arXiv:2603.22932v1 [math.RA] 24 Mar 2026

Hopf 括号上的模

R. Gonz ález Rodríguez[1,2], **B. Ramos Pérez**[1,3] **和 A.B. Rodríguez Raposo**[1,4] 。

[1] CITMAga，西班牙圣地亚哥-德孔波斯特拉 15782。

[2] 维戈大学，应用数学系 II，电信工程学院，西班牙维戈 E-36310。电子邮件：rgon@dma.uvigo.es

[3] 圣地亚哥-德孔波斯特拉大学。数学系，数学学院，西班牙圣地亚哥-德孔波斯特拉 E-15782。电子邮件：braisramos.perez@usc.es

[4] 圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，应用教学系，教育科学学院，E-15782 圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙。电子邮件：anabelen.rodriguez.raposo@usc.es

摘要。设 $\mathbb{H} = (H_1, H_2)$ 是对称幺半范畴 C 中的一个 Hopf 括号。本文证明，$\mathbb{H}$ 上的模范畴与 smash积代数 $H_1 \sharp H_2$ 上的模范畴同构。此外，Zhu 意义下的 $\mathbb{H}$ 上的模范畴可由如下条件刻画：某个作用属于 H_2 的余交换类。

关键词：幺半范畴，Hopf 括号，smash积，模范畴 2020年 数学主题分类：16D90，16T05，16S40，18M05。

1. 引言

量子杨-巴克斯特方程（量子 Yang–Baxter 方程）由杨振宁 [17] 和 Rodney J. Baxter [3]于 20 世纪 60 年代末至 70 年代初提出，用于研究量子物理和统计力学领域中的可积系统。如今，它被视为数理物理领域最重要的方程之一，是连接抽象代数与理论物理的桥梁。尽管其表述简单，要对量子杨-巴克斯特方程的解进行完整分类绝非易事，至今仍未解决。为了解决这一问题，Drinfeld [6]提出研究最简单的一类解，即集合论解。

在这条研究脉络中，L. Guarnieri 和 L. Vendramin [10] 引入了斜括号的概念，将其视为 W. Rump [15], 先前提出的括号结构的非阿贝尔版本，并证明斜括号会导出 Yang–Baxter 方程的非退化且不一定是对合的解。这些结构如今在集合论解的分类中占据核心地位。因此，基于 Hopf 代数是群的量子类比这一事实，I. Angiono、C. Galindo 和 L. Vendramin [2]提出了 Hopf 括号的概念，将其视为斜括号的量子版本，也就是从群论结构转向底层结构为向量空间的情形

。更具体地说，若 $(H,\ \epsilon,\ \Delta)$ 是一个余代数，则其上的 Hopf 胞腔结构 $\mathbb{H}=(H_1,\ H_2)$ 由一对 Hopf 代数构成

$$H_1=(H,1,\cdot,\epsilon,\Delta,S)\text{ and }H_2=(H,1_\circ,\circ,\epsilon,\Delta,T),$$

使得两个乘积之间满足以下相容条件：

$$g\circ(h\cdot k)=(g_1\circ h)\cdot S(g_2)\cdot(g_3\circ k)$$

对所有 g、h、$k\in H$ 均成立。正如作者所确立的，余交换 Hopf 括号也能给出量子 Yang–Baxter 方程的解；当 H_1 是交换 Hopf 代数时，这些解还是对合的 [2, 推论 2.4 和 2.5]。

在阿贝尔情形下建立括号的概念后，Rump 给出了括号（A、$+$、$\circ$）上的模的定义 [15, 定义 3]。这个定义的一个显著特点是，它只依赖于第二个群（A、$\circ$）的表示，这是因为考虑的是阿贝尔群。当括号的概念扩展到非阿贝尔背景时，Rump 最初的方法需要扩展，不仅要纳入第二个结构，也要纳入第一个结构。沿着这一思路，H. Zhu [18] 给出了一个相当严格的 Hopf 胚上的模的概念。另一方面，R. González [8] 提出了一个更宽泛的定义，其中包含 Zhu 的定义；当底层余代数是余交换的时，二者恰好等价。然而，如果不要求任何额外条件，这两个定义便有所不同。例如，González 的定义将 $\mathbb{H}$ 纳入为一个 $\mathbb{H}$-模，而 Zhu 的定义则不然，因此 González 的方法似乎更适用于非余交换背景。

此时，Hopf 胚上的模需要涉及两个不同（尽管彼此相关）的 Hopf 代数上的（至少）两种模结构。然而，Y. Kozakai 和 C. Tsang 指出，在 [11, 注记 2.2 和 3.2] 中，Zhu 意义下的模可以视为某个代数上的模，具体而言，就是 Hopf 括号的底层代数的半直积。不过，他们并未得到这两类模范畴之间的等价关系。

因此，本文探讨两个明显不同的问题。第一个问题与将 Hopf 括号上的模范畴解释为某个代数上的模范畴的可能性有关。在第 3 节中，采用 González 提出的定义，我们证明 Hopf 括号上的模范畴 $\mathbb{H}$ 同构于由 Hopf 括号的底层结构 $\mathbb{H}$产生的 smash 积代数上的模范畴（见定理 3.11）。此外，作为该定理的推论，我们可以确认，按 González 的定义，Hopf 括号上的模范畴可视为 Doi-Hopf 模范畴（见推论 3.12）。

第二个问题在第4节中讨论，涉及 González 的模与 Zhu 的模之间的关系。在定理 4.2 中，我们用所谓的余交换类刻画 Zhu 的模（见 [1]）。这种刻画或许有助于在需要采用 Zhu 的方法时省去冗长的计算。

2. Hopf 代数与 Hopf 括号的预备知识

本文始终在严格对称幺半框架中进行。根据 Mac Lane相干定理，严格性假设不失一般性，因为任意幺半范畴都与某个严格幺半范畴幺半等价。因此，经过标准的修改后，下面证明的陈述在一般的非严格情形下仍然成立。下文中，C 表示一个严格对称幺半范畴，其张量积为 $\otimes$，单位对象为 K，对称性为 c。对于任意态射 $f\colon M\to N$ 以及 C 中的任意对象 P，我们将使用记号$P\otimes f$和 $f\otimes P$，分别代替 $\mathrm{id}_P\otimes f$和 $f\otimes\mathrm{id}_P$。为方便读者，

在本节的第一部分，我们回顾一些标准定义，这些定义将在本文的论述中反复使用。

定义 2.1. C 中的一个代数是一个三元组 $A=(A,\eta_A,\mu_A)$，其中 $\eta_A\colon K\to A$ (单位) 和 $\mu_A\colon A\otimes A\to A$ (乘积) 是 C 中满足以下条件的态射：

$$\mu_A\circ(\eta_A\otimes A)=\mathrm{id}_A=\mu_A\circ(A\otimes\eta_A),\quad \mu_A\circ(\mu_A\otimes A)=\mu_A\circ(A\otimes\mu_A).$$

注意，给定 $B=(B,\eta_B,\mu_B)$ 这一 C 中的另一个代数，张量积 $A\otimes B$ 具有一种代数结构，其单位和乘积定义如下：

$$\eta_{A\otimes B}\coloneqq\eta_A\otimes\eta_B,\quad \mu_{A\otimes B}\coloneqq(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(A\otimes c_{B,A}\otimes B).$$

此外，若 C 中的态射 $f\colon A\to B$ 保持单位和乘积，则称其为代数态射，即：

$$f\circ\eta_A=\eta_B,\quad f\circ\mu_A=\mu_B\circ(f\otimes f).$$

对偶地，若三元组 $C=(C,\varepsilon_C,\delta_C)$ 满足以下条件，且 $\varepsilon_C\colon C\to K$ (余单位) 和 $\delta_C\colon C\to C\otimes C$ (余乘积) 是 C 中的态射，则称其为 C 中的余代数：

$$(\varepsilon_C\otimes C)\circ\delta_C=\mathrm{id}_C=(C\otimes\varepsilon_C)\circ\delta_C,\quad (\delta_C\otimes C)\circ\delta_C=(C\otimes\delta_C)\circ\delta_C.$$

同样，若 $D=(D,\ \varepsilon_D,\ \delta_D)$ 是 C 中的另一个余代数，则张量积 $C\otimes D$ 是一个余代数，其余单位和余乘积如下：

$$\varepsilon_{C\otimes D}\coloneqq\varepsilon_C\otimes\varepsilon_D,\quad \delta_{C\otimes D}\coloneqq(C\otimes c_{C,D}\otimes D)\circ(\delta_C\otimes\delta_D).$$

此外，C 中的态射 $g\colon C\to D$ 是余代数态射，当且仅当以下等式

$$\varepsilon_D\circ g=\varepsilon_C,\quad \delta_D\circ g=(g\otimes g)\circ\delta_C$$

成立，即 g 保持余单位且是余乘法的。

定义 2.2。设 C 是一个余代数，A 是 C 中的一个代数。设 $f,\ g\colon C\to A$ 是 C 中的两个态射。我们将 f 和 g 的卷积乘积定义为

$$f*g\coloneqq\mu_A\circ(f\otimes g)\circ\delta_C.$$

C 中从 C 到 A 的态射集合，记作 $\mathrm{Hom_C}(C,\ A)$，在卷积乘积下构成一个幺半群，其单位由 $\eta_A\circ\varepsilon_C=\varepsilon_C\otimes\eta_A$ 给出。

定义 2.3。设 $A=(A,\ \eta_A,\ \mu_A)$ 是 C 中的一个代数。C 中的左 A-模是一个二元组 $(M,\ \varphi_M)$，其中 $\varphi_M\colon A\otimes M\to M$（作用）是 C 中满足以下等式的一个态射：

$$\varphi_M\circ(\eta_A\otimes M)=\mathrm{id}_M,\tag{1}$$

$$\varphi_M\circ(A\otimes\varphi_M)=\varphi_M\circ(\mu_A\otimes M).\tag{2}$$

设 (N,φ_N) 是一个左 A-模。若态射 $f\colon M\to N$ 是左 A-模的态射（换言之，f 是 A-线性的），则

$$f\circ\varphi_M=\varphi_N\circ(A\otimes f).\tag{3}$$

Wit与前述态射一起，这些对象构成一个范畴，记作 ${}_A\mathrm{Mo}$ d.

对偶地，可以为余代数$C=(C、\ \varepsilon_C、\ \delta_C)$定义右 C-余模范畴。在 C 中，右 C-余模是一个对 $(M、\ \rho_M)$，其中 $\rho_M\colon M\to M\otimes C$（余作用）是 C 中的一个态射，并满足以下等式：

$$(M\otimes\varepsilon_C)\circ\rho_M=\mathrm{id}_M,$$

$$(\rho_M \otimes C) \circ \rho_M = (M \otimes \delta_C) \circ \rho_M.$$

设 $(N、\ \rho_N)$ 是一个右 C-余模。态射 $f\colon\ M \to N$ 是右C-余模的态射（或者换句话说，f 是 C-余线性的），当且仅当

$$\rho_N \circ f = (f \otimes C) \circ \rho_M.$$

借助前述态射，这些对象构成一个范畴，记作 Mod^C。

当范畴中的一个对象同时具有彼此相容的代数结构和余代数结构时，就得到双代数的概念。

定义 2.4. 若五元组 $B = (B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \delta_B)$ 满足：(B, η_B, μ_B) 是 C 中的代数，$(B, \varepsilon_B, \delta_B)$ 是 C 中的余代数，且 η_B 和 μ_B 是余代数态射（等价地，ε_B 和 δ_B 是代数态射），则称其为 C 中的双代数。

若 $D = (D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D)$ 是 C 中的另一个双代数，则 C 中的态射 $f\colon\ B \to D$ 若同时是代数态射和余代数态射，就称为双代数态射。

在下述定义中，我们回顾 Hopf 代数的概念。

定义 2.5。 若六元组 $H = (H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H, \lambda_H)$ 是 C 中的 Hopf 代数，当且仅当 $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H)$ 是一个双代数，并且存在一个自同态 $\lambda_H\colon\ H \to H$，称为反 antipode，满足以下恒等式：

$$\lambda_H * \mathrm{id}_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = \mathrm{id}_H * \lambda_H. \tag{4}$$

方程 (4) 表示反 antipode λ_H 是 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(H, H)$ 中关于卷积乘积的恒等映射的逆，因此它是唯一的。

若 Hopf 代数 H 的底层代数是交换的，则称其为交换 Hopf 代数，即若等式 $\mu_H \circ c_{H,H} = \mu_H$成立；若 H的底层余代数是余交换的，则称其为余交换 Hopf 代数，也就是说，若 $c_{H,H} \circ \delta_H = \delta_H$成立。

Hopf 代数 H 的反 antipode 是反乘法的且反余乘法的，也就是说，它满足：

$$\begin{aligned} \lambda_H \circ \mu_H &= \mu_H \circ c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H), \\ \delta_H \circ \lambda_H &= (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H. \end{aligned} \tag{5}$$

此外，反 antipode 保持单位和余单位，即，$\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H$, $\varepsilon_H \circ \lambda_H = \varepsilon_H$.因此，若 H 是交换的，则 λ_H 是代数态射；若 H 是余交换的，则 λ_H 是余代数态射。在上述任一情形下，等式

$$\lambda_H \circ \lambda_H = \mathrm{id}_H \tag{6}$$

成立，即 λ_H 是对合的。

给定另一个位于 C 中的 Hopf 代数 $B = (B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \delta_B, \lambda_B)$，态射 $f\colon\ H \to B$ 若为双代数态射，则称其为 Hopf 代数态射。注意，在这种情况下，f 与反 antipode 可交换，也就是说，

$$\lambda_B \circ f = f \circ \lambda_H.$$

定义 2.6. C 中的对象 P 称为前有限的，若存在 C 中的对象 P^*，称为 P 的对偶，以及一个 C-伴随 $- \otimes P \dashv - \otimes P^*$。我们用 a_P 和 b_P 分别表示上述 C-伴随的单位和余单位。回顾一下，单位和余单位是 C 中自然同构的集合，定义为

$$a_P = \{a_P(X) : X \to X \otimes P \otimes P^*;\ X \in \mathsf{C}\}, \quad b_P = \{b_P(X) : X \otimes P^* \otimes P \to X;\ X \in \mathsf{C}\}$$

满足三角恒等式。

设 H 是 C 中的一个 Hopf 代数。若 H 是前有限的，则其对偶 H^* 是 C 中的一个 Hopf 代数，其中

$$\eta_{H^*} = (\varepsilon_H \otimes H^*) \circ a_H(K), \quad \varepsilon_{H^*} = b_H(K) \circ (H^* \otimes \eta_H),$$
$$\mu_{H^*} = ((b_H(K) \circ (H^* \otimes b_H(K) \otimes H)) \otimes H^*) \circ (H^* \otimes H^* \otimes ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H^*) \circ a_H(K)),$$
$$\delta_{H^*} = ((b_H(K) \circ (H^* \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}))) \otimes H^* \otimes H^*) \circ (H^* \otimes ((H \otimes a_H(K) \otimes H^*) \circ a_H(K))),$$
$$\lambda_{H^*} = ((b_H(K) \circ (H^* \otimes \lambda_H)) \otimes H^*) \circ (H^* \otimes a_H(K)).$$

定义 2.7。设 H 是一个 Hopf 代数，A 是 C 中的一个代数。左 H-模 (A, φ_A) 称为左 H-模代数，若 η_A 和 μ_A 是 H-线性态射，也就是说，若以下等式

$$\varphi_A \circ (H \otimes \eta_A) = \varepsilon_H \otimes \eta_A,$$
$$\varphi_A \circ (H \otimes \mu_A) = \mu_A \circ \varphi_{A\otimes A},$$

成立，其中 $\varphi_{A\otimes A} \coloneqq (\varphi_A \otimes \varphi_A) \circ (H \otimes c_{H,\,A} \otimes A) \circ (\delta_H \otimes A \otimes A)$。

例 2.8. 给定一个 Hopf 代数 H，$(H, \varphi_H^{\mathrm{ad}})$ 是一个左 H-模代数，其中 φ_H^{ad} 是所谓的伴随作用，定义为

$$\varphi_H^{\mathrm{ad}} \coloneqq \mu_H \circ (\mu_H \otimes \lambda_H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H).$$

下一个定理是 Hopf 代数理论中一个广为人知的结果，它给出了群的半直积的推广，稍后我们将对此作明确说明：

定理 2.9. 设 H 是一个 *Hopf* 代数，且 (A, φ_A) 是一个左 H-模代数，并定义 e

$$A\sharp H = (A \otimes H, \eta_{A\sharp H} \coloneqq \eta_A \otimes \eta_H, \mu_{A\sharp H} \coloneqq (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes \Psi_A^H \otimes H)),$$

其中 $\Psi_A^H \colon = (\varphi_A \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,\,A}) \circ (\delta_H \otimes A)$。那么，$A\sharp H$ 是 *C* 中的一个代数，称为 *smash*积代数。

定义 2.10。设 H 是 Hopf 代数，C 是 C 中的余代数。若左 H-模 (C, φ_C) 满足 ε_C 和 δ_C 是 H-线性态射，则称其为左 H-模余代数。换言之，若等式成立，则 (C, φ_C) 是左 H-模余代数

$$\varepsilon_C \circ \varphi_C = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_C, \tag{7}$$
$$\delta_C \circ \varphi_C = \varphi_{C\otimes C} \circ (H \otimes \delta_C) \tag{8}$$

成立。注意(7) 和 (8) 等价于 φ_C 是余代数态射这一事实。

设 H 和 B 是 C 中的 Hopf 代数。若 (B, φ_B) 既是左 H-模代数，也是左H-模余代数，则称其为左 H-模代数-余代数。

本文的一个基本概念是余交换类，这一概念由 Alonso Álvarez、Fernández Vilaboa 和 González Rodríguez 在 [1] 中引入。简言之，它是为一个模给出的条件，比通常的余交换性更弱。

定义2.11。设 H 是 C 中的一个 Hopf 代数。若左 H-模 (M, φ_M) 满足以下等式，则它属于 H 的余交换类：

$$(\varphi_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M) = (\varphi_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes M)。 \tag{9}$$

注意，由于 C 具有对称性，(9) 等价于

$$(H \otimes \varphi_M) \circ (\delta_H \otimes M) = (H \otimes \varphi_M) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes M). \tag{10}$$

显然 y，在 H 是余交换Hopf代数的情况下，(9) 自动成立 .

如下列例子所示，这一条件自然地出现在各种情境中。

例 2.12. </style余交换类是 smash积代数成为 Hopf 代数的必要条件。更准确地说，设 和是 Hopf 代数，且 (,φ_A) 是一个左 H-模代数。此外，若 (A,φ_A) 是满足 (9) 的左 H-模余代数，那么

$$A\sharp H=(A\otimes H,\eta_A\otimes\eta_H,\mu_{A\sharp H},\varepsilon_A\otimes\varepsilon_H,\delta_{A\otimes H},\lambda_{A\sharp H})$$

是一个 Hopf 代数，其中 $\lambda_{A\sharp H}:=\Psi_A^H\circ(\lambda_H\otimes\lambda_A)\circ c_{A,H}$.

注意，当 $\mathsf{C}=\mathsf{Set}$ 时，任何 Hopf 代数都是一个群。因此，在这种情况下，砍积 Hopf 代数 $\sharp$ 与众所周知的半直积群 $\ltimes$一致。

例 2.13. 设 H 是一个 Hopf 代数，其反 antipode λ_H 是 C 中的同构。余交换类还刻画了 H 的伴随作用何时为余代数态射，即 φ_H^{ad}是余代数态射，当且仅当 $(H,\varphi_H^{\mathrm{ad}})$ 属于 H的余交换类。

下面来看等价性的证明。首先，根据余单位性质，注意到 $\varepsilon_H\circ\varphi_H^{\mathrm{ad}}=\varepsilon_H\otimes\varepsilon_H$. 其次，对于伴随作用，有如下恒等式

$$\delta_H\circ\varphi_H^{\mathrm{ad}}=(\mu_H\otimes H)\circ(\mu_H\otimes((\lambda_H\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes H)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\quad(11)$$

holds. Indeed,

$$\begin{aligned}
&\delta_H\circ\varphi_H^{\mathrm{ad}}\\
&=\delta_H\circ\mu_H\circ(\mu_H\otimes\lambda_H)\circ(H\otimes c_{H,H})\circ(\delta_H\otimes H)\\
&=(\mu_H\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(((\mu_H\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H))\otimes(\delta_H\circ\lambda_H))\\
&\quad\circ(H\otimes c_{H,H})\circ(\delta_H\otimes H)\ \text{(by the condition of coalgebra morphism for } \mu_H)\\
&=(\mu_H\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(((\mu_H\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H))\otimes((\lambda_H\otimes\lambda_H)\\
&\quad\circ c_{H,H}\circ\delta_H))\circ(H\otimes c_{H,H})\circ(\delta_H\otimes H)\ \text{(by (5))}\\
&=((\mu_H\circ(\mu_H\otimes\lambda_H)\circ(H\otimes c_{H,H}))\otimes(\mu_H\circ(\mu_H\otimes\lambda_H)\circ(H\otimes c_{H,H})))\\
&\quad\circ(H\otimes((H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(c_{H,H}\otimes c_{H,H})\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes H\otimes H))\otimes H)\\
&\quad\circ(((H\otimes\delta_H)\circ\delta_H)\otimes\delta_H)\ \text{(by naturality of } c\text{, the symmetric character of } \mathsf{C} \text{ and coassociativity of } \delta_H)\\
&=((\mu_H\circ(\mu_H\otimes\lambda_H))\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ(H\otimes((c_{H,H}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,H})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes H))\otimes H)\\
&\quad\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\ \text{(by naturality of } c)\\
&=(\mu_H\otimes H)\circ(\mu_H\otimes((\lambda_H\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes H)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\\
&\quad\text{(by naturality of } c).
\end{aligned}$$

Therefore, on the one hand, let us assume that (10) holds for $(H,\varphi_H^{\mathrm{ad}})$. Then,

$$\begin{aligned}
&\delta_H\circ\varphi_H^{\mathrm{ad}}\\
&=(\mu_H\otimes H)\circ(\mu_H\otimes((\lambda_H\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes H)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\ \text{(by (11))}\\
&=(\mu_H\otimes H)\circ(\mu_H\otimes((\lambda_H\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ(\delta_H\otimes H)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\ \text{(by (10))}\\
&=(\varphi_H^{\mathrm{ad}}\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\ \text{(by naturality of } c \text{ and coassociativity of } \delta_H),
\end{aligned}$$

并且，由此可知， φ_H^{a} 是余代数态射。

另一方面，假设 φ_H^{ad}是余代数态射。因此，由 (11) 可得，

$$\begin{aligned}
&(\mu_H\otimes H)\circ(\mu_H\otimes((\lambda_H\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes H)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\\
&=\delta_H\circ\varphi_H^{\mathrm{ad}}\text{(根据（11）)}=(\varphi_H^{\mathrm{ad}}\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\text{（根据 }\varphi_H^{\mathrm{ad}}\text{ 是余代数态射的条件）}\\
&=(\mu_H\otimes H)\circ(\mu_H\otimes((\lambda_H\otimes\varphi_H^{\mathrm{ad}})\circ(\delta_H\otimes H)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\text{（根据}\delta_H\text{ 的余结合性和 }c\text{的自然性）。}
\end{aligned}$$

将前一个等式右复合以 $((\lambda_H \otimes H) \circ \delta_H) \otimes H$，左复合以 $\mu_H \otimes H$，可得

$$\begin{aligned}&(\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\lambda_H \otimes \varphi_H^{\mathrm{ad}}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H))) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)\\ =&(\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\lambda_H \otimes \varphi_H^{\mathrm{ad}}) \circ (\delta_H \otimes H))) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H).\end{aligned} \tag{12}$$

此外，在右侧复合 $c_{H,H}$ 后，再利用 c 的自然性以及 C 的对称性，(12) 等价于

$$\begin{aligned}&(\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\lambda_H \otimes \varphi_H^{\mathrm{ad}}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H) \circ c_{H,H})) \circ (\delta_H \otimes H)\\ =&(\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\lambda_H \otimes \varphi_H^{\mathrm{ad}}) \circ (\delta_H \otimes H) \circ c_{H,H})) \circ (\delta_H \otimes H)\end{aligned} \tag{13}$$

因为 $c_{H,H}$ 是 C 中的一个同构。

因此，若将等式 (13) 的右侧与 $((\lambda_H \otimes H) \circ \delta_H) \otimes H$ 复合，左侧与 $\mu_H \otimes H$ 复合，则可得

$$(\lambda_H \otimes \varphi_H^{\mathrm{ad}}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H) \circ c_{H,H} = (\lambda_H \otimes \varphi_H^{\mathrm{ad}}) \circ (\delta_H \otimes H) \circ c_{H,H},$$

由于 $c_{H,H}$ 和 λ_H 都是同构，这等价于 $(H, \varphi_H^{\mathrm{ad}})$ 的 (10)。

注意，为了证明当 $(H, \varphi_H^{\mathrm{ad}})$ 属于 H 的余交换类时，φ_H^{ad} 是余代数态射，并不需要假设 H 的反 antipode 是同构。不过，这一假设并不过分，因为当 H 是前有限时（见 [12, 推论 1]），或者 Hopf 代数 H 是交换的或余交换的时，该假设都由 (6) 成立。

定义 2.14。设 H 是一个 Hopf 代数，A是 C 中的一个代数。若右 H-余模 (A, ρ_A) 满足 η_A 和 μ_A 都是 H-余线性态射，则称其为右 H-余模代数，也就是说，以下等式

$$\rho_A \circ \eta_A = \eta_A \otimes \eta_H, \tag{14}$$

$$\rho_A \circ \mu_A = (\mu_A \otimes H) \circ \rho_{A\otimes A}, \tag{15}$$

成立，其中 $\rho_{A\otimes A} \coloneqq (A \otimes A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes c_{H,A} \otimes H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A)$。容易证明，方程 (14) 和 (15) 成立当且仅当 ρ_A 是一个代数态射。

定义 2.15。设 H 是一个 Hopf 代数，且 (A, ρ_A) 是右 H-余模代数。我们将左-右 (A, H)-Doi-Hopf 模的范畴定义为这样一个范畴，其对象为三元组 (M, φ_M, ρ_M)，其中 (M, φ_M) 是左 A-模，(M, ρ_M) 是右 H-余模，并且满足以下恒等式:

$$\rho_M \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (A \otimes c_{H,M} \otimes H) \circ (\rho_A \otimes \rho_M).$$

此范畴中的态射是左 A-线性的和右 H-余线性的态射。下文将其记为 ${}_A\mathbf{M}^H$。

如果 H 是一个前有限 Hopf 代数，且（A，φ_A）是 C 中的左 H-模代数，那么 A 它也可通过以下方式成为右 H^*-余模代数:

$$\widehat{\rho}_A \coloneqq (\varphi_A \otimes H^*) \circ (H \otimes c_{H^*,A}) \circ (a_H(K) \otimes A).$$

对偶地，若 $(A,\ \rho_A)$ 是一个右 H^*-余模代数，则 A 是一个左 H-模代数，其作用为

$$\widetilde{\varphi}_A \coloneqq (A \otimes b_H(K)) \circ (\rho_A \otimes H) \circ c_{H,A}.$$

因此，若 $(A,\ \varphi_A)$ 是一个左 H-模代数，则我们有一个函子

$$\mathsf{S}\colon {}_{A\sharp H}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{A}\mathsf{M}^{H^*}$$

在对象上的定义为

$$\mathsf{S}((M,\psi_M)) \coloneqq (M,\varphi_M^*,\rho_M^*),$$

其中 φ_M^*, ρ_M^* 是

$$\varphi_M^* \coloneqq \psi_M \circ (A\otimes \eta_H \otimes M),$$
$$\rho_M^* \coloneqq (\psi_M \otimes H^*)\circ (A\otimes H\otimes c_{H^*,M})\circ(\eta_A\otimes a_H(K)\otimes M),$$

并且在态射上定义为恒等映射。此外，还存在另一个函子

$$\mathsf{R}\colon {}_{A}\mathsf{M}^{H^*} \longrightarrow {}_{A\sharp H}\mathsf{Mod}$$

在对象上的定义为

$$\mathsf{R}((M,\varphi_M,\rho_M)) \coloneqq (M,\psi_M^\sharp \coloneqq (\varphi_M\otimes b_H(K))\circ(A\otimes((\rho_M\otimes H)\circ c_{H,M}))),$$

并且在态射上定义为恒等映射。这些函子互为逆函子，由此得到以下定理:

定理 2.16。 设 H 是 C 中的一个前有限 ***Hopf*** 代数。若 (A,φ_A) 是一个左 H-模代数，则范畴 ${}_{A}\mathsf{M}^{H^*}$ 和 ${}_{A\sharp H}\mathsf{Mod}$ 同构。

前述定理是 Hopf 模范畴中两侧不同的一个幺半版本，它是 Fischman 在其博士论文中证明的结果，其证明可见于[5,命题 1.6]。

现在我们在一般的幺半框架中引入 Hopf 括号的概念。Angiono、Galindo 和 Vendramin [2] 在向量空间的情形下引入了这些对象，将其作为斜括号的量子版本 [10]。

定义 2.17。 设 $(H,\varepsilon_H,\delta_H)$ 是 C 中的一个余代数，并假设 H在 C 中具有两种不同的代数结构：(H,η_H^1,μ_H^1) 和 (H,η_H^2,μ_H^2)。我们称一个 9 元组

$$(H,\eta_H^1,\mu_H^1,\eta_H^2,\mu_H^2,\varepsilon_H,\delta_H,\lambda_H^1,\lambda_H^2)$$

若满足以下条件，则称其为 C 中的 Hopf 胚:

(i) $H_1=(H,\eta_H^1,\mu_H^1,\varepsilon_H,\delta_H,\lambda_H^1)$ 是 C 中的 Hopf 代数。(ii) $H_2=(H,\eta_H^2,\mu_H^2,\varepsilon_H,\delta_H,\lambda_H^2)$ 是 C 中的 Hopf 代数。(iii) 以下涉及乘积 μ_H^1 和 μ_H^2 的恒等式成立:

$$\mu_H^2\circ(H\otimes\mu_H^1)=\mu_H^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_{H_1})\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes H\otimes H), \tag{16}$$

其中

$$\Gamma_{H_1}\coloneqq \mu_H^1\circ(\lambda_H^1\otimes\mu_H^2)\circ(\delta_H\otimes H). \tag{17}$$

沿用 [8], 中引入的记号，我们将 Hopf 胚记为 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)$；若相关的 Hopf 代数不会造成混淆，则仅记为 $\mathbb{H}$。若 Hopf 胚 $\mathbb{H}$满足 $c_{H,H}\circ\delta_H=\delta_H$，则称其为余交换的。

这些结构构成一个范畴，其态射定义如下：给定另一个 Hopf 括号 $\mathbb{B}=(B_1,B_2)$，若态射 $f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{B}$ 满足：$f\colon H_1\to B_1$ 和 $f\colon H_2\to B_2$ 都是 C 中的 Hopf 代数态射，则称其为 Hopf 括号态射。Hopf 括号范畴记作 HBr。余交换 Hopf 胚构成 HBr 的一个全子范畴，记作 cocHBr。

例 2.18 （斜括号）。 由于对称幺半范畴 Set 中的 Hopf 代数就是群，将前述 Hopf 括号的概念应用于 C =Set，便得到斜括号的概念；斜括号由一对群 $(G,\cdot)$ 和 $(G,\circ)$ 组成，并满足方程

$$a\circ(b\cdot c)=(a\circ b)\cdot a^{-1}\cdot(a\circ c),\ \text{for all } a,b,c\in G,$$

在此情形下，这对应于式 (16)。我们将斜括号记作 $(G,\cdot,\circ)$；若只想指其中的第一种群结构，则记为 $(G,\cdot)=G_{\cdot}$，而第二种群结构则记为 $(G,\circ)=G_{\circ}$。若 $G_{\cdot}$ 是阿贝尔群，则斜括号就是 Rump 意义下的括号 [15]。

例 2.19。 设 $\mathbb{K}$ 是一个域。通过线性化，众所周知，若 $(G,\cdot,\circ)$ 是一个斜括号，则 $G_{\cdot}$ 与 $G_{\circ}$、$\mathbb{K}[G_{\cdot}]$ 与 $\mathbb{K}[G_{\circ}]$各自对应的群代数构成 $\mathsf{C}={}_{\mathbb{K}}\mathsf{Vect}$ 中的一个 Hopf 括号，记作 $\mathbb{K}[\mathbb{G}]=(\mathbb{K}[G_{\cdot}],\mathbb{K}[G_{\circ}])$。

例 2.20。 任意 Hopf 代数 $H=(H,\eta_H,\mu_H,\varepsilon_H,\delta_H,\lambda_H)$ 都会在 C 中导出一个平凡 Hopf 括号：$\mathbb{H}_{\mathrm{triv}}=(H,H)$。这是因为，当 Hopf 括号结构中的两个 Hopf 代数相同时，相容条件 (16) 总是成立。

给定一个 Hopf 括号 $\mathbb{H}=(H_1,\ H_2)$，满足 $\eta_H^1=\eta_H^2$ [2, 注 1.3]。因此，从现在起，我们将两个单位都记为 η_H。此外，$(H_1,\ \Gamma_{H_1})$ 是一个左 H_2-模代数 [2, 引理 1.8] ；反过来，这一性质也刻画了 Hopf 括号结构。事实上，给定一对共享同一底层余代数的 Hopf 代数，$H_1=(H,\ \eta_H^1,\ \mu_H^1,\ \varepsilon_H,\ \delta_H,\ \lambda_H^1)$ 和 $H_2=(H,\ \eta_H^2,\ \mu_H,\ \varepsilon_H,\ \delta_H,\ \lambda_H^2)$，那么 $\mathbb{H}=(H_1,\ H_2)\in\mathsf{HBr}\iff\mu_H^1\circ(\Gamma_{H_1}\otimes\Gamma_{H_1})\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes H\otimes H)=\Gamma_{H_1}\circ(H\otimes\mu_H^1)$，如 [9, 定理 1.16] 中所述。此外，由 (17)、δ_H 的余结合性、μ_H^1 的结合律以及 H_1 的 (4)，我们得到 μ_H^2 的以下表达式：

$$\mu_H^2=\mu_H^1\circ(H\otimes\Gamma_{H_1})\circ(\delta_H\otimes H).\tag{18}$$

此外，余交换类也为 Γ_{H_1} 是余代数态射提供了一个充分条件。

定理 2.21. 设 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)\in\mathsf{HBr}$。若 (H_1,Γ_{H_1}) 属于 H_2 的余交换类，则Γ_{H_1} 是余代数态射。

证明。 容易验证 $\varepsilon_H\circ\Gamma_{H_1}=\varepsilon_H\otimes\varepsilon_H$。因此，只需证明 Γ_{H_1} 保持余乘积。事实上，

$$\begin{aligned}
&\delta_H\circ\Gamma_{H_1}\\
&=(\mu_H^1\otimes\mu_H^1)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ((\delta_H\circ\lambda_H^1)\otimes(\delta_H\circ\mu_H^2))\circ(\delta_H\otimes H)\ \text{(by the condition of coalgebra morphism for } \mu_H^1)\\
&=(\mu_H^1\otimes\mu_H^1)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ((c_{H,H}\circ(\lambda_H^1\otimes\lambda_H^1)\circ\delta_H)\otimes((\mu_H^2\otimes\mu_H^2)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\\
&\quad\circ(\delta_H\otimes\delta_H)))\circ(\delta_H\otimes H)\ \text{(by the condition of coalgebra morphism for } \mu_H^2 \text{ and (5))}\\
&=(H\otimes(\mu_H^1\circ(\lambda_H^1\otimes H)))\circ(((\Gamma_{H_1}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,H})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes H))\otimes\mu_H^2)\\
&\quad\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\ \text{(by coassociativity of } \delta_H\text{, naturality of } c \text{ and (17))}\\
&=(H\otimes(\mu_H^1\circ(\lambda_H^1\otimes H)))\circ(((\Gamma_{H_1}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,H})\circ(\delta_H\otimes H))\otimes\mu_H^2)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\\
&\quad\text{(by (9) for } (H_1,\Gamma_{H_1}))\\
&=(\Gamma_{H_1}\otimes\Gamma_{H_1})\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes\delta_H)\ \text{(by coassociativity of } \delta_H \text{ and naturality of } c).
\end{aligned}$$ □

由 c 的自然性、δ_H 的余结合性以及 μ_H^1 的结合律，我们得到

$$\mu_H^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_{H_1})\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes H\otimes H)$$

$$= \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H),$$

其中

$$\Gamma'_{H_1} := \mu_H^1 \circ (\mu_H^2 \otimes \lambda_H^1) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H). \tag{19}$$

因此，(16) 等价于

$$\mu_H^2 \circ (H \otimes \mu_H^1) = \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H). \tag{20}$$

Γ'_{H_1} 满足的性质与 Γ_{H_1}满足的性质非常相似。容易证明，μ_H^2 可用 Γ'_{H_1}表示为以下形式：

$$\mu_H^2 = \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H). \tag{21}$$

此外，(H_1, Γ'_{H_1}) 也是一个左 H_2-模代数 [4, 定理 6.4], ，如下所示，这一性质刻画了 Hopf 括号结构。

定理 2.22。 设 H_1 和 H_2 是 C 中的两个 *Hopf* 代数，它们具有相同的底层余代数，

$$H_i = (H, \eta_H^i, \mu_H^i, \varepsilon_H, \delta_H, \lambda_H^i)$$

对于 $i = 1,2$。考虑态射 Γ'_{H_1} ，其定义如 (19)所示。以下陈述等价：

(i) $\mathbb{H} = (H_1, H_2)$ 是 C 中的 *Hopf* 括号，(ii) $\Gamma'_{H_1} \circ (H \otimes \mu_H^1) = \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \Gamma'_{H_1}) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H)$。

证明。 只需证明 (ii) $\Longrightarrow$(i)。下面证明 (20) 成立。事实上，

$$\begin{aligned}
&\mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H) \\
&= \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes (\mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H))) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H) \\
&\quad \text{(by (21))} \\
&= \mu_H^1 \circ ((\mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \Gamma'_{H_1}) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H)) \otimes H) \circ (H \otimes ((H \otimes c_{H,H}) \\
&\quad \circ (c_{H,H} \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H) \text{ (by associativity of } \mu_H^1\text{, the naturality of } c \text{ and coassociativity of } \delta_H) \\
&= \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes ((\mu_H^1 \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (c_{H,H} \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H \otimes H) \text{ (by (ii))} \\
&= \mu_H^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes \mu_H^1) \text{ (by naturality of } c\text{)} \\
&= \mu_H^2 \circ (H \otimes \mu_H^1) \text{ (by (21))}.
\end{aligned}$$

□

总之，余交换类给出了一个充分条件，使 Γ'_{H_1} 成为余代数态射。

定理 2.23。 设 $\mathbb{H} = (H_1, H_2) \in \mathsf{HBr}$。若 (H_1, Γ'_{H_1}) 属于 H_2 的余交换类，则 Γ'_{H_1} 是余代数态射。

证明。 设 $H = (H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H, \lambda_H)$ 是 C 中的 Hopf 代数。注意，在 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{\mathrm{triv}} = (H, H)$ 的情况下，作用 $\Gamma'_H = \varphi_H^{\mathrm{ad}}$。因此，这里省略这一结果的详细证明，因为接下来的步骤与例 2.13 中的类似。然而，与例 2.13 不同，该条件是充分但非必要的。□

3. 从 Hopf 胚上的模到代数上的模

文献中关于 Hopf 胚上模范畴的最弱概念，是 González Rodríguez 在 [8] 中引入的，旨在证明 Hopf 胚框架下的 Hopf 模基本定理。

定义 3.1. 设 $\mathbb{H} = (H_1, H_2)$ 是 C 中的一个 Hopf 胚。 $\mathbb{H}$ 上的左模是一个三元组 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$，其中 (M, φ_M^1) 是一个左 H_1-模，(M, φ_M^2) 是一个左 H_2-模，并且满足相容条件

$$\varphi_M^2 \circ (H \otimes \varphi_M^1) = \varphi_M^1 \circ (\mu_H^2 \otimes \Gamma_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M) \tag{22}$$

成立，其中 Γ_M 定义为

$$\Gamma_M \coloneqq \varphi_M^1 \circ (\lambda_H^1 \otimes \varphi_M^2) \circ (\delta_H \otimes M). \tag{23}$$

给定左 $\mathbb{H}$-模 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$ 和 $(N, \varphi_N^1, \varphi_N^2)$，一个态射

$$f\colon (M, \varphi_M^1, \varphi_M^2) \to (N, \varphi_N^1, \varphi_N^2)$$

称为左 $\mathbb{H}$-模的态射，如果 $f\colon (M, \varphi_M^1) \to (N, \varphi_N^1)$ 是 H_1-线性的，并且 $f\colon (M, \varphi_M^2) \to (N, \varphi_N^2)$ 是 H_2-线性的。左 $\mathbb{H}$-模构成一个范畴，记作 ${}_{\mathbb{H}}\mathbf{Mod}$。

注 3.2。 注意，由于 c的自然性、 δ_H的余结合性以及 (M, φ_M^1) 的 (2)，我们得到

$$\begin{aligned}&\varphi_M^1 \circ (\mu_H^2 \otimes \Gamma_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M)\\ =&\varphi_M^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \varphi_M^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M),\end{aligned}$$

其中 Γ'_{H_1} 的定义同 (19)。因此，(22) 等价于

$$\varphi_M^2 \circ (H \otimes \varphi_M^1) = \varphi_M^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \varphi_M^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M). \tag{24}$$

例 3.3. 给定 $\mathbb{H} = (H_1, H_2)$ 是 C 中的一个 Hopf 胚，三元组 $(H, \varphi_H^1 = \mu_H^1, \varphi_H^2 = \mu_H^2)$ 是左 $\mathbb{H}$-模的一个例子。在这种情况下，(23) 中定义的 Γ_H 与 (17) 中定义的作用Γ_{H_1} 一致，因此由 (16) 可得 (22)。

例 3.4. 设 $H = (H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H, \lambda_H)$ 是 C 中的一个 Hopf 代数，并考虑由 H 构造的平凡 Hopf 括号 $\mathbb{H}_{\mathrm{triv}} = (H, H)$。若 (M, φ_M) 是左 H-模，则 $(M, \varphi_M, \varphi_M)$ 是左 $\mathbb{H}_{\mathrm{triv}}$-模。在这种情况下， $\Gamma_M = \varepsilon_H \otimes M$。

Hopf 胚上的模依赖于左 H_2-模的两种结构。一方面，给定左 $\mathbb{H}$-模 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$，我们有 (M, φ_M^2) 是左 H_2-模。另一方面，参见 [7, 引理 2.11],，(M, Γ_M) 是左 H_2-模，其中 Γ_M 按照 (23) 定义。此外，按照 (18) 的证明，我们可以得到 φ_M^2 用 Γ_M 和 φ_M^1 表示的表达式：

$$\varphi_M^2 = \varphi_M^1 \circ (H \otimes \Gamma_M) \circ (\delta_H \otimes M). \tag{25}$$

这些 H_2-作用与等式 (25) 一起，刻画了 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$ 成为左 $\mathbb{H}$-模的条件。为了得到这样的条件，我们定义左 $\mathbb{H}$-作用范畴，记为 ${}_{\mathbb{H}}\mathbf{Ac}$，该范畴在 [14] 中引入。 ${}_{\mathbb{H}}\mathbf{Ac}$ 中的对象是三元组 (M, φ_M, ϕ_M)，满足 (M, ϕ_M) 是一个左 H_2-模，而 (M, φ_M) 是一个左 H_1-模，其作用

$$\varphi_M : (H \otimes M, \phi_{H \otimes M}) \to (M, \phi_M)$$

是左 H_2-模的一个态射，其中 $\phi_{H \otimes M} \coloneqq (\Gamma_{H_1} \otimes \phi_M) \circ (H \otimes c_{H,\ H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes M)$，即，

$$\phi_M \circ (H \otimes \varphi_M) = \varphi_M \circ (\Gamma_{H_1} \otimes \phi_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M) \tag{26}$$

$_{\mathbb{H}}\mathsf{Ac}$ 中的态射是左 H_1-模和左 H_2-模的态射。这个范畴与 $_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}$ 同构。事实上，定义函子

$$\mathsf{U} : {}_{\mathbb{H}}\mathsf{Ac} \longrightarrow {}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}$$

如下所示：

$$\mathsf{U}(M, \varphi_M, \phi_M) = (M, \varphi_M^1 = \varphi_M, \varphi_M^2 = \varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes M))$$

在对象上如此定义，在态射上则为恒等映射。

首先，我们将证明 (M, φ_M^2) 是一个左 H_2-模。事实上：

$\varphi_M^2 \circ (H \otimes \varphi_M^2) = \varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes (\varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes M)))$（根据 φ_M^2 的定义）$= \varphi_M \circ (H \otimes (\varphi_M \circ (\Gamma_{H_1} \otimes \phi_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes ((H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes M)))$（根据 (26)）$= \varphi_M \circ ((\mu_H^1 \circ (H \otimes \Gamma_{H_1}) \circ (\delta_H \otimes H)) \otimes (\phi_M \circ (\mu_H^2 \otimes M))) \circ (((H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)) \otimes M)$（根据 δ_H 的余结合性、(M, φ_M) 为左 H_1-模的条件，以及 (M, ϕ_M) 为左 H_2-模的条件）$= \varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (((\mu_H^2 \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)) \otimes M)$（根据 (18)）$= \varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes M) \circ (\mu_H^2 \otimes M)$（根据 μ_H^2 的余代数态射条件）$= \varphi_M^2 \circ (\mu_H^2 \otimes M)$（根据 φ_M^2 的定义）。

由直接计算可得 $\varphi_M^2 \circ (\eta_H \otimes M) = \mathrm{id}_M$，因此 (M, φ_M^2) 是一个左H_2-模。

现在，按 (23) 定义 Γ_M，可得：

$\Gamma_M = \varphi_M^1 \circ (\lambda_H^1 \otimes \varphi_M^2) \circ (\delta_H \otimes M) = \varphi_M \circ (\lambda_H^1 \otimes (\varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes M)$（根据 φ_M^2 的定义）$= \phi_M$（根据 δ_H 的余结合性、(M, φ_M) 满足左 H_1-模的条件以及 (4)）。

因此 $\Gamma_M = \phi_M$，由此等式及 H_2-线性可得 φ_M 满足条件 (22)。事实上：

$\varphi_M^2 \circ (H \otimes \varphi_M^1) = \varphi_M \circ (H \otimes \phi_M) \circ (\delta_H \otimes \varphi_M)$（根据 φ_M 的定义和等式 $\Gamma_M = \phi_M$）$= \varphi_M \circ (H \otimes (\varphi_M \circ (\Gamma_{H_1} \otimes \Gamma_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M)))$（根据 (26)）$= \varphi_M^1 \circ (\mu_H^2 \otimes \Gamma_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M)$（根据 δ_H 的余结合性、(18) 以及 (M, φ_M) 满足 H_1-模的条件）。

因此，$(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$ 是一个左 $\mathbb{H}$-模。最后请注意，若

$$f : (M, \varphi_M, \phi_M) \to (N, \varphi_N, \phi_N)$$

是左 H_1-模和左 H_2-模之间的一个态射，那么 f: $(M, \varphi_M^2) \to (N, \varphi_N^2)$ 也是一个左 H_2-模态射。

现在考虑

$$\mathsf{V} : {}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{H}}\mathsf{Ac}$$

在对象上的定义为 $\mathsf{V}(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2) = (M, \varphi_M = \varphi_M^1, \phi_M = \Gamma_M)$ 的函子。正如我们已经提到的，我们知道 (M, Γ_M) 是一个左 H_2-模。此外，由 [7, 引理 2.11]，等式

$$\Gamma_M \circ (H \otimes \varphi_M^1) = \varphi_M^1 \circ (\Gamma_{H_1} \otimes \Gamma_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M) \tag{27}$$

成立。因此，(M,φ_M^1,Γ_M) 是 ${}_{\mathbb{H}}$Ac 中的一个对象。在态射上，V 定义为恒等映射，因为若 $f\colon (M,\varphi_M^1,\varphi_M^2)\to(N,\varphi_N^1,\varphi_M^2)$ 是 ${}_{\mathbb{H}}$Mod 中的一个态射，那么显然 $f\colon (M,\Gamma_M)\to(N,\Gamma_N)$ 是左 H_2-模的一个态射。最后，经过直接计算可得，这两个函子互为逆函子。因此，给定一个左 H_1-模和一个左 H_2-模 $(M,\varphi_M^1,\varphi_M^2)$，并按 (23) 定义 Γ_M，等式 (27) 刻画了左 $\mathbb{H}$-模。另一方面，给定满足等式 (27) 的三元组 (M,φ_M,Γ_M)，等式 (25) 刻画了左 $\mathbb{H}$-模的 H_2 上的模结构（可以说，它是 (23) 的逆向等式）。

例 3.5. 设 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)$ 是一个 Hopf 括号，且 (M,ϕ_M) 是一个左 H_2-模。三元组 $(M,\varphi_M^1=\varepsilon_H\otimes M,\phi_M)$ 是 ${}_{\mathbb{H}}$Ac 中的一个对象，因此可以将其视为一个左$\mathbb{H}$-模。由此，${}_{H_2}$Mod 是 ${}_{\mathbb{H}}$Mod 的子范畴。

现在设 $(G,\cdot,\circ)$ 是 Rump 意义下的一个括号（即其第一种群结构为阿贝尔群的斜括号）。在 [15] 中定义了括号上的模范畴，并证明它等价于 $(G,\circ)$ 的左模范畴。设 $\mathbb{K}$ 是任意一个域，并考虑例 2.19 中定义的相应 Hopf 括号 $\mathbb{K}[\mathbb{G}]=(\mathbb{K}[G_\cdot],\mathbb{K}[G_\circ])$。在这种情况下，Rump 意义下的 $\mathbb{K}[\mathbb{G}]$ 上的模就是 ${}_{\mathbb{K}[G_\circ]}$Mod；正如我们提到的，它是 ${}_{\mathbb{K}[\mathbb{G}]}$Mod 的子范畴。

此外，正如 [7, 定理 2.12] ${}_{\mathbb{H}}$中所讨论的，当 $\mathbb{H}$ 是余交换 Hopf 括号时，${}_{\mathbb{H}}$Mod 是一个对称幺半范畴。然而，通过再次借助余交换类，可以放宽对$\mathbb{H}$ 余交换性的假设，同时仍可得到该范畴是幺半的。

定义 3.6。 设 $\mathbb{H}$ 是 C 中的 Hopf 括号。我们将 ${}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}^{\mathsf{cc}}$ 记为 ${}_{\mathbb{H}}$Mod 的全子范畴，其对象满足（M，Γ_M）属于 H_2的余交换类，即，对于该子范畴中的对象，我们有

$$(\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes M)=(\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes M). \quad (28)$$

于是，该子范畴记号中的上标 cc 取自“余交换类”一词。

若假设 $\mathbb{H}$ 是余交换的，则（28）成立，因此，${}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}^{\mathsf{cc}}={}_{\mathbb{H}}$Mod。

定理 3.7。 设 $\mathbb{H}=$（H_1、H_2）是 C 中的 *Hopf* 括号。范畴 ${}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}^{\mathsf{cc}}$ 是一个幺半范畴，其单位对象为（K、$\varepsilon_H\otimes K$、$\varepsilon_H\otimes K$），张量函子定义如下：

$$\otimes\colon {}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}^{\mathsf{cc}}\times{}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}^{\mathsf{cc}}\longrightarrow{}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}^{\mathsf{cc}}$$
$$((M,\varphi_M^1,\varphi_M^2),(N,\varphi_N^1,\varphi_N^2))\longmapsto(M\otimes N,\varphi_{M\otimes N}^1,\varphi_{M\otimes N}^2),$$

其中

$$\varphi_{M\otimes N}^i=(\varphi_M^i\otimes\varphi_N^i)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N),\ \text{for all } i=1,2. \quad (29)$$

证明。 Hopf代数理论中的一个经典结果是，Hopf 代数 H 上的模范畴是幺半的，其中，若 (M,φ_M) 和 (N,φ_N) 是 H 上的模，则张量函子由 $(M\otimes N,\varphi_{M\otimes N})$ 给出，其中

$$\varphi_{M\otimes N}\coloneqq(\varphi_M\otimes\varphi_N)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N).$$

因此，$(M\otimes N,\varphi^1{}_{M\otimes N})$ 是一个左 H_1-模，而 $(M\otimes N,\varphi^2{}_{M\otimes N})$ 是一个左 H_2-模。

下面证明 $(M\otimes N,\varphi^{M\otimes N},\varphi^1_{M\otimes N})$ 满足 (22)。为此，首先注意到

$$\Gamma_{M\otimes N}=(\Gamma_M\otimes\Gamma_N)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N). \quad (30)$$

事实上，

$$\Gamma_{M\otimes N}=(\varphi_M^1\otimes\varphi_N^1)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ((\delta_H\circ\lambda_H^1)\otimes((\varphi_M^2\otimes\varphi_N^2)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)$$

$$\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)))\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)\text{ (由 (23) 得出 }(M\otimes N,\varphi^1_{M\otimes N},\varphi^2_{M\otimes N}))=(\varphi_M^1\otimes\varphi_N^1)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ$$
$$(((\lambda_H^1\otimes\lambda_H^1)\circ c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes((\varphi_M^2\otimes\varphi_N^2)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)$$
$$\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)))\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)\text{ (由 }H_1\text{ 的 (5))}=((\varphi_M^1\circ(\lambda_H^1\otimes\varphi_M^2))\otimes(\varphi_N^1\circ(\lambda_H^1\otimes\varphi_N^2)))\circ$$
$$(((H\otimes H\otimes c_{H,\ M})\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes M)$$
$$\circ(c_{H,\ H}\otimes H\otimes M)\circ(H\otimes\delta_H\otimes M))\otimes H\otimes N)\circ(((\delta_H\otimes c_{H,\ M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes N)\text{ (根据 }\delta_H\text{ 的余结合性以及 }c$$
的自然性）$=(M\otimes(\varphi_N^1\circ(\lambda_H^1\otimes\varphi_N^2)))\circ(((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})\circ((c_{H,\ H}\circ\delta_H)\otimes M))\otimes H\otimes N)$

$$\circ(H\otimes c_{H,\ M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)\text{（由 }c\text{的自然性以及 (23) 对（}M,\ \varphi_M^1,\ \varphi_M^2\text{））}=(M\otimes($$
$$\varphi_N^1\circ(\lambda_H^1\otimes\varphi_N^2)))\circ(((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes H\otimes N)$$

$\circ(H\otimes c_{H,\ M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)$（由 (28)）$=(\Gamma_M\otimes\Gamma_N)\circ(H\otimes c_{H,\ M}\otimes N)\circ($ $\delta_H\otimes M\otimes N)$（由 δ_H 的余结合性、 c 的自然性以及 (23) 对 $(N,\ \varphi_N^1,\ \varphi_N^2)$）。然后，$($ $M\otimes N,\ \varphi^1_{M\otimes N},\ \varphi^2_{M\otimes N})$ 的 (22) 可由$\varphi^1_{M\otimes N}\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_{M\otimes N})\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes M\otimes N)\circ($ $\delta_H\otimes H\otimes M\otimes N)=(\varphi_M^1\otimes\varphi_N^1)\circ(H\otimes c_{H,\ M}\otimes N)\circ((\delta_H\circ\mu_H^2)\otimes((\Gamma_M\otimes\Gamma_N)\circ(H\otimes c_{H,}$ $_{M}\otimes N)$

$$\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)))\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes M\otimes N)\circ(\delta_H\otimes H\otimes M\otimes N)\text{ (根据 (29) 和 (30))}=((\varphi_M^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_M))\otimes$$
$$(\varphi_N^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_N)))\circ(H\otimes((H\otimes H\otimes c_{H,\ M}\otimes H\otimes H)\circ(((H\otimes c_{H,\ H})$$
$$\circ(c_{H,\ H}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ H})\circ(\delta_H\otimes H))\otimes((c_{H,\ M}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})\circ(c_{H,\ H}\otimes M)))$$
$$\circ(H\otimes H\otimes c_{H,\ H}\otimes H\otimes M))\otimes N)\circ(((\delta_H\otimes H)\circ\delta_H)\otimes\delta_H\otimes M\otimes N)\text{ (由 }c\text{的自然性、C 的对称性以}$$
及 δ_H的余结合性$)=((\varphi_M^1\circ(\mu_H^2\otimes M))\otimes(\varphi_N^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_N)))\circ(H\otimes((H\otimes((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})$

$$\circ((c_{H,\ H}\circ\delta_H)\otimes M))\otimes H\otimes H)\circ(c_{H,\ H}\otimes((c_{H,\ M}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})\circ(c_{H,\ H}\otimes M)))$$
$$\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes H\otimes M))\otimes N)\circ(((\delta_H\otimes H)\circ\delta_H)\otimes\delta_H\otimes M\otimes N)\text{ (根据 }c\text{的自然性)}=((\varphi_M^1\circ($$
$$\mu_H^2\otimes M))\otimes(\varphi_N^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_N)))\circ(H\otimes((H\otimes((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})$$
$$\circ(\delta_H\otimes M))\otimes H\otimes H)\circ(c_{H,\ H}\otimes((c_{H,\ M}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})\circ(c_{H,\ H}\otimes M)))$$
$$\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes H\otimes M))\otimes N)\circ(((\delta_H\otimes H)\circ\delta_H)\otimes\delta_H\otimes M\otimes N)\text{（由（28））}=((\varphi_M^1\circ$$
$$(\mu_H^2\otimes\Gamma_M)\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes M)\circ(\delta_H\otimes H\otimes M))\otimes(\varphi_N^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_N)$$
$$\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes N)))\circ(H\otimes((H\otimes c_{H,\ M}\otimes H)\circ(c_{H,\ H}\otimes c_{H,\ M})\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes M)$$
$$\circ(\delta_H\otimes H\otimes M))\otimes H\otimes N)\circ(\delta_H\otimes((H\otimes c_{H,\ M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes N)\text{ (根据 }c\text{的自然性以及}$$
δ_H的余结合性$)=((\varphi_M^2\circ(H\otimes\varphi_M^1))\otimes(\varphi_N^1\circ(\mu_H^2\otimes\Gamma_N)\circ(H\otimes c_{H,\ H}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes H\otimes N)))$

$$\circ(H\otimes((H\otimes c_{H,\ M}\otimes H)\circ(c_{H,\ H}\otimes c_{H,\ M}))\otimes N)\circ(\delta_H\otimes\delta_H\otimes M\otimes N)\text{ (根据 }c\text{的自然性以及 }(M,$$
$\varphi_M^1,\ \varphi_M^2)$ 的 (22))$=(\varphi_M^2\otimes(\varphi_N^2\circ(H\otimes\varphi_N^1)))\circ(H\otimes((\varphi_M^1\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ M})\circ(c_{H,\ H}\otimes M))\otimes H\otimes N)$

$\circ(\delta_H\otimes((H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes N)$（由（22）可知，适用于（$N,\varphi_N^1,\varphi_N^2$））
$=\varphi^2_{M\otimes N}\circ(H\otimes\varphi^1_{M\otimes N})$（由 c 的自然性和（29）可知）。总之，只需证明（28）对（$M\otimes N,\varphi^1_{M\otimes N},\varphi^2_{M\otimes N}$）成立。事实上，$\Gamma_{M\otimes N}\circ(H\otimes c_{H,M\otimes N})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes M\otimes N)=$
$(((\Gamma_M\otimes\Gamma_N)\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N))\otimes H)\circ(H\otimes((M\otimes c_{H,N})\circ(c_{H,M}\otimes N)))$

$$\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes M\otimes N)\text{ (根据 (30))}=(M\otimes((\Gamma_N\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,N})\circ(c_{H,H}\otimes N)))\circ(((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes M))\otimes H\otimes N)\circ(((H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes N)\text{ (根据 }c\text{的自然性和 }\delta_H\text{的余结合性)}$$

$=(M\otimes((\Gamma_N\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,N})\circ(c_{H,H}\otimes N)))\circ(((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes H\otimes N)\circ(((H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes M))\otimes N)$ (根据 (28) 对 (M,Γ_M))$=(\Gamma_M\otimes((\Gamma_N\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,N})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes N)))\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)$ (根据 δ_H 的余结合性和 c的自然性)$=(\Gamma_M\otimes((\Gamma_N\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,N})\circ(\delta_H\otimes N)))\circ(H\otimes c_{H,M}\otimes N)\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)$ (根据 (28) 对 (N,Γ_N))$=\Gamma_{M\otimes N}\circ(H\otimes c_{H,M\otimes N})\circ(\delta_H\otimes M\otimes N)$ (根据 c的自然性和 δ_H的余结合性)。

□

引入 Hopf 括号上的模范畴后，我们现在探讨 Hopf 括号上的模能否视为某个代数上的模，并给出肯定答案。以下定理是建立 Hopf 括号上的模与代数上的模之间联系的关键工具。

定理 3.8. 设 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)$ 是 C 中的 *Hopf* 括号。若 (M,φ_M^i) 是一个左 H_i-模，对于$i=1,2$，则以下命题等价:

(i) $(M,\varphi_M^1,\varphi_M^2)$ 是一个左 $\mathbb{H}$-模，(ii) (M,φ_M) 是一个左 $H_1\sharp H_2$-模，其中

$$\varphi_M:=\varphi_M^1\circ(H\otimes\varphi_M^2).$$

证明。 首先注意，若 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)$ 是 C 中的 Hopf 括号，则 (H_1,Γ'_{H_1}) 是一个左 H_2-模代数。因此,

$$H_1\sharp H_2=(H\otimes H,\eta_{H_1\sharp H_2}:=\eta_H\otimes\eta_H,\mu_{H_1\sharp H_2}:=(\mu_H^1\otimes\mu_H^2)\circ(H\otimes\Psi_{H_1}^{H_2}\otimes H))$$

是 C 中的一个代数，具有 $\Psi_{H_1}^{H_2}=(\Gamma'_{H_1}\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,\ H})\circ(\delta_H\otimes H)$。

(i) $\Longrightarrow$ (ii): $(M,\ \varphi_M)$ 的条件 (1) 是显然的，而 (2) 可如下得到:

$$\begin{aligned}
&\varphi_M\circ(H\otimes\varphi_M)\\
&=\varphi_M^1\circ(H\otimes(\varphi_M^2\circ(H\otimes\varphi_M^1)\circ(H\otimes H\otimes\varphi_M^2)))\\
&=\varphi_M^1\circ(H\otimes(\varphi_M^1\circ(\Gamma'_{H_1}\otimes(\varphi_M^2\circ(H\otimes\varphi_M^2)))\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H\otimes M)\circ(\delta_H\otimes H\otimes H\otimes M)))\\
&\quad\text{(by (24))}\\
&=\varphi_M^1\circ(H\otimes\varphi_M^2)\circ(((\mu_H^1\otimes\mu_H^2)\circ(H\otimes\Psi_{H_1}^{H_2}\otimes H))\otimes M)\ \text{(by (2) for } (M,\varphi_M^i)\text{ for all } i=1,2)\\
&=\varphi_M\circ(\mu_{H_1\sharp H_2}\otimes M).
\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 只需证明 (24) 成立。由于 $(M,\ \varphi_M)$ 是一个左 $H_1\sharp H_2$-模，因此

$$\varphi_M\circ(H\otimes H\otimes\varphi_M)=\varphi_M\circ(\mu_{H_1\sharp H_2}\otimes M).\tag{31}$$

因此，将 (31) 右合成 $\eta_H\otimes H\otimes H\otimes\eta_H\otimes M$，再利用 $(M,\ \varphi_M^i)$ 的单位性质和条件 (1)，即可对所有 $i=1,\ 2$ 得到 (24)。□

由前述定理可得到以下函子。

引理 3.9。 设 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)$ 是 C 中的一个 *Hopf* 括号。存在一个函子

$$\mathsf{F}\colon{}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}\longrightarrow{}_{H_1\sharp H_2}\mathsf{Mod}$$

在对象上定义为

$$\mathsf{F}((M,\varphi_M^1,\varphi_M^2)):=(M,\varphi_M),$$

其中 $\varphi_M:=\varphi_M^1\circ(H\otimes\varphi_M^2)$，而在态射上的作用为恒等映射。

证明。 前一个定理表明，F 在对象上定义良好。下面证明它在态射上也定义良好。若 $f\colon (M, \varphi_M^1, \varphi_M^2) \to (N, \varphi_N^1, \varphi_N^2)$ 是左 $\mathbb{H}$-模的一个态射，则

$$f \circ \varphi_M = f \circ \varphi_M^1 \circ (H \otimes \varphi_M^2) = \varphi_N^1 \circ (H \otimes (f \circ \varphi_M^2))$$

（对 f，由 (3) 得：$(M, \varphi_M^1) \to (N, \varphi_N^1)$）$= \varphi_N \circ (H \otimes H \otimes f)$（对 f，由 (3) 得：$(M, \varphi_M^2) \to (N, \varphi_N^2)$）。

□

引理 3.10。 设 $\mathbb{H} = (H_1, H_2)$ 是 C 中的一个 *Hopf* 括号。存在一个函子

$$\mathsf{G}\colon {}_{H_1\sharp H_2}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}$$

其在对象上的作用为

$$\mathsf{G}((M, \varphi_M)) := (M, \varphi_M^1, \varphi_M^2),$$

其中 $\varphi_M^1 := \varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes M)$ 且 $\varphi_M^2 := \varphi_M \circ (\eta_H \otimes H \otimes M)$，在态射上的作用为恒等映射。

证明。 在证明过程中，我们将反复使用以下恒等式：

$$\Psi_{H_1}^{H_2} \circ (\eta_H \otimes H) = H \otimes \eta_H, \tag{32}$$

其理由如下：

$$\Psi_{H_1}^{H_2} \circ (\eta_H \otimes H) = (\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H) = ((\Gamma'_{H_1} \circ (\eta_H \otimes H)) \otimes H) \circ c_{H,H} \circ (\eta_H \otimes H)$$

（由 η_H 是余代数态射这一条件）$= H \otimes \eta_H$（由 (H_1, Γ'_{H_1}) 的 (1) 和 c 的自然性得出）。

首先证明 (M, φ_M^1) 是一个左 H_1-模。一方面，条件 (1) 由 (M, φ_M) 的 (1) 可直接得出；另一方面，条件 (2) 则是以下结果的推论：

$$\varphi_M^1 \circ (H \otimes \varphi_M^1) = \varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes (\varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes M))) = \varphi_M \circ (((\mu_H^1 \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes (\Psi_{H_1}^{H_2} \circ (\eta_H \otimes H)) \otimes \eta_H)) \otimes M)$$

（由 (M, φ_M) 的 (2) 得出）$= \varphi_M \circ (\mu_H^1 \otimes \eta_H \otimes M)$（由 (32) 以及 H_2 的单位性质得出）$= \varphi_M^1 \circ (\mu_H^1 \otimes M)$。

由类似的论证可知，(M, φ_M^2) 也是一个左 H_2-模。因此，要得出 G 在对象上定义良好的结论，只需证明 (24) 对 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$ 成立。展开 (24) 的右侧，得到

$$\begin{aligned}
&\varphi_M^1 \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes \varphi_M^2) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M) \\
&= \varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes M) \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes (\varphi_M \circ (\eta_H \otimes H \otimes M))) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes H \otimes M) \\
&= \varphi_M \circ (((\mu_H^1 \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes (\Psi_{H_1}^{H_2} \circ (\eta_H \otimes \eta_H)) \otimes H) \circ (\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H)) \otimes M) \\
&\quad \text{(by (2) for } (M, \varphi_M)) \\
&= \varphi_M \circ (((\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H)) \otimes M) \\
&\quad \text{(by (32) and the unit property for } H_1 \text{ and } H_2)
\end{aligned}$$

而由 (24) 的左边可得

$$\begin{aligned}
&\varphi_M^2 \circ (H \otimes \varphi_M^1) \\
&= \varphi_M \circ (\eta_H \otimes H \otimes (\varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes M))) \\
&= \varphi_M \circ (((\mu^1{}_H \otimes \mu_H^2) \circ (\eta_H \otimes \Psi_{H_1}^{H_2} \otimes \eta_H)) \otimes M)
\end{aligned}$$

（根据 (2)，针对 (M, φ_M)）

$= \varphi_M \circ (\Psi_{H_1}^{H_2} \otimes M)$（根据 H_1 和 H_2的单位性质）
$= \varphi_M \circ (((\Gamma'_{H_1} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,\ H}) \circ (\delta_H \otimes H)) \otimes M)$。
也就是说，计算 (24) 两边得到相同的结果，因此 (24) 对 $(M,\ \varphi_M^1,\ \varphi_M^2)$ 成立。

关于态射，G 定义良好，因为如果 $f\colon (M,\ \varphi_M) \to (N,\ \varphi_N)$ 是 ${}_{H_1\sharp H_2}\mathsf{Mod}$ 中的态射，那么 $f\colon (M,\ \varphi_M^1) \to (N,\ \varphi_N^1)$ 是 H_1-线性的。事实上，
$f \circ \varphi_M^1 = f \circ \varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes M) = \varphi_N \circ (H \otimes \eta_H \otimes f)$（由 (3)，对于 $f\colon (M,\ \varphi_M) \to (N,\ \varphi_N)$）
$= \varphi_N^1 \circ (H \otimes f)$。

可以用类似的论证证明，$f\colon (M,\ \varphi_M^2) \to (N,\ \varphi_N^2)$ 也是 H_2-线性的。 □

前几个引理中构造的函子给出了所需的范畴同构。

定理 3.11. 设 $\mathbb{H}$是 C 中的一个 *Hopf* 括号。范畴 ${}_{\mathbb{H}}$模 与 ${}_{H_1\sharp H_2}$模 同构。

证明. 首先，容易得到 $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} = \mathrm{id}_{{}_{\mathbb{H}}\text{模}}$。事实上，若 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2) \in {}_{\mathbb{H}}$模，则

$$(\mathsf{G} \circ \mathsf{F})((M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)) = \mathsf{G}((M, \varphi_M^1 \circ (H \otimes \varphi_M^2))) = (M, \varphi_M^1, \varphi_M^2),$$

其中，最后一个等式由 (1) 直接得出，分别取 (M, φ_M^1) 和 (M, φ_M^2)。
反过来，若 $(M, \varphi_M) \in {}_{H_1\sharp H_2}$模，则

$$\begin{aligned}(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})((M, \varphi_M)) &= \mathsf{F}((M, \varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes M), \varphi_M \circ (\eta_H \otimes H \otimes M))) \\ &= (M, \varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes (\varphi_M \circ (\eta_H \otimes H \otimes M)))),\end{aligned}$$

and

$\varphi_M \circ (H \otimes \eta_H \otimes (\varphi_M \circ (\eta_H \otimes H \otimes M)))$
$= \varphi_M \circ (((\mu_H^1 \otimes \mu_H^2) \circ (H \otimes (\Psi_{H_1}^{H_2} \circ (\eta_H \otimes \eta_H)) \otimes H)) \otimes M)$ (by (2) for (M, φ_M))
$= \varphi_M$ (by (32) and the unit property for H_1 and H_2).
因此，$\mathsf{F} \circ \mathsf{G} = \mathrm{id}_{H_1\sharp H_2}$，由此完成证明。 □

推论 3.12. 设 $\mathbb{H}$ 是C中的一个赋 *profinite* 拓扑的 *Hopf* 括号。范畴 ${}_{\mathbb{H}}\mathsf{Mod}$、${}_{H_1\sharp H_2}\mathsf{Mod}$ 和H_1 $\mathsf{M}^{H_2^*}$ 同构。

证明. 证明可由前一个定理和定理 2.16 得出。 □

因此，作为前一个推论的结果，赋 profinite 拓扑的 Hopf 括号上的模 $\mathbb{H}$可以视为 Doi-Hopf 模，更具体地说，是左-右 (H_1, H_2^*)-Doi-Hopf 模。
另一方面，注意到，正如例 2.12 中所指出的，如果 (H_1, Γ'_{H_1}) 属于 H_2的余交换类，那么 $H_1\sharp H_2$ 是 C 中的 Hopf 代数。因此，在此条件下，$\mathbb{H}$ 上的模可与 Hopf 代数 $H_1\sharp H_2$上的模等同。

例 3.13. 在例 2.18 中，我们已经看到，若 C =Set，则任何 Hopf 括号都是斜括号。因此，作为定理 3.11 在 C =Set 情形下的特例，可得如下结果：若 $(G, \cdot, \circ)$ 是一个斜括号，则 $(G, \cdot, \circ)$ 上的模范畴与半直积群 $G_\cdot \ltimes G_\circ$ 上的模范畴同构，

$${}_{(G,\cdot,\circ)}\mathsf{Mod} \cong {}_{G_\cdot \ltimes G_\circ}\mathsf{Mod},$$

其中，$_{(G,\cdot,\circ)}$Mod 中的一个对象是三元组 $(M,\triangleright,\blacktriangleright)$，满足 $(M,\triangleright)$ 是群$G.$ 上的一个模，且 $(M,\blacktriangleright)$ 是群 $G_\circ$ 上的一个模，并满足以下恒等式：

$$g\blacktriangleright(h\triangleright m)=((g\circ h)\cdot g^{-1})\triangleright(g\blacktriangleright m),\ \text{for all } g,h\in G \text{ and } m\in M.$$

正如例 2.19 中所观察到的，若 $(G,\cdot,\circ)$ 是一个斜括号，则 $\mathbb{K}[\mathbb{G}]=(\mathbb{K}[G.],\mathbb{K}[G_\circ])$ 在 $_{\mathbb{K}}$Vect 中构成一个 Hopf 括号。因此，再由定理 3.11 可知，$\mathbb{K}[\mathbb{G}]$上的模范畴与 Hopf 代数 $\mathbb{K}[G.]\sharp\mathbb{K}[G_\circ]$上的模范畴同构。正如 [13, 例 3.14] 中所指出的（另见 [16]），$\mathbb{K}[G.]\sharp\mathbb{K}[G_\circ]=\mathbb{K}[G.\ltimes G_\circ]$。因此，我们得到以下一系列范畴同构：

$$_{\mathbb{K}[\mathbb{G}]}\mathsf{Mod}\cong{}_{\mathbb{K}[G.]\sharp\mathbb{K}[G_\circ]}\mathsf{Mod}={}_{\mathbb{K}[G.\ltimes G_\circ]}\mathsf{Mod}.$$

这一系列同构扩展了备注 2.2 和 3.2], ; 在这些备注中，作者只构造了一个从 $_{\mathbb{K}[\mathbb{G}}$Mod 到 $_{\mathbb{K}[G.\ltimes G_\circ]}$Mod 的函子，却没有找到等价关系。

现在，根据推论 3.12，若我们假设 G 是一个有限群，那么还可得到

$$_{\mathbb{K}[\mathbb{G}]}\mathsf{Mod}\cong{}_{\mathbb{K}[G.\ltimes G_\circ]}\mathsf{Mod}\cong{}_{\mathbb{K}[G.]}\mathsf{M}^{\mathbb{K}[G_\circ]^*},$$

将上述链条再延伸一步。

4. 关于 Zhu 意义下 Hopf 胚上的模这一概念

Zhu 在 [18, 定义 3.1] 中给出了 Hopf 胚上左模的另一种定义，与上一节中的定义不同。为避免与第 3 节讨论的概念混淆，今后我们将这些结构称为 Z-模，这一名称源于它们是 Zhu 意义下的模。定义如下：

定义 4.1. 设 $\mathbb{H}=(H_1,H_2)$ 是 C 中的 Hopf 胚。$\mathbb{H}$ 上的左 Z-模是一个三元组 $(M,\varphi^1_M,\varphi^2_M)$，其中 (M,φ^1_M) 是一个左 H_1-模，(M,φ^2_M) 是一个左 H_2-模，并且等式

$$\begin{aligned}&(\varphi^2_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes\varphi^1_M)\\=&(\varphi^1_M\otimes H)\circ(\mu^2_H\otimes((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes M)))\\&\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes M)\circ(\delta_H\otimes H\otimes M)\end{aligned}\tag{33}$$

成立。

左 Z-模之间关于 $\mathbb{H}$ 的态射定义与定义 3.1 中的情形相同，我们将相应的范畴记为 $_{\mathbb{H}}$Mod$^{\mathsf{Z}}$。

正如 [18, 引理 3.2], 中所证明的，给定 C 中的一个 Hopf 括号 $\mathbb{H}=(H_1,\ H_2)$，若 $(M,\ \varphi^1_M)$ 是一个左 H_1-模，且 $(M,\ \varphi^2_M)$ 是一个左 H_2-模，则等式 (33) 等价于等式 (22) 以及

$$\begin{aligned}&(\varphi^2_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ(\delta_H\otimes M)\\=&(\varphi^1_M\otimes H)\circ(H\otimes((\Gamma_M\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,M})\circ((c_{H,H}\circ\delta_H)\otimes M)))\circ(\delta_H\otimes M).\end{aligned}\tag{34}$$

因此，$_{\mathbb{H}}$Mod$^{\mathsf{Z}}$ 是 $_{\mathbb{H}}$Mod的全子范畴。一般而言，这两个范畴并不相同，因为（$H,\ \mu^1_H,\ \mu^2_H$）是 $\mathbb{H}$上的一个模的例子（见例 3.3），但它不符合定义 4.1 的含义，因为三元组（$H,\ \mu^1_H,\ \mu^2_H$）不满足条件（34）。然而，在 [18, 注 3.3], 中，Zhu 指出，在余交换条件下，等式（34）是显然成立的，因此这意味着这两种概念是等价的。不过，并

没有必要如此严格。下面的结果给出了 $_{\mathbb{H}}$Mod中的对象满足条件（34）的条件，因此也说明它是范畴 $_{\mathbb{H}}$Mod$^{\mathsf{Z}}$中的一个对象。

定理 4.2. 设 $\mathbb{H}$ 是 C 中的一个 *Hopf* 括号。给定范畴 $_{\mathbb{H}}$模中的一个对象 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$，则 $(M, \varphi_M^1, \varphi_M^2)$ 是 $_{\mathbb{H}}$模$^{\mathsf{Z}}$ 中的一个对象，当且仅当 (M, Γ_M) 属于 H_2 的余交换类。

证明。 设 (28) 对 (M, Γ_M) 成立。于是得到：

$(\varphi_M^1 \otimes H) \circ (H \otimes ((\Gamma_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes M) = (\varphi_M^1 \otimes H) \circ (H \otimes ((\Gamma_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes M)$（由 (28) 对 (M, Γ_M) 成立）$= ((\varphi_M^1 \circ (H \otimes \Gamma_M) \circ (\delta_H \otimes M)) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M)$（由 δ_H 的余结合性）$= (\varphi_M^2 \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M)$（由 (25)），

也就是说，(34) 成立。

反过来，若 (34) 成立，则可得

$(\Gamma_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M) = (\varphi_M^1 \otimes H) \circ (\lambda_H^1 \otimes ((\varphi_M^2 \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes M)$（由 δ_H 的余结合性）$= (\varphi_M^1 \otimes H) \circ (\lambda_H^1 \otimes ((\varphi_M^1 \otimes H) \circ (H \otimes ((\Gamma_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes M)))$

$\circ (\delta_H \otimes M)$（由 (34) 得）。$= (\varphi_M^1 \otimes H) \circ ((\lambda_H^1 * \mathrm{id}_H) \otimes ((\Gamma_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes M))) \circ (\delta_H \otimes M)$（由 δ_H 的余结合性以及（M, φ_M^1）的 (2) 得）$= (\Gamma_M \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes M)$（由 H_1 的 (4)、余单位性质以及（M, φ_M^1）的 (1) 得），

也就是说，$(M,\ \Gamma_M)$ 属于 H_2 的余交换类。 □

因此，Zhu 意义下的模无非是满足 Γ_M 属于余交换类的模，这为范畴 $_{\mathbb{H}}$Mod$^{\mathsf{Z}}$ 提供了比条件 (33) 和 (34) 所给出的刻画简单得多的描述。因此，作为前一定理的直接推论，我们得到以下推论：

推论 4.3. 设 $\mathbb{H}$ 是 C 中的 *Hopf* 括号。则，$_{\mathbb{H}}$模$^{\mathsf{Z}} = {}_{\mathbb{H}}$模$^{\mathsf{cc}}$。

推论 4.4. 设 $\mathbb{H}$ 是 C 中的 *Hopf* 括号。当且仅当(H_1, Γ_{H_1}) 属于 H_2 的余交换类时，三元组 (H, μ_H^1, μ_H^2) 才是 $_{\mathbb{H}}$模$^{\mathsf{Z}}$ 中的一个对象。

注 4.5. 先前的结果此前已在 [7, 注 2.9]中得到。

推论 4.6. 设 $\mathbb{H}$ 是一个余交换 *Hopf* 括号。则 $_{\mathbb{H}}$模$^{\mathsf{Z}} = {}_{\mathbb{H}}$模。

注 4.7. 前一个推论的内容对应于 [8,注 2.1]中所作的观察。

经费资助

作者获得 Ministerio de Ciencia e Innovación. Agencia Estatal de Investigación（西班牙）资助，项目编号为 PID2020-115155GB-I00 和 PID2024-15502NB-I00（包含欧盟欧洲 FEDER 资助）。

此外，B. Ramos Pérez 获得 Xunta de Galicia 通过竞争性参考研究组（GRC）项目（编号 ED431C 2023/31）以及奖学金资助（编号 ED481A-2023-023）的资助。

参考文献

[1] J.N. Alonso Álvarez、J.M. Fernández Vilaboa 和 R. González Rodríguez, 《关于 Hopf 代数的（余）交换性类及编织范畴中的交叉积》, Comm. Algebra 29(12) (2001) 5857–5878. [2] I. Angiono、C. Galindo 和 L. Vendramin, 《Hopf 胚与 Yang-Baxter 算子》, Proc. Am. Math. Soc. 145(5) (2017) 1981–1995. [3] R.J. Baxter, 《八顶点格点模型的配分函数》, Ann. Phys. 70(1)(1972) 193–228. [4] T. Brzeziński, 《桁架：介于括号与环之间》, Trans. Amer. Math. Soc. 372(6) (2019) 4149–4176. [5] M. Cohen、D. Fischman 和 S. Montgomery, 《Hopf-Galois 扩张、砸积与 Morita 等价》, J. Algebra 133 (1990) 351–372. [6] V.G. Drinfeld, 《量子群理论中的一些未解问题》, 载于《量子群》（列宁格勒，1990）, 第 1–8 页，Lecture Notes in Math., 1510，Springer，柏林。[7] J.M. Fernández Vilaboa、R. González Rodríguez、B. Ramos Pérez 和 A.B. Rodríguez Raposo, 《Hopf 背的投影》, Comm. Algebra 53(7) (2025) 3008–3045. [8] R. González Rodríguez, 《Hopf 背的 Hopf 模基本定理》, Linear Multilinear Algebra 70(20) (2022) 5146–5156. [9] R. González Rodríguez 和 B. Ramos Pérez, 《关于 Hopf 胚与交叉积》, São Paulo J. Math. Sci. (2026)，即将出版。[10] L. Guarnieri 和 L. Vendramin, 《斜括号与杨-巴克斯特方程》, Math. Comput. 86(307) (2017) 2519–2534. [11] Y. Kozakai 和 C. Tsang, 《斜括号的表示论》, Int. J. Group Theory 14(3) (2025) 149-164.[12] M.P. López López 和 E. Villanueva Novoa, 《有限 Hopf（余）拟群的反 antipode 与（余）不变量》, Appl. Categor. Struct. 21 (2013) 237–247. [13] S. Majid, 《代数学家的物理学：通过双叉积构造研究非交换且非余交换的 Hopf 代数》, J. Algebra 130 (1990) 17–64. [14] B. Ramos Pérez, 《Hopf 胚、相关结构及其关联范畴》（博士论文）。圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，圣地亚哥-德孔波斯特拉, （2025）。[15] W. Rump, 《括号、根环与量子杨-巴克斯特方程》, J. Algebra 307(1) (2007) 153–170.[16] M. Takeuchi, 《群的匹配对与 Hopf 代数的双砸积》, Comm. Algebra 9(8) (1981) 841–882.[17] C.N. Yang, 《一维排斥性 δ 函数相互作用多体问题的一些精确结果》, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315. [18] H. Zhu, 《由 Hopf 胚构造编织张量范畴》, Linear Multilinear Algebra 70(16) (2022) 3171–3188.