arXiv:2603.22772v1 [math.RT] 24 Mar 2026

L^r-紧致 p进李群上的乘子

J.P. VELASQUEZ-RODRIGUEZ

摘要。设 p 为素数， $\mathbb{G}$ 为紧致 p进李群。本文基于 Ruzhansky-Turunen 差分算子和 Saloff-Coste 条件，给出了作用于 $\mathbb{G}$ 上的不变算子在$L^r_\alpha(\mathbb{G})$、 $1 < r < \infty$、 $\alpha > 0$上的乘子定理。作为应用，本文证明了一个 Littlewood-Paley 分解，并证明了紧维连群上 Vladimirov-Taibleson 算子的有界函数的 L^r-有界性。

目录

1. 引言 2 1.1. 阿贝尔维连金群上的乘子 4 1.2. 论文结构 6 1.3. 紧维连群 7 1.4. 紧海森堡群 8 1.5. 紧 p-进李群的对偶 11 1.6. $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ 13上的等价范数 1.7. $\mathbb{G}$ 14上的差分算子 1.8. Vladimirov-Taibleson 算子的符号 16 2. 主要结果 18 2.1. $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ 18上的乘子 2.2. $L^r_\alpha(\mathbb{G})$、 $r \neq 2$ 19上的乘子 3. 预备知识 20 3.1. 紧群上的傅里叶分析 20 3.2. 紧维连金群的对偶 21 3.3. 与实数情形的比较 23 3.4. 光滑函数与 Sobole夫空间 24 3.5. 表示的张量积 25 3.6. 表示的下界 28 3.7. 例1： $\mathbb{H}_d$ 30 3.8. 例2：恩格尔群 $\mathcal{B}_4$ 30 3.9. 插值定理 32 4. $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ 33上的乘子 4.1. 再举一例： $\mathbb{G}_{5,\ 2}$ 37 5. $L^r_\alpha(G)$、 $1 < r < \infty$上的乘子。38 6. $L^r_\alpha(\mathbb{G})$、 $1 < r < \infty$、 $-d \leq \alpha \leq (r-1)d$上的乘子。43

日期：2026年3月25日。2020 数学主题分类。主要分类；22E35,58J4；次要分类：20G05, 35R03, 42A16。关键词和短语。伪微分算子、p进李群、表示论、紧群、Vladimirov-Taibleson 算子。

7. 最后评述 46 7.1. VT 算子的函数 46 7.2. 适配 Vladimirov–Taibleson 次拉普拉斯算子的空间 47 参考文献 51

1. 引言

L^r乘子的相关问题是一个引人入胜且颇具挑战性的开放问题，几十年来一直令泛函分析学家着迷。最初，这一问题是在欧几里得空间的框架内探讨的；此后，大量研究致力于确立算子在 L^r意义下有界的充分条件（必要且充分的条件就更理想了！）。更确切地说，这一问题研究一类通过傅里叶分析定义的特殊线性算子，通常称为傅里叶乘子。在 $\mathbb{R}^d$ 中，这些算子可以表示为

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d),$$

其中，$\widehat{f}$ 是 f的傅里叶变换，而函数 $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 通常称为算子的符号 。对于希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^d)$，这类算子的连续性可以通过符号直接刻画；然而，要确定它们在巴拿赫空间 $L^r(\mathbb{R}^d), r \neq 2$上的有界性，则是一项重大挑战。因此，正如任何有趣问题都会引发的那样，许多作者都对这一问题进行了研究，并通过对符号的行为施加各种条件给出了部分答案。随着光滑流形和拓扑群理论的发展，这些结果逐渐推广到各种存在某种乘子概念的情形，尤其是那些支持某种形式傅里叶变换的空间。

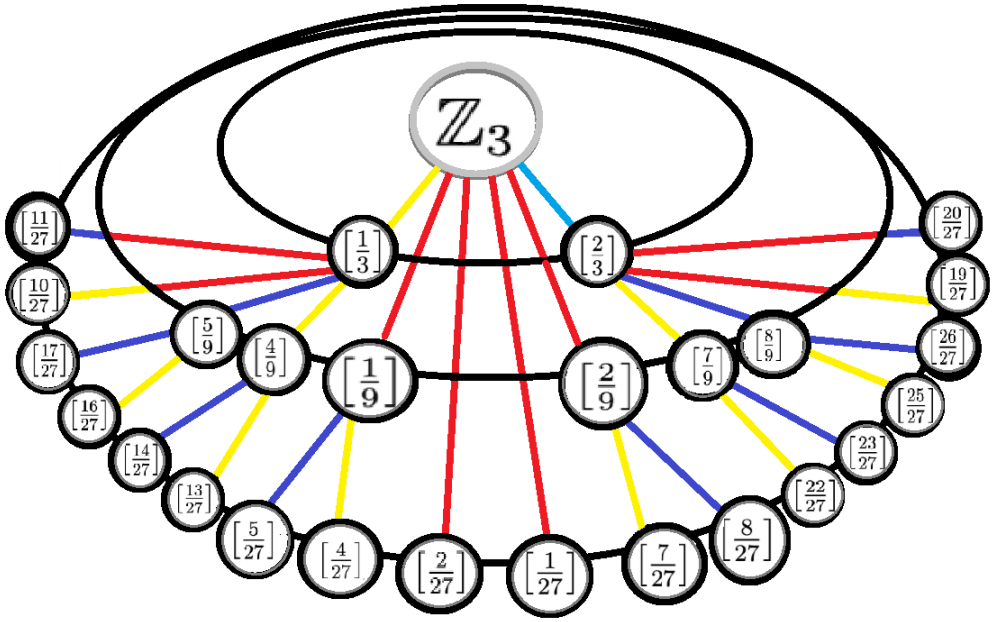
本文聚焦于全不连通拓扑空间的框架，尤其关注紧致情形，并详细探讨紧致 p-adic 李群，其中 p 是某个素数。我们的目标是在这一框架下建立若干乘子定理，并在此过程中讨论一些相关问题。这项研究是更广泛努力的一部分，旨在将弗拉基米罗夫型算子 [2, 9] 的理论从其经典起源—— p-adic 数 $\mathbb{Q}_p$——拓展至 p-adic 区域 [30, 31, 32] 和 p-adic 流形 [4, 5, 6]。尽管近年来取得了长足进展，但对于一般 p-adic 流形或区域上何种概念适合作为“拉普拉斯算子”，这一基础问题仍未解决。在方向 Vladimirov 算子的情形下，情况则更为微妙；由于缺乏规范的几何结构，难以提出令人满意的定义。

然而，当底层空间具有额外的代数结构（例如局部紧群的结构）时，相较于一般流形情形，我们便能获得显著的分析优势；例如，可以通过表示论研究某些李群上微分算子的亚椭圆性 [19]。秉持这一思路，我们采用了与 [15, 16, 17], 中所发展的策略类似的方法；该文作者利用某些类局部紧阿贝尔群的结构，研究傅里叶乘子的有界性。具体而言，若干弗拉基米罗夫型算子可以视为相对于标准群傅里叶变换的傅里叶乘子，正如 [19, 20], 中那样；这一事实使我们得以推导出本文提出的乘子定理。这是进一步研究算子性质的第一步

例如弗拉基米罗夫次拉普拉斯算子 [28], , 以及作用于（非交换） p-进李群上的更一般的平移不变算子。

p-进伪微分算子理论可以被视为对实群上发展起来的更经典理论的一种自然对应。关于紧群的结构性结果（见 [13]）表明，每个紧群要么同构于一个仿有限群与一个局部连通群的乘积，要么同构于与这种乘积相近的对象；后者通常是李群。从这个意义上说，紧群上的分析研究自然分为互补的两个方向：一个由李群和实流形的几何支配，另一个则由全不连通的仿有限结构推动。这种二分法与奥斯特罗斯基定理相呼应，该定理将 $\mathbb{Q}$ 上的所有绝对值分为阿基米德绝对值和非阿基米德 p-进绝对值。与实李群相关的分析理论构成主流框架[19, 20], , 而 p-进世界则提供了一个平行框架，其几何和分析特征迥然不同。最显著、也与本文目的最相关的差异之一，在于酉对偶 [3, 14] 的结构。在 p-进一侧，某些群的对偶可以用特殊树来参数化，而这些树自然具有超度量空间的结构。因此，一旦我们的乘子定理以差分算子表述，就可以将其解释为超度量树上所定义的映射（符号）之差的估计。这些树是由熟悉的$\hat{}$酉对偶 $\mathbb{Z}_p$ 的树形表示构成的子树，而该对偶常由普吕弗群实现；它们也可以是该树形表示的（d维乘积的）子树，其中 $\mathbb{Z}_p$ 的酉对偶常由普吕弗群实现。

$\hat{}$图 1. 对偶群 $\mathbb{Z}_p$, $p = 3$，是一棵无限树。这里可以看到最初的 3 个超度量球、它们生成有限树。



注 1.1. 我们将在这里采用的论证思路 [15, 16, 17]由来已久，不过我们会融入一些鲁赞斯基–图鲁宁理论 [20, 21], 和一些 *Fischer* 的想法 [10, 11] ，对其加以更新。本文旨在提供一套工具，用于研究（非交换） p-进李群上的弗拉基米罗夫型算子，此处仅讨论它们的紧致形式。

注 1。 **2.** 在本文余下部分中， p 表示一个（通常足够大的！）素数 r.

1.1. 阿贝尔维伦金群上的乘子。 本研究受到两个主要来源的启发。其一是李群上的伪微分算子理论，例如 [19,20]中所发展的理论。其二源于阿贝尔维伦金群上的傅里叶分析研究，遵循 [22] 的思路及其中的参考文献。本文将始终结合这两个背景中的技术；我们在此建立的乘子定理，正是将二者结合的结果，同时主要受到 Onnewer、Taibleson 和 Saloff-Coste 关于阿贝尔维伦金群的研究 [16, 22]启发。

定义 1.3。 若局部紧阿贝尔群 G 配备了一个严格递减的紧开子群序列 $\mathcal{G} := \{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ，使得 $(G, \star)$ 满足以下条件，则称其为阿贝尔维连金群

(1) 满足：

$$2 \le m_n := |G_n/G_{n+1}| < \infty,$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$。

(2)

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n, \quad \text{and} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G_n = \{e\}.$$

(3) 序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成 $e \in G$ 处的邻域基。

^维连金群是可度量化的 0 维拓扑群，其对偶群 G（按 Pontryagin 的意义）也是可度量化的拓扑群，并且同样是一个维连金群，带有子群序列

$$G_n^{\perp} := \{\chi \in \widehat{G} \ : \ \chi(x) = 1, \ \text{for all } x \in G_n\}.$$

^在这一框架下，傅里叶变换将定义在 G 上的函数映射为其对偶群 G 上的函数，而 Plancherel 定理建立了两侧 L^2-范数之间的联系。正如 Taibleson 和 Saloff-Coste 所示, [22, 25], 这一观点使我们能够利用定义在傅里叶侧的等价范数；我们希望通过将交换理论中的两个关键论证推广到非交换情形，展示同样的方法如何应用于非阿贝尔群：

(i) 加权 L^2-空间 $L^2(G, |\cdot|_{\mathcal{G}}^{\alpha})$ 中， $|\cdot|_{\mathcal{G}}$ 是与 $\mathcal{G}$ 相关联的群的超度量；该空间存在一个以作用于傅里叶变换的差分算子表示的等价范数。利用这一点以及某种“乘积法则”，我们可以得到关于 $L^2(G, |\cdot|_{\mathcal{G}}^{\alpha})$ 的乘子定理。(ii) 假设我们有一个合适的 Calderón–Zygmund 分解，以及一种证明某个算子具有弱型 $(1,1)$ 有界性的方法。那么，通过应用插值论证，我们可以将这种有界性推广到所有中间加权 L^r-空间。

因此，对于第一部分，我们有以下在 [22] 中证明的等价关系：

$$\|f\|_{L^2_\alpha(G)} := \Big(\int_G |f(x)|^2 |x|_{\mathcal{G}}^{\alpha} dx \Big)^{1/2} \asymp \Big(\int_{\widehat{G}} \int_{\widehat{G}} \frac{|\triangle_\eta \widehat{f}(\xi)|^2}{|\eta|_{\widehat{G}}^{1+\alpha}} d\eta d\xi \Big)^{1/2},$$

^其中，阿贝尔维连金群 G 的庞特里亚金对偶 G 是一个带有超度量 $|\cdot|_{\widehat{G}}$ 的可度量化群，而差分算子就是通常的差分

$$\triangle_\eta \sigma(\xi) = \sigma(\eta + \xi) - \sigma(\xi).$$

这不过是L^2_α-范数的一种等价表述，对于理解乘子相当便利，并自然地引出了以下定理:

定理 1.4 (Saloff-Coste, [22])。设 G 是一个局部紧阿贝尔 *Vilenkin* 群，其紧开子群 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成一个阶数为 ^ 的有界序列。设 G 是其酉对偶，并赋予与 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 关联的紧开子群序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，记为 ^ ^。设 $\sigma \in L^\infty(G)$。假设存在 B、$\varepsilon > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{|\xi|_{\widehat{G}}<|G_n^\perp|} \int_{G_n^\perp \setminus G_{n-1}^\perp} \frac{|\sigma(\eta+\xi)-\sigma(\eta)|^2}{|\xi|_{\widehat{G}}^{2+\varepsilon}}\, d\xi\, d\eta \le B^2 |G_n^\perp|^{-\varepsilon}.$$

那么，对于 $1 < r < \infty$，T_σ 可延拓为 $L^r(G)$ 上的有界算子。

注 1.5。 定理 *1.13* 的条件可写为

$$\int_{|\xi|_{\widehat{G}}<|G_n^\perp|} \int_{G_n^\perp \setminus G_{n-1}^\perp} |\bigtriangleup_\eta^{1+\varepsilon/2} \sigma(\xi)|^2\, d\eta\, d\xi \le B^2 |G_n^\perp|^{-\varepsilon},$$

其中 $\bigtriangleup_\eta^\beta$ 是 *Saloff-Coste* 差分算子

$$\bigtriangleup_\eta^\beta \sigma(\xi) := \frac{\sigma(\eta+\xi)-\sigma(\xi)}{|\eta|_{\widehat{G}}^\beta}.$$

对于第二部分，我们采用一种通常用于空间 L^r （其中 $r \neq 2$）的论证：插值方法。之所以这样做，是因为在加权空间中，$L^r_\alpha(G)$ 要找出一个有用的等价范数会困难得多；这种范数应能用算子的符号来刻画不变算子的有界性。或许这样的范数并不存在。因此，我们不得不采用一种不那么直接的方法，改用算子的卷积核而非符号：这一思路类似于 Onneweer 和 KITADA 在交换情形下所探讨的方法（见 [15, 16, 17]）。我们的目标是在此建立 Onneweer 以下定理的一个非交换类比。该定理依赖于作者称为**条件** $H(t)$ 的某个条件。

定理 1.6 (Onneweer)。 设 G 为一个局部紧阿贝尔 *Vilenkin* 群，且具有一个有界阶的紧开子群序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$。设 $|\cdot|_{\mathcal{G}}$ 为与该序列相关联的超度量，并且对于 $1 \le r < \infty$，有 $L^r_\alpha(G) := L^r(G, |\cdot|_{\mathcal{G}}^\alpha)$。

^(1) </style}若且条件对某个成立，那么如果是某个上的乘子，则它对所有满足和的、、都是乘子。(2) 若 $\sigma \in L^\infty(G)$ 且条件 $H(1)$ 成立，则 T_σ 是 $1 < r < \infty$上的 $L^r(G)$ 的乘子。

关于阿贝尔情形下条件 $H(t)$ 的定义，参见 [16] 。最后，作为定理 1.6 的一个应用，Onneweer 和 Quek 证明了以下 Littlewood-Paley 分解:

定理 1.7 (Quek)。 设 G 是一个局部紧序有界阿贝尔维连金群，且$1 < r < \infty, -1 < \alpha < r-1$。那么对所有 $f \in L^r_\alpha(G)$，有

$$\|f\|_{L^r_\alpha(G)} \asymp \|Sf\|_{L^r_\alpha(G)},$$

其中

$$Sf(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}_G^{-1}(\widehat{f}\mathbb{1}_{G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp})(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

现在让我们来探讨如何将先前的结果推广到非交换情形，首先考虑紧致 p-进李群。在这种情况下，所讨论群的对偶对象不再是群，这带来了额外的复杂性：其元素是矩阵表示，因此必须谨慎定义所要使用的适当差分算子[10, 11]。为了解决这些问题，我们需要研究非交换群傅里叶变换 [20], 紧 Vilenkin 群的表示论 [3, 7, 14, 28], 以及将若干源自紧李群上伪微分算子理论的思想加以推广 [21]。

注 1.8。 我应提醒读者，本文将使用相当多的非标准记号，尽管其中许多记号会借用自 [10, 11, 20, 21]。因此，先概述一下本文的组织结构可能会有所帮助，以便读者在阅读过程中把握每一步的含义。我假定读者对紧群的表示论有一些基本了解（只需一点点！），并且对 p-进数有所认识。具备一些 p-进分析背景当然会很有帮助!

1.2. **本文的组织结构**。 我们的目标是建立紧 p-进李群上的乘子定理，并以紧海森堡群作为主要例子。为此，我们必须经过以下几个准备步骤:

- 我们需要充分理解这些群的表示，并计算（如果可能的话！）其矩阵系数。这些信息也应有助于我们理解表示的张量积。
- 借助关于该群表示论的信息，我们可以讨论**群傅里叶变换**。这将是我们的主要工具，因为左不变算子（正是我们在此研究的对象！）恰好是在考虑函数的傅里叶级数表示时变为对角的那些算子。
- 我们需要引入一类值得研究的算子。在我们的背景下，所关注的算子（可以说）是微分算子的类似物，我们称之为弗拉基米罗夫型算子。按照惯例，乘子定理为研究这些伪微分算子的逆算子提供了一种工具；这也是我们的动机之一，尤其是对于弗拉基米罗夫型算子而言。
- 通常，我们的乘子定理是以对符号及其“导数”的某种控制为表述的，而在离散集合中，这些“导数”实际上就是差分算子。在我们的语境中，以一种良好的方式定义这类算子将很有用，从而可以对其应用插值论证。
- 在此过程中，我们将不得不估计许多范数（毕竟这是分析！），并证明其中一些范数之间的等价性。显然如此!

牢记这些目标，本文按以下顺序组织:

（1）在本节剩余部分中，我们将专注于介绍所有必要的概念，以便正式陈述我们所获得的结果；首先，我们将借助阿贝尔情形中取得的结果来阐明这些结果的动机。本节旨在为不熟悉紧群表示论，尤其是不熟悉 p-进情形的读者，提供清晰而全面的阐述。对这一主题十分熟悉的读者可以直接跳到第2节。有关表示论的大部分记号取自 [20], , 该文献也是关于紧李群基础知识的非常实用的参考资料。我们还借用了一些记号，来自

[16, 17], ，这些文献是关于阿贝尔维伦金群上的乘子定理的重要参考资料。（2）在第2节中，我们陈述主要结果。（3）在第3节中，我们回顾与紧 Vilenkin 群相关的所有定义和术语。我们将突出这一情形下表示论的特殊性，并将其与研究充分的（实）紧李群情形进行比较。（4）在第4节中，我们为希尔伯特空间 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$、 $\alpha > 0$ 引入等价范数，并利用它们给出关于符号的条件，以保证傅里叶乘子的L^2_α-有界性。（5）在第5节中，我们讨论更为抽象的紧 Vilenkin 群情形以及巴拿赫空间 $L^r_\alpha(G)$。我们将 [16] 的论证推广到非交换情形，利用阿贝尔与非阿贝尔 Vilenkin 群之间拓扑结构的相似性。（6）在第6节中，我们说明，当 $G = \mathbb{G}$ 是一个紧 p-进李群时，关于紧 Vilenkin 群的定理会呈现出一种特殊形式；我们利用对酉对偶和差分算子的理解，将 Taibleson 条件和 Saloff-Coste 条件 [25, 22] 推广到紧非交换 p-进李群。（7）在第7节中，我们讨论所得结果的一些含义及可能的推广。

1.3. **紧 Vilenkin 群**。 Taibleson 最早给出了关于局部域上 L^r 乘子的一些结果之一，其思路源自著名的 Hörmander 乘子定理。在 [25], 中，他运用 Calderón 和 Zygmund 的思想，给出了一些乘子定理，从而推出欧几里得空间中 Mihlin 和 Hörmander 结果的类似结论。随后，在 [16], 中，Onneweer 将 Taibleson 的思想推广到更一般的层次，开启了一系列关于阿贝尔维伦金群上的乘子和函数空间的论文。参见 [15, 16, 17, 29] 及其中的参考文献。

维连金群是全不连通群，它们带有一个严格递减的紧开子群序列，该序列构成单位元处的邻域基。这样的序列自然会在群上诱导出一个超度量；反过来，对于任意可度量化的全不连通群，都存在一个由度量球构成的基，它同时也是一个严格递减的紧开子群序列。换言之，维连金群就是可度量化的全不连通群，例如局部域的加法群；我们选择将其视为带有适当子群序列的群，主要是因为这种方法在进行分析时具有优势。下面，我们回顾其形式定义。

定义 1.9. 我们称拓扑群 G 为紧维连群，如果 $(G, \star)$ 是一个仿有限群，并配备了一个严格递减的紧开子群序列 $\mathcal{G} := \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得

(1) 满足:

$$2 \le m_n := |G_n/G_{n+1}| < \infty,$$

对每个 $n \in \mathbb{N}_0$。

(2)

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} G_n, \quad \text{and} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} G_n = \{e\}.$$

（3）序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 构成 $e \in G$ 处的邻域基。

如果我们还有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |G_n/G_{n+1}| < \infty,$$

我们称 G 为一个 有界阶维连金群。如果 $|G_n/G_{n+1}|$ 是常数，则称 G 为一个常数阶维连金群。

注 1.10。 上述定义与以下超度量定义相关：对于 $x, y \in G$，它们对应的距离定义为

$$\varrho_{\mathcal{G}}(x,y) = |x\star y^{-1}|_{\mathcal{G}} := \begin{cases} 0, & if\ x = y, \\ |G_n|, & if\ \ x\star y^{-1} \in G_n \setminus G_{n+1}. \end{cases}$$

这里，对于可测集 $A \subset G$，符号 $|A|$ 表示 A的测度。请注意，这个距离函数取决于紧开子群序列的选择。

近年来，阿贝尔维伦金群上的傅里叶分析一直是一个活跃的研究领域，尤其是在维连金系统的框架下。关于这一主题的近期综述，参见 [18] 。然而，关于非交换情形的文献相当有限，尽管这一理论仍然十分有趣，特别是因为它与表示论相互交织。

紧维连群 G 上的算子和函数可以借助**群傅里叶变换**进行分析。群傅里叶变换是研究平移不变算子的特别有力的工具；这类算子通过群的（通常是非交换的）平移来定义。如果算子 T 是平移不变的，那么它可以表示为傅里叶级数

$$Tf(x) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \operatorname{Tr}\left[\pi(x)\,\sigma_T(\pi)\,\widehat{f}(\pi)\right],$$

其中，映射 σ_T 称为算子 T的符号 。接下来，我们的主要目标是研究这一符号，并确定对 σ_T 施加哪些条件，才能确保 T 在加权 $L^r(G)$-空间上定义一个有界算子。

定义 1.11. 设 G 是一个紧拓扑群。我们用 $\mathrm{Rep}(G)$ 表示 G的所有连续酉有限维表示（的等价类）的集合。符号$\widehat{\ }$ G 表示 G的酉对偶，也就是 G的所有连续酉不可约表示（的等价类）的集合。众所周知， $\mathrm{Rep}(G)$ 中的任意元素$\backsim[\pi]$ 都可以写成 G中有限多个元素的直和。

注 1.12. 我们用符号 $a \lesssim b$ 和 $a \gtrsim b$ 表示量 a 分别小于或等于、或大于或等于量 b （$a \le Cb,\quad C > 0$）的某个常数倍。我们用记号 $a \asymp b$ 表示 $a \lesssim b$和 $a \gtrsim b$ 同时成立。

1.4. **紧海森堡群**。令 $d \ge 1$。或许，非交换仿有限群中最简单的非平凡例子是定义在 p进整数 $\mathbb{H}_d(\mathbb{Z}_p)$ 上的海森堡群，此处将其定义为赋予非交换运算的 $\mathbb{Z}_p^{2d+1}$

$$\mathbf{x}\star\mathbf{y} := (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3+x_1\cdot y_2), \quad x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{Z}_p^d,\ x_3,y_3 \in \mathbb{Z}_p.$$

实际上，这是一个 pro-p 群，也是一个紧致的 p-进李群，我们希望将其用作基本模型，以理解更一般的紧 Vilenkin 群类。它是一个逆有限群，

因为它是紧致且全不连通的，并且可以赋予由 $\mathcal{G} = \{\mathbb{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 定义的特殊紧开子群序列

$$\mathbb{G}_n := \mathbb{H}_d(p^n\mathbb{Z}_p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}_d \ : \ \|\mathbf{x}\|_p \le p^{-n}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

借助这个邻域基， $\mathbb{H}_d$ 成为一个紧维连群，其对应的维连金距离（见注 1.10）满足

$$\|\mathbf{x}\|_p^{2d+1} = |\mathbf{x}|_{\mathcal{G}}, \quad \text{for any } \mathbf{x} \in \mathbb{G} = \mathbb{H}_d.$$

由于 $\mathbb{H}_d$ 是一个紧群，它自然可以通过表示论进行傅里叶分析，只要我们对其酉对偶有足够了解。遗憾的是，据作者所知，文献中尚无研究计算一般 $\mathbb{Z}_p$-李群表示的矩阵系数，而这正是人们理想中希望获得的信息。现有的研究则包括 [3, 14], 等，它们探讨这些表示的特征标和维数，有时甚至将研究范围扩展到拟有限群。 [3, 14]中缺少的关键环节，是一种从余伴随轨道出发、求得表示显式形式的一般诱导过程，类似于 [7]中所述的基里洛夫轨道方法。

为（部分）弥补文献中的这一空白，作者最近在 [26, 27, 28],中对维数不超过五的紧致幂零 $\mathbb{Z}_p$-李群的酉对偶进行了显式计算，其中包括相应表示的矩阵系数。对这些群的深入了解，有助于更好地分析定义在群上的某些线性算子，这与 Rockland 对实数域上的海森堡群所采用的方法类似 [19]。在其研究中，Rockland 对非交换群背景下的拟椭圆算子领域作出了重要贡献：他确立了表示论判据，为判定定义在海森堡群上的算子是否具有拟椭圆性提供了可靠框架。这一点尤为重要，因为海森堡群是分析和物理学中各种现象的模型，尤其涉及量子力学和次黎曼几何。

本文中，我们希望借助海森堡群及对其表示论的理解，指导我们研究紧致 p-进李群（有时称为 $\mathbb{Z}_p$-李群）上的傅里叶乘子，以及更一般地，紧 Vilenkin 群上的傅里叶乘子。其思路是将针对紧李群发展出的若干技术 [20] 推广到海森堡群，继而深入探索更一般的紧致 p-进李群。与实数情形相同，我们将看到，如何通过要求对符号的“导数”——在本例中即差分算子[10, 11]——进行一定控制，来确保给定不变算子的有界性。例如，在（实）紧李群上， [21] 的作者展示了如何利用 RT 差分算子控制傅里叶变量。这些算子推广了阿贝尔情形中的差分算子，其定义基于该群某种实现的酉不可约表示的矩阵系数。参见 [10, 11]。

对紧致 p-进李群的研究，可以视为实群主流理论的一个补充方面，尤其是因为根据若干结构定理，任意紧群总是与某种局部连通群（通常是李群）和仿有限群的乘积十分接近。参见例如 [13, Chapter 9]。这在某种程度上延伸了这样一种观点： $\mathbb{Q}$ 只能赋予两种不同的度量结构：通常的局部连通实结构，对应于阿基米德绝对值 $|\cdot|$；以及局部仿有限结构，对应于 p-进绝对值 $|\cdot|_p$。因此，对于 p-进情形，我们旨在说明，尽管仍需要某种形式的 Ruzhansky–Turunen（RT）差分算子 [10, 11, 21]（这也是实数情形共有的一点！），但对傅里叶变量的控制

在 [21]中提出的控制方法必须予以替换。事实上，恰当的替代方案是对 Saloff-Coste 在 [22] 中为阿贝尔维伦金群引入的条件作适当推广。这一发展采用了与 Fischer 在 [10, 11], 中研究的内禀微积分有些相似的工具，但也会考虑我们在全不连通情形下需要引入的微妙变化。首先，我们希望对傅里叶变量的控制采用无论何种定义，都能涵盖 Vladimirov–Taibleson 算子的行为；该算子定义在一般的紧致 $\mathbb{K}$-进李群上，如下所示：

定义 1.13 （Vladimirov–Taibleson算子）。 设 $\mathbb{K}$ 是一个非阿基米德局部域，其整数环为 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$，素理想为 $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$，剩余域为 $\mathbb{F}_q \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{K}}/p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$。设 $\mathbb{G} \leq \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ 是一个紧致的 d 维 $\mathbb{K}$ 李群，且 $\mathcal{M}_m(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ 是所有取值于 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 的 $m \times m$ 矩阵构成的李代数。我们在 $\mathbb{G}$ 上定义 *Vladimirov–Taibleson*算子如下：

$$D^{\alpha} f(\mathbf{x}) := \frac{1 - q^{\alpha}}{1 - q^{-(\alpha+d)}} \int_{\mathbb{G}} \frac{f(\mathbf{x} \star \mathbf{y}^{-1}) - f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{K}}^{\alpha+d}} \, d\mathbf{y},$$

其中

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{K}} := \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in \mathbb{G} \setminus I_m + \mathcal{M}_m(p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \\ |\mathbb{G}/\mathbb{G}_1|^{\frac{-1}{d}} q^{-(n-1)}, & \mathbf{y} \in \mathbb{G} \cap \left(I_m + \mathcal{M}_m(p^n\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \setminus I_m + \mathcal{M}_m(p^{n+1}\mathcal{O}_{\mathbb{K}})\right). \end{cases}$$

这里， $d\mathbf{y}$ 表示 $\mathbb{G}$ 上唯一的归一化哈尔测度。有时，考虑算子

$$\mathbb{D}^{\alpha} f(\mathbf{x}) := \frac{1 - q^{\alpha}}{1 - q^{-(\alpha+d)}} \left(1 - \frac{1}{|\mathbb{G}/\mathbb{G}_1|} - \frac{1 - p^{-d}}{p^{\alpha} - 1} |\mathbb{G}/\mathbb{G}_1|^{\alpha/d}\right) f(\mathbf{x}) + D^{\alpha} f(\mathbf{x}),$$

对于幂零群，该算子尤其可以写成

$$\mathbb{D}^{\alpha} f(\mathbf{x}) := \frac{1 - q^{-d}}{1 - q^{-(\alpha+d)}} f(\mathbf{x}) + \frac{1 - q^{\alpha}}{1 - q^{-(\alpha+d)}} \int_{\mathbb{G}} \frac{f(\mathbf{x} \star \mathbf{y}^{-1}) - f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{K}}^{\alpha+d}} \, d\mathbf{y}.$$

注 1.14。 紧致的 p 进李群总是同构于 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ 的某个闭子群，因此，不失一般性，我们假设群总是某个 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ 的矩阵子群，其中 $m \in \mathbb{N}$ 适当选取。

对逆有限群上的分析研究似乎相当不成熟，相关文献也似乎几乎不存在，除了少数尝试建立傅里叶变换某些性质的工作；但这些工作始终使用表示的特征标，而非矩阵系数（例如参见 [12]）。本文采取不同的方法，沿着一条与 Ruzhansky、Turunen 和 Wirth 在 [20, 21], 中所走路径略有相似的道路，同时纳入必要且显而易见的修改，以适应超度量结构，这与 Saloff-Coste 在 [22] 中的做法类似。我们的思路很简单，尽管需要处理一些技术细节。一个关键论证将是加权空间之间的插值

$$L^r_{\alpha}(\mathbb{G}) := \left\{ f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{G}} |f(\mathbf{x})|^r \|\mathbf{x}\|_p^{\alpha} \, d\mathbf{x} < \infty \right\}, \quad 1 \leq r < \infty, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

以及弱加权空间

$$L^{r,w}_{\alpha}(\mathbb{G}) := \left\{ f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sup_{t>0} t\big(\mu_{\alpha}\{\mathbf{x} \in \mathbb{G} : |f(\mathbf{x})| > t\}\big)^{1/r} < \infty \right\}, \quad 1 \leq r < \infty, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

其中

$$\mu_\alpha(A) := \int_A \|\mathbf{x}\|_p^\alpha d\mathbf{x}.$$

1.5. **紧致 p-阿迪克李群的对偶**。 设 $\mathbb{G}$是一个紧致 p-阿迪克李群。其上的傅里叶乘子 $\mathbb{G}$ 是一个线性算子 T_σ，其形式为

$$T_\sigma f(\mathbf{x}) = \sum_{[\pi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\pi \operatorname{Tr}\left[\pi(\mathbf{x})\,\sigma(\pi)\,\widehat{f}(\pi)\right],$$

其中映射

$$\sigma : \mathbb{G}\times \operatorname{Rep}(\mathbb{G}) \to \bigcup_{[\pi]\in\operatorname{Rep}(\mathbb{G})} \mathbb{C}^{d_\pi\times d_\pi},$$

称为算子的符号。另一种等价定义是：傅里叶乘子是 $\mathbb{G}$上的左不变线性算子。总之，要理解紧群上的乘子，了解相关群的表示论或许是方便的，甚至是必要的。一般而言，这可能是一项非常艰巨的工作，但某些类p-阿迪克群的相关信息足够丰富，例如紧致幂零 p-阿迪克李群。

注 1.15。 我们将每个等价类 $\lambda \in \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 与完备系统中的相应代表元等同

$$\{1\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k p^{-k} : \textit{only finitely many } \lambda_k \neq 0 \right\}.$$

类似地，商群 $\mathbb{Q}_p/p^{-n}\mathbb{Z}_p$ 中的元素取自

$$\{1\} \cup \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k p^{-k} : \textit{only finitely many } \lambda_k \neq 0 \right\}.$$

注 1.16。 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 也是一棵树。为此，只需将任意一个 $\vec{\lambda} \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 与

$$\{(1,...,1)\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\lambda}_k p^{-k} : \textit{only for finitely many } k,\ (0,...,0) \neq \vec{\lambda}_k \in \{0,1,...,p-1\}^d \right\}.$$

定义 $P_l(\vec{\lambda}) := \sum_{k=1}^{l} \vec{\lambda}_k p^{-k}$。我们称 ξ 是 η 的后代，如果存在某个 l 使得 $P_l(\xi) = \eta$。要在两个 ξ、$\eta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 之间画一条边，请按照以下说明操作：

(1) 树的根是 $\vec{0} = (0,...,0)$。所有形如 $\vec{\lambda}_1 p^{-1}$ 的元素都与 $\vec{0}$ 相连。这构成了第一层。(2) 第二层中，我们有形如 $\vec{\lambda}_1 p^{-1} + \vec{\lambda}_2 p^{-2}.$ 的元素 $\vec{\lambda}$。当且仅当 $P_1(\lambda) = \eta$ 时，我们才会在其中一个元素与前面任意一条边 η 之间画一条边 $\vec{}$。(3) 沿用相同的思路，一旦我们有了截至第二层的点和边，就考虑所有元素 $\vec{\lambda}_1 p^{-1} + \vec{\lambda}_2 p^{-2} + \vec{\lambda}_3 p^{-3}$、 $\vec{\lambda}_3 \neq 0$。当且仅当 $P_2(\lambda) = \eta.$ 时，其中一个元素才与前一层 $\vec{}$ 的一条边 η 相连。(4) 一般而言，如果 $\|\xi\|_p = p^n$，那么当且仅当 $P_{n-1}(\xi) = \eta.$，ξ 才会与前一层中的 η 通过一条边相连。

关于酉对偶，我们理想情况下希望获得的信息是某种参数化方式，最好是由 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 的某个子集给出的，就像我们接下来要描述的情形一样。以下思路在 [3] 和 [14] 中有详细阐述。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个幂零 $\mathbb{Z}_p$-李代数，并令 $\mathbb{G} = \exp(\mathfrak{g})$ 表示与之对应的紧致幂零 p-进李群。为简单起见，我们将 $\mathfrak{g}$ 视为 $\mathcal{M}_m(\mathbb{Z}_p)$ 的一个子代数，其中 $m \in \mathbb{N}$ 取适当的值。在下文中，我们假设 p 大于 $\mathfrak{g}$ 的幂零类。对于这类群，可以进行如下构造：

(1) 假设 $\mathfrak{g} \cong \mathbb{Z}_p^d$，使得 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathbb{G}$ 的维数均为 d。(2)
考虑 $\mathfrak{g}$ 的对偶：

$$\mathfrak{g}^* := \{\chi_\ell(X) = e^{2\pi i\{\ell\cdot X\}_p} \ : \ \ell \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d \cong \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d\}.$$

(3) 在这种情况下，**余伴随表示** 具有如下形式

$$\langle \mathrm{Ad}_{\mathbf{g}}^*\ell, X\rangle := \langle \ell, \mathrm{Ad}_{\mathbf{g}^{-1}}X\rangle = e^{2\pi i\{\ell\cdot \mathrm{Ad}_{\mathbf{g}^{-1}}X\}_p},$$

其中，**伴随表示** 通常定义为映射

$$\mathrm{Ad} : \mathbb{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ \ \mathbf{g} \mapsto \Psi_{\mathbf{g}}(X) = \mathbf{g}X\mathbf{g}^{-1}.$$

(4) 记 $\mathcal{O}_\ell$ 为与 ℓ 对应的**余伴随表示的轨道**。$\mathfrak{g}$ 在 ℓ 处的**极化子**是一个李子代数 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$，它满足：$\ell$ 在 $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ 上是平凡的（$e^{2\pi i\{\ell\cdot X\}_p} = 1$，对所有 $X \in \mathfrak{p}$ 均成立），并且它在具有此性质的 $\mathfrak{g}$ 的所有加法子群中是极大的。

(5) 根据 [14, 引理 1.4], ，极化子总是存在的；如果 $P := \mathbf{exp}(\mathfrak{p})$ 是与某个极化子 $\mathfrak{p}$对应的 $\mathbb{G}$ 子群，那么 ℓ 会诱导出 P的一个一维特征χ_ℓ，从而可以构造诱导表示 $\pi_\ell = \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}}(P, \chi_\ell)$。

(6) [14, 引理 1.2], 中证明了这一点，随后 [3] 将结论推广到更一般的仿有限群：所得表示总是不可约的；其同构类仅取决于 ℓ 的$\curvearrowleft\mathbb{G}$-轨道；最后，每个 $[\pi] \in \mathbb{G}$ 都以这种方式来自唯一的 $\mathbb{G}$-轨道 $\mathcal{O}_\ell \subset \mathfrak{g}^*$。

(7) 根据 [14, 引理 1.2], ，与 $\mathbb{G}$-轨道 $\mathcal{O}_\ell$ 相联系的**表示的特征**公式为

$$\chi_{\pi_\ell}(\mathbf{exp}(X)) = |\mathcal{O}_\ell|^{-1/2}\sum_{\xi\in\mathcal{O}_\ell} e^{2\pi i\{\xi\cdot X\}_p}.$$

(8) 总而言之，**紧致 p-进李群 $\mathbb{G}$ 的酉对偶可以与.的某个特殊子集相对应**。

特别是，Kirillov-Howe 公式 [14] 给出了 $\mathbb{H}_d$:

$$\chi_{\pi_\xi}(\mathbf{x}) = |\xi_3|_p^d e^{2\pi i\{\xi_1\cdot x_1+\xi_2\cdot x_2+\xi_3 x_3\}_p}\mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}(x_1,x_2).$$

这里，函数 $\mathbb{1}_A$ 表示可测集 A的示性函数，而 $\vartheta(\xi)$ 是通常的p-进赋值。9 当我们的李群的指数映射不是同胚时， [3, 14] 中的论证便不再适用，因此我们无法像 [7]中那样从$\widehat{\ }$余伴随轨道得到不可约表示。不过，对于任意 $\mathbb{G} \le \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ 和任意 $[\pi] \in \mathbb{G}$，我们都可以定义如下超度量：

$$|\pi|_{\widehat{\mathbb{G}}} := |\mathbb{G}_{n_{[\pi]}}|^{-1},\ \|\pi\|_p := |\pi|_{\widehat{\mathbb{G}}}^{1/d},\ \text{where}\ n_{[\pi]} := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ \pi(\mathbf{x}) = I_{d_\pi}\}.$$

^这里的关键结论是， $\mathbb{G}$ 和 **Rep**($\mathbb{G}$) 可以赋予某种超度量，这意味着在阿贝尔幺半群 $(\mathrm{Rep}(\mathbb{G}), \otimes)$ 上有

$$|[\pi] \otimes [\pi']|_{\widehat{\mathbb{G}}} \leq \max\{|[\pi]|_{\widehat{\mathbb{G}}}, |[\pi']|_{\widehat{\mathbb{G}}}\}.$$

特别地，当 $\mathbb{G}$ 是幂零的，或者指数映射是一个同胚时， [3]中的论证使我们得出结论： $\widehat{\mathbb{G}}$ 可以与$\widehat{\mathbb{Z}}_p^d \cong \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$的某个子集等同，而先前对 $\|\cdot\|_p$的定义与$\mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$上的通常 p-进范数一致。这意味着，紧致 p-进李群 $\mathbb{G}$ 上的 L^2-函数可以写成其傅里叶级数表示

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{[\pi]\in\widehat{\mathbb{G}},\, \|\pi\|_p = p^n} d_\pi \operatorname{Tr}[\pi(\mathbf{x})\widehat{f}(\pi)], \quad f \in L^2(\mathbb{G}), \tag{1}$$

^其中 f 表示 f的群傅里叶变换，对 $\mathbb{G}$ 定义如下

$$\mathcal{F}_{\mathbb{G}}[f](\pi) := \int_{\mathbb{G}} f(\mathbf{x})\pi^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

特别　地，对于海森堡群，傅里叶级数表示的形式为

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{\xi_3\in\widehat{\mathbb{Z}_p}} \sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{Q}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}} |\xi_3|_p^d \operatorname{Tr}[\pi_\xi(\mathbf{x})\widehat{f}(\xi)], \quad f \in L^2(\mathbb{G}). \tag{2}$$

完整计算见 [26] 。

1.6. **关于 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$的等价范数**。正如我们之前所说，本文主要使用两种论证方法:

(i) L^2_α 空间之间的乘子定理，(ii) $L^{1,\ w}_{\ \alpha}(\mathbb{G})$ 和 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$之间的插值论证。

为了在插值论证中处理端点空间 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ ，我们通过以下范数等价，将 Saloff-Coste 差分算子引入酉对偶:

$$\boxed{\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{G})} \asymp \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \|\Delta_\eta \widehat{f}(\xi)\|^2_{HS},} \tag{3}$$

这是以下等价关系的直接推论

$$\boxed{\|\mathbf{x}\|_p^\alpha \asymp I_\alpha(x) := \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\eta \, \|\eta(\mathbf{x}) - I_{d_\eta}\|^2_{HS} \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}.} \tag{4}$$

这个想法实际上源自 Taibleson 和 Saloff-Coste，他们详细研究了局部域和阿贝尔维伦金群 [22]上的情形。特别地，对于海森堡群，范数等价具有以下形式:

$$\boxed{\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{H}_d)} \asymp \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{H}}_d} \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{H}}_d} |\xi_3|_p^d |\eta_3|_p^d \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+(2d+1))} \|\Delta_\eta \widehat{f}(\xi)\|^2_{HS}.} \tag{5}$$

上述范数利用了这一事实：正如在 [26], 中证明的那样， $\mathbb{H}_d$ 的酉对偶可与 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$ 的以下子集等同:

$$\widehat{\mathbb{H}}_d := \{\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1} : (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Q}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}\},$$

^对于任意等价类 $[\pi] \in \mathbb{H}_d$，我们选取一个定义在希尔伯特空间上的代表元π_ξ

$$\mathcal{H}_\xi := \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ |\xi_3|_p^{d/2} \mathbb{1}_{h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d} : h \in \mathbb{Z}_p^d / p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d \right\} \subset L^2(\mathbb{Z}_p^d),$$

通过公式

$$(\pi_\xi(\mathbf{x})\varphi)(u) := e^{2\pi i \{\xi_1 \cdot x_1 + \xi_2 \cdot x_2 + \xi_3 (x_3 + x_2 \cdot u)\}_p} \varphi(u + x_1).$$

这里， $\xi_3 \in \mathbb{Q}_p$ 的 p-进赋值记为 $\vartheta(\xi_3)$。

1.7. 上的差分算子。本文研究 $\mathbb{G}$上的左不变线性算子，这些算子恰好是可以通过傅里叶级数写成分块对角算子的算子。该算子的符号可用 $[\pi]$的给定实现 π 表示为

$$\sigma_T(\pi) = \pi^*(\mathbf{x}) T \pi(\mathbf{x}),$$

并且可用于建立条件，以保证算子在某些函数空间之间的有界性。例如，对于希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{G})$，条件 $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{G}))$（即 T是 $L^2(\mathbb{G})$上的有界算子）等价于符号条件

$$\sigma \in L^\infty_{op}(\widehat{\mathbb{G}}) := \{\sigma : \sup_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \|\sigma(\xi)\|_{\mathrm{op}} < \infty, \quad \|\sigma(\xi)\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|\sigma(\xi)v\|_{\mathcal{H}_\xi} : \|v\|_{\mathcal{H}_\xi} = 1\}\}.$$

然而，当 $r \neq 2$时，仅凭符号本身显然无法保证有界性；即使在简单情形下，寻找充要条件仍是一个开放问题。一个典型的初步尝试是利用符号的导数或某些差分算子来控制其行为，这与经典的米赫林乘子定理类似。关于局部连通紧李群，读者可在 [20, 21] 中找到差分算子的恰当定义，并在 [21] 中找到相应的米赫林型定理。另见 [10, 11]。

定义 1.17（差分算子）。设 G 为一个紧群。差分算子 Δ_η、$\prec[\eta] \in G$ 通过以下方式作用于符号

$$\Delta_\eta \sigma(\xi) := \sigma(\eta \otimes \xi) - \sigma(\mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \xi),$$

其中， I_{d_η} 表示维数为 d_η 的恒等表示。

备注 1.18。设 G 为一个紧群。任意连续酉表示 $[\pi] \in \mathrm{Rep}(G)$ 都可以写成不可约表示的直和：

$$[\pi] \cong \bigoplus_{[\xi]\in\widehat{G}} m_{[\xi],[\pi]}[\xi],$$

^因此，最初定义在酉对偶 G 上的符号总可以延拓到整个 $\mathrm{Rep}(G)$，并且 $\mathrm{Rep}(G)$ 上的任意映射都限制为 G 上的一个映射。

定义 1.17 与所谓的 RT 差分算子之间存在自然联系。将我们的有限维表示视为它们的矩阵实现，并将它们的张量积视为克罗内克积，我们可以将 $[\eta] \otimes [\xi] \cong [\eta \otimes \xi]$ 看作一个大小为 $d_\eta \times d_\xi$ 、块元素为 $\eta_{ij}(x)\xi(x)$ 的分块矩阵。因此，对于 $f \in L^2(G)$，差分算子的作用为

$$\Delta_\eta \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\eta \otimes \xi) - \widehat{f}(\mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \xi) = \int_G f(x) \big((\eta(x) - \mathrm{I}_{d_\eta}) \otimes \xi(x) \big)^* \, dx,$$

而第 (i,j) 个块元素为

$$[\Delta_\eta \widehat{f}(\xi)]_{ij} := \int_G f(x)(\overline{\eta_{ji}}(x) - \delta_{ij})\xi^*(x),$$

这与和函数 $q_{ij}^\eta(x) := \eta_{ji}(x) - \delta_{ij}$ 相关联的 RT 差分算子一致。 —

定义 1.19 (RT 差分算子)。 设 $\mathbb{G}$ 是一个紧李群，且 $q \in C^\infty(\mathbb{G})$。作用于定义在酉对偶上的映射的 *RT 差分算子*为

$$\Delta_q \sigma(\xi) := \mathcal{F}_{\mathbb{G}}\Big[q\,\mathcal{F}_{\mathbb{G}}^{-1}[\sigma]\Big](\xi) = \int_{\mathbb{G}} q(x)\mathcal{F}_{\mathbb{G}}^{-1}[\sigma](x)\,dx.$$

RT 差分算子可用于证明紧李群上 Mikhlin 条件的一个类似结果。这里我们希望为紧 p-进李群 $\mathbb{G}$ 找到相应的类似结果，从我们的第一个例子 $\mathbb{H}_d$ 入手，该例将帮助我们探究非交换情形下有趣算子的符号行为。鉴于表示的张量积将被频繁使用，我们不妨回顾一下：在海森堡群的情形中， [26] 已证明表示的张量积的特征为

$$\chi_{\pi_\eta\otimes\pi_\xi}(\mathbf{x}) = \chi_{\pi_\eta}(\mathbf{x})\chi_{\pi_\xi}(\mathbf{x}) = |\eta_3|_p^d|\xi_3|_p^d\, e^{2\pi i\{\mathbf{x}\cdot(\xi+\eta)\}_p}\,\mathbb{1}_{\max\{|\xi_3|_p,|\eta_3|_p\}\mathbb{Z}_p^{2d}}(x_1,x_2),$$

这为计算张量积的符号提供了一种便捷的方法。为了解这一点，考虑集合

$$\widehat{\mathbb{H}}_d^{\mathbb{N},\,finite} := \{f : \mathbb{N} \to \widehat{\mathbb{H}}_d \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1} \ :\ f(n) = 0 \text{ for large enough } n\},$$

$\widehat{\ }$它是 $\mathbb{H}_d$ 上有限序列的集合。定义 S_∞ 为所有对称群 S_n 的并集。于是

$$\Gamma(\mathbb{H}_d) := \widehat{\mathbb{H}}_d^{\mathbb{N},\,finite}/S_\infty,$$

$\widehat{\ }$是由 $\mathbb{H}_d$ 的元素构成的所有有限无序序列的集合；赋予其以下运算 $\boxtimes$ 后，它同构于 $(\mathrm{Rep}(\mathbb{H}_d),\otimes)$。

定义 1.20 （同余与 $\boxtimes$ 运算）。

（1）设 $\gamma,\zeta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d$。若 γ 模 p^n 与 ζ 同余，记作 $\gamma \equiv \zeta \mod p^n$，则

$$\gamma - \zeta \in p^{-n}\mathbb{Z}_p^d.$$

换言之，若 $\gamma,\zeta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 在其 p 进制展开中，除前 n 位外其余数字都相同，则它们同余。对每个固定的 n，这在 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 上定义了一个等价关系；我们用 $[\gamma]_n$ 表示 γ 在 $\mathbb{Q}_p^d/p^{-n}\mathbb{Z}_p^d$ 中的等价类。

（2）对于 $\xi,\eta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$，令 $N(\eta,\xi) \in \mathbb{N}_0$ 为满足下式的自然数：

$$p^{N(\eta,\xi)} = \max\{|\eta_3|_p, |\xi_3|_p\}.$$

我们定义函数

$$\boxtimes : \widehat{\mathbb{H}}_d \times \widehat{\mathbb{H}}_d \to \Gamma(\widehat{\mathbb{H}}_d)$$

通过公式 $\xi \boxtimes \eta :=$

$$\begin{cases} \big([\xi_1+\eta_1]_{N(\eta,\xi)}, [\xi_2+\eta_2]_{N(\eta,\xi)}, \xi_3+\eta_3\big), & \text{if } |\xi_3+\eta_3|_p = \max\{|\xi_3|_p,|\eta_3|_p\}\ , \\ \bigoplus_{\gamma\in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}} \big([\xi_1+\eta_1+\gamma_1]_{N(\eta,\xi)}, [\xi_2+\eta_2+\gamma_2]_{N(\eta,\xi)}, \xi_3+\eta_3\big), & \text{if } |\xi_3+\eta_3|_p < \max\{|\xi_3|_p,|\eta_3|_p\}. \end{cases}$$

正如我们稍后将要证明的，表示的张量积分解为

$$\pi_\eta \otimes \pi_\xi \cong \bigoplus_{j=1}^{|\xi_3+\eta_3|_p^d} \bigoplus_{\gamma \in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}} \pi_{[\eta+\xi+(\gamma_1,\gamma_2,1)]}, \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{[\eta+\xi+(\gamma_1,\gamma_2,1)]}) = |\xi_3+\eta_3|_p^d,$$

这意味着 $\mathbb{G}$ 上的符号满足以下公式：

$$\Delta_\eta \sigma(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{|\xi_3+\eta_3|_p^d} \bigoplus_{\gamma \in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}} \sigma([\eta+\xi+(\gamma_1,\gamma_2,1)]) - \mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \sigma(\xi), & |\xi_3+\eta_3|_p < \|(\xi_3,\eta_3)\|_p, \\ \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{|\xi_3|_p^d|\eta_3|_p^d/|\xi_3+\eta_3|_p^d} \sigma(\eta \boxtimes \xi) - \mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \sigma(\xi), & |\xi_3+\eta_3|_p = \|(\xi_3,\eta_3)\|_p. \end{cases}$$

特别地，如果 $|\xi_3+\eta_3|_p = \|(\xi_3,\eta_3)\|_p$：

$$\Delta_\eta \sigma(\xi) := \begin{cases} \mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \big(\sigma(\xi \boxtimes \eta) - \sigma(\xi)\big), & |\eta_3|_p \le |\xi_3|_p, \\ \sigma(\xi \boxtimes \eta) \otimes \mathrm{I}_{d_\xi} - \mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \sigma(\xi), & |\eta_3|_p > |\xi_3|_p, \end{cases}$$

其中 $\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，$\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \widehat{\mathbb{H}}_d \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$。

1.8. **Vladimirov-Taibleson 算子的符号**。为了理解我们在 $\mathbb{G}$ 上所需的差分算子类型，我们至少需要考察一个有趣的傅里叶乘子实例。最自然的例子是 Vladimirov-Taibleson 算子，我们已在定义 1.13 中介绍过。这个算子的符号可以很容易地计算出来，因此对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们有：

$$\sigma_{\mathbb{D}^\alpha}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1-p^{-(2d+1)}}{1-p^{-(\alpha+(2d+1))}}, & \text{if } \|\xi\|_p = 1, \\ \|\xi\|_p^\alpha \, \mathrm{I}_{d_\xi}, & \text{if } \|\xi\|_p > 1. \end{cases}$$

对于任意紧维连群，我们可以注意到 VT 算子的符号具有某种局部常值性质。例如，在紧致 p-进李群上，我们可以验证
$\|\eta\|_p < \|\xi\|_p$ 成立

$$\sigma_{\mathbb{D}^\alpha}(\eta \otimes \xi) = \sigma_{\mathbb{D}^\alpha}(\mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \xi),$$

从而

$$\Delta_\eta \sigma_{\mathbb{D}^\alpha}(\xi) = 0,$$

而且，VT 算子的这种行为并非 $\mathbb{G}$ 所特有，在许多其他类的紧 Vilenkin 群中也会出现。对这一局部常值性质的一种推广是 $\|\eta\|_p < \|\xi\|_p$ 的差分算子快速衰减，即

$$\|\Delta_\eta^\beta \sigma(\xi)\|_{\mathrm{op}} := \frac{1}{\|\eta\|_p^\beta} \|\Delta_\eta \sigma(\xi)\|_{\mathrm{op}} \le C \|\xi\|_p^{-\beta}, \quad \text{for some } C > 0, \text{ and any } \beta \ge 0,$$

这实际上与 Saloff-Coste 在 [22] 中给出的条件相似。请注意，[22] 中的条件基本上与 Taibleson 在 [25], 中针对局部域给出的条件相同，只不过这里是在更一般的阿贝尔维伦金群情形下。我们将在此证明的主要结果之一，是将定理 1.4 推广到非交换群 $\mathbb{G}$，从而为紧李群提供 [21] 中给出的 Mikhlin 条件的 p-进类比。不过，这将作为一项.....

关于紧 Vilenkin 群上加权空间之间插值的更一般结果。因此，为了更好地引出下文，我们想强调一下第一个主要论证中的基本思路：采用另一种 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ 范数，这一结果已在引理 4.1 中证明。这一次，与阿贝尔情形不同，差分算子实际上有不止一种定义。第一种定义见定义 1.17，下面给出第二种定义：

定义 1.21（RT 差分算子）。给定 $\xi \in \widehat{\mathbb{G}}$、$\eta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$ 和 $\beta \geq 0$，*RT* 差分算子 $\triangle\!\!\!\!\times_\eta^\beta$ 定义为

$$\triangle\!\!\!\!\times_\eta^\beta \sigma(\xi) := \frac{1}{\|\eta\|_p^\beta} \mathcal{F}_G\Big[\big(e^{2\pi i\{\eta\cdot x\}_p} - 1\big)\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma]\Big](\xi).$$

记作 $\triangle\!\!\!\!\times_\eta := \triangle\!\!\!\!\times_\eta^0 \neq \triangle\!\!\!\!\times_\eta^1$。

注 1.22。在上述定义中，*RT* 是 *Ruzhasnky-Turunen* 的缩写。他们与 *J. Wirth* 一起定义了以下差分算子：

$$\triangle\!\!\!\!\times_q \sigma(\xi) := \mathcal{F}_G\Big[q(\cdot)\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma]\Big](\xi),$$

对于适当的可微函数 q。这里我们对函数的特殊情形采用相同的定义

$$q_\eta^\beta(\mathbf{x}) := \frac{e^{2\pi i\{\eta\cdot x\}_p} - 1}{\|\eta\|_p^\beta}.$$

这些算子的一项优点是不会改变矩阵的维数，并且对于 $f \in L^2(\mathbb{G})$，有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)_{hh'} &:= \int_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}} f(\mathbf{x})\mathbb{1}_{h-h'+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1)e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+(1,\xi_3 h,1)\cdot\mathbf{x}\}_p}dx \\ &= \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[\mathbb{1}_{h-h'+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1)] *_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f](\xi + (1,\xi_3 h,1)),\end{aligned}$$

其中 $*_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}}$表示 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$ 上的离散卷积。

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f] *_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[g](\xi) := \sum_{\gamma\in\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f](\xi-\gamma)\,\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[g](\gamma).$$

这样，RT 差分算子可以写为

$$\triangle\!\!\!\!\times_\eta^\beta \hat{f}(\xi)_{hh'} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}\Big[\mathbb{1}_{h-h'+p^{-\vartheta(\xi^3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1)\Big] *_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}} \triangle_\eta^\beta \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f](\xi + (1,\xi_3 h,1)),$$

其中 $\triangle$是通常的差分算子

$$\triangle_\eta^\beta \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f](\xi) := \frac{\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f](\xi+\eta) - \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p^{2d+1}}[f](\xi)}{\|\eta\|_p^\beta},$$

因此很容易验证，VT 算子满足：

$$\triangle\!\!\!\!\times_\eta \sigma_{\mathbb{D}^\alpha}(\xi) = 0, \quad \text{for } \|\eta\|_p < \|\xi\|_p,$$

这是关于 $\sigma_{\mathbb{D}^\alpha}$ 的局部常值性质。更多详情请参阅最后评述。

在本文中，我们旨在通过研究非交换 Vilenkin 群，为相关文献作出贡献，并探讨将此前在范围较窄的紧致（阿贝尔）Vilenkin 群中研究的若干思想加以推广。阿贝尔 Vilenkin 群与非交换 Vilenkin 群在拓扑结构上十分相近，因此有许多情形可以利用这种相似性。例如，卡尔德龙-齐格蒙德分解是分析中的一种非常有用的工具，在这两种情形下都能以相同的方式应用，无需重大修改，因为它只用到相关的紧开子群序列。尽管如此，在许多情况下，群的非交换性会发挥重要作用，例如讨论表示论和差分算子时。阿贝尔群的表示是一维的，其庞特里亚金对偶也是可度量化群，这使许多问题得以简化；但非交换群的表示通常是作用于某个希尔伯特空间上的算子。本文将聚焦于紧群，其表示是有限维的，因此可以实现为矩阵 [10, 11]。在此背景下，群上的傅里叶乘子，即线性不变算子，可以用一个矩阵值映射来表示，这种映射通常称为算子的 符号 [20]。这个符号非常重要，因为算子的许多性质都可以用它来表述；本文的主要目的之一，就是利用这一原理，为算子的L^r_α-有界性给出一些充分条件。

正如我们所预期的，我们将沿用 Onnewer、Queck、Kidata 等人在 [16, 17, 15, 29] 中提出乘子定理时所采用的思路。这些工作的共同点是都假设满足某个特殊条件，本文将其称为条件 $H(t)$，以保证算子的有界性。在这一条件下，本文的主要结果是将 Onnewer 和 Quek 的乘子定理推广到紧非交换 Vilenkin 群，并利用这些定理，结合适用于我们这一情形的 Littlewood-Paley 分解，根据算子的符号建立 L^r_α-有界性的条件。与阿贝尔情形相比，我们工作的主要挑战在于非阿贝尔 Vilenkin 群的酉对偶具有特殊性，因此我们需要为定义在 $\mathrm{Rep}(G)$ 上的符号 σ 制定适当条件，使其能作为 $L^r_\alpha(G)$ 上的乘子。至少在紧致情形下，我们的条件将 Taibleson [25] 和 Saloff-Coste [22] 给出的条件推广到了紧非交换群，并为紧致 p-进李群上的霍尔曼德-米赫林乘子定理 $\mathbb{G}$ 提供了类比。

2.1. 乘子作用于 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$。 我们将采用的第一个主要工具，是空间 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ 中一种方便的范数等价，它稍后将作为某些插值论证中的端点空间。Taibleson 和 Onnewer [25, 22] 的研究中，一个常见主题是利用阿贝尔维连金群上的傅里叶变换，在傅里叶侧定义一种方便的 L^2-范数；在我们的情形中，它具有公式 (3) 所示的形式。其基本思想相当简单：可以在类似 $\mathbb{H}_d$ 这样的群中观察到如下等价关系

$$\|\mathbf{x}\|_p^\alpha \asymp I_\alpha(x) := \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{H}}_d} |\eta_3|_p^d \, \|\pi_\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}^2 \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+(2d+1))}. \tag{6}$$

这一等价性不难证明，而且实际上对更一般的 d维幂零 $\mathbb{Z}_p$李群也成立：

$$\|\mathbf{x}\|_p^\alpha \asymp I_\alpha(x) := \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\eta \, \|\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}^2 \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}.$$

甚至可以合理推测，同一结论可推广到所有紧 Vilenkin 群，尽管在最抽象的情形下，所需的估计并非显而易见。困难在于为 $\|\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}$找到合适的下界，而这并不总能保证，因为表示$[\eta]$ 的特征值可能有过多等于 1。我们将在第 3.5 小节回到这个问题。

在上述等价关系成立的情形下，例如 $\mathbb{G} = \mathbb{H}_d$，可以将其与 Plancherel 定理结合，得到公式 (3)，由此可直接推出以下结果。

定理 2.1。 设 $\sigma \in L^\infty_{op}(\mathbb{G})$ 是一个符号，且 $le\ \alpha > 0$。假设存在一个 $C = C(\sigma, \alpha) > 0$，使得对于 $\|\eta\|_p < \|\xi\|_p$,

$$\left\| \Delta_\eta^{\frac{\alpha+d}{2}} \sigma(\xi) \right\|_{\mathrm{op}} \leq C_2 \|\xi\|_p^{\frac{-(\alpha+d)}{2}}, \quad \forall \xi \in \widehat{\mathbb{G}}.$$

那么， T_σ 可延拓为$L^2_\alpha(\mathbb{G})$上的有界算子。

2.2. **上的乘子** $r \neq 2$, $r \neq 2$。 当 $r \neq 2$时，证明 L^r-空间之间的连续性问题会变得相当微妙。我们在此采用的方法已相当成熟，因此我们工作的创新之处在于将这些思路应用到一个新的背景中。我们的初步步骤之一，沿着与 [16, 17], 相同的思路，是回顾标准的 Calderón–Zygmund 分解，并用它研究算子在 $L^{1,}{}_\alpha{}^w(\mathbb{G})$上的有界性，这是我们插值论证中的第二个端点。确保这些空间之间连续性的关键假设将称为条件 $H(t)$，沿用 [16, 17]中的术语。对于紧维连群，我们使用以下定义中引入的记号来表述该条件:

定义 2.2。 给定一个可测集 A，令 $\mathbb{1}_A$ 表示 A的特征函数。归一化特征函数或归一化示性函数定义为 $\epsilon_A(x) := |A|^{-1}\mathbb{1}_A(x)$。特别地，当 $A = G_k$ 时，我们记作$\epsilon_k := \epsilon_{G_k}$，并且有

$$\widehat{\epsilon_k}(\xi) := \mathcal{F}_G[\epsilon_{G_k}](\xi) = \delta_{G_k^\perp}(\xi)\,\mathrm{I}_{d_\xi},$$

其中

$$G_k^\perp := \{[\pi] \in \mathrm{Rep}(G) \ : \ \pi(x) = \mathrm{I}_{d_\pi}, \ \text{for all}\, x \in G_k\}.$$

利用归一化示性函数，条件 $H(t)$ 可表述为:

定义 2.3 (条件 $H(t)$)。 设 G 为一个紧非交换 *Vilenkin* 群，其紧开子群 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$构成一个ˆ阶有界序列。若对所有 $k \in \mathbb{N}_0$，存在某个 $\epsilon > 0$ 使得下式成立，我们称 $\sigma \in L^\infty{}_{op}(G)$ 满足条件 $H(t)$、$1 \leq t < \infty$:

$$\sup\left\{ \left(\int_{G_n \setminus G_{n+1}} |\mathcal{F}_G^{-1}[\hat{\epsilon}_{G_k}\sigma](x \star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\hat{\epsilon}_{G_k}\sigma](x)|^t dx \right)^{1/t} \ : \ y \in G_l \right\} \lesssim |G_n|^{-(\epsilon+1/t')}|G_l|^\epsilon,$$

当 $1 < t < \infty$时，并且

$$\sup\left\{ \int_{G \setminus G_l} |\mathcal{F}_G^{-1}[\hat{\epsilon}_{G_k}\sigma](x \star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\hat{\epsilon}_{G_k}\sigma](x)| dx \ : \ y \in G_l \right\} \lesssim 1, \quad t = 1.$$

现在我们可以陈述主要结果了。首先是一个引理，它说明在 $L^\alpha_2(\mathbb{G})$ 上的有界性如何延伸为弱空间 $L^{1,}{}_\alpha{}^w(\mathbb{G})$上的有界性。

引理 2.4。 设 $\sigma \in L^\infty_{\mathrm{op}}(\mathbb{G})$，并假设 σ 对某个 $t \geq 1$ 满足条件 $H(t)$。如果 T_σ 在 $L^\alpha_2(\mathbb{G})$ 上对某个满足 $-d/t' < \alpha \leq 0$ 的 α 属于 $(2,2)$ 型，那么 T_σ 在 $L^\alpha_1(\mathbb{G})$ 上属于弱 $(1,1)$ 型。

作为引理 2.4 的推论，通过使用插值方法，我们得到如下关于 $L^r_\alpha(\mathbb{G})$ 上傅里叶乘子有界性的定理。

定理 2.5。 设 $\sigma \in L^\infty_{\mathrm{op}}(\mathbb{G})$。假设 σ 满足条件 $H(t)$，其中某个 $t \geq 1$ 存在，且 T_σ 在某个 $-d/t' < \alpha_0 < d/t'$ 上有界。则傅里叶乘子 T_σ 在 $L^r_\alpha(\mathbb{G})$ 上有界，其中 $1 < r < \infty$ 且 $-|\alpha_0|d \leq \alpha \leq (r-1)|\alpha_0|d$。若条件 $H(1)$ 成立，则 T_σ 在 $L^r(\mathbb{G})$ 上有界，其中 $1 < r < \infty$。

注 2.6。 上述结果在更一般的紧 *Vilenkin* 群情形下仍成立。我们将在该情形下给出定理 *2.5* 的证明；此处为简化表述，仅讨论 $\mathbb{G}$ 的特例。

结合定理 2.1 和定理 2.5，我们得到 Taibleson [25] 和 Saloff-Coste [22] 结果的如下非交换推广：

定理 2.7. 设 $\sigma \in L^\infty(\mathbb{G})$ 为一个符号，*al* 设 $1 < t < 2$ 为一个实数 *r.*

(1) 若存在某个 $\alpha_0 > \frac{d}{2}$ 和某个常数 $C = C(\sigma, \alpha_0) > 0$，使得对于 $\|\eta\|_p <$ $\|\xi\|_p$,

$$\left\| \Delta_\eta^{\alpha_0 + \frac{d}{2}} \sigma(\xi) \right\|_{\mathrm{op}} \leq C_2 \|\xi\|_p^{-(\alpha_0 + \frac{d}{2})}, \quad \forall \xi \in \widehat{\mathbb{G}},$$

那么 T_σ 可延拓为作用在 $L^r(\mathbb{G})$ 上的有界算子，且 $1 < r < \infty$。

(2) 若存在某个 $\alpha_0 > d\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)$ 和某个常数 $C = C(\sigma, \alpha_0, t) > 0$，使得对于 $\|\eta\|_p < \|\xi\|_p$,

$$\left\| \Delta_\eta^{\alpha_0 + \frac{d}{2}} \sigma(\xi) \right\|_{\mathrm{op}} \leq C_2 \|\xi\|_p^{-(\alpha_0 + d(\frac{3}{2} - \frac{1}{t}))}, \quad \forall \xi \in \widehat{\mathbb{G}},$$

那么， T_σ 可扩展为作用于 $L^r_\alpha(\mathbb{G})$ 上的有界算子，且满足 $1 < r < \infty$，并且任意

$$-d \leq \alpha \leq (r-1)d.$$

最后，作为定理 2.7 的一个应用，我们将证明 $L^r_\alpha(\mathbb{G})$上存在如下 Littlewood-Paley 分解：

定理 2.8. 设 $\mathbb{G}$ 是一个维数为 d的紧致 *p-adic* 李群。设 $1 < r < \infty$和$-d < \alpha < (r-1)d$。那么，对于所有 $f \in L^r_\alpha(\mathbb{G})$，范数等价

$$\|f\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})} \asymp \|Sf\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})},$$

其中

$$Sf(x) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \Big| \sum_{\|\pi\|_p = p^n} d_\pi \mathrm{Tr}\left[\pi(\mathbf{x}) \hat{f}(\xi)\right] \Big|^2 \right)^{1/2}.$$

3. 预备知识

3.1. 紧群上的傅里叶分析。设 G 是一个仿有限群。设 $\mathrm{Rep}(G)$ 为 G的所有酉有限维表示的集-合，并令 G 表示 G的酉对偶。

我们将在紧群上的傅里叶分析框架下进行研究，其中群傅里叶变换 $\mathcal{F}_G$ 和逆傅里叶变换 $\mathcal{F}_G^{-1}$ 定义如下：

$$\mathcal{F}_G[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_G f(x)\,\xi^*(x)\,dx, \qquad \mathcal{F}_G^{-1}\varphi(x) := \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}\left[\xi(x)\varphi(\xi)\right],$$

分别。这里 dx 表示 G上的唯一归一化哈尔测度。此外，普朗歇尔恒等式的以下形式成立：

$$\int_G |f(x)|^2\,dx = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2.$$

设 T 是定义在 $L^2(G)$的某个稠密子集上的稠密定义线性算子。利用 G上的傅里叶变换以及 L^2-函数的傅里叶级数表示，该算子 T的作用至少在三角多项式上可表示为某个映射

$$\sigma_T : G\times \operatorname{Rep}(G) \to \bigcup_{[\pi]\in\operatorname{Rep}(G)} \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi), \quad \sigma_T(x,\pi) := \pi^*(x)T\pi(x),$$

通常称为该算子的符号。特别地，当 T 是左不变的，也就是说，当 T与 G的左平移可交换时，该符号不依赖于 $x\in G$，此时我们称 T 为傅里叶乘子。换言之，傅里叶乘子是如下形式的线性算子

$$T_\sigma f(x) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \operatorname{Tr}\left[\pi(x)\sigma(\pi)\widehat{f}(\pi)\right],$$

其中符号 σ 是一个映射

$$\sigma : \operatorname{Rep}(G) \to \bigcup_{[\pi]\in\operatorname{Rep}(G)} \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi), \qquad \sigma(\pi)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi), \text{ for every } [\pi]\in\operatorname{Rep}(G).$$

^本文中，我们始终假设 $\sigma\in L^\infty_{\mathrm{op}}(G)$，其中

$$L^\infty_{\mathrm{op}}(\widehat{G}) := \left\{\sigma : \operatorname{Rep}(G) \to \bigcup_{[\pi]\in\operatorname{Rep}(G)} \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi) \ : \ \sup_{[\xi]\in\widehat{G}} \|\sigma(\xi)\|_{\mathrm{op}} < \infty\right\}.$$

左不变算子的这一符号表示直接推得： T_σ 在 $L^2(G)$ 上定义一个有界算子，当且仅当 $\sigma\in L^\infty_{\mathrm{op}}(\widehat{G})$。对于 L^r 情形，情况更为复杂；确定 σ 的充要条件，使得 T_σ 能够延拓为 $L^r(G), r\neq 2$上的有界算子，是一个重要的开放问题。

3.2. **紧维连群的对偶**。当 G 是紧维连群时，我们可以用一种特殊方式划分其酉对偶。为此，我们固定一列紧开子群 $\mathcal{G}=\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。现引入如下记号：

$$G_n^\perp := \{[\pi]\in\operatorname{Rep}(G) : \pi|_{G_n} = \mathrm{I}_{d_\pi}\}, \qquad \operatorname{Rep}_n(G) := G_n^\perp \setminus G_{n-1}^\perp, \qquad \widehat{G}(n) := \operatorname{Rep}_n(G)\cap\widehat{G}.$$

每个矩阵表示 $\pi : G\to \mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbb{C})$, $[\pi]\in\operatorname{Rep}(G)$ 都是连续函数，并且 $\mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbb{C})$ 不含小子群。因此，我们可以找到 V 的一个邻域，使得 $\mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbb{C})$ 中包含于 V 的唯一子群是 $\{\mathrm{I}_{d_\pi}\}$。令 $U := \pi^{-1}(V)$。显然， U 是 $e\in G$ 的一个邻域。因此，存在某个 G_n 包含于 U 和 $\pi(U)\subset\{\mathrm{I}_{d_\pi}\}$ 中。这表明，每个满足 $[\pi]\in\operatorname{Rep}(G)$ 的 π 的核都是 G 的一个紧开子群，并且必定包含某个 G_n。

定义 3.1。设 G 是一个紧维连群，且 $[\pi] \in \mathrm{Rep}(G)$ 是一个连续酉表示。我们将自然数 $n_{[\pi]}$ 定义为：

$$n_{[\pi]} := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \pi|_{G_n} = \mathrm{I}_{d_\pi}\}.$$

现在考虑幺半群 $(\mathrm{Rep}(G), \otimes)$，其中一维恒等表示是单位元；由于下式成立，它是阿贝尔的

$$[\pi \otimes \pi'] \cong [\pi] \otimes [\pi'] \cong [\pi'] \otimes [\pi] \cong [\pi' \otimes \pi].$$

采用这一记号，我们定义 $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 在 $\mathrm{Rep}(G)$上的对偶超度量，记为 $|\cdot|_{\widehat{G}}$，如下：

$$|[\pi]|_{\widehat{G}} := \begin{cases} 0, & [\pi] \text{ is the identity representation (case } n_{[\pi]} = 0), \\ |G^{\perp}_{n_{[\pi]}} \cap \widehat{G}| = |G_{n_{[\pi]}}|^{-1}, & \text{if } n_{[\pi]} > 0. \end{cases}$$

特别地，如果 G 是某种维数为 d的拓扑流形，例如紧致 p-进李群 $\mathbb{G}$，那么我们写作

$$\|[\pi]\|_p := |[\pi]|^{1/d}_{\widehat{\mathbb{G}}}.$$

如前所述，上述定义赋予 $(\mathrm{Rep}(G), \otimes)$ 某种“超度量”，这意味着

$$|[\pi] \otimes [\pi']|_{\widehat{\mathbb{G}}} \le \max\{|[\pi]|_{\widehat{\mathbb{G}}}, |[\pi']|_{\widehat{\mathbb{G}}}\}.$$

该超度量下的球恰好是湮灭子

$$B_{\mathrm{Rep}(G)}(n) := \{[\pi] \in \mathrm{Rep}(G) : |[\pi]|_{\widehat{\mathbb{G}}} \le |G/G_n|\} = G^{\perp}_n,$$

而球面则为

$$S_{\mathrm{Rep}(G)}(n) := \{[\pi] \in \mathrm{Rep}(G) : |[\pi]|_{\widehat{\mathbb{G}}} = |G/G_n|\} = \mathrm{Rep}_n(G).$$

类似地，对于酉对偶，我们有

$$B_{\widehat{G}}(n) := \{[\pi] \in \widehat{G} : |[\pi]|_{\widehat{\mathbb{G}}} \le |G/G_n|\} = G^{\perp}_n \cap \widehat{G},$$

而球面为

$$S_{\widehat{G}}(n) := \{[\pi] \in \widehat{G} : |[\pi]|_{\widehat{\mathbb{G}}} = |G/G_n|\} = \mathrm{Rep}_n(G) \cap \widehat{G} = \widehat{G}(n).$$

$\widehat{\ }$由此我们证明了 $\mathrm{Rep}(G)$ 和 G 可分解为球面的不交并：

$$\mathrm{Rep}(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Rep}_n(G), \qquad \widehat{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \widehat{G}(n),$$

这样，任意 $f \in L^2(G)$ 都可以写成

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{[\pi]\in\widehat{G}(n)} d_\pi \,\mathrm{Tr}\left[\pi(x)\widehat{f}(\pi)\right].$$

特别地，对于任意紧致的 p-进李群 $\mathbb{G}$，集合 $\mathbb{G}^{\perp}_n \cap \widehat{\mathbb{G}}$ 和 $\widehat{\mathbb{G}}(n)$ 可以用 $\mathbb{G}$ 的超度量结构来很好地描述$\widehat{\ }$，分别对应于球和球面：

$$\mathbb{G}^{\perp}_n \cap \widehat{\mathbb{G}} = \{[\pi] \in \widehat{\mathbb{G}} : \|\pi\|_p \le p^n\} =: B_{\widehat{\mathbb{G}}}(n), \quad \widehat{\mathbb{G}}(n) = \{[\pi] \in \widehat{\mathbb{G}} : \|\pi\|_p = p^n\} =: S_{\widehat{\mathbb{G}}}(n).$$

注 3.2. 或许应该用“超度量半范数”取代“超度量”一词。原因是函数 $\rho : \mathrm{Rep}(G) \to \mathbb{R}^+_0$，$\rho(\pi) := |[\pi]|_{\widehat{G}}$ 并非距离函数，而是满足以下条件：

- $\rho(1) = 0$,
- $\rho([\pi] \otimes [\pi']) \leq \max\{\rho([\pi]), \rho([\pi'])\}$,

它们是在幺半群上定义半范数（满足强三角不等式）的条件。要使 ρ恰当地成为距离函数，因而成为超度量，我们必须将自身限制在商集 $\mathrm{Rep}(G)/\sim$，其中

$$[\pi] \sim [\xi] \textit{ if and only if } \pi \otimes \xi^* \in \mathrm{Rep}^{ab}(G),$$

其中 $\mathrm{Rep}^{ab}(G)$ 是 $\mathrm{Rep}(G)$ 中在 $[G, G]$上平凡的元素的集合。

3.3. **与实数情形的比较**。 众所周知,

$$|G/G_n| = \sum_{[\xi] \in \widehat{G/G_n}} d_\xi^2 = \sum_{k \leq n} \sum_{[\xi] \in \widehat{G}(k)} d_\xi^2,$$

并且

$$\sum_{[\xi] \in \widehat{G}(n)} d_\xi^2 = |G/G_n| - |G/G_{n-1}| = |G/G_n| \Big(1 - \frac{1}{|G_{n-1}/G_n|}\Big),$$

因此我们总有

$$\sum_{[\xi] \in \widehat{G}(n)} d_\xi^2 \leq |G/G_n|,$$

and

$$\sum_{[\xi] \in \widehat{G}(n)} d_\xi^2 \asymp |G/G_n|.$$

我们可以将这一性质看作实李群上如下估计的一个类似形式。设 G是一个维数为 $d = \dim_{\mathbb{R}}(G)$ 的紧李群，并定义

$$\langle \xi \rangle := (1 + \lambda_\xi)^{1/2}, \quad [\xi] \in \widehat{G}.$$

在 [1] 中证明了

$$\sum_{\substack{[\xi] \in \widehat{G} \\ \langle \xi \rangle \leq \langle \pi \rangle}} d_\xi^2 \langle \xi \rangle^{\alpha d} \asymp \langle \pi \rangle^{(\alpha+1)d}, \quad \text{for } \alpha > -1, \tag{4.4}$$

and

$$\sum_{\substack{[\xi] \in \widehat{G} \\ \langle \xi \rangle \geq \langle \pi \rangle}} d_\xi^2 \langle \xi \rangle^{\alpha d} \asymp \langle \pi \rangle^{(\alpha+1)d}, \quad \text{for } \alpha < -1. \tag{4.5}$$

对于一个紧致 p-进李群 $\mathbb{G}$，我们则会写成

$$\sum_{\substack{[\xi] \in \widehat{\mathbb{G}} \\ \|\xi\|_p \leq \|\pi\|_p}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{\alpha d} \asymp \|\pi\|_p^{(\alpha+1)d}, \quad \text{for } \alpha > -1,$$

and

$$\sum_{\substack{[\xi] \in \widehat{\mathbb{G}} \\ \|\xi\|_p \geq \|\pi\|_p}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{\alpha d} \asymp \|\pi\|_p^{(\alpha+1)d}, \quad \text{for } \alpha < -1.$$

3.4. **光滑函数与 Sobole夫空间**。 我们在此旨在研究傅里叶乘子。具体而言，我们希望找到充分条件，使傅里叶乘子 T_σ 能够从 $L^r_\alpha(G), \alpha > 0$ 的某个稠密子集延拓为 $L^r_\alpha(G)$ 上的有界算子。通常，我们选取的初始稠密子集是 G 上的三角多项式空间，记作 $\mathcal{P}(G)$；该空间与 G 上的光滑函数空间 $\mathcal{D}(G)$ 相同：

$$\mathcal{D}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \mid \text{存在 } l \in \mathbb{N}_0 \text{ 使得 } f(x \star y) = f(x) \text{ 对所有 } y \in G_l\}.$$

命题 3.3. G 上的光滑函数空间等于 G上的三角多项式空间，即

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{D}(G).$$

证明。 一方面，仿有限群表示的矩阵元素是局部$\widehat{}$常值函数，因此 $\mathcal{P}(G) \subset \mathcal{D}(G)$。另一方面，局部$\widehat{}$常值函数 $f \in \mathcal{D}(G)$ 的傅里叶变换 $f(\xi)$在 $[\xi] \in G_n$ 满足 n 足够大时为零。由此以及傅里叶反演公式可知 $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{P}(G)$。综上， $\mathcal{P}(G) = \mathcal{D}(G)$。□

如前所定义，傅里叶乘子是 G上的左不变算子。因此，这类算子也可以看作由某个右卷积核给出的卷积算子，而用符号表示时可写为

$$\mathfrak{r}_\sigma(x) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \operatorname{Tr}\left[\pi(x)\sigma(\pi)\right].$$

鉴于此，研究某个不变算子的有界性有两种方法T_σ：要么着眼于其相应符号，要么研究其卷积核。本文将同时采用这两种方法，但我们尤其关注如何找到符号的显式条件，以保证算子在 L^r上的有界性。秉承经典欧几里得结果的思路，我们证明，符号具备一定的“正则性”就足以推出它在$L^r(G)$上的有界性，其中符号的正则性是通过定义 1.17 中描述的差分算子来衡量的。 [22], 对此进行了探讨，Saloff-Coste 以 Vladimirov–Taibleson算子和加权差分算子为基础定义了一种伪微分演算

$$\Delta^\beta_\eta \sigma(\xi) := \frac{\sigma(\xi+\eta) - \sigma(\xi)}{|\eta|^\beta}.$$

定义 3.4。 给定一个紧开子群序列 $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$， 我们将函数$\langle\cdot\rangle_{\mathcal{G}} : \operatorname{Rep}(G) \to \mathbb{R}$定义为

$$\langle\pi\rangle_{\mathcal{G}} := \begin{cases} 1, & \text{if } \pi \text{ is the identity representation } (\text{case } n_{[\pi]} = 0), \\ |G/G_n|, & \text{if } \pi \in \operatorname{Rep}_n(G),\ n \in \mathbb{N}_0,\ (\text{case } n_{[\pi]} > 0). \end{cases}$$

对于任意一对非平凡表示，都有

$$\langle\pi \otimes \xi\rangle_{\mathcal{G}} \le \max\{\langle\xi\rangle_{\mathcal{G}}, \langle\pi\rangle_{\mathcal{G}}\}, \quad [\pi], [\xi] \in \operatorname{Rep}(G).$$

由于傅里叶变换将定义 1.13 中的 VT 算子对角化，我们可以自然地定义 Sobole夫空间，并通过傅里叶变换对其进行刻画。这些巴拿赫空间构成一个尺度，用于衡量函数和分布的“光滑性”，且与 VT 算子$D^\alpha_{\mathcal{G}}$ 相容，这意味着这些 Sobole夫空间是 $D^\alpha_{\mathcal{G}}$ 的自然定义域。

定义 3.5。 设 G 是一个具有有界滤过 $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的紧维连群。

(1) 对于 $1 < r < \infty$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，非齐次索 Sobole夫空间 $H_r^\beta(G)$ 是 $\mathcal{D}(G)$ 关于以下范数的度量完备化

$$\|f\|_{H_r^\beta(G)} := \left(\int_G \Big| \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{[\xi]\in\widehat{G}(n)} d_\xi \operatorname{Tr}\left[\xi(x)\langle\xi\rangle_{\mathcal{G}}^\beta \widehat{f}(\xi)\right] \Big|^r d\mu_G(x) \right)^{1/r}.$$

齐次索 Sobole夫空间 $\dot{H}_r^\beta(G)$ 是 $\mathcal{D}(G)$ 在该范数下的度量完备化

$$\|f\|_{\dot{H}_r^\beta(G)} := \left(\int_G \Big| \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{[\xi]\in\widehat{G}(n)} d_\xi \operatorname{Tr}\left[\xi(x)\langle\xi\rangle_{\mathcal{G}}^\beta \widehat{f}(\xi)\right] \Big|^r d\mu_G(x) \right)^{1/r}.$$

(2) 对于 $\beta \in \mathbb{C}$，通过其符号定义傅里叶乘子 $\mathbb{D}_{\mathcal{G}}^\beta$

$$\sigma_{\mathbb{D}_{\mathcal{G}}^\beta}(\pi) = \langle\pi\rangle_{\mathcal{G}}^\beta \mathrm{I}_{d_\pi}, \quad [\pi] \in \operatorname{Rep}(G).$$

于是，对于 $\beta \in \mathbb{R}$，当且仅当 $\mathbb{D}_{\mathcal{G}}^\beta f \in L^r(G)$时，有 $f \in H_r^\beta(G)$。

注 3.6。 在 $G = \mathbb{G}$ 是一个紧致 *p-adic* 李群的情况下，索 *Sobole*夫范数可以写成

$$\|f\|_{H_r^\beta(\mathbb{G})} := \left(\int_{\mathbb{G}} \Big| \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{H}}_d(n)} |\xi_3|_p^d \operatorname{Tr}\left[\pi_\xi(x)\|\xi\|_p^\beta \widehat{f}(\xi)\right] \Big|^r dx \right)^{1/r}.$$

3.5. **表示的张量积**。 正如读者可能已经注意到的，在每一步中，我们都必须使用表示的某种矩阵实现；而且大多数时候，我们会将某个矩阵表示 π 及其相应的等价类 $[\pi] \in \operatorname{Rep}(\mathbb{G})$ 视为同一对象。这样做不会损害一致性，因为我们的分析大多与类 $[\pi]$ 的代表元选择无关。按照这一约定，张量积 $\pi \otimes \xi$ 可以与这些表示的矩阵形式的克罗内克积对应起来。如果 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，而 B 是一个 $p \times q$ 矩阵，则克罗内克积 $A \otimes B$ 为

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}, \quad \xi \otimes \pi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) & \cdots & \xi_{1d_\xi}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{d_\xi 1}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) & \cdots & \xi_{d_\xi d_\xi}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

对于紧致幂零 p-进李群，由于基里洛夫轨道方法的推论，我们还可以获得一些额外的结构。例如，在 $\mathbb{H}_d$ 上，正如我们之前提到的，$\mathbb{G}$ 的不可约酉表示由 $\widehat{\mathbb{H}}_d$ 编号，我们将其视为 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$ 的子树，定义如下

$$\widehat{\mathbb{H}}_d = \left\{ \xi \in \widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1} : (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Q}_p^{2d} / p^{\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^{2d} \right\},$$

这些表示可以通过系数以矩阵形式实现

$$(\pi_\xi(\mathbf{x}))_{hh'} = e^{2\pi i\{x\cdot\xi + \xi_3 h'\cdot u\}_p} \mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1).$$

因此，该表示的特征由下式给出

$$\chi_{\pi_\xi}(\mathbf{x}) = \sum_{h\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p} e^{2\pi i\{x\cdot\xi+\xi_3 h\cdot u\}_p} \mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1) = |\xi_3|_p^d e^{2\pi i\{x\cdot\xi\}_p} \mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1)\mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_2),$$

这也使我们能够得到张量积的特征标:

$$\chi_{\pi_\eta\otimes\pi_\xi}(\mathbf{x})=\chi_{\pi_\eta}(\mathbf{x})\chi_{\pi_\xi}(\mathbf{x})=|\eta_3|_p^d|\xi_3|_p^d e^{2\pi i\{x\cdot(\xi+\eta)\}_p}\mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_3,\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}(x_1,x_2).$$

由此可以得出几点:

(1) 海森堡群的酉对偶可以用 $\mathbb{Q}_p^{2d+1}$ 上的某个子集来参数化；更准确地说，可以用 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}\cong\mathbb{Q}_p^{2d+1}/\mathbb{Z}_p^{2d+1}$ 的一组完备代表元中的某个子集来参数化。根据基里洛夫轨道方法，这样的集合是 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}/\mathrm{Ad}^*(\mathbb{H}_d)\cong\widehat{\mathbb{H}}_d$ 的一组完备代表元。

(2) 考虑集合

$$\widehat{\mathbb{H}}_d^{\mathbb{N},\,finite}:=\{f:\mathbb{N}\to\widehat{\mathbb{H}}_d\subseteq\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}\ :\ f(n)=0\ \text{for large enough}\,n\},$$

$\widehat{}$，它是 $\mathbb{H}_d$ 上有限序列的集合。定义 S_∞ 为所有对称群 S_n 的并集。那么

$$\Gamma(\mathbb{H}_d):=\widehat{\mathbb{H}}_d^{\mathbb{N},\,finite}/S_\infty,$$

$\widehat{}$，也就是由 $\mathbb{H}_d$ 中元素组成的所有有限无序序列的集合，可以与 $\mathrm{Rep}(\mathbb{H}_d)$ 等同。一个自然的问题是，能否在 $\Gamma(\mathbb{H}_d)$ 上赋予某种运算，使其与 $\otimes$ 同构?

$\widehat{}$(3) 给定 $\xi,\ \eta\in\mathbb{H}_d$，张量积 $[\pi_\xi\otimes\pi_\eta]$ **不等于** $[\pi_{\xi+\eta}]$，但 $\pi_\xi\otimes\pi_\eta$ 与和 $\xi+\eta$ 在 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}/\mathrm{Ad}^*(\mathbb{H}_d)$ 中的等价类相对应的表示之间存在某种关系。事实上，由于 $(\mathrm{Rep}(\mathbb{H}_d),\otimes)$ 是一个交换幺半群，而且 $\mathrm{Rep}(\mathbb{H}_d)$ 中的每个元素 $\widehat{}$ 都是 $\mathbb{H}_d$ 中元素的有限直和，我们可以希望找到一个恰当定义的运算 $\boxtimes$，使 $(\mathrm{Rep}(\mathbb{H}_d),\otimes)$ 与 $(\Gamma(\mathbb{H}_d),\boxtimes)$，成为同构幺半群。我们先约定

$$\begin{aligned}&(\xi_1,...,\xi_n,0,0,...)\boxtimes(\eta_1,...,\eta_m,0,0,...)\\&\quad=(\xi_1\boxtimes(\eta_1+...+\eta_m),\xi_2\boxtimes(\eta_1+...+\eta_m),...,\xi_n\boxtimes(\eta_1+...+\eta_m),0,0,...).\end{aligned}$$

$\widehat{}$因此，要定义“$\boxtimes$”，我们只需定义它在 $\mathbb{H}_d$上的作用，所以需要了解$\widehat{}$ $\pi_\xi\otimes\pi_\eta$ 的不可约分量如何由 $\mathbb{H}_d$中的元素编号。通过一个简单的傅里叶级数论证，可以验证

$$\chi_{\pi_\eta\otimes\pi_\xi}(\mathbf{x})=\sum_{\gamma\in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}|\xi_3+\eta_3|_p^{2d}e^{2\pi i\{\mathbf{x}\cdot(\xi+\eta+(\gamma_1,\gamma_2,1))\}_p}\mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}(x_1,x_2).$$

(4) 由上述傅里叶级数表示可推得

$$[\pi_\xi\otimes\pi_\eta]\cong\bigoplus_{j=1}^{|\xi_3+\eta_3|_p^d}\ \bigoplus_{\gamma\in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}[\pi_{\xi+\eta+(\gamma_1,\gamma_2,1)}],$$

尤其是:

$$[\pi_\xi\otimes\pi_\eta]\cong\begin{cases}\bigoplus_{j=1}^{|\eta_3|_p^d}[\pi_{\xi+\eta}],&\text{if }\ |\xi_3+\eta_3|_p=|\xi_3|_p\ ,\\ \bigoplus_{j=1}^{|\xi_3|_p^d}[\pi_{\xi+\eta}],&\text{if }\ |\xi_3+\eta_3|_p=|\eta_3|_p.\end{cases}$$

这些观察引出了以下定义。其目的是使 $\Gamma(\mathbb{H}_d)$ 在运算“$\boxtimes$”下成为交换幺半群。

定义 3.7 (表示的乘积)。

(1) 设 $\gamma,\zeta\in\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$。若 γ 与 ζ 模 p^n 同余，我们记作 $\gamma\equiv\zeta \mod p^n$，当且仅当

$$\gamma-\zeta\in p^{-n}\mathbb{Z}_p^d.$$

换言之，若 $\gamma,\zeta\in\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 在其 p 进制展开中除最前面的 n 位数字外都相同，则它们同余。对每个固定的 n，这在 $\widehat{\mathbb{Z}}_p^d$ 上定义了一个等价关系；我们用 $[\gamma]_n$ 表示 γ 在 $\mathbb{Q}_p^d/p^{-n}\mathbb{Z}_p^d$ 中的等价类。

(2) 对于 $\xi,\eta\in\widehat{\mathbb{Z}}_p^{2d+1}$，令 $N(\eta,\xi)\in\mathbb{N}_0$ 为满足下式的自然数

$$p^{N(\eta,\xi)}=\max\{|\eta_3|_p,|\xi_3|_p\}.$$

我们定义函数

$$\boxtimes:\widehat{\mathbb{H}}_d\times\widehat{\mathbb{H}}_d\to\Gamma(\widehat{\mathbb{H}}_d)$$

由公式 $\xi\boxtimes\eta:=$给出

$$\begin{cases}\big([\xi_1+\eta_1]_{N(\eta,\xi)},[\xi_2+\eta_2]_{N(\eta,\xi)},\xi_3+\eta_3\big), & \text{if } |\xi_3+\eta_3|_p=\max\{|\xi_3|_p,|\eta_3|_p\},\\ \bigoplus_{\gamma\in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}\big([\xi_1+\eta_1+\gamma_1]_{N(\eta,\xi)},[\xi_2+\eta_2+\gamma_2]_{N(\eta,\xi)},\xi_3+\eta_3\big), & \text{if } |\xi_3+\eta_3|_p<\max\{|\xi_3|_p,|\eta_3|_p\}.\end{cases}$$

上面的定义看起来可能有些复杂，但它旨在简化我们所讨论情形下差分算子的记号。使用上述记号，我们实际上可以写成

$$\sigma(\xi\otimes\eta)\cong\begin{cases}|\eta_3|_p^d\sigma(\xi\boxtimes\eta):=\bigoplus_{j=1}^{|\eta_3|_p^d}\sigma([\pi_{\xi+\eta}])\cong\sigma(\xi\boxtimes\eta)\otimes\mathrm{I}_{d_\eta}, & \text{if } |\xi_3+\eta_3|_p=|\xi_3|_p,\\ |\xi_3|_p^d\sigma(\xi\boxtimes\eta):=\bigoplus_{j=1}^{|\xi_3|_p^d}\sigma([\pi_{\xi+\eta}])\cong\mathrm{I}_{d_\xi}\otimes\sigma(\xi\boxtimes\eta), & \text{if } |\xi_3+\eta_3|_p=|\eta_3|_p,\end{cases}$$

而当 $|\xi_3+\eta_3|_p<\max\{|\xi_3|_p,|\eta|_p\}$ 时

$$\sigma(\xi\otimes\eta)=|\xi_3+\eta_3|_p^d\sigma(\xi\boxtimes\eta):=\bigoplus_{j=1}^{|\xi_3+\eta_3|_p^d}\bigoplus_{\gamma\in p^{-N(\eta,\xi)}\mathbb{Z}_p^{2d}/p^{\vartheta(\xi_3+\eta_3)}\mathbb{Z}_p^{2d}}\sigma([\pi_{\xi+\eta+(\gamma_1,\gamma_2,1)}]).$$

注 3.8。 如果矩阵以 h、$h'\in\mathbb{Z}_p^d/p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d$ 为指标，那么 $\pi_\eta\otimes\pi_\xi$ 的分块 hh' 为

$$[\pi_\eta\otimes\pi_\xi(\mathbf{x})]_{hh'}:=\pi_\eta(\mathbf{x})_{hh'}\pi_\xi(\mathbf{x}),$$

这意味着线性算子 T 的符号满足以下关系：

$$[\pi_\eta\otimes\pi_\xi(\mathbf{x})\sigma_T(\mathbf{x},\eta\otimes\xi)]_{hh'}=\sum_{k\in\mathbb{Z}_p^d/p^{-\vartheta(\eta_3)}\mathbb{Z}_p^d}[\pi_\eta\otimes\pi_\xi(\mathbf{x})]_{hk}[\sigma_T(\mathbf{x},\eta\otimes\xi)]_{kh'}=T(\pi_\eta\otimes\pi_\xi(\mathbf{x})).$$

注 3.9。 矩阵的克罗内克积对应于线性映射的抽象张量积。具体而言，若 V、W、X、Y 分别具有基 $\{v_i\}$、$\{w_j\}$、$\{x_k\}$、$\{y_\ell\}$，且 A、B 表示线性变换 $S:V\to X$、$T:W\to Y$，则 $A\otimes B$ 相对于自然基表示 $S\otimes T:V\otimes W\to X\otimes Y$。

3.6. **表示的下界**。 这里需要的一项关键信息是 $\|\pi(\mathbf{x})-\mathrm{I}_{d_\pi}\|_{HS}$的一个下界。当群是阿贝尔群时，这个估计最简单，此时表示就是特征标。对于群 $\mathbb{Q}_p^d$ 这一特定情形，有如下命题。

命题 3.10. 设 $\xi,\mathbf{x}\in\mathbb{Q}_p^d$ 为 p-进数，并假设 $\xi\cdot\mathbf{x}\in\mathbb{Q}_p\setminus\mathbb{Z}_p.$，则有以下估计：

$$\|\xi\|_p^{-1}\|\mathbf{x}\|_p^{-1}\lesssim|e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p}-1|.$$

证明. 设 l 为满足以下条件的自然数

$$p^l=\|\mathbf{x}\|_p\,\|\xi\|_p>1.$$

那么不难验证 $p^l\xi\cdot\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_p$，因此 $e^{2\pi i\{p^l\xi\cdot\mathbf{x}\}_p}=1$，且 $e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p}=1$ 必为单位根 p^l 阶。记

$$\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p=\frac{k}{p^l},\quad \text{for some } 1\le k<p^l.$$

最后，只需注意

$$\begin{aligned}|e^{2\pi i\{p^l\xi\cdot\mathbf{x}\}_p}-1|&=\sqrt{(\cos(2\pi\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p-1)^2+\sin^2(2\pi\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p)}\\&=\sqrt{2(1-\cos(2\pi\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p))}\\&=\sqrt{4\sin^2(\pi\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p)}=2\sin(\pi\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p),\end{aligned}$$

因此，应用 Jordan 不等式可得

$$|e^{2\pi i\{p^l\xi\cdot\mathbf{x}\}_p}-1|=2\sin(\pi\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p)\gtrsim p^{-l}.$$

□

命题 3.10 可视为我们所寻求的下界的阿贝尔对应形式 $\|\pi_\xi(\mathbf{x})-I_{d_\xi}\|_{HS}$.然而，目前作者无法给出一个适用于任意紧 Vilenkin 群的证明。因此，有必要增加一个假设。这一假设很自然，也不会过分限制适用范围；已知若干紧致幂零 p-进李群都满足这一假设。我们猜想，任意紧致幂零群都满足同样的条件，甚至一般的紧致 p-进李群也可能满足。尽管如此，鉴于紧 Vilenkin 群在结构上的多样性，无法保证所需假设在一般情况下都成立，因此有必要将其作为既定条件予以假设。

我们所说的附加条件可以理解为对酉不可约表示中特征值 1 的重数施加限制；更确切地说，它限制了此类表示中等于 1 的特征值的个数。

定义 3.11。 设 G 是一个紧群。若对于$\widehat{}$任意 $[\pi]\in G$，都存在一个常数 $C>0$使得，我们称 G **具有下界性质**

$$\#\{j\ :\ 1\le j\le d_\pi,\ \lambda_j(\pi(x))\neq 1\}\ge Cd_\pi,$$

对于任意 $x\in G$。这里，$\lambda_1(\pi(x)),\ldots,\lambda_{d_\pi}(\pi(x))$ 是矩阵 $\pi(x)$ 的特征值。

为了更好地理解上述假设，我们将在接下来的几个小节中考察一些已知满足该假设的具体例子。不过首先，让我们说明如何利用定义 3.11 得到一种估计；这一估计对于我们即将证明的所有范数等价结果都至关重要。

引理 3.12。 设 G 是一个紧维连群，并假设 G 满足下界性质。$\widehat{}$那么，对于任意 $[\pi] \in G$，以及任意满足 $\pi(x) \neq \mathrm{I}_{d_\pi}$ 的 $x \in G$，有

$$\|\pi(x) - \mathrm{I}_{d_\pi}\|_{HS} \gtrsim d_\pi^{1/2} |\pi|_{\widehat{G}}^{-1} |x|_{\mathcal{G}}^{-1}.$$

特别地，如果 $\mathbb{G}$ 是一个紧致的 p-进李群，我们有：

$$\|\pi(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\pi}\|_{HS} \gtrsim d_\pi^{1/2} \|\pi\|_p^{-d} \|x\|_p^{-d}.$$

证明。 取 $x \in G$ 使得 $|x|_{\mathcal{G}} = |G/G_k|^{-1}$，并取满足 $|[\pi]|_{\widehat{G}} = |G/G_n| \geq |G/G_{k+1}|$的 $[\pi] \in \widehat{G}$。因此，由于 $\pi(x)$ 是一个酉矩阵，我们可以找到表示空间 $\mathcal{H}_\pi$ 的一组基，使得 $\pi(x)$ 是一个对角矩阵。现在令 $\lambda_1(\pi(x))$、.....、 $\lambda_{d_\pi}(\pi(x))$为 $\pi(x)$的特征值。这些都是单位根，并且由于 π 可下降为 G_k/G_n的酉表示，我们必有

$$\pi(x)^{|G_k/G_n|} = I_{d_\pi} \implies \lambda_j(\pi(x))^{|G_k/G_n|} = 1.$$

换言之，任意一个 $\lambda_j(\pi(x)) \neq 1$ 都是 $|G_k/G_n|$次单位根，因此我们可以写成

$$\lambda_j(\pi(x)) = e^{2\pi i \frac{l}{|G_k/G_n|}}, \text{ for some } 1 \leq l \leq |G_k/G_n| - 1.$$

由此以及关于 $[0, \pi)$ 的 Jordan 不等式，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}
|\lambda_j(\pi(x)) - 1| &= \sqrt{(\cos\left(2\pi \frac{l}{|G_k/G_n|}\right) - 1)^2 + \left(\sin(2\pi \frac{l}{|G_k/G_n|})\right)^2} \\
&= \sqrt{2(1 - \cos\left(2\pi \frac{l}{|G_k/G_n|}\right))} \\
&= \sqrt{4\sin^2\left(\pi \frac{l}{|G_k/G_n|}\right)} = 2|\sin\left(\pi \frac{l}{|G_k/G_n|}\right)| \\
&\gtrsim \frac{4}{\pi} \min\left\{\pi \frac{l}{|G_k/G_n|}, \pi - \pi \frac{l}{|G_k/G_n|}\right)\right\} \\
&= 4 \min\left\{\frac{l}{|G_k/G_n|}, \frac{|G_k/G_n| - l}{|G_k/G_n|}\right\} \geq \frac{1}{|G_k/G_n|}.
\end{aligned}$$

利用这一点以及定义 3.11 中的下界性质，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\pi(x) - \mathrm{I}_{d_\pi}\|_{HS}^2 &= \sum_{1 \leq j \leq d_\pi} |\lambda_j(\pi(x)) - 1|^2 = \sum_{\{j\,:\,1 \leq j \leq d_\pi,\ \lambda_j(\pi(x)) \neq 1\}} |\lambda_j(\pi(x)) - 1|^2 \\
&\gtrsim \sum_{\{j\,:\,1 \leq j \leq d_\pi,\ \lambda_j(\pi(x)) \neq 1\}} \frac{1}{|G_k/G_n|^2} \\
&= \#\{j\ :\ 1 \leq j \leq d_\pi,\ \lambda_j(\pi(x)) \neq 1\} \cdot \frac{1}{|G_k/G_n|^2} \gtrsim d_\pi |G_k/G_n|^{-2}.
\end{aligned}$$

最后，只需注意到

$$|G_k/G_n|^{-1} = \frac{|G/G_k|}{|G/G_n|} = |\pi|_{\widehat{G}}^{-1} |x|_{\mathcal{G}}^{-1}.$$

证明到此结束。 □

3.7. **例1：** $\mathbb{H}_d$**.** 首先回顾 $[\pi_\xi]$ 的矩阵表示的实现：

$$\pi_\xi(\mathbf{x})_{hh'} = e^{2\pi i\{\xi_1\cdot x_1+\xi_2\cdot x_2+\xi_3(x_3+x_2\cdot h')\}_p}\mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1).$$

需要注意的是，对于任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{H}_d$ 以及 π_ξ 的任意一列，该列中至多只有一个元素可以非零，因此 $\pi_\xi-\mathrm{I}_{d_\xi}$ 的元素有两种可能。要么当 $x_1\in p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d$ 时，$\pi_\xi-\mathrm{I}_{d_\xi}$ 是一个对角矩阵；要么当 $x_1\in\mathbb{Z}_p^d\setminus p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d$ 时，$\pi_x i(\mathbf{x})_{hh'}$ 中只有一个非零，且对角线只是常数 -1。我们可以计算

$$\|\pi_\xi(\mathbf{x})-\mathrm{I}_{d_\xi}\|_{HS}^2=\begin{cases}2|\xi_3|_p^d, & \text{if } x_1\in\mathbb{Z}_p^d\setminus p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d,\\ \displaystyle\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p^d/p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}\left|e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+\xi_3h'\cdot x_2\}_p}-1\right|^2, & \text{if } x_1\in p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d.\end{cases}$$

这里，单位根 $e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+\xi_3h'\cdot x_2\}_p}$ 不可能全都为 1；实际上，**的特征值中至多有一个可以等于 1**。因此，总结可得估计

$$\#\{h\in\mathbb{Z}_p^d/p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d\ :\ \lambda_h(\pi_\xi(\mathbf{x}))\neq 1\}=d_\xi-1\geq\Big(1-\frac{1}{p^{2d+1}}\Big)d_\xi,$$

从而得出结论

$$\begin{aligned}\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p^d/p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}\left|e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+\xi_3h'\cdot x_2\}_p}-1\right|^2&\geq\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p^d/|\xi_3|_p\mathbb{Z}_p^d}4\|\xi\|_p^{-2(2d+1)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(2d+1)}\\&\geq 4\|\xi\|_p^{-2(2d+1)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(2d+1)}(|\xi_3|_p^d-1)\\&\geq\|\xi\|_p^{-2(2d+1)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(2d+1)}|\xi_3|_p^d.\end{aligned}$$

3.8. **例2：恩格尔群** $\mathcal{B}_4$。设 $p>3$ 为素数。记 $\mathfrak{b}_4$ 为由 X_1、…、X_4 生成的$\mathbb{Z}_p$–李代数，其对易关系为

$$[X_1,X_2]=X_3,\qquad [X_1,X_3]=X_4,$$

与分解

$$\mathfrak{b}_4=\bigoplus_{j=1}^{3}\mathcal{V}_j,$$

其中

$$\mathcal{V}_1=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}_p}\{X_1,X_2\},\qquad \mathcal{V}_2=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}_p}\{X_3\},\qquad \mathcal{V}_3=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}_p}\{X_4\}.$$

我们称 $\mathbb{Z}_p$–李代数 $\mathfrak{b}_4$ 为*4* 维恩格尔代数，其指数像记为 $\mathcal{B}_4$，称为定义在 p–进整数上的恩格尔群。

我们来考虑将 $\mathfrak{b}_4$ 实现为矩阵代数

$$\mathfrak{b}_4(\mathbb{Z}_p)=\left\{\begin{pmatrix}0&x_1&0&x_4-\frac{1}{2}x_1\left(x_3-\frac{1}{2}x_1x_2\right)-\frac{1}{6}x_1^2x_2\\0&0&x_1&x_3-\frac{1}{2}x_1x_2\\0&0&0&x_2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_p)\ :\ x\in\mathbb{Z}_p^4\right\}.$$

借助这一实现，并利用通常的矩阵指数映射，我们可以将 $\mathcal{B}_4(\mathbb{Z}_p)$视为矩阵群

$$\mathcal{B}_4(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_4 \\ 0 & 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_p) \ : \ x \in \mathbb{Z}_p^4 \right\},$$

在解析意义上同构于$\mathbb{Z}_p^4$，其运算为

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \big(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3 + x_1 y_2,\ x_4 + y_4 + x_1 y_3 + \tfrac{1}{2}x_1^2 y_2\big).$$

指数映射将李代数 $\mathfrak{b}_4$ 的子理想变换为 $\mathcal{B}_4 \simeq (\mathfrak{b}_4, \star)$的子群，并可赋予其如下子群序列

$$J_n := \big(\mathfrak{b}_4(p^n\mathbb{Z}_p), \star\big),$$

其中

$$\mathfrak{b}_4(p^n\mathbb{Z}_p) = p^n\mathbb{Z}_p X_1 + p^n\mathbb{Z}_p X_2 + p^n\mathbb{Z}_p X_3 + p^n\mathbb{Z}_p X_4.$$

因此 $\mathcal{B}_4$ 是一个紧 致维连金群，并带有如下紧开子群序列 s

$$G_n := \mathcal{B}_4(p^n\mathbb{Z}_p) = \exp\big(\mathfrak{b}_4(p^n\mathbb{Z}_p)\big), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

注意，序列 $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 构成单位元处的邻域基，因此该群是可度量化的。我们可以在其上赋予自然的超度量

$$\rho_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ |G_n| = p^{-4n}, & \mathbf{x} \star \mathbf{y}^{-1} \in G_n \setminus G_{n+1}. \end{cases}$$

不过，我们将使用 p–进范数，而不是这种超度量

$$\|\mathbf{x}\|_p := \max_{1\le j\le 4} |x_j|_p.$$

注意，

$$\|\mathbf{x}\|_p^4 = |\mathbf{x}|_{\mathcal{G}}, \qquad \text{for any } \mathbf{x} \in \mathcal{B}_4.$$

$\widehat{\ }$我们将 $\mathcal{B}_4$的酉对偶记作 $\mathcal{B}_4$，即 $\mathcal{B}_4$的所有酉不可约表示的集合。于是，我们可以将 $\widehat{\mathcal{B}_4}$ 与 $\widehat{\mathbb{Z}_p^4} \cong \mathbb{Q}_p^4/\mathbb{Z}_p^4$ 的以下子集等同：

$$\widehat{\mathcal{B}_4} := \left\{ \xi \in \widehat{\mathbb{Z}_p^4} \ : \ 1 \le |\xi_4|_p < |\xi_3|_p \ \wedge \ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \widehat{\mathbb{H}_1}, \text{ or } |\xi_3|_p = 1 \ \wedge \ \xi_1 \in \mathbb{Q}_p/p^{\nu(\xi_4)}\mathbb{Z}_p \right\}.$$

$\widehat{\ }$此外，每个非平凡表示 $[\pi_\xi]$ 都等价于一个表示 $[\pi_\xi] \in \mathcal{B}_4$，该表示可在 $L^2(\mathbb{Z}_p)$的以下有限维子空间 $\mathcal{H}_\xi$ 中实现：

$$\mathcal{H}_\xi := \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \|(\xi_3, \xi_4)\|_p^{1/2} \mathbf{1}_{h + p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p} \ : \ h \in \mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p \right\}.$$

该空间的维数为

$$d_\xi := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\xi) = \max\{|\xi_3|_p, |\xi_4|_p\}.$$

该表示按照以下公式作用于函数 $\varphi \in \mathcal{H}_\xi$

$$(\pi_\xi(\mathbf{x})\varphi)(u) := e^{2\pi i \left\{ \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3(x_3 + u x_2) + \xi_4\left(x_4 + u x_3 + \frac{u^2}{2} x_2\right) \right\}_p} \varphi(u + x_1).$$

$\widehat{}$根据对 $[\pi_\xi] \in \mathcal{B}_4$ 的这一显式实现，以及对每个表示空间所作的自然基选择，相关矩阵系数 $(\pi_\xi)_{hh'}$ 由下式给出

$$(\pi_\xi(\mathbf{x}))_{hh'} = e^{2\pi i\left\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_3x_2+\xi_4x_3)h'+\xi_4x_2\frac{(h')^2}{2}\right\}_p}\mathbf{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p}(x_1).$$

在与海森堡群类似的情形下，我们得到

$$\|\pi_\xi(\mathbf{x})-\mathrm{I}_{d_\xi}\|_{HS}^2 = \begin{cases} 2\|(\xi_3,\xi_4)\|_p, & \text{if } x_1 \in \mathbb{Z}_p \setminus p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p, \\ \displaystyle\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p} \left|e^{2\pi i\left\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_3x_2+\xi_4x_3)h'+\xi_4x_2\frac{(h')^2}{2}\right\}_p}-1\right|^2, & \text{if } x_1 \in p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

这里，单位根 $e^{2\pi i\left\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_3x_2+\xi_4x_3)h'+\xi_4x_2\frac{(h')^2}{2}\right\}_p}$ 不可能同时全为 1；实际上，**的特征值中至多有一个 $\pi_\xi(\mathbf{x})$ 可以等于 1**。因此，我们得到估计

$$\#\{h\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p \ :\ \lambda_h(\pi_\xi(\mathbf{x}))\neq 1\} = d_\xi - 1 \geq \left(1-\frac{1}{p^4}\right)d_\xi,$$

从而得到结论

$$\begin{aligned}\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_3,\xi_4)}\mathbb{Z}_p}\left|e^{2\pi i\left\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_3x_2+\xi_4x_3)h'+\xi_4x_2\frac{(h')^2}{2}\right\}_p}-1\right|^2 &\geq \sum_{h'\in\mathbb{Z}_p/\|(\xi_3,\xi_4)\|_p\mathbb{Z}_p} 4\|\xi\|_p^{-2(4)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(4)} \\ &\geq 4\|\xi\|_p^{-2(4)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(4)}(\|(\xi_3,\xi_4)\|_p-1) \\ &\geq \|\xi\|_p^{-2(4)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(4)}\|(\xi_3,\xi_4)\|_p.\end{aligned}$$

注 3.13。为简洁起见，我们只列举了两个具有下界性质的紧致幂零 p-进李群的例子。更多例子请参见 [28]。我们猜想，每个紧致幂零 p-进李群都满足这一性质。更一般的 p-进群或许不满足这一性质，尽管我对此并无头绪；而在幂零情形下，定义 *3.11* 中出现的最优常数 $C>0$ 应为

$$C = 1-\frac{1}{p^d}, \quad d = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{G}).$$

3.9. **插值定理**。 最后，为了结束预备知识，我们在此回顾一些将在全文中用到的经典插值定理。第一个是在带权 L^r空间之间的插值论证，第二个是 Marcinkiewicz 插值定理的带权版本。更多详情请参见 [23, 24]。

定理 3.14。 设 (X,λ) 和 (Y,ρ) 为 σ-有限测度空间。

设 w_0、$w_1 : X\to(0,\infty)$ 和 v_0、$v_1 : Y\to(0,\infty)$ 为可测权函数。对于 $j=0$，1，定义带权测度

$$d\mu_j = w_j\,d\lambda, \qquad d\nu_j = v_j\,d\rho.$$

设 $1\leq r_0, r_1, s_0, s_1\leq\infty$。假设 T 是一个线性算子，且

$$T : L^{r_0}(X,\mu_0)\longrightarrow L^{s_0}(Y,\nu_0), \quad T : L^{r_1}(X,\mu_1)\longrightarrow L^{s_1}(Y,\nu_1),$$

是有界映射，并且存在满足以下条件的常数 $M_0, M_1 > 0$

$$\|Tf\|_{L^{s_j}(Y,\nu_j)} \le M_j \|f\|_{L^{r_j}(X,\mu_j)}, \qquad j = 0, 1.$$

令 $0 < \theta < 1$并定义

$$\frac{1}{r_\theta} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}, \qquad \frac{1}{s_\theta} = \frac{1-\theta}{s_0} + \frac{\theta}{s_1}.$$

定义插值权重

$$w_\theta = w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}, \qquad v_\theta = v_0^{1-\theta} v_1^{\theta},$$

以及相应的测度

$$d\mu_\theta = w_\theta \, d\lambda, \qquad d\nu_\theta = v_\theta \, d\rho.$$

那么， T可唯一延拓为有界算子 $T : L^{r_\theta}(X, \mu_\theta) \to L^{s_\theta}(Y, \nu_\theta)$，并满足估计式

$$\|Tf\|_{L^{s_\theta}(Y,\nu_\theta)} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{r_\theta}(X,\mu_\theta)}.$$

定理 3.15 （加权 Marcinkiewicz 插值）**：** 令 (X, μ) 为一个测度空间，且令w_0、 w_1 为 X上的非负可测权重。令 T为定义在简单函数上的次线性算子，并满足:

（i）（弱型 $(1,1)$）存在 $C_0 > 0$ 使得

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w_0 \, d\mu)} \le C_0 \|f\|_{L^1(w_0 \, d\mu)}.$$

(ii) *(*强类型 $(2,2)$*)* 存在 $C_1 > 0$ 使得

$$\|Tf\|_{L^2(w_1 \, d\mu)} \le C_1 \|f\|_{L^2(w_1 \, d\mu)}.$$

那么，对于满足以下条件的每个 $1 < r < 2$ 和 $\theta \in (0, 1)$

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2},$$

若定义插值权

$$w_\theta = w_0^{1-\theta} w_1^{\theta},$$

算子 T 可延拓为 $L^r(w_\theta \, d\mu)$ 上的有界算子，并且存在常数 $C_p > 0$使得

$$\|Tf\|_{L^r(w_\theta \, d\mu)} \le C_p \, C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_{L^r(w_\theta \, d\mu)}.$$

4. Multipliers on $L^2_\alpha(\mathbb{G})$

正如我们所承诺的，我们这一探索的第一步是证明一个便于使用的范数等价。这正是引理 4.1 的内容。

引理 4.1。 设 $\mathbb{G}$ 是一个维数为 $d = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{G})$的紧致 p-进李群，并设 $\alpha > 0$。假设 $\mathbb{G}$ 具有定义 *3.11* 中的下界性质。那么:

(i) 对于所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ 和 $\alpha > 0$，都有:

$$\|\mathbf{x}\|_p^\alpha \asymp I_\alpha(\mathbf{x}) := \sum_{[\eta] \in \widehat{\mathbb{G}}} d_\eta \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \|\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}^2.$$

(ii) 对于 $\alpha > 0$ 和 $f \in L^2_\alpha(\mathbb{G})$，都有：

$$\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{G})} \asymp \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \, \|\Delta_\eta \hat{f}(\xi)\|^2_{HS}.$$

(iii) 对于 $0 < \alpha < d$ 和 $f \in L^2(\mathbb{G})$，存在 $C > 0$，使得

$$\|f\|_{H_2^{-\alpha/2}(\mathbb{G})} \leq C\|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{G})}.$$

证明。

(i) 我们先固定 $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$，使得

$$\|\mathbf{x}\|_p^\alpha = p^{-\alpha k}.$$

然后我们可以检查当 $\|\eta\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p^{-1}$ 时 $\eta(\mathbf{x}) = \mathrm{I}_{d_\eta}$ 的情况。因此，一方面我们有

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mathbf{x}) &= \sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}} \\ \|\eta\|_p \geq p\|\mathbf{x}\|_p^{-1}}} d_\eta \, \|\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|^2_{HS} \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \\ &\leq \sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}} \\ \|\eta\|_p \geq p\|\mathbf{x}\|_p^{-1}}} d_\eta (2d_\eta) \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \\ &= 2\sum_{n=k+1}^{\infty} p^{-n(\alpha+d)} \sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}} \\ \|\eta\|_p = p^n}} d_\eta^2 = 2p^{-\alpha}\frac{1-p^{-d}}{1-p^{-\alpha}}\|\mathbf{x}\|_p^\alpha \lesssim \|\mathbf{x}\|_p^\alpha. \end{aligned}$$

另一方面，对于 $\|\eta\|_p \geq p\|\mathbf{x}\|_p^{-1}$，我们可以利用下界性质和引理 3.12 推导出：

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mathbf{x}) &= \sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}} \\ \|\eta\|_p \geq p\|\mathbf{x}\|_p^{-1}}} d_\eta \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \|\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|^2_{HS} \\ &\gtrsim \sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}} \\ \|\eta\|_p \geq p\|\mathbf{x}\|_p^{-1}}} d_\eta \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \left(d_\eta \|\eta\|_p^{-2d} \|\mathbf{x}\|_p^{-2d} \right) \\ &\geq \sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}} \\ \|\eta\|_p = p\|\mathbf{x}\|_p^{-1}}} d_\eta^2 \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \left(\|\eta\|_p^{-2d} \|\mathbf{x}\|_p^{-2d} \right) \\ &= (1-p^{-(2d+1)}) p^{-\alpha} p^{-2(2d+1)} \|\mathbf{x}\|_p^\alpha \gtrsim \|\mathbf{x}\|_p^\alpha. \end{aligned}$$

(ii) 设 $f \in L^2(\mathbb{G})$，并记 $q^{\eta}_{hh'}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})_{hh'} - \delta_{hh'}$.。那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{G}} |f(\mathbf{x})|^2 |\overline{q^{\eta}_{h'h}(\mathbf{x})}|^2 \, d\mathbf{x} &= \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi \, \|\mathcal{F}_{\mathbb{G}}[f\left(\overline{\eta(\mathbf{x})_{h'h}} - \delta_{hh'}\right)](\xi)\|^2_{HS} \\ &= \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi \, \|\Delta_{\overline{q^{\eta}_{h'h}}} \hat{f}(\xi)\|^2_{HS} \\ &= \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi \, \|[\Delta_\eta \hat{f}(\xi)]_{hh'}\|^2_{HS}.\end{aligned}$$

这样,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{G}} |f(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^\alpha \, d\mathbf{x} &\asymp \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{1\le h,h'\le d_\eta} d_\xi d_\eta \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \|[\Delta_\eta \hat{f}(\xi)]_{hh'}\|^2_{HS} \\ &= \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta \, \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \|\Delta_\eta \hat{f}(\xi)\|^2_{HS} \\ &= \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta \, \|\Delta_\eta^{\frac{\alpha+d}{2}} \hat{f}(\xi)\|^2_{HS}.\end{aligned}$$

证明至此结束。
(iii) 令 $f \in D(\mathbb{G})$, 设 $f(\mathbf{x}) = \sum_{g\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} f(\mathbf{g}) \mathbb{1}_{\mathbf{g}\star\mathbb{G}_n}(\mathbf{x})$, 使得

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} f(\mathbf{g}) \pi^*_\xi(\mathbf{g}) |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-1} \delta_{\mathbb{G}_n^\perp}(\xi).$$

我们可以看到

$$\|\widehat{f}(\xi)\|^2_{HS} \lesssim \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} |f(\mathbf{g})|^2 \|\xi^*(\mathbf{g})\|^2_{HS} |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-2} \delta_{\mathbb{G}_n^\perp}(\xi) \le \sum_{\mathbf{g}\in G/\mathbb{G}_n} |f(\mathbf{g})|^2 |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-2} d_\xi \, \delta_{\mathbb{G}_n^\perp}(\xi),$$

因此

$$\|f\|^2_{H_2^{-(\alpha/2)}(\mathbb{G})} = \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi \|\xi\|_p^{-\alpha} \|\widehat{f}(\xi)\|^2_{HS} \lesssim \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} |f(\mathbf{g})|^2 |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-2} \sum_{k\le n} \sum_{[\xi]\in\widehat{G}(k)} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{-\alpha}.$$

Thus

$$\|f\|^2_{H_2^{-(\alpha/2)}(\mathbb{G})} \lesssim \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} |f(\mathbf{g})|^2 |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-2} \sum_{k\le n} |\mathbb{G}/\mathbb{G}_k|^{1-\alpha/d} \lesssim \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} |f(\mathbf{g})|^2 |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-(\alpha/d+1)}.$$

另一方面,

$$\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{G})} = \int_{\mathbb{G}} |f(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^\alpha \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n} |f(\mathbf{g})|^2 \int_{\mathbf{g}\star\mathbb{G}_n} \|\mathbf{x}\|_p^\alpha \, d\mathbf{x}.$$

因此

$$\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{G})} = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{G}/\mathbb{G}_n, \mathbf{g}\neq\mathbf{e}} |f(\mathbf{g})|^2 \|\mathbf{g}\|_p^\alpha \int_{\mathbf{g}\star\mathbb{G}_n} d\mathbf{x} + |f(\mathbf{e})|^2 \int_{\mathbb{G}_n} \|\mathbf{x}\|_p^\alpha \, d\mathbf{x}.$$

但我们知道 $\int_{\mathbb{G}_n} \|\mathbf{x}\|_p^\alpha \, d\mathbf{x} \asymp |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-(\alpha/d+1)}$, 因此, 利用这些等式

$$\|\mathbf{g}\|_p^\alpha \ge p^{n\alpha} = |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{\alpha/d}, \quad \int_{\mathbf{g}\star\mathbb{G}_n} d\mathbf{x} = |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{-1},$$

综上，我们得到 $\|f\|_{H_2^{-\alpha/2}(\mathbb{G})} \lesssim \|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{G})}$.

□

我们以定理 2.1 的证明结束本节。正如我们预料的那样，在引理 4.1 给出的范数等价之后，所需的乘子定理便可由差分算子的乘积法则简单地推出。

定理的证明　　*2.1.* 只需注意，差分算子 Δ_η 满足以下乘积法则　　:

$$\begin{aligned}\Delta_\eta(\sigma\widehat{f})(\xi) &= \sigma(\eta\otimes\xi)\,\hat{f}(\eta\otimes\xi) - \sigma(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\xi)\,\hat{f}(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\xi)\\ &= \sigma(\eta\otimes\xi)\,\Delta_\eta\hat{f}(\xi) + \Delta_\eta\sigma(\xi)\,\hat{f}(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\xi)\\ &= \sigma(\eta\otimes\xi)\,\Delta_\eta\hat{f}(\xi) + \Delta_\eta\sigma(\xi)\,(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\hat{f}(\xi))\\ &= \Delta_\eta\sigma(\xi)\widehat{f}(\eta\otimes\xi) + \sigma(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\xi)\Delta_\eta\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

因此，我们实际上有以下估计：

$$\begin{aligned}\|\Delta_\eta(\sigma\widehat{f})(\xi)\|^2_{HS} &\lesssim \|\sigma(\eta\otimes\xi)\,\Delta_\eta\hat{f}(\xi)\|^2_{HS} + \|\Delta_\eta\sigma(\xi)(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\hat{f}(\xi))\|^2_{HS}\\ &\le \|\sigma(\eta\otimes\xi)\|^2_{op}\,\|\Delta_\eta\hat{f}(\xi)\|^2_{HS} + d_\eta\,\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|^2_{op}\,\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS}.\end{aligned}$$

现在我们需要应用引理 3.1。首先：

$$\begin{aligned}\|T_\sigma f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{G})} &\asymp \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta\,\|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}\,\|\Delta_\eta(\sigma\widehat{f})(\xi)\|^2_{HS}\\ &\lesssim \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta\,\|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}\left(\|\sigma(\eta\otimes\xi)\|^2_{op}\,\|\Delta_\eta\hat{f}(\xi)\|^2_{HS} + d_\eta\,\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|^2_{op}\,\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS}\right)\\ &\lesssim \sup_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\|\sigma(\xi)\|^2_{op}\,\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{G})} + \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi d_\eta^2\,\|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}\,\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|^2_{op}\,\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS}.\end{aligned}$$

对于右侧，请注意

$$\begin{aligned}&\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}\\ \|\eta\|_p<\|\xi\|_p}} d_\xi d_\eta^2\,\|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}\,\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|^2_{op}\,\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS}\\ &= \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi\left(\sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}\\ \|\eta\|_p<\|\xi\|_p}} d_\eta^2\,\|\Delta_\eta^{(\alpha+d)/2}\sigma(\xi)\|^2_{op}\right)\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS}\\ &\lesssim \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi\,\|\xi\|_p^{-(\alpha+d)}\left(\sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}\\ \|\eta\|_p<\|\xi\|_p}} d_\eta^2\right)\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS}\\ &\le \sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}} d_\xi\,\|\xi\|_p^{-\alpha}\,\|\hat{f}(\xi)\|^2_{HS} = \|f\|^2_{H^{-\alpha/2}(\mathbb{G})},\end{aligned}$$

因此，应用引理 4.1，我们可以得出结论

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}\\ \|\eta\|_p<\|\xi\|_p}} d_\xi d_\eta^2\,\|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}\,\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|_{op}^2\,\|\hat{f}(\xi)\|_{HS}^2 \lesssim \|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{G})}^2.$$

最后，只需再次应用引理 4.1：

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\substack{[\eta]\in\widehat{\mathbb{G}}\\ \|\eta\|_p\geq\|\xi\|_p}} d_\xi d_\eta^2\,\|\eta\|_p^{-(\alpha+d)}\,\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|_{op}^2\,\|\hat{f}(\xi)\|_{HS}^2 \lesssim \|f\|_{H_2^{\alpha/2}(\mathbb{G})}^2 \lesssim \|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{G})}^2.$$

□

4.1. 再举一个例子： $\mathbb{G}_{5,\,2}$。最后，为结束本节，我们再介绍一个适用本文定理的幂零群 $\mathbb{G}$。设 $p>2$ 为一个素数。群 $\mathbb{G}_{5,\,2}(\mathbb{Z}_p)$，或简称为 $\mathbb{G}_{5,\,2}$，定义为 $\mathbb{Z}_p^5$，其运算为非交换运算

$$\mathbf{x}\star\mathbf{y} := \left(x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, x_3+y_3,\, x_4+y_4+x_1y_2,\, x_5+y_5+x_1y_3\right),$$

其中，关于该运算，$\mathbf{x}$ 的逆元 $\mathbf{x}^{-1}$ 为

$$\mathbf{x}^{-1} = \left(-x_1,\, -x_2,\, -x_3,\, -x_4+x_1x_2,\, -x_5+x_1x_3\right).$$

我们可以将该群与由对易关系定义的 $\mathbb{Z}_p$-李代数$\mathfrak{g}_{5,\,2}$ 的指数像等同起来

$$[X_1,X_2]=X_4,\qquad [X_1,X_3]=X_5.$$

$\widehat{\mathbb{G}_{5,\,2}}$ 的酉对偶 $\mathbb{G}_{5,\,2}$ 可以与 $\mathbb{Z}_p^5$的以下子集等同：

$$\widehat{\mathbb{G}}_{5,2} = \left\{ \xi\in\widehat{\mathbb{Z}_p^5} \;:\; \begin{array}{l} |\xi_4|_p>|\xi_5|_p,\ (\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{Q}_p^2/p^{\vartheta(\xi_4)}\mathbb{Z}_p,\\ \text{or } |\xi_4|_p\leq|\xi_5|_p,\ (\xi_1,\xi_3)\in\mathbb{Q}_p^2/p^{\vartheta(\xi_5)}\mathbb{Z}_p \end{array} \right\}.$$

此外，我们可以写成

$$\widehat{\mathbb{G}}_{5,2} = A_1\cup A_2\cup A_3,$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &:= \left\{\xi\in\widehat{\mathbb{Z}_p^5} : \|(\xi_4,\xi_5)\|_p=1\right\},\\ A_2 &:= \left\{\xi\in\widehat{\mathbb{Z}_p^5} : \|(\xi_4,\xi_5)\|_p>1,\ |\xi_4|_p>|\xi_5|_p,\ (\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{Q}_p^2/p^{\vartheta(\xi_4)}\mathbb{Z}_p\right\},\\ A_3 &:= \left\{\xi\in\widehat{\mathbb{Z}_p^5} : \|(\xi_4,\xi_5)\|_p>1,\ |\xi_4|_p\leq|\xi_5|_p,\ (\xi_1,\xi_3)\in\mathbb{Q}_p^2/p^{\vartheta(\xi_5)}\mathbb{Z}_p\right\}. \end{aligned}$$

更多详情请参见 [28]。对于该群，每个酉不可约表示都可以在有限维希尔伯特空间中实现

$$\mathcal{H}_\xi := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\|(\xi_4,\xi_5)\|_p^{1/2}\,\mathbb{1}_{h+p^{\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p} :\ h\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p\right\},$$

with

$$d_\xi := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\xi) = \|(\xi_4,\xi_5)\|_p.$$

该表示按照以下公式作用

$$\pi_\xi(\mathbf{x})\varphi(u) := e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_4x_2+\xi_5x_3)u\}_p}\,\varphi(u+x_1),$$

并且 对于 $\mathcal{H}_\xi$ 的一个自然基，相应的矩阵系数为 y
wit

$$\pi_\xi(\mathbf{x})_{hh'} = e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_4x_2+\xi_5x_3)h'\}_p}\,\mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p}(x_1),$$

且相应的特征标为

$$\chi_{\pi_\xi}(\mathbf{x}) = \|(\xi_4,\xi_5)\|_p\, e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}\}_p}\,\mathbb{1}_{p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p}(x_1)\,\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi_4x_2+\xi_5x_3).$$

与 $\mathbb{H}_d$ 和 $\mathcal{B}_4$ 类似，给定任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{G}_{5,\ 1}$ 以及 π_ξ 的任意一列，该列中至多只有一个元素可以非零，因此 $\pi_\xi-\mathrm{I}_{d_\xi}$ 的元素有两种可能。若 $x_1\in p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p$，则 $\pi_\xi-\mathrm{I}_{d_\xi}$ 是对角矩阵；若 $x_1\in\mathbb{Z}_p\setminus p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5e)}\mathbb{Z}_p$，则 $\pi_x i(\mathbf{x})_{hh'}$ 中只有一个非零，且对角线上的元素均为常数 -1。我们可以计算

$$\|\pi_\xi(\mathbf{x})-\mathrm{I}_{d_\xi}\|_{HS}^2 = \begin{cases} 2\|(\xi_4,\xi_5)\|_p, & \text{if } x_1\in\mathbb{Z}_p\setminus p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p,\\ \displaystyle\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p}\left|e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_4x_2+\xi_5x_3)h'\}_p}-1\right|^2, & \text{if } x_1\in p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

这里，单位根 $e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_4x_2+\xi_5x_3)h'\}_p}$ 不可能全都为一，而且实际上，**的特征值中至多只有一个可以等于 1**。因此总结起来，我们得到估计

$$\#\{h\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p\ :\ \lambda_h(\pi_\xi(\mathbf{x}))\neq 1\} = d_\xi-1\geq\Big(1-\frac{1}{p^5}\Big)d_\xi,$$

从而得出结论

$$\begin{aligned}\sum_{h'\in\mathbb{Z}_p/p^{-\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p}\left|e^{2\pi i\{\xi\cdot\mathbf{x}+(\xi_4x_2+\xi_5x_3)h'\}_p}-1\right|^2 &\gtrsim \sum_{h'\in\mathbb{Z}_p/p^{\vartheta(\xi_4,\xi_5)}\mathbb{Z}_p}\|\xi\|_p^{-2(5)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(5)}\\ &\geq \|\xi\|_p^{-2(5)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(5)}(\|(\xi_4,\xi_5)\|_p-1)\\ &\gtrsim \|\xi\|_p^{-2(5)}\|\mathbf{x}\|_p^{-2(5)}\|(\xi_4,\xi_5)\|_p.\end{aligned}$$

5. $L^r_\alpha(G)$、 $1<r<\infty$上的乘子。

本节在紧 Vilenkin 群这一一般抽象框架下，汇集了主要结果的证明。鉴于我们讨论的是加权勒贝格空间，下文将由 μ_α 表示如下定义的测度

$$\mu_\alpha(A) := \int_A |x|_G^\alpha\, dx,$$

于是，对于 $1\leq r<\infty$，有 $L^r_\alpha(G) := L^r(G,\mu_\alpha)$。我们在下面的命题中汇集了该测度的一些性质。详细证明见 [16]。

命题 5.1。设 $\alpha>-1$， $x\in G$ 且 $n\in\mathbb{N}_0$。

(i) $\mu_\alpha(G_k)\asymp|G_k|^{\alpha+1}$。(ii)若 $\alpha\leq 0$且 $(x\star G_k)^* := x\star G_k\setminus\{e\}$，则

$$\mu_\alpha(g\star G_k)\lesssim|G_k|\inf\{|y|^\alpha\ :\ y\in x\star G_k^*\}.$$

(iii) $\mu_\alpha(x\star G_k)\lesssim\mu_\alpha(x\star G_{k+1})$。

(iv) $\mu_\alpha(G_k)\asymp\mu_\alpha(G_k\setminus G_{k+1})$。

接下来，我们需要用到以下两个命题。第一个是 L^1_α 中函数的 Calderón–Zygmund 分解，第二个是关于 L^r_α–空间上乘子的对偶定理。这两个命题的证明见 [16], ，读者可在那里找到更多细节。

命题 5.2。 设给定 $-1 < \alpha \le 0$、$\varphi \in L^1_\alpha(G)$ 和 $\gamma > 0$。则存在函数 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ ，使得

(i) $\varphi = \sum_j \varphi_j$，(ii) 对每个 $j \ge 0$，$\varphi_j \in L^1_\alpha(G)$(iii) $\sum_j \|\varphi_j\|_{L^1_\alpha(G)} \lesssim \|\varphi\|_{L^1_\alpha(G)}$，(iv) $|\varphi_0(x)| \lesssim \gamma$，(v) 存在不相交集合 $I_j = g_j \star G_{m(j)} = G_{m(j)} \star g_j$，使得对 $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset I_j$，并采用记号 $D_\gamma := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} I_j$，(vi) $\sum_j \mu_\alpha(I_j) \le \gamma^{-1}\|\varphi\|_{L^1_\alpha(G)}$，(vii) 对 $j \in \mathbb{N}$, $\int_{I_j} \varphi_j(x)\,dx = 0$ 。

^**命题 5.3.** 设 $\sigma \in L^\infty_{\mathrm{op}}(G)$, $1 < r < \infty$, $-1 < \alpha < r-1$。假设存在 $C > 0$，使得对所有 $f \in \mathcal{D}(G)$，我们都有

$$\|T_\sigma f\|_{L^r_\alpha(G)} \le C\|f\|_{L^r_\alpha(G)}.$$

那么，对所有 $f \in \mathcal{D}(G)$，我们都有，且常数 C相同

$$\|T_\sigma f\|_{L^{r'}_{(1-r')\alpha}(G)} \le C\|f\|_{L^{r'}_{(1-r')\alpha}(G)}.$$

因此， T_σ 是 $L^r_\alpha(G)$ 上的乘子，当且仅当 T_σ 是 $L^{r'}_{(1-r')\alpha}(G)$上的乘子。

为了继续推进，现在需要证明如何利用条件 $H(t)$ 来证明 $L^r_\alpha(G)$上傅里叶乘子的有界性。思路概述如下:

(i) 我们的算子的有界性来自插值论证。(ii) 论证如下：如果 T_σ 在 $L^2_\alpha(G)$ 上有界，且从 $L^{1,w}_\alpha(G)$ 到 $L^1_\alpha(G)$有界，那么它在 $L^r_\alpha(G)$上必定有界。这是插值定理 3.15 的推论。(iii) 为了证明从 $L^{1,w}_\alpha(G)$ 到 $L^1_\alpha(G)$ 的有界性，我们使用条件 $H(t)$ 以及命题 5.2 中给出的 Calderon-Zygmund 分解。(iv) 为了证明在 $L^2_\alpha(G)$ 上的有界性，我们使用定理 2.1。(v) 定理 3.14 中给出的 Stein-Weiss 插值证明了在 $L^r_\alpha(G)$ 上的有界性，其中 $1 < r < 2$，前提是端点空间上的有界性成立。(vi) 命题 5.3 中给出的标准对偶论证证明了情形$2 < r < \infty$下的有界性。

我们的下一个目标是借助条件 $H(t)$和 Calderón–Zygmund 分解推导弱 $(1,1)$ 估计。这将在引理 5.5 中完成。首先，我们引入一些记号，以使后续论证更加清晰。

注记 5.4. 令 $\sigma \in L^\infty_{\mathrm{op}}(G)$。对于 $k \in \mathbb{Z}$，令 $\sigma_k := \widehat{\epsilon_k}\sigma$。我们沿用定义 *2.3* 中的相同记号。由于 $\mathcal{D}(G)$ 等于 G上的三角多项式空间，因此当 k 足够大时， $T_{\sigma_k} f = T_\sigma f$。于是，证明 T_σ 在 L^r_α–空间或弱 L^r_α–空间上的有界性，等价于证明算子 T_{σ_k}的一致有界性。这是我们将在后续论述中利用的一个事实。

现在我们可以陈述引理了:

引理 5.5. 令 $\sigma \in L^{\infty}_{\mathrm{op}}(G)$，并假设 σ 满足条件 $H(t)$，其中某个 $t \geq 1$。若 T_σ 在 $L^2_\alpha(G)$ 上对某个满足 $-\frac{1}{t'} < \alpha \leq 0$ 的 α 为 $(2,2)$ 型，则 T_σ 在 $L^1_\alpha(G)$ 上为弱 $(1,1)$ 型。

证明。任取 $\varphi \in L^1_\alpha(G)$。固定 $\gamma > 0$，并应用命题 4.2 得到关于 φ 的 Calderón–Zygmund 分解。记作

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j = \varphi_0 + \psi.$$

Then

$$\{x \in G : |T_{\sigma_k}\varphi(x)| > \gamma\} \subset \{x \in G : |T_{\sigma_k}\varphi_0(x)| > \gamma/2\} \cup \{|T_{\sigma_k}\psi(x)| > \gamma/2\} := E_\gamma \cup F_\gamma.$$

对于 E_γ，利用 T_σ 在 $L^2_\alpha(G)$ 上的有界性，我们有

$$\begin{aligned}\mu_\alpha\left(E_\gamma\right) &= \mu_\alpha\left(\left\{x \in G : 2\gamma^{-1}\left|T_{\sigma_k}\varphi_0(x)\right| > 1\right\}\right) \leq 4\gamma^{-2}\left\|T_{\sigma_k}\varphi_0\right\|^2_{L^2_\alpha(G)} \\ &\lesssim 4\gamma^{-2}\left\|\varphi_0\right\|^2_{L^2_\alpha(G)} \lesssim \gamma^{-1}\|\varphi_0\|_{L^1_\alpha(G)}.\end{aligned}$$

接下来我们注意到，利用命题 5.2 中定义的集合 D_γ，

$$\begin{aligned}\mu_\alpha\left(F_\gamma\right) &= \mu_\alpha\left(F_\gamma \cap D_\gamma\right) + \mu_\alpha\left(F_\gamma \backslash D_\gamma\right) \\ &\leq \mu_\alpha\left(D_\gamma\right) + 2\gamma^{-1}\int_{G\backslash D_\gamma}\left|T_{\sigma_k}\psi(x)\right||x|^\alpha dx \leq \gamma^{-1}\|\varphi\|_{L^1_\alpha(G)} + 2\gamma^{-1}\int_{G\backslash D_\gamma}\left|T_{\sigma_k}\psi(x)\right||x|^\alpha dx,\end{aligned}$$

其中，在上述估计中，我们使用了命题 5.2 中 Calderón–Zygmund 分解的性质以及假设 $2\gamma^{-1}\left|T_{\sigma_k}\psi(x)\right| > 1$。

现在回忆 满足条件 $I_j = g_j \star G_{m(j)}$ 的序列 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$。对于前一个积分，我们有 e:

$$\begin{aligned}\int_{G\backslash D_\gamma}|T_{\sigma_k}\psi(x)||x|^\alpha dx &= \int_{G\backslash D_\gamma}\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{I_j}\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})\varphi_j(y)dy\right||x|^\alpha dx \\ &= \int_{G\backslash D_\gamma}\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{I_j}\left(\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star g_j^{-1})\right)\varphi_j(y)dy\right||x|^\alpha dx \\ &\leq \int_{G\backslash D_\gamma}\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{I_j}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star g_j^{-1})\right||\varphi_j(y)|dy\,|x|^\alpha dx \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{I_j}|\varphi_j(y)|\int_{G\backslash D_\gamma}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star g_j^{-1})\right||x|^\alpha dxdy \\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{I_j}|\varphi_j(y)|\int_{G\backslash I_j}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star g_j^{-1})\right||x|^\alpha dxdy \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{G_{m(j)}}|\varphi_j(y\star g_j)|\int_{G\backslash G_{m(j)}}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right||x\star g_j|^\alpha dxdy.\end{aligned}$$

现在我们需要估计上式中的内部积分，记作 $K_{j,\ \alpha}$。如果$\alpha = 0$ 且条件 $H(1)$ 成立，那么

$$\int_{G\setminus G_{m(j)}} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right| |x\star g_j|^\alpha dx \lesssim 1,$$

因此我们可以得出结论

$$\int_{G\setminus D_\gamma} \left|T_{\sigma_k}\psi(x)\right| |x|^\alpha dx \lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{G_{m(j)}} \left|\varphi_j\left(y\star g_j\right)\right| dy \lesssim \|\varphi\|_{L^1(G)}.$$

若 $\alpha < 0$，令 $k(j)$ 为满足 $|g_j| = |G/G_{k(j)}|^{-1}$的自然数。定义集合

$$R_j^1 := \{x\in G\setminus G_{m(j)} \ :\ x\star g_j \in G_{k(j)+1}\}, \quad R_j^2 := \{x\in G\setminus G_{m(j)} \ :\ x\star g_j \in G\setminus G_{k(j)+1}\}.$$

首先，对于 $x\in R_j^2$，我们有以下两种情况:

$$|x\star g_j| = |x| \geq |g_j|, \quad \text{or} \quad |x\star g_j| = |g_j| > |x|.$$

无论哪种情况，$|x\star g_j|^\alpha \leq |g_j|^\alpha = |y\star g_j|^\alpha$。对于 R_j^2，注意到 $R_j^2 \subset G_{k(j)}\setminus G_{k(j)+1}$，因此

$$\int_{R_j^2} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right| |x\star g_j|^\alpha dx \leq$$
$$\left(\int_{G\setminus G_{m(j)}} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)^{1/t} \left(\int_{G_{k(j)}\setminus G_{k(j)+1}} |x\star g_j|^{t'\alpha} dx\right)^{1/t'}.$$

回想一下，根据命题 5.1，对于 $\alpha t' > -1$

$$\left(\int_{G_{k(j)}\setminus G_{k(j)+1}} |x\star g_j|^{t'\alpha} dx\right)^{1/t'} \lesssim |G_{k(j)}|^{1/t'} \inf\{|y|^\alpha \ :\ y\in g_j\star G_{k(j)}^*\},$$

并且，在此假设条件 $H(t)$ 成立的情况下，$t > 1$，我们有:

$$\begin{aligned}\int_{R_j^1} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right| dx &\leq \int_{G\setminus G_{m(j)}} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right| dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{m(j)-1} \left(\int_{G_k\setminus G_{k+1}} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)^{1/t} |G_k|^{1/t'} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{m(j)-1} |G_k|^{-\varepsilon-\frac{1}{t'}} |G_{m(j)}|^\varepsilon |G_k|^{1/t'} \lesssim 1.\end{aligned}$$

综上，我们得到:

$$\begin{aligned}K_{j,\alpha} &\lesssim |y\star g_j|^\alpha \int_{R_j^1} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right| dx \\ &+ \left(\int_{G_{k(j)}\setminus G_{k(j)+1}} \left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1}) - \mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)\left(\int_{G_{k(j)}\setminus G_{k(j)+1}} |x\star g_j|^{\alpha t'} dx\right)^{1/t'} \\ &\lesssim |y\star g_j|^\alpha + |G_{k(j)}|^{-\varepsilon-\frac{1}{t'}} |G_{m(j)}|^\varepsilon \inf\{|y|^\alpha \ :\ y\in g_j\star G_{k(j)}^*\} \lesssim |y\star g_j|^\alpha.\end{aligned}$$

综上所述:

$$\int_{G\setminus D_\gamma}\left|T_{\sigma_k}\psi(x)\right||x|^\alpha dx\lesssim\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{G_{m(j)}}\left|\varphi_j\left(y\star g_j\right)\right||y\star g_j|^\alpha dy\lesssim\|\varphi\|_{L^1_\alpha(G)}.$$

证明至此结束。 □

在上述证明的最后几步中，我们不经意间得到了以下推论。

推论 5.6。 若将条件 $H(t)$ 替换为，则同样的结论仍然成立

$$\sup\left\{\left(\int_{G\setminus G_l}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})-\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)^{1/t}:\ y\in G_l\right\}\le C. \tag{7}$$

Proof. 沿用前一个证明中的记号，注意我们如何得到估计

$$\begin{aligned}
K_{j,\alpha}&\lesssim|y\star g_j|^\alpha\int_{R_j^1}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})-\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k(x)]\right|dx\\
&+\left(\int_{R_j^2}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})-\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)^{1/t}\left(\int_{G_{k(j)}\setminus G_{k(j)+1}}|x\star g_j|^{\alpha t'}dx\right)^{1/t'}\\
&\lesssim|y\star g_j|^\alpha\Big(\int_{R_j^1}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})-\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\Big)^{1/t}\\
&+\left(\int_{R_j^2}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})-\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)^{1/t}|G_{k(j)}|^{1/t'}\inf\{|y|^\alpha:\ y\in g_j\star G^*_{k(j)}\}\\
&\lesssim\left(\int_{G\setminus G_{m(j)}}\left|\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x\star y^{-1})-\mathcal{F}_G^{-1}[\sigma_k](x)\right|^t dx\right)^{1/t}|y\star g_j|^\alpha\lesssim|y\star g_j|^\alpha.
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

注记 5.7。 注意，条件 $H(t)$ 蕴含上述推论中的条件。

作为引理 5.5 的推论，利用标准的插值论证，我们得到以下结果:

定理 5.8. 设 $\sigma\in L^\infty_{\mathrm{op}}(G)$。假设 σ 满足条件 $H(t)$，其中某个 $t\ge1$，且T_σ 在某个 $L^2_{\alpha_0}(G)$ 上有界。那么，傅里叶乘子 T_σ 在 $L^r_\alpha(G)$ 上对 $1<r<\infty$ 和 $-|\alpha_0|\le\alpha\le(r-1)\cdot|\alpha_0|$有界。若条件 $H(1)$ 成立，则 T_σ 在 $L^r(G)$上对 $1<r<\infty$有界。

证明。**情况 1:** $1<r<2$, $-|\alpha_0|\le\alpha\le0$。对于 $\sigma\in L^\infty_{\mathrm{op}}(\widehat{G})$，由假设可知 hat T_σ 是 $L^2_{\alpha_0}$-有界的，因此根据 Stein 插值定理和命题 5.3, T_σ 是 $L^2_\alpha(G)$上的乘子，其中$-|\alpha_0|\le\alpha\le|\alpha_0|$。若进一步 σ 满足条件 $H(t)$, 则根据引理 5.5 T_σ 在 $L^1_\alpha(G)$ 上是弱型 $(1,1)$，其中 $-|\alpha_0|\le\alpha\le0$。因此，根据 Stein–Weiss 插值， T_σ 在$L^r_\alpha(G)$上有界，其中 $-|\alpha_0|\le\alpha\le0$。

情况 2： $2 < r < \infty$, $0 \le \alpha \le (r-1)\cdot|\alpha_0|$。这可直接由命题 5.3 和**情况 1**得出。原因是 $1 < r' < 2$, 因此

$$T_\sigma \in \mathcal{L}(L^{r'}_{-\alpha}(G)) \iff T_\sigma \in \mathcal{L}(L^{r}_{(r-1)\alpha}(G)).$$

情形 3： $1 < r < 2$, $0 \le \alpha \le (r-1)\cdot|\alpha_0|$。对于情形 $0 < \alpha \le (r-1)\cdot|\alpha_0|$, 选择 r_0 使得

$$1 < r_0 < \frac{r|\alpha_0| - 2\alpha}{|\alpha_0| - |\alpha|} \le r < 2, \qquad \alpha_1 = \frac{2\alpha - r_0\alpha}{r - r_0}, \qquad \theta = \frac{2r - 2r_0}{2r - rr_0}.$$

如果 σ 满足条件 $H(t)$, 那么它尤其满足条件 $H(1)$, 因此我们可以由**情形 1**推得 $T_\sigma \in \mathcal{L}(L^{r}(G))$。此外，由于 $0 < \frac{r}{2}\alpha_1 < \alpha_1 \lesneqq |\alpha_0|$, 我们知道 T_σ 在 $L^2_{(\frac{r}{2}\alpha_1)}(G)$上有界，并且由于

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{2}, \qquad \alpha = \frac{r}{2}\alpha_1\theta,$$

由定理 3.14 可知, T_σ 在 $L^r_\alpha(G)$上有界。

情形 4： $2 < r < \infty$, $-|\alpha_0| \le \alpha \le 0$。我们再次使用命题 5.3。由**情形 3** 可得 t

$$T_\sigma \in \mathcal{L}(L^{r'}_{(1-r')\alpha}(G)) \iff T_\sigma \in \mathcal{L}(L^{r}_{\alpha}(G)).$$

证明至此完成。 □

6. Multipliers on $L^r_\alpha(\mathbb{G})$, $1 < r < \infty$, $-d \le \alpha \le (r-1)d$.

现在终于可以证明我们关于紧致 p-进李群的结果了。首先要指出，推论 5.6 给出的、证明 L^r_α-有界性所需的关键估计，可由下列等价关系轻易推出

$$\|\mathbf{x}\|_p^\alpha \asymp \tilde{I}_\alpha(\mathbf{x}) := \sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{G}},\, \|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\eta \|\eta\|_p^{-(\alpha+d)} \|\pi_\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}^2, \qquad \|\mathbf{x}\|_p > \|\mathbf{y}\|_p. \tag{8}$$

利用这一事实，我们现在打算证明定理 2.7 中的假设如何蕴含应用定理 2.5 所需的条件。

定理 *2.7* 的证明。我们只需说明引理 5.5 和推论 5.6 的假设如何成立。为简化证明过程中的记号，记

$$\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{G}}[\sigma_k](\mathbf{x}\star\mathbf{y}^{-1}) - \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{G}}[\sigma_k](\mathbf{x}),$$

第 1 部分： 首先，应用柯西-施瓦茨不等式:

$$\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \le \Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0} d\mathbf{x}\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} \|\mathbf{x}\|_p^{-2\alpha_0} d\mathbf{x}\Big)^{1/2}.$$

一方面

$$\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} \|\mathbf{x}\|_p^{-2\alpha_0} d\mathbf{x}\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=0}^{\ell-1} p^{-k(d-2\alpha_0)}(1-p^{-d})\Big)^{1/2} \lesssim p^{\ell(\alpha_0 - \frac{d}{2})} \le \|\mathbf{y}\|_p^{\frac{d}{2}-\alpha_0},$$

对于任意的 $\mathbf{y} \in \mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)$。另一方面，利用方程 8 给出的等价关系，我们得到:

$$\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0}\, d\mathbf{x} \lesssim \int_{\mathbb{G}} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \left(\sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\eta \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+d)} \|\pi_\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}^2 \right) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi d_\eta \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+d)} \|\Delta_\eta(\widehat{f}_{\mathbf{y}}\sigma_k)(\xi)\|_{HS}^2,$$

其中我们使用了记号

$$\widehat{f}_{\mathbf{y}}(\xi) := \pi_\xi(\mathbf{y}^{-1}) - \mathrm{I}_{d_\xi},$$

因此

$$\Delta_\eta \widehat{f}_{\mathbf{y}}(\xi) = \pi_\eta \otimes \pi_\xi(\mathbf{y}^{-1}) - \mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \pi_\xi(\mathbf{y}^{-1}) = 0_{d_\eta \times d_\xi}, \qquad \text{for } \|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}.$$

根据乘积法则,

$$\Delta_\eta(\widehat{f}_{\mathbf{y}}\sigma_k)(\xi) = \widehat{f}_{\mathbf{y}}(\eta \otimes \xi)\Delta_\eta\sigma_k(\xi) + \Delta_\eta \widehat{f}_{\mathbf{y}}(\xi)(\mathrm{I}_{d_\eta} \otimes \sigma_k(\xi)).$$

由于 $\Delta_\eta \widehat{f}_{\mathbf{y}}(\xi) = 0 \text{ for } \|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}$，我们得到

$$\Delta_\eta(\widehat{f}_{\mathbf{y}}\sigma_k)(\xi) = \widehat{f}_{\mathbf{y}}(\eta \otimes \xi)\Delta_\eta\sigma_k(\xi),$$

因此

$$\|\Delta_\eta(\widehat{f}_{\mathbf{y}}\sigma_k)(\xi)\|_{HS} \le 2\|\Delta_\eta\sigma_k(\xi)\|_{HS}.$$

综上，对于 $\mathbf{y} \in \mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0}\, d\mathbf{x} &\lesssim \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi d_\eta \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+d)} \|\Delta_\eta\sigma_k(\xi)\|_{HS}^2 \\
&\le \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 d_\eta^2 \|\Delta_\eta^{\alpha_0+\frac{d}{2}}\sigma_k(\xi)\|_{op}^2 \\
&\lesssim \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 d_\eta^2 \|\xi\|_p^{-2\alpha_0-d} \\
&\lesssim \|\mathbf{y}\|_p^{-d} \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{-2\alpha_0-d} \lesssim \|\mathbf{y}\|_p^{2\alpha_0-d}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。

第 2 部分： 假设 $1 < t < 2$。首先应用赫尔德不等式:

$$\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^t d\mathbf{x}\Big)^{1/t} \le \Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0} d\mathbf{x}\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} \|\mathbf{x}\|_p^{-\frac{2t\alpha_0}{2-t}} d\mathbf{x}\Big)^{\frac{2-t}{2t}}.$$

一方面

$$\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} \|\mathbf{x}\|_p^{-\frac{2t\alpha_0}{2-t}} d\mathbf{x}\Big)^{\frac{2-t}{2t}} = \Big(\sum_{k=0}^{\ell-1} p^{-k(d-\frac{2t\alpha_0}{2-t})}(1-p^{-d})\Big)^{\frac{2-t}{2t}} \lesssim p^{\ell(\alpha_0 - d(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}))} \le \|\mathbf{y}\|_p^{d(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})-\alpha_0},$$

对于任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)$。另一方面，利用方程 8 给出的等价关系，我们再次得到 :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0}\, d\mathbf{x} &\lesssim \int_{\mathbb{G}} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \left(\sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\eta \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+d)} \|\pi_\eta(\mathbf{x}) - \mathrm{I}_{d_\eta}\|_{HS}^2 \right) d\mathbf{x} \\
&= \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi d_\eta \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+d)} \|\Delta_\eta(\widehat{f}_{\mathbf{y}}\sigma_k)(\xi)\|_{HS}^2,
\end{aligned}$$

因此，对于 $\mathbf{y}\in\mathbb{G}(p^{\ell}\mathbb{Z}_p)$，我们不妨设 $\|\mathbf{y}\|_p=p^{-\vartheta(\mathbf{y})}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^{\ell}\mathbb{Z}_p)}|\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2\|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0}\,d\mathbf{x}&\lesssim\sum_{\|\xi\|_p>\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}\sum_{\|\eta\|_p\le\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}d_\xi d_\eta\|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+d)}\|\Delta_\eta\sigma_k(\xi)\|_{HS}^2\\
&\le\sum_{\|\xi\|_p>\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}\sum_{\|\eta\|_p\le\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}d_\xi^2d_\eta^2\|\Delta_\eta^{\alpha_0+\frac{d}{2}}\sigma_k(\xi)\|_{op}^2\\
&\lesssim\sum_{\|\xi\|_p>\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}\sum_{\|\eta\|_p\le\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}d_\xi^2d_\eta^2\|\xi\|_p^{-2\alpha_0-2d(\frac{3}{2}-\frac{1}{t})}\\
&\lesssim\|\mathbf{y}\|_p^{-d}\sum_{\|\xi\|_p>\|\mathbf{y}\|_p^{-1}}d_\xi^2\|\xi\|_p^{-2\alpha_0-2d(\frac{3}{2}-\frac{1}{t})}\\
&=\|\mathbf{y}\|_p^{-d}\sum_{k=\vartheta(\mathbf{y})+1}^{\infty}p^{k(-2\alpha_0-2d(\frac{3}{2}-\frac{1}{t}))}\sum_{\|\xi\|_p=p^k}d_\xi^2\\
&\le\|\mathbf{y}\|_p^{-d}\sum_{k=\vartheta(\mathbf{y})+1}^{\infty}p^{k(d-2\alpha_0-2d(\frac{3}{2}-\frac{1}{t}))}\\
&=\|\mathbf{y}\|_p^{-d}\sum_{k=\vartheta(\mathbf{y})+1}^{\infty}p^{k(-2\alpha_0-2d(1-\frac{1}{t}))}\lesssim\|\mathbf{y}\|_p^{2\alpha_0+2d(\frac{1}{2}-\frac{1}{t})}=\|\mathbf{y}\|_p^{2\alpha_0-2d(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

我们以定理 2.8 的证明结束本节。我们在紧致p-进李群的背景下进行论述，但这些论证对于一般的紧 Vilenkin 群同样适用。

注 6.1. 根据标准的对偶论证，例如参见 [23, 第 105 页，第 5.3 节。1], 只需证明

$$\|Sf\|_{L^r_\alpha(G)}\lesssim\|f\|_{L^r_\alpha(G)}.$$

定理 *2.8* 的证明。证明只需应用拉德马赫函数的性质，更确切地说是欣钦不等式。对于 $n\in\mathbb{N}_0$，记为

$$r_n(s)=\operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi s))$$

第 n 个拉德马赫函数。我们通过符号定义傅里叶乘子 T_{σ_s}。

$$\sigma_s(\xi):=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}r_n(s)\,\delta_{\widehat{\mathbb{G}}(n)}(\xi)\,\mathrm{I}_{d_\xi}=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}r_n(s)\big(\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_{n+1}}(\xi)-\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\xi)\big).$$

首先我们声明m 满足定理 2.1 的假设。为此，只需计算 $\Delta_\eta\sigma_t$ ：

$$\Delta_\eta\sigma_s(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}r_n(s)\big(\Delta_\eta\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_{n+1}}(\xi)-\Delta_\eta\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\xi)\big),$$

其中

$$\Delta_\eta\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\xi)=\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\eta\otimes\xi)-\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\xi)=\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\eta\otimes\xi)-\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\xi).$$

由于

$$\widehat{\epsilon}_{\mathbb{G}_n}(\eta\otimes\xi)=\int_{\mathbb{G}_n}\frac{1}{|\mathbb{G}_n|}\,\eta(x)\otimes\xi(x)\,dx=\mathrm{I}_{d_\eta}\otimes\delta_{\mathbb{G}_n^{\perp}}(\xi)\,\mathrm{I}_{d_\xi},\quad\text{for }\|\eta\|_p<\|\xi\|_p,$$

我们可知，$\Delta_\eta \widehat{\epsilon_{\mathbb{G}_n}}(\xi)$ 恒等于零。因此，根据定理 2.1 和引理 5.3， T_{σ_s} 在 $L^2_\alpha(\mathbb{G})$ 上有界，其中 $-d < \alpha < d$. 现在我们断言， σ_s 满足定理 2.5 的假设。事实上，我们写作

$$\mathcal{F}_{\mathbb{G}}^{-1}[\sigma_s](\mathbf{x}\star\mathbf{y}^{-1})-\mathcal{F}_{\mathbb{G}}^{-1}[\sigma_s](\mathbf{x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} r_n(s)\big(\epsilon_{\mathbb{G}_{n+1}}(\mathbf{x}\star\mathbf{y}^{-1})-\epsilon_{\mathbb{G}_{n+1}}(\mathbf{x})\big)+\sum_{n\in\mathbb{N}_0} r_n(s)\big(\epsilon_{\mathbb{G}_n}(\mathbf{x}\star\mathbf{y}^{-1})-\epsilon_{\mathbb{G}_n}(\mathbf{x})\big).$$

由于 $\|\mathbf{x}\star\mathbf{y}^{-1}\|_p = \|\mathbf{x}\|_p$，只要 $\|\mathbf{x}\|_p > \|\mathbf{y}\|_p$，无论如何我们都得到

$$\mathcal{F}_{\mathbb{G}}^{-1}[\sigma_s](\mathbf{x}\star\mathbf{y}^{-1}) - \mathcal{F}_{\mathbb{G}}^{-1}[\sigma_s](\mathbf{x}) = 0, \quad \text{for } x\in\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}_\ell,\ y\in\mathbb{G}_\ell := \mathbb{G}\cap(\mathrm{I}_m + \mathcal{M}(p^\ell\mathbb{Z}_p)).$$

因此， σ_s 满足 $1\le t<\infty$ 的条件 $H(t)$。于是，根据定理 2.5，存在一个常数 C_r，它仅依赖于 r，使得

$$\|T_{\sigma_s} f\|^r_{L^r_\alpha(\mathbb{G})} \le C_r \|f\|^r_{L^r_\alpha(\mathbb{G})}, \qquad f\in\mathcal{D}(\mathbb{G}).$$

对左侧关于 $s\in[0,1]$ 积分，得到

$$\|Sf\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})} \lesssim \|f\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})},$$

其中

$$Sf(\mathbf{x}) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\left|\sum_{\|\pi\|_p=p^n} d_\xi \operatorname{Tr}\left(\pi(\mathbf{x})\widehat{f}(\pi)\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

更一般地，对于紧 Vilenkin 群，我们可以写成

$$Sf(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\left|\sum_{[\pi]\in\widehat{G}(n)} d_\pi \operatorname{Tr}\left(\pi(x)\widehat{f}(\pi)\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

证明至此完成。 □

7. Final remarks

7.1. **函数 VT 算子的**。让我们先定义酉对偶上的径向函数 .

定义 7.1。 若存在一个函数，使符号 $\sigma:\widehat{\mathbb{G}}\to\bigcup_{[\pi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ 是径向的

$$\varphi:\{|\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{1/d} : n\in\mathbb{N}_0\}\to\mathbb{C}$$

使得

$$\sigma(\pi) = \varphi\big(\|\pi\|_p\big)\mathrm{I}_{d_\pi}, \quad \text{for all } \pi\in\widehat{G}.$$

等价地，径向函数在超度量球面上为常数

$$\widehat{\mathbb{G}}(n) := \{\pi\in\widehat{\mathbb{G}} : \|\pi\|_p = |\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{1/d}\}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

定理 2.8 中的 Littlewood-Paley 分解表明，酉对偶中的有界径向映射定义了 L^r_α-有界算子。更准确地说，请回忆伪微分算子 T_σ on $\mathbb{G}$ 是一种形如

$$T_\sigma f(\mathbf{x}) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{[\pi]\in\widehat{\mathbb{G}},\,\|\pi\|_p=|\mathbb{G}/\mathbb{G}_n|^{1/d}} d_\pi \operatorname{Tr}[\pi(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x},\xi)\widehat{f}(\pi)], \quad f\in L^2(\mathbb{G}),$$

其中映射

$$\sigma : \mathbb{G} \times \widehat{\mathbb{G}} \to \bigcup_{[\pi]\in\widehat{\mathbb{G}}} \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi), \quad (\mathbf{x}, \pi) \mapsto \sigma(\mathbf{x}, \pi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi),$$

称为算子的符号。如果该符号是径向的，即

$$\sigma(\mathbf{x}, \pi) = \sigma(\mathbf{x}, \|\pi\|_p)\mathrm{I}_{d_\pi},$$

那么显然

$$\begin{aligned}
\|T_\sigma f\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})} \lesssim \|S(T_\sigma f)\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})} &= \left(\int_{\mathbb{G}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left| \sum_{\|\pi\|_p = p^n} d_\xi \operatorname{Tr}\left[\pi(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \|\pi\|_p)\widehat{f}(\pi)\right] \right|^2 \right)^{r/2} \|\mathbf{x}\|_p^\alpha d\mathbf{x} \right)^{1/r} \\
&= \left(\int_{\mathbb{G}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |\sigma(\mathbf{x}, \|\pi\|_p)|^2 \left| \sum_{\|\pi\|_p = p^n} d_\xi \operatorname{Tr}\left[\pi(\mathbf{x})\widehat{f}(\pi)\right] \right|^2 \right)^{r/2} \|\mathbf{x}\|_p^\alpha d\mathbf{x} \right)^{1/r} \\
&\le \sup_{(\mathbf{x},\pi)\in\mathbb{G}\times\widehat{\mathbb{G}}} |\sigma(\mathbf{x}, \|\pi\|_p)| \|Sf\|_{L^r_\alpha(\mathbb{G})},
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\sup_{(\mathbf{x},\pi)\in\mathbb{G}\times\widehat{\mathbb{G}}} |\sigma(\mathbf{x}, \|\pi\|_p)| < \infty \implies T_\sigma \in \mathcal{L}(L^r_\alpha(\mathbb{G})).$$

定义 1.13 中的 Vladimirov-Taibleson 算子具有径向符号，因此对于任意在 $[0, \infty)$ 上有界的函数 G，算子 $G(D^\alpha)$ 在 $L^r_\alpha(\mathbb{G})$ 上定义了一个有界算子。特别地，这对逆算子 $\mathbb{D}^{-\alpha}$ 也成立，由此证明了 VT 算子的负幂是 L^r_α-有界的。

7.2. **适用于 Vladimirov–Taibleson 次拉普拉斯算子的空间**。本节余下部分中，设 $\mathbb{G}$ 是一个紧致幂零 p-进李群，其幂零类为 $\mathcal{N}(\mathbb{G}) < p$。现在我们要研究与权函数

$$w_\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\alpha_{p,sub} := \|(x_1, ..., x_\kappa)\|^\alpha_p,$$

其中我们为 $\mathbb{Z}_p$-李代数 $\mathfrak{g}$ 选取一组基 $\{X_1, ..., X_\kappa, ..., X_d\}$，而 $X_1, ..., X_\kappa$ 是 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 的一组基。对于这个权函数，我们有如下估计

$$\|\mathbf{x}\|^\alpha_{p,sub} \asymp \sum_{\{\eta\in\widehat{\mathbb{Z}}^d_p \,:\, \eta_{\kappa+1}=...=\eta_d=1\}} |e^{2\pi i\{\mathbf{x}\cdot\eta\}_p} - 1|^2 \|\eta\|_p^{-(\alpha+\kappa)}, \quad \kappa := \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]),$$

因此，我们也有如下范数等价

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,sub}(\mathbb{G})} := \left(\int_{\mathbb{G}} |f(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|^\alpha_{p,sub} d\mathbf{x} \right)^{1/2} \asymp \left(\sum_{\xi\in\widehat{\mathbb{G}}} \sum_{\{\eta\in\widehat{\mathbb{Z}}^d_p \,:\, \eta_{\kappa+1}=...=\eta_d=1\}} d_\xi \|\eta\|_p^{-(\alpha+\kappa)} \|\Delta_\eta \widehat{f}(\xi)\|^2_{HS} \right)^{1/2}.$$

运用与证明主要结果类似的技巧，我们可以证明以下定理：

^**定理 7.2.** 设 $\sigma \in L^\infty(\mathbb{G})$ 为一个符号，且令 $1 < t < 2$为一个实数。

(1) 假设存在一个 $C=C(\sigma,\alpha)>0$，使得对于 $\|\eta\|_p<\|\xi\|_p$,

$$\left\|\Delta_\eta^{\frac{\alpha+\kappa}{2}}\sigma(\xi)\right\|_{\mathrm{op}}\le C_2\|\xi\|_p^{\frac{-(\alpha+\kappa)}{2}},\quad \forall\xi\in\widehat{\mathbb{G}}.$$

那么 T_σ 可延拓为作用于 $L^2_{\alpha,\,sub}(\mathbb{G})$ 上的有界算子。

(2) 若存在某个 $\alpha_0>\frac{d}{2}$ 和某个常数 $C=C(\sigma,\alpha_0)>0$，使得对于 $\|\eta\|_p<\|\xi\|_p$,

$$\left\|\Delta_\eta^{\alpha_0+\frac{\kappa}{2}}\sigma(\xi)\right\|_{\mathrm{op}}\le C_2\|\xi\|_p^{-(\alpha_0+\frac{d}{2})},\quad \forall\xi\in\widehat{\mathbb{G}},$$

那么 T_σ 可延拓为作用于 $L^r(\mathbb{G})$ 上的有界算子，且满足 $1<r<\infty$。

(3) 若存在某个 $\alpha_0>d\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)$ 和某个常数 $C=C(\sigma,\alpha_0,t)>0$，使得对于 $\|\eta\|_p<\|\xi\|_p$,

$$\left\|\Delta_\eta^{\alpha_0+\frac{d}{2}}\sigma(\xi)\right\|_{\mathrm{op}}\le C_2\|\xi\|_p^{-(\alpha_0+\frac{d}{2}+\kappa(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}))},\quad \forall\xi\in\widehat{\mathbb{G}},$$

那么，T_σ 可延拓为 $L^r_{\alpha,\,sub}(\mathbb{G})$ 上的有界算子，其中 $1<r<\infty$ 且任意

$$-d\le\alpha\le(r-1)d.$$

证明。

部分 1： 与定理 2.1 的证明类似，利用乘积法则可得如下估计

$$\|T_\sigma f\|^2_{L^2_{\alpha.sub}(\mathbb{G})}\lesssim\sup_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\|\sigma(\xi)\|^2_{op}\|f\|^2_{L^2_{\alpha,sub}(\mathbb{G})}+\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\{\eta\in\widehat{\mathbb{Z}}_p^d\,:\,\eta_{\kappa+1}=\ldots=\eta_d=1\}}d_\xi\|\eta\|_p^{-(\alpha+\kappa)}\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|^2_{op}\|\hat f(\xi)\|^2_{HS}.$$

对于右侧，注意到

$$\begin{aligned}
&\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\{\|\eta\|_p<\|\xi\|_p\,:\,\eta_{\kappa+1}=\ldots=\eta_d=1\}}d_\xi\|\eta\|_p^{-(\alpha+\kappa)}\|\Delta_\eta\sigma(\xi)\|^2_{op}\|\hat f(\xi)\|^2_{HS}\\
&\qquad=\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\{\|\eta\|_p<\|\xi\|_p\,:\,\eta_{\kappa+1}=\ldots=\eta_d=1\}}d_\xi\|\Delta_\eta^{\frac{\alpha+\kappa}{2}}\sigma(\xi)\|^2_{op}\|\hat f(\xi)\|^2_{HS}\\
&\qquad\lesssim\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}\sum_{\{\|\eta\|_p<\|\xi\|_p\,:\,\eta_{\kappa+1}=\ldots=\eta_d=1\}}d_\xi\|\xi\|_p^{-(\alpha+\kappa)}\|\hat f(\xi)\|^2_{HS}\\
&\qquad\lesssim\sum_{[\xi]\in\widehat{\mathbb{G}}}d_\xi\|\xi\|_p^{-\alpha}\|\hat f(\xi)\|^2_{HS}\lesssim\|f\|^2_{L^2_{\alpha,sub}(\mathbb{G})}.
\end{aligned}$$

部分 2： 首先，应用柯西-施瓦茨不等式:

$$\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)}|\check\sigma_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|d\mathbf{x}\le\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)}|\check\sigma_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2\|\mathbf{x}\|^{2\alpha_0}_{p,sub}d\mathbf{x}\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)}\|\mathbf{x}\|^{-2\alpha_0}_{p,sub}d\mathbf{x}\Big)^{1/2}.$$

一方面

$$\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)}\|\mathbf{x}\|^{-2\alpha_0}_{p,sub}d\mathbf{x}\Big)^{1/2}\le\Big(\int_{(\mathbb{Z}_p^\kappa\setminus p^\ell\mathbb{Z}_p^\kappa)\times\mathbb{Z}_p^{d-\kappa}}\|\mathbf{x}\|^{-2\alpha_0}_{p,sub}d\mathbf{x}\Big)^{1/2}\lesssim p^{\ell(\alpha_0-\frac{\kappa}{2})}\le\|\mathbf{y}\|_p^{\frac{\kappa}{2}-\alpha_0},$$

对任意 $\mathbf{y}\in\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)$。另一方面，我们知道

$$\|\mathbf{x}\|_{p,sub}^{\alpha} \asymp \sum_{\{\|\eta\|_p \le \|y\|_p^{-1} : \eta_{\kappa+1}=\ldots=\eta_d=1\}} |e^{2\pi i\{\mathbf{x}\cdot\eta\}_p} - 1|^2 \|\eta\|_p^{-(\alpha+\kappa)}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{G}(p^\ell \mathbb{Z}_p),\, \mathbf{x} \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{G}(p^\ell \mathbb{Z}_p),$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_{p,sub}^{2\alpha_0} d\mathbf{x} &\lesssim \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+\kappa)} \|\Delta_\eta \sigma_k(\xi)\|_{HS}^2 \\
&\le \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\Delta_\eta^{\alpha_0+\frac{\kappa}{2}} \sigma_k(\xi)\|_{op}^2 \\
&\lesssim \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{-2\alpha_0-d} \\
&\lesssim \|\mathbf{y}\|_p^{-\kappa} \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{-2\alpha_0-d} \lesssim \|\mathbf{y}\|_p^{2\alpha_0-\kappa}.
\end{aligned}$$

第3部分： 假设 $1 < t < 2$。同样，应用赫尔德不等式:

$$\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^t d\mathbf{x} \Big)^{1/t} \le \Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_p^{2\alpha_0} d\mathbf{x} \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} \|\mathbf{x}\|_p^{-\frac{2t\alpha_0}{2-t}} d\mathbf{x} \Big)^{\frac{2-t}{2t}}.$$

一方面

$$\Big(\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} \|\mathbf{x}\|_p^{-\frac{2t\alpha_0}{2-t}} d\mathbf{x} \Big)^{\frac{2-t}{2t}} \lesssim p^{\ell(\alpha_0 - \kappa(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}))} \le \|\mathbf{y}\|_p^{\kappa(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})-\alpha_0},$$

对任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{G}(p^\ell \mathbb{Z}_p)$。另一方面,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}(p^\ell\mathbb{Z}_p)} |\check{\sigma}_{k,\mathbf{y}}(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{x}\|_{p,sub}^{2\alpha_0} d\mathbf{x} &\lesssim \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi \|\eta\|_p^{-(2\alpha_0+\kappa)} \|\Delta_\eta \sigma_k(\xi)\|_{HS}^2 \\
&\le \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\Delta_\eta^{\alpha_0+\frac{\kappa}{2}} \sigma_k(\xi)\|_{op}^2 \\
&\lesssim \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} \sum_{\|\eta\|_p \le \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{-2\alpha_0-d-\kappa(\frac{1}{t}+\frac{1}{2})} \\
&\lesssim \|\mathbf{y}\|_p^{-\kappa} \sum_{\|\xi\|_p > \|\mathbf{y}\|_p^{-1}} d_\xi^2 \|\xi\|_p^{-2\alpha_0-d-\kappa(\frac{1}{t}+\frac{1}{2})} \lesssim \|\mathbf{y}\|_p^{2\alpha_0-\kappa(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。

□

使用上述差分算子有几个优点。首先，它们不会改变表示空间的维数，而且计算起来也更简单。这在研究以下这类算子的逆算子时很有用。

定义7.3 (弗拉基米罗夫次拉普拉斯算子)。 设 $\mathbb{K}$ 是一个非阿基米德局部域，其整数环为 $\mathcal{O}_\mathbb{K}$，素理想为 $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}_\mathbb{K}$，剩余域为 $\mathbb{F}_q = \mathcal{O}_\mathbb{K}/p\mathcal{O}_\mathbb{K}$。设 $\mathfrak{g} = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_\mathbb{K}}\{X_1, \ldots, X_d\}$

是一个幂零 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-李代数，并设 $\mathbb{G}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的指数像，因此 $\mathbb{G}$ 是一个紧致幂零 $\mathbb{K}$-李群。设 $\{X_1, ..., X_\kappa\}$ 是 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一组基。

我们用符号 $\mathbb{D}^\alpha_{sub}$ 表示弗拉基米罗夫–泰布尔森次拉普拉斯算子 $\alpha > 0$，其定义如下：

$$D^\alpha_{sub} f(x) := \frac{1-q^\alpha}{1-q^{-(\alpha+\kappa)}} \int_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \frac{f\left(\mathbf{x} \star \exp(x_1 X_1 + ... + x_\kappa X_\kappa)^{-1}\right) - f(\mathbf{x})}{\|(x_1, ..., x_\kappa)\|^{\alpha+\kappa}_{\mathbb{K}}} dx_1 ... dx_\kappa, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}).$$

这里， $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ 表示 $\mathbb{G}$ 上光滑函数的空间，也就是由局部常值指标固定的局部常值函数组成的集合。

在海森堡群这一特殊情形下，我们可以计算

$$\begin{aligned}
&\sigma_{D^\alpha_{sub}}(\xi)_{hh'} = D^\alpha_{sub}(\pi_\xi(\mathbf{x}))_{hh'}|_{\mathbf{x}=\mathbf{e}} \\
&= \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-(\alpha+2d)}} \int_{\mathbb{Z}_p^{2d}} \frac{e^{2\pi i\{x_1\cdot\xi_1 + x_2\cdot\xi_2 + \xi_3 h'\cdot x_2\}_p} \mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(x_1) - \delta_{hh'}}{\|(x_1, x_2)\|^{\alpha+2d}_p} dx_1 dx_2 \\
&= C_\alpha \int_{\mathbb{Z}_p^{2d}} \frac{e^{2\pi i\{(x_1+u_1)\cdot\xi_1 + (x_2+u_2)\cdot(\xi_2+\xi_3 h')\}_p} \mathbb{1}_{h'-h}(u_1+x_1) - e^{2\pi i\{u_1\cdot\xi_1 + u_2\cdot(\xi_2+\xi_3 h')\}_p} \mathbb{1}_{h'-h}(u_1)}{\|(x_1, x_2)\|^{\alpha+2d}_p} dx_1 dx_2 \Big|_{u_1=u_2=0} \\
&= D^\alpha_{\mathbb{Z}_p^{2d}}(e^{2\pi i\{u_1\cdot\xi_1 + u_2\cdot(\xi_2+\xi_3 h')\}_p} \mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(u_1))|_{u_1=u_2=0}.
\end{aligned}$$

利用 $\mathbb{Z}_p^d$-傅里叶变换，我们可以写出

$$\mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(u_1) = \sum_{\|\tau\|_p \le |\xi_3|_p} C_{hh'}(\tau) e^{2\pi i\{u_1\cdot\tau\}_p},$$

因此

$$\begin{aligned}
&D^\alpha_{\mathbb{Z}_p^{2d}}(e^{2\pi i\{u_1\cdot\xi_1 + u_2\cdot(\xi_2+\xi_3 h')\}_p} \mathbb{1}_{h'-h+p^{-\vartheta(\xi_3)}\mathbb{Z}_p^d}(u_1)) \\
&= \sum_{\|\tau\|_p \le |\xi_3|_p} \left(\|(\tau+\xi_1, \xi_2+\xi_3 h')\|^\alpha_p - \frac{1-p^{-d}}{1-p^{-(\alpha+d)}} \right) C_{hh'}(\tau) e^{2\pi i\{u_1\cdot(\tau+\xi_1) + u_2\cdot(\xi_2+\xi_3 h')\}_p}
\end{aligned}$$

由此容易推出， D^α_{sub} 有一个非平凡的核，由 $\mathbb{H}_d$ 上所有的中心函数组成：

$$\mathrm{Ker}(D^\alpha_{sub}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{2\pi i\{\lambda x_3\}_p} : \lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}_p\},$$

因此，符号 $\sigma_{D^\alpha_{sub}}(\xi)$在每个表示空间上都有一个一维核。这意味着$D^\alpha_{sub}$ 模常值函数不可逆，也就是说， D^α_{sub}不存在基本解。而且，即使考虑其模核的逆，也仍不清楚所得算子是否为 L^r-有界。因此，我们转而考虑与之密切相关的算子

$$\mathscr{L}^\alpha := D^\alpha_{sub} + \partial^\alpha_{X_3},$$

其中

$$\partial^\alpha_{X_3} f(\mathbf{x}) := \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-(\alpha+1)}} \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{f(\mathbf{x} + (0,0,t)) - f(\mathbf{x})}{|t|^{\alpha+1}_p} dt,$$

这是弗拉基米罗夫拉普拉斯算子的另一种形式。该算子是可逆的（模去常值函数），且其相应符号满足以下条件（对 $\|\eta\|_p < \|\xi\|_p$）：

$$\Delta_\eta \sigma_{\mathscr{L}^\alpha}(\xi) = \mathbf{0}_{d_\xi}, \quad \eta_{\kappa+1} ... = \eta_d = 1,$$

因此，逆幂也有相同的结论；

$$\Delta_{\eta}\sigma_{(\mathscr{L}^{\alpha})^{-\beta}}(\xi)=\mathbf{0}_{d_{\xi}},\quad \eta_{\kappa+1}\ldots=\eta_{d}=1,$$

说明了 $(\mathscr{L}^{\alpha})^{-\beta}$ 如何在 $L^{r}_{\alpha,sub}(\mathbb{G})$ 上定义一个有界算子，这是定理 **??**的推论。更一般地，$\mathscr{L}^{\alpha}$ 的任意有界函数都在 $L^{r}_{\alpha,sub}(\mathbb{G})$上定义一个有界算子。

参考文献

[1] AKYLZHANOV, R 和 RUZHANSKY, MICHAEL. 格上的网空间、Hardy-Littlewood 型不等式及其逆命题。《欧亚数学杂志》8, 3 (2017), 10–27.[2] BENDIKOV, A., GRIGORYAN, A., PITTET, C., 和 WOESS, W. 超度量空间上的各向同性马尔可夫半群。《俄罗斯数学调查》69, 4 (2014年8月), 589–680.[3] BOYARCHENKO, M., 和 SABITOVA, M. 仿有限群的轨道方法及布朗定理的一个 p 进类比。《以色列数学杂志》165, 1 (2008年6月), 67–91.[4]BRADLEY, P. E. p 进椭圆 Parisi-Zúñiga 扩散的边值问题。https://arxiv.org/abs/2504.06288 (2025).[5] BRADLEY, P. E. *p*进解析流形上的扩散算子。https://arxiv.org/abs/2510.22563 (2025).[6] BRADLEY, P. E., 和 MORÁN-LEDEZMA, A. 探测紧致 *p*进解析流形的 Serre 不变量。https://arxiv.org/abs/2511.20631 (2025).[7] CORWIN, L., 和 GREENLEAF, F. P. 剑桥高等数学研究丛书：第1卷，幂零李群表示及其应用：丛书编号18：基础理论与实例（第1部分）。剑桥大学出版社，英国剑桥，2004年6月.[8] DRAGOVICH, B., KHRENNIKOV, A., KOZYREV, S., 和 VOLOVICH, I. 纪念 V. S. Vladimirov（1923–2012）诞辰一百周年。《p 进数、超度量分析及其应用》15, 3 (2023年9月), 243–244.[9] DRAGOVICH, B., KHRENNIKOV, A., KOZYREV, S., VOLOVICH, I., 和 ZELENOV, E. p 进数理物理：前三十年。《p 进数、超度量分析及其应用》9, 2 (2017年4月), 87–121.[10] FISCHER, V. 任意紧李群上的内在伪微分演算。《泛函分析杂志》268, 11 (2015年6月), 3404–3477.[11] FISCHER, V. 紧李群对偶上的微分结构。《泛函分析杂志》279, 3 (2020年8月), 108555.[12] GÁT, G. 关于特征系统的非交换 Vilenkin 群上函数的 Fejér 均值。《数学分析》32, 1 (2006年3月), 25–48.[13] HOFMANN, K. H., 和 MORRIS, S. A. 《紧群的结构：学生入门指南——专家手册》。德古意特出版社，2020年5月.[14] HOWE, R. 紧 p进群的 Kirillov 理论。《太平洋数学杂志》73, 2 (1977年12月), 365–381.[15] KITADA, T. 某些全不连通群上加权 Hardy 空间的乘子。《国际数学与数学科学杂志》11, 4 (1987年10月), 665–674.[16] ONNEWEER, C. W. 某些全不连通群上加权 L^{p}空间的乘子。《美国数学会汇刊》288, 1 (1985年3月), 347.[17] ONNEWEER, C. W., 和 QUEK, T. S. 局部紧 Vilenkin 群上加权 L^{p}空间的乘子。《美国数学会会刊》105, 3 (1989), 622–631.[18] PERSSON, L.-E., TEPHNADZE, G., 和 WEISZ, F. 《鞅 Hardy 空间与一维 Vilenkin-Fourier 级数的可和性》。施普林格国际出版，2022.[19] ROCKLAND, C. 海森堡群上的拟椭圆性——表示论判据。《美国数学会汇刊》240, 0 (1978), 1–52.[20] RUZHANSKY, M., 和 TURUNEN, V. 《伪微分算子与对称性》。Birkhäuser Basel，2010.[21] RUZHANSKY, M., 和 WIRTH, J. 紧李群上的 L^{p}-傅里叶乘子。《数学杂志》280, 3–4 (2015年3月), 621–642.[22] SALOFF-COSTE, L. 某些全不连通群上的伪微分算子。《数学研究》83, 3 (1986), 205–228.[23] STEIN, E. M. 《奇异积分与函数的可微性》（PMS-30）。普林斯顿大学出版社，1971年12月。

[24] STEIN, E. M., 和 WEISS, G. 带测度变换的算子插值。《美国数学会汇刊》*87*, 1 (1958), 159–172.[25] TAIBLESON, M. H. 局部域上的n维向量空间调和分析：III. 乘子。《数学年刊》*187*, 4 (1970年12月), 259–271.[26] VELASQUEZ-RODRIGUEZ, J. P. 紧海森堡群上弗拉基米罗夫次拉普拉斯算子的谱，2024年。[27] VELASQUEZ-RODRIGUEZ, J. P. 紧恩格尔群上弗拉基米罗夫次拉普拉斯算子的谱。*arXiv* 预印本（2024年7月），arXiv:2407.06289.[28] VELASQUEZ-RODRIGUEZ, J. P. 维数为 $d \leq 5$的紧幂零 p 进李群的酉对偶与矩阵系数。《墨西哥数学会通报》*31*, 2 (2025年2月).[29] YUEPING, Z. 局部紧 Vilenkin 群上加权函数空间的乘子。《逼近理论及其应用》*18*, 2 (2002年6月), 65–71.[30] ZUNIGA-GALINDO, W., CHACÓN-CORTÉS, L. F., 和 GARCÍA-BIBIANO, C. 单位球上的 *p*进 FitzHugh-Nagumo 系统中的图灵图样。《*p* 进数、超度量分析及其应用》*15* (2023年12月), 245–265.[31] ZUNIGA-GALINDO, W., DIBBA, B., 和 ZAMBRANO-LUNA, B. A. 层次神经网络、p 进偏微分方程及其在图像处理中的应用。《非线性数学物理学杂志》*31* (2024年12月), 1–40.[32] ZUNIGA-GALINDO, W., 和 MAYES, N. p 进量子力学、无限深势阱与连续时间量子游走。《数学物理评论》(2025年10月)。

J.P. VELASQUEZ-RODRIGUEZ，自然科学与数学系，哈维里亚纳宗座大学，哥伦比亚卡利电子邮箱地址：juanpablovr2025@gmail.com / juanpablo.velasquez@javerianacali.edu.co