MP($\mathcal{R}$,2-WO) 可在多项式时间内求解

Jiehua Chen

2025年10月31日
维也纳工业大学

arXiv:2603.22814v1 [cs.CC] 2 Dec 2025

摘要

我们考虑中位数程序（Barthelemy 和 Monjardet，1981年），该程序将输入类别中的一列二元关系 n 聚合为输出类别（可能不同）中的一个二元关系，同时使意见不一致的序对数量最少。我们证明，如果输出类别要求为二分弱序（2-WO），那么该问题可在多项式时间内求解。

1 引言

中位数程序（MP） [1] 将 n 二元关系 $(R_i)_{i\in[n]}$ 汇总为同一集合 O上的另一个二元关系 $\mathcal{A}$，其定义在 m 个备选项上，且使不一致项的数量最少。这里，两个二元关系 R 和 R' 在 $\mathcal{A}$ 个备选项上的不一致项数量，是它们意见不一致的有序对的数量，即:

$$|\mathsf{MP}(R,R')| = |\{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A} : ((a,b)\in R \wedge (a,b)\notin R) \vee ((a,b)\notin R \wedge (a,b)\in R)\}|.$$

例如，对于以下二分弱序 $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (b,c)\}$和 $R' = \{(a,a),(b,b),(c,c), (b,c), (c,b), (b,a),(c,a)\}$，不一致项为 (a,b), (a,c), (c,a) 和 (c,b)。

我们关注这样一个问题的计算复杂性：对于给定的某类二元关系作为输入，确定其不一致项最小数量，并输出另一类特定二元关系。

对于满足特定类别的输入和输出，已有一些已知结果。为此，对于某个固定的 t，令 t-二分弱偏好序（t-WO）表示与将备选项划分为 t 个子集的有序划分相对应的二元关系（A_1，A_2，……，A_t），其中对每个 i，$i'\in\{1,\dots,t\}$ 若 $i<i'$，则 A_i 中的每个备选项都严格优于 $A_{i'}$中的每个备选项，而同一子集中的所有备选项彼此无差异。Zwicker [6] 指出如下结论:

- 计算 MP(m-WO m-WO) 等价于计算 Kemeny 分数 [5]；因此这是 NP难问题 [2]。
- 计算 MP(2-WO m-WO) 等价于按赞成分数排序，因此可在多项式时间内求解。

类似地，可以调整 Bartholdi III 等人提出的归约 [2] ，以证明 MP(m-WO,3-WO) 仍然是 NP难问题。近期，Chen 等人 [3] 研究了二分等价序(2-EQ)，即无序二划分 $\{A_1,A_2\}$，其中 $A_1\cup A_2 = A$。他们证明了MP(2-EQ,2-EQ) 是 NP难问题。

在这篇简短的说明中，我们证明，与 2-EQ 不同，计算 MP($\mathcal{R}$,2-WO) 可在多项式时间内求解。设 $\mathcal{R} = (R_1, R_2, \cdots, R_n)$ 是一组定义在 $\mathcal{A}$ 上的 n 二元关系，且这些关系都是自反的，并设 $|\mathcal{A}| = m$。为便于推理，我们假设每个二元关系 R_i, $i\in\{1,2,\dots,n\}$,

分别对应一位不同的选民。对于每一对备选项 a 和 b，令 $N(a,b)$ 表示严格偏好 a 胜过 b 的选民人数（对应的二元关系包含 (a,b)，但不包含 (b,a)），令$E(a,b)$ 表示对 a 和 b 无差异的选民人数（即对应的二元关系同时包含 (a,b) 和 (b,a)）。注意，根据定义，$E(a,b) = E(b,a)$ 成立。

目标是找到一个二分弱序（2-WO），使其与 $\mathcal{R}$ 的不一致项总数最少。令 MP($\mathcal{R}$,2-WO) 表示输入与任意 2-WO 之间的不一致项最少数量，即

$$\mathsf{MP}(\mathcal{R}, \text{2-WO}) \coloneqq \min_{O \in \text{2-WO}} \left(\sum_{(a,b) \in O \wedge (b,a) \notin O} 2N(b,a) + E(b,a) + \sum_{(a,b),(b,a) \in O} N(a,b) + N(b,a) \right).$$

接下来，我们通过将问题归约为寻找最小 s-t-割，来证明确定 MP($\mathcal{R}$,2-WO) 可在多项式时间内求解；众所周知，该问题可在多项式时间内求解 [4]。

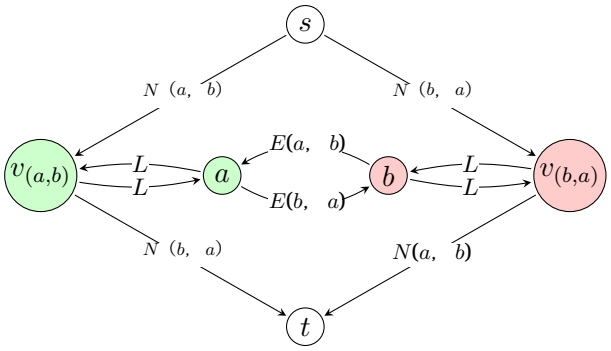
2 构造

给定 $\mathcal{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$，构造一个流网络 (G, s, t, w)，其源点为 s，汇点为 t，并包含 $m + (m-1)m$ 个节点；每个节点表示一个备选项：a，或一对备选项组成的有序对：$v_{(a,b)}$。

我们添加以下弧：对于每一对备选项 (a,b)，添加

- 两条弧 $(s, v_{(a,b)})$ 和 $(v_{(a,b)}\, t)$，其权重分别为 $N(a,b)$ 和 $N(b,a)$；
- 两条弧（a，$v_{(a,b)}$）和（$v_{(a,b)}$ a）的权重非常大 L（例如，$L >$（mn）^{5}）；
- 两条弧（a，b）和（b，a）的权重分别为 E（b，a）和 E（a，b）；注意，E（a，b）$=E$（b，a）。

以下是所构造网络的示意图。



目标是找到节点的一个 s-t-划分（A, B），满足 $s \in A$ 和 $t \in B$，使得从 A 到 B的弧的权重之和

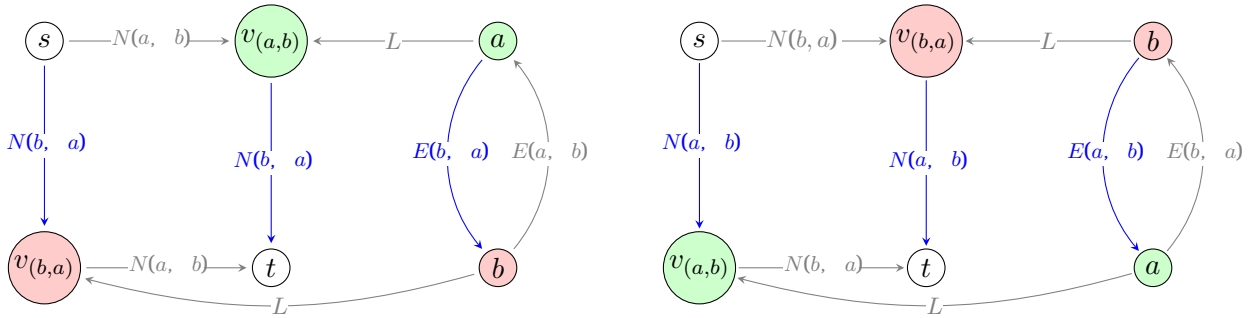
$$\sum_{(x,y) \text{ is an arc with } x \in A \text{ and } y \in B} w(x,y)$$

达到最小值。我们将这样的划分称为最小割。注意，任何 2-WO 都对应于将备选项划分为两个不相交子集的有序划分，我们将使用最小割来确定这样的有序划分。

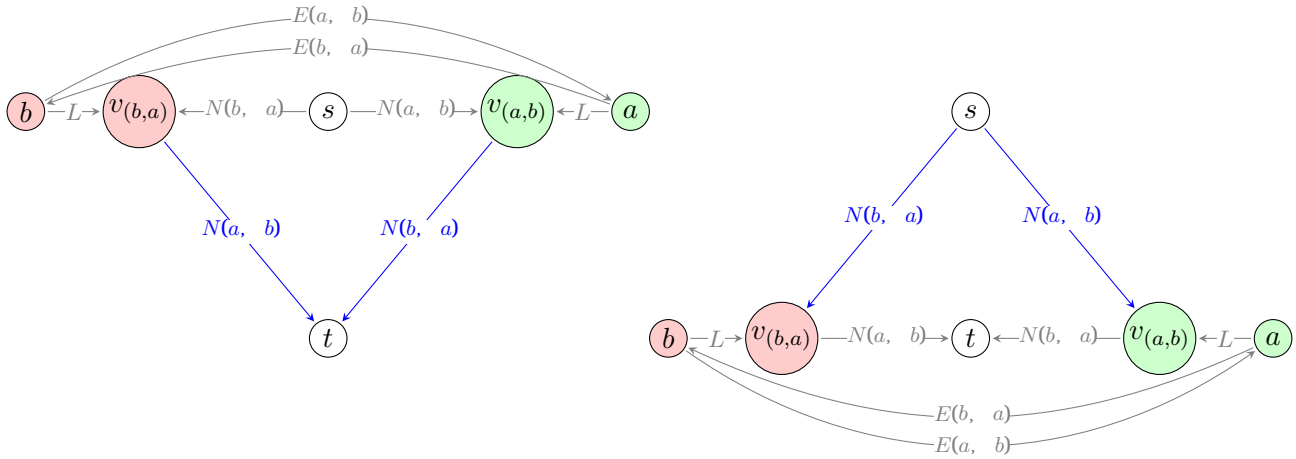
定理 1。如果(A, B) 是一个最小割，那么 A 和 B 中的备选项定义了一个不一致项最少的 *DWO*。如果(A', B') 是一个不一致项最少的 *DWO*，那么(A, B) 是一个最小割，其中 A由节点 s、对应于 A' 中备选项的节点，以及满足 $x \in A'$ 和 $y \in B'$ 的节点$v_{(x,y)}$组成； B 则由其余节点组成。

证明概要。 由于 $v_{(a,b)}$ 和 a 之间的权重非常大，我们不失一般性地假设，在一个最小割中，$v_{(a,b)}$ 和 a 始终位于同一个划分中。现在，考虑将 A 和 B 与 $s \in A$ 和 $t \in B$划分开来。关于 a 和 b，有四种情况：

- 如果是 $a \in A$ 和 $b \in B$ （左下图），那么偏好 b 而非 a 的选民会对权重贡献两次，而对 a 和 b 无差异的选民会贡献一次。同理，如果是$b \in A$ 和 $a \in B$，那么偏好 a 和 b 的选民会对权重贡献两次，而无差异的选民会贡献一次。等价地，我们在割中有以下蓝色弧：



- 如果 a 和 b 位于同一个子集中（要么都在 A 中，要么都在 B中），那么不持无差异态度的选民将计数一次。等价地，我们在割中有以下蓝色弧：



由于每个 s-t-割（A， B）都对应一个可能的 DWO，且每个最小割的容量都等于相应 DWO 的不一致项数量， □

参考文献

[1] J. P. Barthelemy 和 B. Monjardet. 聚类分析与社会选择理论中的中位数程序. *Mathematical Social Sciences*, 1(3):235–267, 1981年. →第1页。

[2] J. J. Bartholdi III、C. A. Tovey 和 M. A. Trick. 难以判断谁赢得选举的投票方案. *Social Choice and Welfare*,6(2):157–165,1989. → 第1页。[3] J. Chen、D. Hermelin 和 M. Sorge. 关于二元聚类的聚类聚合的注记。*Operations Research Letter*, 52:107052, 2024. →第 1页。[4] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein. 算法导论. 麻省理工学院出版社，2009年. → 第2页。[5] J. Kemeny. 没有数字的数学. *Daedalus*, (88):577–591,1959. → 第1页。[6] W. S. Zwicker. 一大类聚合规则中的循环与难解性. 人工智能研究杂志, 61:407–431,2018. → 第 1页。