 2-编织积分化，从而构造一个具体的编织幺半 2-范畴。换言之，定理 2.4 中的候选六边形子级数以及定理3.3中的候选五边形子级数将自动满足其公理（0.17），只要猜想 1.6成立。

参见 [CG23，定义 2。5]了解以下定义。

定义 1.1。一个**结合 2-代数**由以下三部分数据构成：

(i) 一对结合代数 A和 B。

(ii) 一个代数同态 $\partial : B \to A$。

(iii) A上的一个 B双模结构，即对于所有 a， $a' \in A$ 和 $b \in B$，

$$(a'a)b = a'(ab) \quad , \quad (a'b)a = a'(ba) \quad , \quad (ba')a = b(a'a) \quad . \tag{1.1}$$

这三项数据需要满足以下两条公理：

1. A**双边 等变性**，即对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，

$$\partial(ab) = a\partial(b) \quad , \quad \partial(ba) = \partial(b)a \quad . \tag{1.2a}$$

2. **佩弗恒等式**，即对所有 b， $b' \in B$，

$$\partial(b')b = b'b = b'\partial(b) \quad . \tag{1.2b}$$

类似于 [Kem25b，构造 3.22]，，给定一对$\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴B 和 C，以及一个 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-函子 $F : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$，我们定义结合 2-代数 End_F 如下：

(i) 考虑形如 $\xi : F \Rightarrow F$的伪自然变换与形如 $\Xi : \xi \Rrightarrow 0 : F \Rightarrow F$ 的修正所构成的结合代数，其乘法由垂直合成给出。

(ii) 给定 $\Xi : \xi \Rrightarrow 0 : F \Rightarrow F$，令 $\partial(\Xi) := \xi$，显然可定义一个代数同态。

(iii) 这些修正通过胡须运算构成伪自然变换上的一个双模。

显然，上述数据满足公理（1.2）。

例 1.2。 给定一个自然数 $n \in \mathbb{N}$ 以及一个对称严格幺半 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 $(\mathsf{C} \otimes, I, \gamma)$，令 $\mathsf{B} = \mathsf{C}^{\boxtimes(n+1)}$，且 $F = \otimes^n : \mathsf{C}^{\boxtimes(n+1)} \to \mathsf{C}$。于是，结合 2-代数 $\mathsf{End}_{\otimes^n}$ 由如下形式的伪自然变换 $\xi : \otimes^n \Rightarrow \otimes^n$ 和如下形式的修正 $\Xi : \xi \Rrightarrow 0 : \otimes^n \Rightarrow \otimes^n$ 构成。$\triangledown$

我们来考虑 $n = 2$ 例 1.2 的特殊情形，并假设给定了一个无穷小 2-编织 t。考虑修正

$$\mathcal{L}_{213} - \mathcal{L} : [t_{21}, t_{23} + t_{13}] - [t_{12}, t_{13} + t_{23}] \Longrightarrow 0 \quad , \tag{1.3}$$

如果我们的无穷小 2-编织 t 是对称的，那么 $t_{21} = t_{12}$ 而（1.3）的定义域目前为 0；但对于U， V，$W \in \mathsf{C}$，

$$(\gamma_{VU} \otimes 1_W) t_{t_{VU}, 1_W} (\gamma_{UV} \otimes 1_W) \neq t_{t_{UV}, 1_W} \quad , \tag{1.4}$$

i一般而言。反过来，如果 t 是全对称的，那么 [Kem25a，引理 521] 给出 :

$$L = R_{312} = L_{213} = R_{321} \quad , R = L_{231} = R_{132} = L_{321} \quad , L_{132} = R_{213} = L_{312} = R_{231} \tag{1.5}$$

而修正

$$\mathcal{L} + \mathcal{R} + \mathcal{L}_{132} : [t_{12}, t_{13} + t_{23}] + [t_{23}, t_{12} + t_{13}] + [t_{13}, t_{12} + t_{32}] \Longrightarrow 0 \tag{1.6}$$

也有定义域 0，但除非 t，它不会消失；此外，它是相干的。现在让我们来关注 $n = 3$ 例 1.2 的特殊情形。

引理 1.3。给定对称严格幺半 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, I, \gamma)$ 上的无穷小 2-编织 t，我们有以下五个关系：

$$[t_{(123)4}, \mathcal{R}_{123}] - [t_{1(23)}, \mathcal{L}_{234}] + [t_{23}, \mathcal{L}_{1(23)4}] = 0 \quad , \tag{1.7a}$$

$$[t_{1(234)}, \mathcal{R}_{234}] + [t_{34}, \mathcal{R}_{12(34)}] - [t_{2(34)}, \mathcal{R}_{134}] = 0 \quad , \tag{1.7b}$$

$$[t_{(123)4}, \mathcal{L}_{123}] + [t_{12}, \mathcal{L}_{(12)34}] - [t_{(12)3}, \mathcal{L}_{124}] = 0 \quad , \tag{1.7c}$$

$$[t_{1(234)}, \mathcal{L}_{234}] + [t_{23}, \mathcal{R}_{1(23)4}] - [t_{(23)4}, \mathcal{R}_{123}] = 0 \quad , \tag{1.7d}$$

$$[t_{12}, \mathcal{R}_{(12)34}] - [t_{34}, \mathcal{L}_{12(34)}] = 0 \quad . \tag{1.7e}$$

证明。 我们首先证明 (1.7a)，其中 $U, V, W, X \in \mathsf{C}$,

$$(\mathcal{R}_{UVW} \otimes 1_X) t_{(UVW)X} - t_{(UVW)X} (\mathcal{R}_{UVW} \otimes 1_X) \overset{(0.1a)}{=} \partial(t_{\mathcal{R}_{UVW}, 1_X}) + t_{\partial(\mathcal{R}_{UVW}), 1_X} \tag{1.8}$$

但截断会湮灭 $t_{\mathcal{R}_{UVW},\ 1_X}$ 因此我们将 (1.8) 的右端改写为

$$\begin{aligned} t_{\partial(\mathcal{R}_{UVW}), 1_X} &\overset{(0.15b)}{=} t_{(1_U \otimes t_{VW}) t_{U(VW)}, 1_X} - t_{t_{U(VW)}(1_U \otimes t_{VW}), 1_X} \\ &\overset{(0.1b)}{=} t_{1_U \otimes t_{VW}, 1_X} (t_{U(VW)} \otimes 1_X) + (1_U \otimes t_{VW} \otimes 1_X) t_{t_{U(VW)}, 1_X} \\ &\quad - t_{t_{U(VW)}, 1_X} (1_U \otimes t_{VW} \otimes 1_X) - (t_{U(VW)} \otimes 1_X) t_{1_U \otimes t_{VW}, 1_X} \\ &\overset{(0.3b),(0.13d)}{=} [1_U \otimes \mathcal{L}_{VWX}, t_{U(VW)} \otimes 1_X] - [\mathcal{L}_{U(VW)X}, 1_U \otimes t_{VW} \otimes 1_X] \quad . \end{aligned} \tag{1.9}$$

（1.7b）的证明相同，只是使用（0.2b），而不是（0.3b）；同样，（1.7c）和（1.7d）的证明也相同，但使用变形的左四项关系（0.15a），而不是变形的右四项关系（0.15b）。最后，我们证明（1.7e），

$$\begin{aligned} t_{t_{UV}, 1_{WX}} (1_{UV} \otimes t_{WX}) + (t_{UV} \otimes 1_{WX}) t_{1_{UV}, t_{WX}} &\overset{(0.1b)}{=} t_{t_{UV}, t_{WX}} \\ &\overset{(0.1b)}{=} t_{1_{UV}, t_{WX}} (t_{UV} \otimes 1_{WX}) \\ &\quad + (1_{UV} \otimes t_{WX}) t_{t_{UV}, 1_{WX}} \quad . \end{aligned} \tag{1.10}$$

□

现在我们重新证明 Cirio 和 Martins 的结果 [CFM15，定理 21 和 22]：相干全对称无穷小 2- 编织满足六个范畴化关系，这些关系取代了四项关系（ 0.6 ）。

推论 1.4。 若引理 1.3 中的无穷小 2-编织是相干且全对称的，则有以下六个关系：

$$[t_{(123)4}, \mathcal{R}_{123}] - [t_{1(23)}, \mathcal{L}_{234}] + [t_{23}, \mathcal{L}_{124} + \mathcal{L}_{134}] = 0 \quad , \tag{1.11a}$$

$$[t_{1(234)}, \mathcal{R}_{234}] + [t_{34}, \mathcal{R}_{123} + \mathcal{R}_{124}] - [t_{2(34)}, \mathcal{R}_{134}] = 0 \quad , \tag{1.11b}$$

$$[t_{(123)4}, \mathcal{L}_{123}] + [t_{12}, \mathcal{L}_{134} + \mathcal{L}_{234}] - [t_{(12)3}, \mathcal{L}_{124}] = 0 \quad , \tag{1.11c}$$

$$[t_{1(234)}, \mathcal{L}_{234}] + [t_{23}, \mathcal{R}_{124} + \mathcal{R}_{134}] - [t_{(23)4}, \mathcal{R}_{123}] = 0 \quad , \tag{1.11d}$$

$$[t_{12}, \mathcal{R}_{134} + \mathcal{R}_{234}] - [t_{34}, \mathcal{L}_{123} + \mathcal{L}_{124}] = 0 \quad , \tag{1.11e}$$

$$[t_{13}, \mathcal{R}_{124} - \mathcal{L}_{234} - \mathcal{R}_{234}] + [t_{24}, \mathcal{L}_{123} + \mathcal{R}_{123} - \mathcal{L}_{134}] = 0 \quad . \tag{1.11f}$$

证明。如 [Kem25a引理 5 所述，23], 一个全对称无穷小 2-编织 t 给出 u s:

$$\mathcal{L}_{12(34)} = \mathcal{L}_{123} + \mathcal{L}_{124} \quad , \quad \mathcal{L}_{1(23)4} = \mathcal{L}_{124} + \mathcal{L}_{134} \quad , \quad \mathcal{L}_{(12)34} = \mathcal{L}_{134} + \mathcal{L}_{234} \quad , \tag{1.12}$$

对$\mathcal{R}$ 也同理。因此，（1.11）中的前 5 个关系来自于 t的完全对称性。最后一个关系（1.11f）则来自于将置换（$2 \leftrightarrow 3$）作用于（1.11e），并利用 t 是相干的这一事实。

□

上述内容（连同“不相交可交换性”，例如 [Kem25a，(5.18c)]）促使我们给出以下定义。

定义 1.5。 对于 $n \in \mathbb{N}$， n^{th} **Drinfeld-Kohno 2-代数** 是由以下元素生成的结合 2-代数

$$\left\{ a_{ij} \in A \,,\, \ell_{ijk} \in B \,,\, r_{ijk} \in B \,\middle|\, 1 \leq i < j < k \leq n+1 \right\} \tag{1.13}$$

使得

$$\partial(\ell_{ijk}) = [a_{ij}, a_{ik} + a_{jk}] \qquad , \qquad \partial(r_{ijk}) = [a_{jk}, a_{ij} + a_{ik}] \tag{1.14}$$

并满足以下关系：

(i) 对于 $1 \leq i < j < k < l \leq n+1$,

$$[a_{il} + a_{jl} + a_{kl}, r_{ijk}] - [a_{ij} + a_{ik}, \ell_{jkl}] + [a_{jk}, \ell_{ijl} + \ell_{ikl}] = 0 \quad , \tag{1.15a}$$
$$[a_{ij} + a_{ik} + a_{il}, r_{jkl}] + [a_{kl}, r_{ijk} + r_{ijl}] - [a_{jk} + a_{jl}, r_{ikl}] = 0 \quad , \tag{1.15b}$$
$$[a_{il} + a_{jl} + a_{kl}, \ell_{ijk}] + [a_{ij}, \ell_{ikl} + \ell_{jkl}] - [a_{ik} + a_{jk}, \ell_{ijl}] = 0 \quad , \tag{1.15c}$$
$$[a_{ij} + a_{ik} + a_{il}, \ell_{jkl}] + [a_{jk}, r_{ijl} + r_{ikl}] - [a_{jl} + a_{kl}, r_{ijk}] = 0 \quad , \tag{1.15d}$$
$$[a_{ij}, r_{ikl} + r_{jkl}] - [a_{kl}, \ell_{ijk} + \ell_{ijl}] = 0 \quad , \tag{1.15e}$$
$$[a_{ik}, r_{ijl} - \ell_{jkl} - r_{jkl}] + [a_{jl}, \ell_{ijk} + r_{ijk} - \ell_{ikl}] = 0 \quad . \tag{1.15f}$$

(ii) 如果 $\{1 \leq i < j \leq n+1\} \cap \{1 \leq k < l \leq n+1\} = \varnothing$ 那么

$$[a_{ij}, a_{kl}] = 0 \quad . \tag{1.16}$$

(iii) 若 $\{1 \leq i < j \leq n+1\} \cap \{1 \leq k < l < m \leq n+1\} = \varnothing$ 则，对于 $b_{klm} \in \{\ell_{klm}, r_{klm}\}$,

$$[a_{ij}, b_{klm}] = 0 \quad . \tag{1.17}$$

现在，我们已准备好以非常简洁的形式陈述基本猜想。

CONJ猜想1.6. 对于 $n \in \mathbb{N}$， n^{th} Drinfeld-Kohno 2-代数是无环的，即 $\ker(\partial) = 0$.

在示例 1.2 的语境中，如果给定一个相干全对称无穷小 2-编织 t 那么，根据定义的构造，我们有一个 n^{th} Drinfeld-Kohno 2-代数，作为 End 的子代数$\otimes^n$ 其生成元为：

$$t_{ij} : \otimes^n \Rightarrow \otimes^n \quad , \quad \mathcal{L}_{ijk} : [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] \Rrightarrow 0 \quad , \quad \mathcal{R}_{ijk} : [t_{jk}, t_{ij} + t_{ik}] \Rrightarrow 0 \quad , \tag{1.18}$$

其中 $1 \leq i < j < k \leq n+1$。在这种情况下，猜想 1.6 断言， n^{th} Drinfeld-Kohno 2-代数中形如 $\Xi : 0 \Rrightarrow 0$ 的每个修正都消失。对于较低的 $n \in \mathbb{N}$，这个猜想似乎相当显然；例如，2^{nd} Drinfeld-Kohno 2-代数 [Kem25b，例 3。31] 是 End 的子代数，由$\otimes^2$ 生成， 自由地 由 t_{12}、t_{23}、$t_{13} : \otimes^2 \Rightarrow \otimes^2$ 以及 $\mathcal{L} : [t_{12}, t_{13} + t_{23}] \Rrightarrow 0$ 和 $\mathcal{R} : [t_{23}, t_{12} + t_{13}] \Rrightarrow 0$。

注 1.7. 我们来说明猜想 1.6的威力。给定一个相干全对称无穷小 2-编织 t，我们可以从对称编织 0.17b)-0.17e) 的四条公理中剥离出具体实例，γ 从而得到关于 R 和 t的方程。例如，[Kem25b，构造 5。1] 证明 Breen 多面体公理 (0.17e) 可化简为

$$\left(e^{i\pi\hbar t}\right)_{e^{i\pi\hbar t_{12}}} + \Phi(t_{23},t_{12})\left[R_{213}\Phi(t_{12},t_{13})e^{i\pi t_{12}} - e^{i\pi t_{23}}\Phi(t_{13},t_{23})R_{321} + \left(e^{i\pi\hbar t}\right)_{e^{i\pi\hbar t_{23}}}\Phi(t_{12},t_{23})\right]$$
$$+\left[R_{231}\Phi(t_{23},t_{13})e^{i\pi t_{23}} - e^{i\pi t_{12}}\Phi(t_{13},t_{12})R\right]\Phi(t_{12},t_{23}) = 0 \quad . \tag{1.19}$$

我们称诸如

$$\left(e^{i\pi\hbar t}\right)_{e^{i\pi\hbar t_{12}}} \overset{(0.10)}{=} *^2_{\mathrm{Id}_\otimes, e^{i\pi\hbar t}\boxtimes \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_C}|e^{i\pi\hbar t}, \mathrm{Id}_\otimes\boxtimes \mathrm{id}_C} : e^{i\pi\hbar t_{12}}e^{i\pi\hbar t_{(12)3}} \Rrightarrow e^{i\pi\hbar t_{(12)3}}e^{i\pi\hbar t_{12}} \tag{1.20a}$$

是 **同余　序列**；其显式级数公式很容易推导（见 [Kem25b，(5.14)　]），

$$\left(e^{i\pi\hbar t}\right)_{e^{i\pi\hbar t_{12}}} = \sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty} \frac{(i\pi\hbar)^{j+k}}{j!k!} \sum_{\substack{1\le l\le j\\1\le m\le k}} t_{(12)3}^{m-1}\, t_{12}^{l-1}\mathcal{L}\, t_{12}^{j-l} t_{(12)3}^{k-m} \quad . \tag{1.20b}$$

(1.19) 的左端是一个在 $e^{i\pi\hbar t_{12}}e^{i\pi\hbar t_{(12)3}}$ 上自同态的修正；但利用伪自然变换和修正的线性，这与在 0 上自同态的修正是同一回事。因此（给定一个以 R 表示的级数公式，其中涉及$\mathcal{L}$、$\mathcal{R}$以及由 t进行的须状复合）它是一个形如 2^{nd} 的 Drinfeld-Kohno 2-代数元素：Ξ。其他公理（0.17a）至（0.17d）同样要求由 $\mathcal{L}$、$\mathcal{R}$ 以及由 t进行的须状复合构成的某个自同态修正为零。△

2 六边形子级数的代数构造

本节重现我们对六边形子级数的直接代数构造 [Kem25b，(4.78)]。与 [Kem25b第 4] 节和第 3节的定理 2.4不同，该定理不使用任何关于 2-联络及其 2-全纯的高阶规范理论方法 [BH11、FMP10]。我们首先回顾 Drinfeld 的 Knizhnik-Zamolodchikov 结合子级数的显式公式 [LM96，定理 A。9]，因此先从多重 ζ 值的概念讲起。

D定义 2.1. 若 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，$s_1\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ 且 $s_2,\dots,s_k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，则称其为　1

$$\zeta(s_1,\dots,s_k) := \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k\ge 1} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} \tag{2.1}$$

一个 **多重 ζ 值(MZV) 或欧拉和**。

给定一个有限长度非空元组 p，其元素均为自然数，我们将其长度记为 $\tilde{p}$（记号本身已说明其含义），因此 $p=(p_1,\dots,p_{\tilde{p}})$。在此情形下，$p>0$ 表示每个元素都严格为正，即 $p_1,\dots,p_{\tilde{p}}\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$。再给定另一个由自然数组成的元组 j，$0\le j\le p$ 表示$\tilde{j}=\tilde{p}$ 且对所有 $1\le i\le\tilde{p}$均有 $0\le j_i\le p_i$。我们定义 $|p|:=\sum_{l=1}^{\tilde{p}} p_l$，并且对于满足 $\tilde{q}=\tilde{p}$的 $q>0$，

$$\zeta_j^{p,q} := (-1)^{|j|+|p|}\zeta\left(p_1+1,\{1\}^{q_1-1},\dots,p_{\tilde{p}}+1,\{1\}^{q_{\tilde{p}}-1}\right)\prod_{l=1}^{\tilde{p}}\binom{p_l}{j_l} \quad . \tag{2.2}$$

定义2.2。给定结合含幺 $\mathbb{C}$代数中的元素 A 和 B，以及一个形式变形参数 $\hbar$，**Drinfeld 的 Knizhnik-Zamolodchikov 结合子级数** $\Phi(A,B)$ 是 $\mathbb{C}\langle A,B\rangle[[\hbar]]$ 中的如下元素，

$$1+\sum_{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}}\hbar^{|p|+|q|}\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q}}\zeta_j^{p,q}\left(\prod_{l=1}^{\tilde{p}}\binom{q_l}{k_l}(-1)^{k_l}\right)B^{|q|-|k|}A^{j_1}B^{k_1}\cdots A^{j_{\tilde{p}}}B^{k_{\tilde{p}}}A^{|p|-|j|} \quad . \tag{2.3}$$

备注2.3。我们可以用两种不同的方式将 Drinfeld 的 Knizhnik-Zamolodchikov 结合子级数的表达式（2.3）紧化，而这两种方式我们都将用到：

(i) 我们设 $j_0 := 0,\quad k_0 := |q| - |k|\,,\quad j_{\tilde{p}+1} := |p| - |j|\,,\quad k_{\tilde{p}+1} := 0$ 以及

$$\zeta^{p,q}_{j,k} \;:=\; \zeta^{p,q}_{j} \prod_{l=1}^{\tilde{p}} \binom{q_l}{k_l} (-1)^{k_l} \tag{2.4}$$

使得 (2.3) 等于

$$\Phi(A,B) \;=\; 1 + \sum_{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}} \hbar^{|p|+|q|} \sum_{\substack{0\le j\le p\\ 0\le k\le q}} \zeta^{p,q}_{j,k} \prod_{l=0}^{\tilde{p}+1} A^{j_l} B^{k_l} \quad . \tag{2.5}$$

(ii) 令 r_A 表示由 A定义的右乘，则 (2.3) 等于

$$\Phi(A,B) \;=\; 1 + \sum_{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}} \hbar^{|p|+|q|} \sum_{0\le j\le p} \zeta^{p,q}_{j} \left(\mathrm{ad}^{q_{\tilde{p}}}_B \mathrm{r}^{j_{\tilde{p}}}_A \cdots \mathrm{ad}^{q_1}_B \mathrm{r}^{j_1}_A(1)\right) A^{|p|-|j|} \quad . \tag{2.6}$$

△

我们回顾 **BRW 恒等式** 在 $\mathbb{C}\langle A,B\rangle[[\hbar]]$ 中，它联系了 Drinfeld 的 KZ 结合子级数与指数 [BRW25，定理证明中的最后一个等式 22], 即

$$\Phi(A,-A-B)e^{-i\pi\hbar A}\Phi(B,A) = e^{-i\pi\hbar(A+B)}\Phi(B,-A-B)e^{i\pi\hbar B} \quad . \tag{2.7}$$

对于无穷小 2-编织 t，我们设 $\Lambda :\,= t_{12}+t_{23}+t_{13}$ 以及 $t_{13} :\,= t_{13} \overline{\ \ } \Lambda$。我们将$A = t_{12}$ 和 $B = t_{23}$ 代入 (2.7，同时将因子 $\hbar$ 吸收到 t中，

$$\Phi(t_{12},\overline{t_{13}})e^{-i\pi t_{12}}\Phi(t_{23},t_{12}) = e^{i\pi\overline{t_{13}}}\Phi(t_{23},\overline{t_{13}})e^{i\pi t_{23}} \quad . \tag{2.8}$$

定理 2.4。 我们得到了右前六边形结合子级数的显式公式

$$R : \Phi(t_{12},t_{13})e^{i\pi t_{(12)3}}\Phi(t_{23},t_{12}) \Longrightarrow e^{i\pi\hbar t_{13}}\Phi(t_{23},t_{13})e^{i\pi\hbar t_{23}} \quad . \tag{2.9}$$

证明。 如果我们有以下修正的显式级数公式：

$$\int_{e^{i\pi t_{(12)3}}}^{e^{i\pi\Lambda}e^{-i\pi t_{12}}} : \quad e^{i\pi t_{(12)3}} \quad \Longrightarrow \quad e^{i\pi\Lambda}e^{-i\pi t_{12}} \quad , \tag{2.10a}$$

$$\int_{\Phi(t_{12},t_{13})e^{i\pi\Lambda}}^{e^{i\pi\Lambda}\Phi(t_{12},t_{13})} : \Phi(t_{12},t_{13})e^{i\pi\Lambda} \Longrightarrow e^{i\pi\Lambda}\Phi(t_{12},t_{13}) \quad , \tag{2.10b}$$

$$\int_{\Phi(t_{12},t_{13})}^{\Phi(t_{12},\overline{t_{13}})} : \quad \Phi(t_{12},t_{13}) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t_{12},\overline{t_{13}}) \quad , \tag{2.10c}$$

$$\int_{\Phi(t_{23},\overline{t_{13}})}^{\Phi(t_{23},t_{13})} : \quad \Phi(t_{23},\overline{t_{13}}) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t_{23},t_{13}) \quad , \tag{2.10d}$$

$$\int_{e^{i\pi\Lambda}e^{i\pi\overline{t_{13}}}}^{e^{i\pi t_{13}}} : \quad e^{i\pi\Lambda}e^{i\pi\overline{t_{13}}} \quad \Longrightarrow \quad e^{i\pi t_{13}} \quad , \tag{2.10e}$$

然后我们可以利用（2.8）来构造（2.9），如下：

$$\begin{aligned} R := \Bigg(\Phi(t_{12},t_{13}) \int_{e^{i\pi t_{(12)3}}}^{e^{i\pi\Lambda}e^{-i\pi t_{12}}} + \int_{\Phi(t_{12},t_{13})e^{i\pi\Lambda}}^{e^{i\pi\Lambda}\Phi(t_{12},t_{13})} e^{-i\pi t_{12}} + e^{i\pi\Lambda}\int_{\Phi(t_{12},t_{13})}^{\Phi(t_{12},\overline{t_{13}})} e^{-i\pi t_{12}}\Bigg)\Phi(t_{23},t_{12}) \\ + e^{i\pi\Lambda}e^{i\pi\overline{t_{13}}}\int_{\Phi(t_{23},\overline{t_{13}})}^{\Phi(t_{23},t_{13})} e^{i\pi t_{23}} + \int_{e^{i\pi\Lambda}e^{i\pi\overline{t_{13}}}}^{e^{i\pi t_{13}}} \Phi(t_{23},t_{13})e^{i\pi t_{23}} \quad . \end{aligned} \tag{2.11}$$

修正（2.10a）和（2.10e）已在 [Kem25b中分别明确确定，见（4.57b）和（4.73）],

$$\int_{e^{i\pi t_{(12)3}}}^{e^{i\pi\Lambda}e^{-i\pi t_{12}}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\pi)^k}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1}\sum_{n=0}^{k-l-m-1}\binom{k-l}{m}(-1)^{m+1}t_{(12)3}^{l-1}\Lambda^n\mathcal{L}\Lambda^{k-l-m-n-1}t_{12}^m\ , \tag{2.12}$$

$$\int_{e^{i\pi\Lambda}e^{i\pi\overline{t_{13}}}}^{e^{i\pi t_{13}}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\pi)^k}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1}\sum_{n=0}^{k-l-m-1}\binom{k-l}{m}t_{13}^{l-1}\Lambda^n(\mathcal{L}+\mathcal{R})\Lambda^{k-l-m-n-1}\overline{t_{13}}^m\ . \tag{2.13}$$

修正 $\int^{e^{i\pi\Lambda}\Phi}{}_{(t_{12},\ t_{13})}\,\Phi(t_{12},\ t_{13})e^{i\pi\Lambda}$ 采用了 Drinfeld 的 KZ 级数的另一种表达式 (2.5)，并由 [Kem25b, (4.71)], 确定，其表达式为

$$\sum_{\substack{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}\\1\le m<\infty}}\ \sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q}}\ \sum_{\substack{0\le l\le\tilde{p}+1\\1\le n\le m}}\frac{(i\pi)^m}{m!}\zeta_{j,k}^{p,q}\Lambda^{n-1} \tag{2.14}$$
$$\times\left(\prod_{r=0}^{l-1}t_{12}^{j_r}t_{13}^{k_r}\right)\left(\sum_{r=1}^{j_l}t_{12}^{r-1}\mathcal{L}t_{12}^{j_l-r}t_{13}^{k_l}-t_{12}^{j_l}\sum_{r=1}^{k_l}t_{13}^{r-1}(\mathcal{L}+\mathcal{R})t_{13}^{k_l-r}\right)\left(\prod_{r=l+1}^{\tilde{p}+1}t_{12}^{j_r}t_{13}^{k_r}\right)\Lambda^{m-n}$$

修正 $\int_{\Phi}^{\Phi}{}_{(t_{12},\ t_{13})}\,\overline{(t_{12},\ t_{13})}$ 采用了 Drinfeld 的 KZ 级数的另一种表达式 (2.6)，并由 [Kem25b, (4.29e)],

$$\sum_{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}}\ \sum_{\substack{0\le j\le p\\1\le l\le\tilde{p}}}\zeta_j^{p,q}\mathrm{ad}_{t_{13}}^{q_{\tilde{p}}}\mathrm{r}_{t_{12}}^{j_{\tilde{p}}}\cdots\mathrm{ad}_{t_{13}}^{q_{l+1}}\mathrm{r}_{t_{12}}^{j_{l+1}}\sum_{m=0}^{q_l-1}\mathrm{ad}_{t_{13}}^{q_l-m-1}\left(\sum_{k_1=0}^{q_1}(-1)^{k_1}\binom{q_1}{k_1}\cdots\right.$$
$$\cdots\sum_{k_{l-1}=0}^{q_{l-1}}(-1)^{k_{l-1}}\binom{q_{l-1}}{k_{l-1}}\sum_{k_l=0}^{m}(-1)^{k_l}\binom{m}{k_l}\sum_{n=0}^{l}\left(\prod_{r=0}^{n-1}t_{12}^{j_r}\overline{t_{13}}^{k_r}\right)\left[t_{12}^{j_n}\sum_{r=1}^{k_n}\overline{t_{13}}^{r-1}(\mathcal{L}+\mathcal{R})\overline{t_{13}}^{k_n-r}\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{r=1}^{j_n}t_{12}^{r-1}\mathcal{L}t_{12}^{j_n-r}\overline{t_{13}}^{k_n}\right]t_{12}^{j_{n+1}}\overline{t_{13}}^{k_{n+1}}\cdots t_{12}^{j_l}\overline{t_{13}}^{k_l}\right)t_{12}^{|p|-|j|} \tag{2.15}$$

其中 $j_0 := 0$ 以及 $k_0 := m-k_l+\sum_{n=1}^{l-1}(q_n-k_n)$。修正 $\int^{\Phi}{}_{(t_{23},\ t_{13})}\,\Phi(t_{23},\ t_{13})$ 可由 (2.15) 乘以 -1 并施加指标置换 $(1\leftrightarrow 3)$ 得到。 □

3 五边形子级数的构造

选择 $n=3$ 在 [Kem25b，定义 3 中27], 我们将 2-联络 $(\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}^{n=3},\ \mathcal{B}_{\mathrm{CM}}^{n=3})$ 表示在 Y_4 上：

$$\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}^{n=3}=\left(\frac{dz_1-dz_2}{z_1-z_2}\right)t_{12}+\left(\frac{dz_1-dz_3}{z_1-z_3}\right)t_{13}+\left(\frac{dz_1-dz_4}{z_1-z_4}\right)t_{14}$$
$$+\left(\frac{dz_2-dz_3}{z_2-z_3}\right)t_{23}+\left(\frac{dz_2-dz_4}{z_2-z_4}\right)t_{24}+\left(\frac{dz_3-dz_4}{z_3-z_4}\right)t_{34} \tag{3.1a}$$

and

$$\mathcal{B}_{\mathrm{CM}}^{n=3}=\frac{2}{(z_3-z_1)}\left(\frac{\mathcal{R}_{123}}{z_2-z_3}-\frac{\mathcal{L}_{123}}{z_1-z_2}\right)(dz_1\wedge dz_2+dz_2\wedge dz_3+dz_3\wedge dz_1)$$
$$+\frac{2}{(z_4-z_1)}\left(\frac{\mathcal{R}_{124}}{z_2-z_4}-\frac{\mathcal{L}_{124}}{z_1-z_2}\right)(dz_1\wedge dz_2+dz_2\wedge dz_4+dz_4\wedge dz_1)$$
$$+\frac{2}{(z_4-z_1)}\left(\frac{\mathcal{R}_{134}}{z_3-z_4}-\frac{\mathcal{L}_{134}}{z_1-z_3}\right)(dz_1\wedge dz_3+dz_3\wedge dz_4+dz_4\wedge dz_1)$$
$$+\frac{2}{(z_4-z_2)}\left(\frac{\mathcal{R}_{234}}{z_3-z_4}-\frac{\mathcal{L}_{234}}{z_2-z_3}\right)(dz_2\wedge dz_3+dz_3\wedge dz_4+dz_4\wedge dz_2)\ . \tag{3.1b}$$

该**对角线穿孔复平面**定义为

$$\mathbb{C}^2_{\#} := \{(z,u) \in \mathbb{C}^2 \,|\, zu(z-1)(u-1)(z-u) \neq 0\} \quad . \tag{3.2}$$

映射

$$\varphi : \mathbb{C}^2_{\#} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \longrightarrow Y_4 \quad , \quad (z,u,v,w) \longmapsto (w, zv+w, uv+w, v+w) \tag{3.3}$$

是一个双有理双全纯同构，其逆映射为

$$\varphi^{-1} : Y_4 \longrightarrow \mathbb{C}^2_{\#} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \quad , \quad (z_1,z_2,z_3,z_4) \longmapsto \left(\frac{z_2-z_1}{z_4-z_1}, \frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}, z_4-z_1, z_1 \right) . \tag{3.4}$$

我们沿着双有理双全纯同构 $(\mathcal{A}^{n=3}_{\mathrm{KZ}},\mathcal{B}^{n=3}_{\mathrm{CM}})$，拉回式（3.1）中的 2-联络 φ 并定义 $(\mathcal{A} := \varphi^*\mathcal{A}^{n=3}_{\mathrm{KZ}},\mathcal{B} := \varphi^*\mathcal{B}^{n=3}_{\mathrm{CM}})$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = &\left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-u} + \frac{t_{24}}{z-1} \right) dz + \left(\frac{t_{13}}{u} + \frac{t_{23}}{u-z} + \frac{t_{34}}{u-1} \right) du \\ &+ \frac{t_{12}+t_{13}+t_{14}+t_{23}+t_{24}+t_{34}}{v} dv \end{aligned} \tag{3.5a}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = &\, 2 \left(\frac{\mathcal{L}_{123}}{zu} + \frac{\mathcal{R}_{123}}{u(z-u)} + \frac{\mathcal{L}_{234}}{(1-z)(u-z)} + \frac{\mathcal{R}_{234}}{(1-z)(u-1)} \right) dz \wedge du \\ &+ \frac{2}{v} \left(\frac{\mathcal{R}_{123}+\mathcal{L}_{234}}{u-z} - \frac{\mathcal{L}_{123}+\mathcal{L}_{124}}{z} + \frac{\mathcal{R}_{124}-\mathcal{L}_{234}-\mathcal{R}_{234}}{1-z} \right) dv \wedge dz \\ &+ \frac{2}{v} \left(\frac{\mathcal{L}_{134}-\mathcal{L}_{123}-\mathcal{R}_{123}}{u} + \frac{\mathcal{L}_{234}+\mathcal{R}_{123}}{u-z} + \frac{\mathcal{R}_{134}+\mathcal{R}_{234}}{u-1} \right) du \wedge dv \quad . \end{aligned} \tag{3.5b}$$

如 [Kem25b，备注 328], 所述，该 2-联络自动满足伪平坦性；Cirio 和 Martins 以这种方式构造了它 [CFM12，CFM15，CFM17]。现在我们重新阐释 [CFM15，定理 23]并给出式（3.5）满足 2-平坦性的一个充分条件。

命题 3.1。 若 t 是相干且全对称的，则（3.5）是 2-平坦的。

证明。 我们将修正 M 定义为

$$\mathcal{A} \wedge^{[\cdot,\cdot]} \mathcal{B} = \frac{2^3}{v} M dz \wedge du \wedge dv \tag{3.6}$$

thus

$$\begin{aligned} M := &\frac{1}{zu} \Big([t_{12}, \mathcal{L}_{134} - \mathcal{R}_{123}] - [t_{13}, \mathcal{L}_{124}] + [t_{(13)4} + t_{2(34)}, \mathcal{L}_{123}] \Big) \\ &+ \frac{1}{z(u-1)} \left([t_{12}, \mathcal{R}_{134} + \mathcal{R}_{234}] - [t_{34}, \mathcal{L}_{123} + \mathcal{L}_{124}] \right) \\ &+ \frac{1}{z(u-z)} \left([t_{12}, \mathcal{L}_{234} + \mathcal{R}_{123}] - [t_{23}, \mathcal{L}_{123} + \mathcal{L}_{124}] \right) \\ &+ \frac{1}{u(u-z)} \Big([t_{23}, \mathcal{L}_{123} - \mathcal{L}_{134}] + [t_{13}, \mathcal{L}_{234}] - [t_{1(24)} + t_{(23)4}, \mathcal{R}_{123}] \Big) \\ &+ \frac{1}{(u-z)(u-1)} \left([t_{34}, \mathcal{R}_{123} + \mathcal{L}_{234}] - [t_{23}, \mathcal{R}_{134} + \mathcal{R}_{234}] \right) \\ &+ \frac{1}{u(1-z)} \left([t_{24}, \mathcal{L}_{123} + \mathcal{R}_{123} - \mathcal{L}_{134}] + [t_{13}, \mathcal{R}_{124} - \mathcal{L}_{234} - \mathcal{R}_{234}] \right) \\ &+ \frac{1}{(u-z)(1-z)} \Big([t_{23}, \mathcal{R}_{124} - \mathcal{R}_{234}] - [t_{24}, \mathcal{R}_{123}] + [t_{1(23)} + t_{(13)4}, \mathcal{L}_{234}] \Big) \\ &+ \frac{1}{(u-1)(1-z)} \Big([t_{34}, \mathcal{R}_{124} - \mathcal{L}_{234}] - [t_{24}, \mathcal{R}_{134}] + [t_{(12)3} + t_{1(24)}, \mathcal{R}_{234}] \Big) \quad . \end{aligned} \tag{3.7}$$

容易验证，(3.7)可简化为

$$\begin{aligned} M = &\frac{1}{zu}\Big([t_{12},\mathcal{L}_{134}+\mathcal{L}_{234}]-[t_{(12)3},\mathcal{L}_{124}]+[t_{(123)4},\mathcal{L}_{123}]\Big)\\ &+\frac{1}{z(u-1)}\left([t_{12},\mathcal{R}_{134}+\mathcal{R}_{234}]-[t_{34},\mathcal{L}_{123}+\mathcal{L}_{124}]\right)\\ &+\frac{1}{u(z-u)}\Big([t_{23},\mathcal{L}_{124}+\mathcal{L}_{134}]-[t_{1(23)},\mathcal{L}_{234}]+[t_{(123)4},\mathcal{R}_{123}]\Big)\\ &+\frac{1}{u(1-z)}\left([t_{24},\mathcal{L}_{123}+\mathcal{R}_{123}-\mathcal{L}_{134}]+[t_{13},\mathcal{R}_{124}-\mathcal{L}_{234}-\mathcal{R}_{234}]\right)\\ &+\frac{1}{(u-z)(1-z)}\Big([t_{23},\mathcal{R}_{124}+\mathcal{R}_{134}]-[t_{(23)4},\mathcal{R}_{123}]+[t_{1(234)},\mathcal{L}_{234}]\Big)\\ &+\frac{1}{(u-1)(1-z)}\Big([t_{34},\mathcal{R}_{123}+\mathcal{R}_{124}]-[t_{2(34)},\mathcal{R}_{134}]+[t_{1(234)},\mathcal{R}_{234}]\Big) \end{aligned} \tag{3.8}$$

利用（1.11）即可将其消去。 □

按照 [BRW25，第 2.4],小节，我们将范围限制在 $\mathbb{R}^2$ 中的以下开三角形，

$$U' := \{w=0<x=z<y=u<1=v\} \subset \mathbb{C}^2_{\#} \hookrightarrow \mathbb{C}^2_{\#}\times\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C} \quad . \tag{3.9}$$

注 3.2。 将范围限制在此子空间可简化拉回 2-联络（3.5），如下所示:

$$\mathcal{A}_{|U'} = \left(\frac{t_{12}}{x}+\frac{t_{23}}{x-y}+\frac{t_{24}}{x-1}\right)dx+\left(\frac{t_{13}}{y}+\frac{t_{23}}{y-x}+\frac{t_{34}}{y-1}\right)dy \quad , \tag{3.10}$$

$$\mathcal{B}_{|U'} = 2\left(\frac{\mathcal{L}_{123}}{xy}+\frac{\mathcal{R}_{123}}{y(x-y)}+\frac{\mathcal{L}_{234}}{(1-x)(y-x)}+\frac{\mathcal{R}_{234}}{(1-x)(y-1)}\right)dx\wedge dy \quad . \tag{3.11}$$

重要的是，此 2-联络仍然并非 严格平坦，而只是伪平坦，因此我们需要构造一条 2-路径，其 2-全纯将对五边形子级数作出贡献。△

W我们利用 Bordemann、Rivezzi 和 Weigel 的仿射 1-路径 [BRW25，图 2] :

$$c_{\mathrm{I}}(r) := \Big((1-r)\varepsilon^2+r(\varepsilon-\varepsilon^2),\varepsilon\Big) \quad , \tag{3.12a}$$

$$c_{\mathrm{II}}(r) := (1-r)(\varepsilon-\varepsilon^2,\varepsilon)+r(1-\varepsilon,1-\varepsilon+\varepsilon^2) \quad , \tag{3.12b}$$

$$c_{\mathrm{III}}(r) := \Big(1-\varepsilon,(1-r)(1-\varepsilon+\varepsilon^2)+r(1-\varepsilon^2)\Big) \quad , \tag{3.12c}$$

$$c_{\mathrm{IV}}(r) := \Big(\varepsilon^2,(1-r)\varepsilon+r(1-\varepsilon^2)\Big) \quad , \tag{3.12d}$$

$$c_{\mathrm{V}}(r) := \Big((1-r)\varepsilon^2+r(1-\varepsilon),1-\varepsilon^2\Big) \quad . \tag{3.12e}$$

令

$$c^s_{\mathrm{II}}(r) := (1-r)\,c_{\mathrm{I}}(1-s)+r\,c_{\mathrm{III}}(s) \quad , \tag{3.13}$$

我们将 2-路径 $c_{\mathrm{II}}\,c_{\mathrm{I}} \overset{P_{\mathrm{I}}}{\Longrightarrow} (c_{\mathrm{III}}\circ\iota)\,c^1_{\mathrm{II}}$ 定义为

$$P_{\mathrm{I}}(s,r) := \begin{cases} c_{\mathrm{I}}(2r)\,, & 0\le r\le\frac{1-s}{2}\\ c^s_{\mathrm{II}}(2r+s-1)\,, & \frac{1-s}{2}\le r\le 1-\frac{s}{2}\\ (c_{\mathrm{III}}\circ\iota)(2r-1)\,, & 1-\frac{s}{2}\le r\le 1 \end{cases} \quad . \tag{3.14}$$

如 [Kem25b中的式（4.10a）], , 式（3.14）的 2-全纯表示为

$$W^{P_{\mathrm{I}}} = \int_0^1\int_{\frac{1-s}{2}}^{1-\frac{s}{2}} W^{P^s_{\mathrm{I}}}_{1r}\,\mathcal{B}\left[\frac{\partial P^s_{\mathrm{I}}}{\partial s},\frac{\partial P^s_{\mathrm{I}}}{\partial r}\right]W^{P^s_{\mathrm{I}}}_{r0}\,drds \quad . \tag{3.15}$$

对于 $\frac{1-s}{2} \le r \le 1-\frac{s}{2}$，我们有

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{I}}^{s}(r) &\overset{(3.14)}{=} c_{\mathrm{II}}^{s}(2r+s-1) \\ &\overset{(3.13)}{=} (2-2r-s)\, c_{\mathrm{I}}(1-s) + (2r+s-1)\, c_{\mathrm{III}}(s) \\ &\overset{(3.12a),(3.12c)}{=} \Big(\big(2-2r-s\big)\big(s\varepsilon^2 + (1-s)(\varepsilon-\varepsilon^2)\big) + (2r+s-1)(1-\varepsilon) \\ &\qquad\qquad , (2-2r-s)\varepsilon + \big(2r+s-1\big)\big((1-s)(1-\varepsilon+\varepsilon^2) + s(1-\varepsilon^2)\big)\Big) \\ &=: \big(x(s,r)\,,\, y(s,r)\big) \end{aligned} \tag{3.16}$$

可代入以下给出的表达式 $\mathcal{B}\left[\frac{\partial P_{\mathrm{I}}^{s}}{\partial s}, \frac{\partial P_{\mathrm{I}}^{s}}{\partial r}\right]$

$$2\left(\frac{\mathcal{L}_{123}}{xy} + \frac{\mathcal{R}_{123}}{y(x-y)} + \frac{\mathcal{L}_{234}}{(1-x)(y-x)} + \frac{\mathcal{R}_{234}}{(1-x)(y-1)}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s}\right) \quad . \tag{3.17}$$

类似地，通过计算联络（3.10）沿 1-路径（3.16）的路径有序指数，可以得到平行输运项 $W_{1r}^{P_{\mathrm{I}}^{s}}$ 和 $W_{r0}^{P_{\mathrm{I}}^{s}}$的显式表达式。令 $c_{\mathrm{V}}^{s}(r) := \big((1-r)\varepsilon^2 + r(1-\varepsilon),\ (1-s)\varepsilon + s(1-\varepsilon^2)\big)$，定义一个 2-路径 $c_{\mathrm{II}}^{1} \overset{P_{\mathrm{II}}}{\Longrightarrow} c_{\mathrm{V}}\, c_{\mathrm{IV}}$，

$$P_{\mathrm{II}}(s,r) := \begin{cases} c_{\mathrm{IV}}(2r)\,, & 0 \le r \le \frac{s}{2} \\ c_{\mathrm{V}}^{s}(2r-s)\,, & \frac{s}{2} \le r \le s \\ c_{\mathrm{II}}^{1}(r)\,, & s \le r \le 1 \end{cases} \quad . \tag{3.18}$$

如上所述，2-全纯有一个显式表达式

$$W^{P_{\mathrm{II}}} = \int_0^1 \int_{\frac{s}{2}}^{s} W_{1r}^{P_{\mathrm{II}}^{s}} \mathcal{B}\left[\frac{\partial P_{\mathrm{II}}^{s}}{\partial s}, \frac{\partial P_{\mathrm{II}}^{s}}{\partial r}\right] W_{r0}^{P_{\mathrm{II}}^{s}}\, dr ds \quad . \tag{3.19}$$

我们将 2-路径 $c_{\mathrm{III}}\, c_{\mathrm{II}}\, c_{\mathrm{I}} \overset{P}{\Longrightarrow} c_{\mathrm{V}}\, c_{\mathrm{IV}}$ 定义为

$$\begin{array}{ccc} c_{\mathrm{III}}\, c_{\mathrm{II}}\, c_{\mathrm{I}} & \overset{P}{\dashrightarrow} & c_{\mathrm{V}}\, c_{\mathrm{IV}} \\ {\scriptstyle c_{\mathrm{III}}\, P_{\mathrm{I}}}\Big\Downarrow & & \Big\Uparrow{\scriptstyle P_{\mathrm{II}}} \\ c_{\mathrm{III}}\,(c_{\mathrm{III}} \circ \iota)\, c_{\mathrm{II}}^{1} & \underset{P_{\mathrm{Triv}}}{\Longrightarrow} & c_{\mathrm{II}}^{1} \end{array} \quad . \tag{3.20}$$

2-全纯的 2-函子性 [Kem25b，定义 3。25]给出

$$W^{P} = W^{c_{\mathrm{III}}} W^{P_{\mathrm{I}}} + W^{P_{\mathrm{II}}} \tag{3.21}$$

而球面性条件要求

$$W^{P} : W^{c_{\mathrm{III}}} W^{c_{\mathrm{II}}} W^{c_{\mathrm{I}}} \Longrightarrow W^{c_{\mathrm{V}}} W^{c_{\mathrm{IV}}} \quad . \tag{3.22}$$

定理 3.3。 记作 $\Phi_{ijk} := \Phi(t_{ij}, t_{jk})$，我们得到五边形子级数的显式公式

$$\Pi : \Phi_{234}\Phi_{1(23)4}\Phi_{123} \Rrightarrow \Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34} \quad . \tag{3.23}$$

证明。 我们省略 [BRW25, (2.55)] 左端的第三个参数，因为我们实际上只关心极限 $\varepsilon \to 0$，而 [BRW25, (2.62)] 保证这些无关紧要的项确实无关紧要。考虑到这一点， [BRW25, (2.63) 和 (2.64)]给出

$$\varepsilon^{t_{34}}\Phi_{234}\varepsilon^{-t_{23}}\varepsilon^{t_{(23)4}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{-t_{1(23)}}\varepsilon^{t_{23}}\Phi_{123}\varepsilon^{-t_{12}} \overset{W^{P}}{\Longrightarrow} \varepsilon^{t_{2(34)}}\Phi_{12(34)}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{(12)3}} \tag{3.24}$$

我们将其重新排列为

$$\Phi_{234}\varepsilon^{-t_{23}}\varepsilon^{t_{(23)4}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{-t_{1(23)}}\varepsilon^{t_{23}}\Phi_{123}\overset{M_0}{\Longrightarrow}\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\Phi_{12(34)}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}, \tag{3.25}$$

其中 $M_0 := \varepsilon^{-t_{34}}W^P\varepsilon^{t_{12}}$。直接与（1.20）比较可得：

$$\int_{\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-t_{1(23)}}}^{\varepsilon^{-t_{1(23)}}\varepsilon^{t_{23}}} = \sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}(-1)^k\frac{(\ln\varepsilon)^{j+k}}{j!k!}\sum_{\substack{1\le l\le j\\1\le m\le k}} t_{1(23)}^{m-1}t_{23}^{l-1}\mathcal{R}_{123}t_{23}^{j-l}t_{1(23)}^{k-m} : \varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-t_{1(23)}} \Rrightarrow \varepsilon^{-t_{1(23)}}\varepsilon^{t_{23}}, \tag{3.26a}$$

$$\int_{\varepsilon^{t_{(23)4}}\varepsilon^{-t_{23}}}^{\varepsilon^{-t_{23}}\varepsilon^{t_{(23)4}}} = \sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(\ln\varepsilon)^{j+k}}{j!k!}\sum_{\substack{1\le l\le j\\1\le m\le k}} t_{(23)4}^{m-1}t_{23}^{l-1}\mathcal{L}_{234}t_{23}^{j-l}t_{(23)4}^{k-m} : \varepsilon^{t_{(23)4}}\varepsilon^{-t_{23}} \Rrightarrow \varepsilon^{-t_{23}}\varepsilon^{t_{(23)4}}, \tag{3.26b}$$

将其与（3.25）复合，可得

$$\Phi_{234}\varepsilon^{t_{(23)4}}\varepsilon^{-t_{23}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-t_{1(23)}}\Phi_{123}\overset{M_1}{\Longrightarrow}\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\Phi_{12(34)}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}} \tag{3.27}$$

其中

$$M_1 := \Phi_{234}\left(\int_{\varepsilon^{t_{(23)4}}\varepsilon^{-t_{23}}}^{\varepsilon^{-t_{23}}\varepsilon^{t_{(23)4}}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-t_{1(23)}} + \varepsilon^{-t_{23}}\varepsilon^{t_{(23)4}}\Phi_{1(23)4}\int_{\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-t_{1(23)}}}^{\varepsilon^{-t_{1(23)}}\varepsilon^{t_{23}}}\right)\Phi_{123}+M_0\,. \tag{3.28}$$

这些修正：

$$\int_{\varepsilon^{\Lambda_{234}}\varepsilon^{-t_{23}}}^{\varepsilon^{t_{(23)4}}} : \varepsilon^{\Lambda_{234}}\varepsilon^{-t_{23}} \Longrightarrow \varepsilon^{t_{(23)4}} \quad , \qquad \int_{\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-\Lambda_{123}}}^{\varepsilon^{-t_{1(23)}}} : \varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-\Lambda_{123}} \Longrightarrow \varepsilon^{-t_{1(23)}} \tag{3.29}$$

与（2.12）类似，分别为：

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\ln\varepsilon)^k}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1}\sum_{n=0}^{k-l-m-1}\binom{k-l}{m}(-1)^m t_{(23)4}^{l-1}\Lambda_{234}^n\mathcal{L}_{234}\Lambda_{234}^{k-l-m-n-1}t_{23}^m \quad , \tag{3.30a}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\ln\varepsilon)^k}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1}\sum_{n=0}^{k-l-m-1}\binom{k-l}{m}(-1)^{l+m} t_{1(23)}^{l-1}t_{23}^n\mathcal{R}_{123}t_{23}^{k-l-m-n-1}\Lambda_{123}^m \quad . \tag{3.30b}$$

将（3.29）与（3.27）复合，得到

$$\Phi_{234}\varepsilon^{\Lambda_{234}}\varepsilon^{-2t_{23}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{2t_{23}}\varepsilon^{-\Lambda_{123}}\Phi_{123}\overset{M_2}{\Longrightarrow}\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\Phi_{12(34)}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}} \tag{3.31}$$

其中

$$M_2 := \Phi_{234}\left(\varepsilon^{\Lambda_{234}}\varepsilon^{-2t_{23}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{t_{23}}\int_{\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-\Lambda_{123}}}^{\varepsilon^{-t_{1(23)}}} + \int_{\varepsilon^{\Lambda_{234}}\varepsilon^{-t_{23}}}^{\varepsilon^{t_{(23)4}}}\varepsilon^{-t_{23}}\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{t_{23}}\varepsilon^{-t_{1(23)}}\right)\Phi_{123} + M_1\,. \tag{3.32}$$

这些修正：

$$\int_{\Phi_{123}\varepsilon^{-\Lambda_{123}}}^{\varepsilon^{-\Lambda_{123}}\Phi_{123}} : \Phi_{123}\varepsilon^{-\Lambda_{123}} \Longrightarrow \varepsilon^{-\Lambda_{123}}\Phi_{123} \quad , \tag{3.33a}$$

$$\int_{\varepsilon^{\Lambda_{234}}\Phi_{234}}^{\Phi_{234}\varepsilon^{\Lambda_{234}}} : \varepsilon^{\Lambda_{234}}\Phi_{234} \Longrightarrow \Phi_{234}\varepsilon^{\Lambda_{234}} \quad , \tag{3.33b}$$

$$\int_{\varepsilon^{2t_{23}}\Phi_{1(23)4}}^{\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{2t_{23}}} : \varepsilon^{2t_{23}}\Phi_{1(23)4} \Longrightarrow \Phi_{1(23)4}\varepsilon^{2t_{23}} \tag{3.33c}$$

与（2.14）类似，因此我们直接将它们分别计算为：

$$\sum_{\substack{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}\\1\le m<\infty}}\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q}}\sum_{\substack{0\le l\le\tilde{p}+1\\1\le n\le m}}\frac{(-\ln\varepsilon)^m}{m!}\zeta^{p,q}_{j,k}\Lambda_{123}^{n-1} \tag{3.34a}$$
$$\times\left(\prod_{r=0}^{l-1}t_{12}^{j_r}t_{23}^{k_r}\right)\left(\sum_{r=1}^{j_l}t_{12}^{r-1}\mathcal{L}_{123}t_{12}^{j_l-r}t_{23}^{k_l}+t_{12}^{j_l}\sum_{r=1}^{k_l}t_{23}^{r-1}\mathcal{R}_{123}t_{23}^{k_l-r}\right)\left(\prod_{r=l+1}^{\tilde{p}+1}t_{12}^{j_r}t_{23}^{k_r}\right)\Lambda_{123}^{m-n}\quad,$$

$$-\sum_{\substack{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}\\1\le m<\infty}}\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q}}\sum_{\substack{0\le l\le\tilde{p}+1\\1\le n\le m}}\frac{(\ln\varepsilon)^m}{m!}\zeta^{p,q}_{j,k}\Lambda_{234}^{n-1} \tag{3.34b}$$
$$\times\left(\prod_{r=0}^{l-1}t_{23}^{j_r}t_{34}^{k_r}\right)\left(\sum_{r=1}^{j_l}t_{23}^{r-1}\mathcal{L}_{234}t_{23}^{j_l-r}t_{34}^{k_l}+t_{23}^{j_l}\sum_{r=1}^{k_l}t_{34}^{r-1}\mathcal{R}_{234}t_{34}^{k_l-r}\right)\left(\prod_{r=l+1}^{\tilde{p}+1}t_{23}^{j_r}t_{34}^{k_r}\right)\Lambda_{234}^{m-n}$$

and

$$\sum_{\substack{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}\\1\le m<\infty}}\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q}}\sum_{\substack{0\le l\le\tilde{p}+1\\1\le n\le m}}\frac{(2\ln\varepsilon)^m}{m!}\zeta^{p,q}_{j,k}t_{23}^{n-1}\left(\prod_{r=0}^{l-1}t_{1(23)}^{j_r}t_{(23)4}^{k_r}\right) \tag{3.34c}$$
$$\times\left(\sum_{r=1}^{j_l}t_{1(23)}^{r-1}\mathcal{R}_{123}t_{1(23)}^{j_l-r}t_{(23)4}^{k_l}+t_{1(23)}^{j_l}\sum_{r=1}^{k_l}t_{(23)4}^{r-1}\mathcal{L}_{234}t_{(23)4}^{k_l-r}\right)\left(\prod_{r=l+1}^{\tilde{p}+1}t_{1(23)}^{j_r}t_{(23)4}^{k_r}\right)t_{23}^{m-n}\quad.$$

将（3.33）与（3.31）复合，得到

$$M_3:\varepsilon^{\Lambda_{234}}\Phi_{234}\Phi_{1(23)4}\Phi_{123}\varepsilon^{-\Lambda_{123}}\Rrightarrow\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\Phi_{12(34)}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}} \tag{3.35}$$

其中

$$M_3:=\varepsilon^{\Lambda_{234}}\Phi_{234}\Phi_{1(23)4}\int_{\Phi_{123}\varepsilon^{-\Lambda_{123}}}^{\varepsilon^{-\Lambda_{123}}\Phi_{123}}$$
$$+\left(\int_{\varepsilon^{\Lambda_{234}}\Phi_{234}}^{\Phi_{234}\varepsilon^{\Lambda_{234}}}\Phi_{1(23)4}+\Phi_{234}\varepsilon^{\Lambda_{234}}\varepsilon^{-2t_{23}}\int_{\varepsilon^{2t_{23}}\Phi_{1(23)4}}^{\Phi_{1(23)4}\varepsilon^{2t_{23}}}\right)\varepsilon^{-\Lambda_{123}}\Phi_{123}+M_2\quad. \tag{3.36}$$

将（3.35）重新整理为

$$M_4:\Phi_{234}\Phi_{1(23)4}\Phi_{123}\Rrightarrow\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\Phi_{12(34)}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}\varepsilon^{\Lambda_{123}} \tag{3.37}$$

其中 $M_4:=\varepsilon^{-\Lambda_{234}}M_3\varepsilon^{\Lambda_{123}}$。我们有 $\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{2t_{34}}=\varepsilon^{2t_{34}}\varepsilon^{-2t_{12}}$，因此考虑

$$\int_{\varepsilon^{-2t_{12}}\Phi_{(12)34}}^{\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-2t_{12}}}:\varepsilon^{-2t_{12}}\Phi_{(12)34}\Rrightarrow\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-2t_{12}}\quad,\quad\int_{\Phi_{12(34)}\varepsilon^{2t_{34}}}^{\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{12(34)}}:\Phi_{12(34)}\varepsilon^{2t_{34}}\Rrightarrow\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{12(34)} \tag{3.38}$$

它们与（3.33）类似，因此我们可以直接分别计算得出：

$$\sum_{\substack{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}\\1\le m<\infty}}\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q\\0\le l\le\tilde{p}+1\\1\le n\le m}}\frac{(-2\ln\varepsilon)^m}{m!}\zeta^{p,q}_{j,k}t_{12}^{n-1}\left[\prod_{r=0}^{l-1}t_{(12)3}^{j_r}t_{34}^{k_r}\right]\sum_{r=1}^{j_l}t_{(12)3}^{r-1}\mathcal{L}_{123}t_{(12)3}^{j_l-r}t_{34}^{k_l}\left[\prod_{r=l+1}^{\tilde{p}+1}t_{(12)3}^{j_r}t_{34}^{k_r}\right]t_{12}^{m-n} \tag{3.39a}$$

and

$$-\sum_{\substack{\{p,q>0\,|\,\tilde{p}=\tilde{q}\}\\1\le m<\infty}}\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le k\le q\\0\le l\le\tilde{p}+1\\1\le n\le m}}\frac{(2\ln\varepsilon)^m}{m!}\zeta^{p,q}_{j,k}t_{34}^{n-1}\left[\prod_{r=0}^{l-1}t_{12}^{j_r}t_{2(34)}^{k_r}\right]t_{12}^{j_l}\sum_{r=1}^{k_l}t_{2(34)}^{r-1}\mathcal{R}_{234}t_{2(34)}^{k_l-r}\left[\prod_{r=l+1}^{\tilde{p}+1}t_{12}^{j_r}t_{2(34)}^{k_r}\right]t_{34}^{m-n} \tag{3.39b}$$

我们可以将其与（3.37）复合，得到

$$M_5:\Phi_{234}\Phi_{1(23)4}\Phi_{123}\Rrightarrow\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}\varepsilon^{\Lambda_{123}} \tag{3.40}$$

其中

$$\begin{aligned}M_5:=\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}&\left(\Phi_{12(34)}\varepsilon^{2t_{34}}\int_{\varepsilon^{-2t_{12}}\Phi_{(12)34}}^{\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-2t_{12}}}+\int_{\Phi_{12(34)}\varepsilon^{2t_{34}}}^{\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{12(34)}}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-2t_{12}}\right)\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}\varepsilon^{\Lambda_{123}}\\&+M_4\end{aligned} \tag{3.41}$$

倒数第二，我们考虑

$$\int_{\varepsilon^{-t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}}^{\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{-t_{12}}}=\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}\frac{(-\ln\varepsilon)^{j+k}}{j!k!}\sum_{\substack{1\le l\le j\\1\le m\le k}}t_{(12)3}^{m-1}t_{12}^{l-1}\mathcal{L}_{123}t_{12}^{j-l}t_{(12)3}^{k-m}:\varepsilon^{-t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\Rrightarrow\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{-t_{12}} \tag{3.42a}$$

and

$$\int_{\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}}^{\varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{-t_{34}}}=\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}(-1)^j\frac{(\ln\varepsilon)^{j+k}}{j!k!}\sum_{\substack{1\le l\le j\\1\le m\le k}}t_{2(34)}^{m-1}t_{34}^{l-1}\mathcal{R}_{234}t_{34}^{j-l}t_{2(34)}^{k-m}:\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\Rrightarrow\varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{-t_{34}} \tag{3.42b}$$

并将其与（3.40）复合，得到

$$M_6:\Phi_{234}\Phi_{1(23)4}\Phi_{123}\Rrightarrow\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{t_{34}}\Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{\Lambda_{123}} \tag{3.43}$$

其中

$$\begin{aligned}M_6\;:=\;&M_5+\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\int_{\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{t_{2(34)}}}^{\varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{-t_{34}}}\varepsilon^{2t_{34}}\Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-2t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{\Lambda_{123}}\\&+\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{t_{34}}\Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{12}}\int_{\varepsilon^{-t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}}^{\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{-t_{12}}}\varepsilon^{t_{12}}\varepsilon^{\Lambda_{123}}\quad.\end{aligned} \tag{3.44}$$

最后，我们考虑这些修正

$$\int_{\varepsilon^{\Lambda_{123}}}^{\varepsilon^{t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}}:\varepsilon^{\Lambda_{123}}\Longrightarrow\varepsilon^{t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}\quad,\quad\int_{\varepsilon^{-\Lambda_{234}}}^{\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{-t_{2(34)}}}:\varepsilon^{-\Lambda_{234}}\Longrightarrow\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{-t_{2(34)}} \tag{3.45}$$

它们与（3.30）类似，并分别表示为：

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\ln\varepsilon)^k}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1}\sum_{n=0}^{k-l-m-1}\binom{k-l}{m}\Lambda_{123}^{l-1}t_{(12)3}^{n}\mathcal{L}_{123}t_{(12)3}^{k-l-m-n-1}t_{12}^{m}\quad, \tag{3.46a}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\ln\varepsilon)^k}{k!}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1}\sum_{n=0}^{k-l-m-1}\binom{k-l}{m}(-1)^{k-1}\Lambda_{234}^{l-1}t_{34}^{n}\mathcal{R}_{234}t_{34}^{k-l-m-n-1}t_{2(34)}^{m}\quad. \tag{3.46b}$$

最后，将（3.43）与（3.45）合成，得到

$$\Pi := M_6 + \varepsilon^{-\Lambda_{234}} \int_{\varepsilon^{-\Lambda_{234}}}^{\varepsilon^{-t_{34}}\varepsilon^{-t_{2(34)}}} \varepsilon^{t_{2(34)}}\varepsilon^{t_{34}}\Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}}\varepsilon^{\Lambda_{123}} + \Phi_{12(34)}\Phi_{(12)34}\varepsilon^{-t_{12}}\varepsilon^{-t_{(12)3}} \int_{\varepsilon^{\Lambda_{123}}}^{\varepsilon^{t_{(12)3}}\varepsilon^{t_{12}}} . \tag{3.47}$$

□

参考文献

[BH11] J. C. Baez 和 J. Huerta，《高阶规范理论入门》，Gen. Relativ. Gravit. **43**，2335–2392（2011） [arXiv:1003.4485 [hep-th]]。

[BRW25] M. Bordemann、A. Rivezzi 和 T. Weigel，《Drinfel'd 结合子的浅显入门》，《数学物理评论》**37**，第 4 期（2025） [arXiv:2304.07012v2 [math.QA]]。

[CG23] H. Chen 和 F. Girelli，《Hopf 2-代数与编织幺半 2-范畴》，即将发表于 TAC [arXiv:2304.07398 [math.QA]].[CFM12] L. S. Cirio 和 J. Faria Martins，《Knizhnik-Zamolodchikov 联络的范畴化》，《微分几何及其应用》30，第 3 期，238–261（2012） [arXiv:1106.0042 [hep-th]].[CFM15] L. S. Cirio 和 J. Faria Martins，《无穷小 2-编织与微分交叉模》，《数学进展》277，426–491（2015） [arXiv:1309.4070 [math.CT]].[CFM17] L. S. Cirio 和 J. Faria Martins，《通过弦 Lie-2-代数中的无穷小 2-Yang-Baxter 算子对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ Knizhnik-Zamolodchikov 联络进行范畴化》，《理论与数学物理进展》21，147–229（2017） [arXiv:1207.1132 [hep-th]].[FMP10] J. Faria Martins 和 R. Picken，《论二维全纯》，《美国数学会汇刊》362，5657–5695（2010） [arXiv:0710.4310 [math.DG]].[JY21] N. Johnson 和 D. Yau，《二维范畴》，牛津大学出版社，牛津（2021） [arXiv:2002.06055 [math.CT]].[Kas95] C. Kassel，《量子群》，数学研究生教材 155，施普林格出版社（1995）。[Kel82] G. M. Kelly，《富集范畴论基本概念》，伦敦数学会讲义丛书 64，剑桥大学出版社，剑桥—纽约（1982）。 [重印于《范畴理论及其应用》10，1–136（2005）。] Kem25a] C. J. D. Kemp，《来自 3-移位泊松结构的对称交换与无穷小 2-编织的二阶积分》，arXiv:2505.01949 [math.QA].[Kem25b]C. J. D. Kemp，《通过 CMKZ 2-联络的 2-全纯对无穷小 2-编织进行 Cartier 积分，I：六边形变换与 Breen 多胞体》，arXiv:2508.01944[math.QA].[LM96] T. T. Q. Le 和 J. Murakami，《用于 Kauffman 多项式的 Kontsevich 积分》，《名古屋数学杂志》142，39–65（1996）。[Rie14] E. Riehl，《范畴同伦论》，New Math. Monogr. 24，剑桥大学出版社，剑桥（2014）。[Sch14] C. J. Schommer-Pries，《二维扩展拓扑场论的分类》，arXiv:1112.1000 [math.AT]。