arXiv:2603.22947v1 [math.AP] 24 Mar 2026

相对论维里算子

Lucrezia Cossetti[1],Luca Fanelli[1,2] 和 Fabio Pizzichillo[3,2]

[1]*Ikerbasque & Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, UPV/EHU,Aptdo. 644, 48080, Bilbao, Spain; lucrezia.cossetti@ehu.eus; luca.fanelli@ehu.es*[2] *BCAM-Basque Center for Applied Mathematics, Mazarredo, 14 E48009 Bilbao, Spain*[3] *Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil y Naval, Universidad Politécnica deMadrid, E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, calle del Profesor Arangueren 3, 28040, Madrid, Spain;fabio.pizzichillo@upm.es*

2026年3月24日

摘要

研究狄拉克算子时，众所周知， *Zitterbewegung* 这一现象会导致方差缺乏凸性，从而给分析色散性质带来困难。尤其是在狄拉克框架下，标准维里方法更难实施。本文提出一种基于能量中心算子的新方法，由此得到一族相对论维里恒等式。作为应用，我们建立了扰动狄拉克算子的谱稳定性结果，并证明了相关演化方程的局部平滑估计。

1 引言

在量子力学中，哈密顿算子 H 所描述的物理系统的演化由含时薛定谔方程支配

$$i\partial_t\psi(x,t) = H\psi(x,t), \tag{1.1}$$

该方程描述量子态（或波函数） ψ.的演化
复值波函数 $\psi(x,\ t)\ \in \mathbb{C}$ 编码了关于粒子在位置 x 和时间 t 处状态的全部概率信息：密度 $|\psi(x,\ t)|^2$ 给出了在时间 t，于点 x 探测到该粒子的概率，前提是波函数已归一化。

在最简单的情形中，单个粒子在存在势 $V(x)$的区域内运动，此时描述系统总能量的哈密顿算子H，具有如下形式

$$H = H_0 + V(x) := \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1.2}$$

其中， $p = -i\nabla$ 表示动量算子， m 是粒子的质量。在量子力学的海森堡绘景中，人们关注与系统相关的可观测量（位置、动量、能量、自旋、角动量等）及其期望值的演化，而非状态 ψ 本身的演化。不显含时间的可观测量 A 的期望值的时间导数为

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi = \langle i[H,A]\rangle_\psi, \tag{1.3}$$

2020 Mathematics Subject Classification:81Q10, 81Q15, 35Q41.Keywords. 狄拉克算子、相对论维里恒等式、点谱缺失、局部平滑估计

其中，我们定义 $\langle A\rangle_\psi := \langle \psi,\ A\psi\rangle$（注意，我们的约定是内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 对第一个分量是线性的），并且按照惯例，$[H,A]=HA-AH$ 表示 H 与 A. 的交换子。方程（1.3）表明交换子在量子理论中物理量的时间演化中发挥着核心作用：若$[H,A]=0$，则可观测量 A 守恒；否则，其时间演化由交换子决定。

一个基本例子是位置可观测量，对应于（1.3）中取 $A=x_j$ in 的情形，$j=1,\dots,d$。我们有

$$\dot{x_j}=i[H,x_j]=\frac{p_j}{m},\qquad \dot{p_j}=i[H,p_j]=-\partial_j V(x),$$

应读作 a　s 个期望值的恒等式（参见（1.3））。由此得到埃伦费斯特定理　　m

$$m\ddot{x}=-\nabla V(x),$$

这是经典力学中牛顿定律的量子类比。为简便起见，从现在起我们令
$m=\frac{1}{2}$，因此（1.2）简化为　　–

$$H=H_0+V(x),\qquad H_0=-\Delta.$$

在薛定谔动力学的描述中，位置方差也起着核心作用：考虑 $A=|x|^2$，记 $I(t):=\langle|x|^2\rangle_\psi$. 引入膨胀生成元算子

$$G:=\frac{1}{2}\{p,x\}=\frac{p\cdot x+x\cdot p}{2}=\frac{i}{4}[H_0,|x|^2]=\frac{i}{4}[H,|x|^2],\tag{1.4}$$

可得维里恒等式

$$\dot{I}(t)=4\langle G\rangle_\psi,\qquad \ddot{I}(t)=4\langle i[H,G]\rangle_\psi=-\langle[H,[H,|x|^2]]\rangle_\psi=8\langle H_0\rangle_\psi-4\langle x\cdot\nabla V(x)\rangle_\psi.\tag{1.5}$$

特别地，若 $x\cdot\nabla V\le 0$，则 $I(t)$ 是凸函数，这反映了薛定谔演化的色散特性。对于定态 $H\psi=E\psi$，也就是说，对于时间依赖性由乘以相位因子给出的状态，即 $e^{itE}\psi$，方差随时间保持不变，因此恒等式（1.5）可化简为著名的维里定理

$$2\langle H_0\rangle_\psi=\langle x\cdot\nabla V(x)\rangle_\psi,\tag{1.6}$$

它表达了总能量中动能与势能贡献之间的平衡（参见近期综述 [10]）。对于齐次势 $V(\lambda x)=\lambda^k V(x)$，它还可进一步特化为 $2\langle H_0\rangle_\psi=k\langle V\rangle_\psi$.

这些维里尔恒等式已被证明是偏微分方程分析中的基础工具。它们在定态非线性模型中导出波赫扎耶夫型约束 [24]，，有助于建立爆破解据，如 Glassey 和 Zakharov 对聚焦型非线性薛定谔方程所示 [20,34]；还可提供莫拉韦茨型时空估计 [27] 以及局部平滑估计 [4,8,28,30,32]。由于其重要影响远不止上述结果，如今维里尔恒等式已被视为理解线性与非线性动力学不可或缺的工具。

考虑相对论效应时，薛定谔哈密顿量已不足以对系统作出逼真的描述；事实上，狄拉克哈密顿量才是合适的模型。在空间维数 $d\ge 1$，下，该算子定义如下：

$$H_D=\alpha\cdot p+m\beta,\qquad p=-i\nabla,\qquad x\in\mathbb{R}^d,\tag{1.7}$$

其中 $m\ge 0$ 是　质量参数，而 $\alpha=(\alpha_1,\ .....,\ \alpha_d)$ 和 β 是作用于 $\mathbb{C}^N$ 上的厄米矩阵，
其中 $N=2^{\lfloor (d+1)/2\rfloor}$ 满足
克利福德代数关系

$$\{\alpha_j,\alpha_k\}=2\delta_{jk}I,\qquad \{\alpha_j,\beta\}=0,\qquad \beta^2=I.\tag{1.8}$$

整数 N 与克利福德代数 $\mathrm{Cl}_{1,d}(\mathbb{R})$ 的不可约复表示的维数相同（例如 $N=2$ 当 $d=1$,2 时；$N=4$ 当 $d=3$,4 时；$N=8$ 当 $d=5,6$ 时，等等）。关于此类矩阵的存在性，请参见 [18]。

协议　地，波函数 ψ: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^N$ 的演化由狄拉克方程支配

$$i\partial_t\psi = H_D\psi. \tag{1.9}$$

波函数 $\psi(x,\ t)$ 是一个 N 分量的旋量，这反映了相对论理论中固有的内部自旋和粒子-反粒子性质。

相对论动力学呈现出显著的新特征。特别是，可观测位置的行为并不符合经典规律：事实上，在式 (1.3) 中取 $A = x_j$，令 $j = 1,\ \ldots,\ d$，并令 ψ 为式 (1.9) 的一个解，我们得到

$$\dot{x_j} = i[H_D, x_j] = \alpha_j, \qquad \dot{\alpha_j} = i[H_D,\alpha] = 2i(p_j - H_D\alpha_j).$$

这个恒等式表明，速度算符并非像经典相对论运动学中那样由动量 p 给出，而是由矩阵值算符 α 给出。此外，由于速度算符与哈密顿算子 H_D 不对易，加速度不为零。还可以进一步看到

$$\alpha(t) = H_D^{-1}p + \left(\alpha - H_D^{-1}p\right)e^{-2iH_Dt}.$$

因此，速度会围绕平均值 $H_D^{-1}p \sim \frac{p}{E_p}$ （即经典速度算符）以频率 $2E_p$ 快速振荡，其中 $E_p := \sqrt{|p|^2+m^2}$，从而产生颤动（颤抖运动）现象。这一现象被认为源于狄拉克旋量中正能量和负能量分量之间的干涉（更多详情见 [31, 第1章。6]）。

考察位置算子的演化，可以看到

$$x(t) = x(0) + pH_D^{-1}t + \frac{i}{2}H_D^{-1}\left(\alpha(0) - pH_D^{-1}\right)e^{-2iH_Dt}. \tag{1.10}$$

由此可知，方差 $I(t) := \langle|x|^2\rangle_\psi$ 不满足像 (1.5) 中那样的简单凸性规律。不过，对于 $H = H_D + V$的定态本征态，即 对于满足 $H\psi = E\psi$的状态，仍然可以推导出一个维里恒等式。事实上，利用对于任意可观测量 A 都有算子关系 $\langle\psi,[H,A]\psi\rangle = 0$再取 $A = G$，便可得到

$$\langle\alpha\cdot p\rangle_\psi = \langle x\cdot\nabla V\rangle_\psi, \tag{1.11}$$

这就是 (1.6) 的自然相对论类比，表达了相对论动能与势能之间的平衡。事实上，在非相对论极限（即 $\alpha\cdot p\sim p^2/m$的情形）下，恒等式 (1.11) 化为 (1.6)。不过，与薛定谔情形不同，我们无法从方差的动力学推导出恒等式 (1.11)，而只能利用狄拉克算子的代数结构。换言之，我们不能将 (1.11) 看作 H的二阶时间导数或双重对易子恒等式，而这正是 (1.5) 的情形。此外，注意到 $\langle\alpha\cdot p\rangle_\psi$ 没有确定符号，即使 $x\cdot\nabla V\le 0$，量 $\langle\psi,[H,A]\psi\rangle$也不一定为正，这与薛定谔情形形成对比。上述考量清楚地表明，在狄拉克框架中，维里方法更难实施，原则上必须根据狄拉克算子独特的代数结构加以调整（参见近期结果 [21,22], ，其中发展并运用了基于 L^2的新型维里型恒等式，以研究非线性狄拉克方程解的长时间行为）。

本文旨在引入新的相对论维里型恒等式，这些恒等式具有动力学诠释，并自然引出对与狄拉克算子正向交换的新可观测量的研究。为此，我们先从一个简单但至关重要的代数恒等式开始：对于任意一对算子 $T,\ A$ （暂且不考虑定义域问题），有

$$[T,\{T,A\}] = [T^2,A], \tag{1.12}$$

其中 $\{T,A\} = TA + AT$是 T与 A. 之间的反对易子。将 (1.12) 特化到 $T = H_D$，可得 s

$$[H_D,\{H_D,A\}] = [H_D^2,A] = \left[H_0,A\right], \tag{1.13}$$

这里我们用到了自由狄拉克算子众所周知的超对称性质，即 $H_D^2 = (H_0 + m^2)I$.

对易子-反对易子恒等式 (1.13) 表明，$\{H_D, A\}$ 的相对论演化映照出 A 的非相对论演化（见 (1.3)）。这提示我们，应将相对论维里恒等式理解为由非相对论动力学驱动的适当可观测量的一阶导数。

恒等式 (1.13) 背后的直观理解来自所谓的能量中心算子 $N = \{H_D, x\}$，该算子测量按能量分布加权的位置；这不同于通常的位置算子，后者仅涉及概率分布；同时也来自该算子与自由狄拉克算子 H_D 的对易关系（见 [31, 附录 1.C]），即

$$[H_D, N] = [H_0, x] \quad \text{or, equivalently,} \quad [H_D, \{H_D, x\}] = [H_0, x].$$

上面的恒等式表明，N 的相对论演化由非相对论速度驱动（参见 (1.3)）。现在，由于基本的正交换子恒等式

$$[H_0, iG] = 2H_0, \tag{1.14}$$

（参见 (1.5)），自然会去寻找这样一个可观测量，使其相对论演化对应于膨胀生成元的非相对论演化 G。换言之，目标是找到一个满足下式的算子 X

$$[H_D, \mathsf{X}] = [H_0, iG]. \tag{1.15}$$

关系 (1.13) 已经给出了答案，即 $\mathsf{X} = \{H_D, iG\}$，并由此引入一种新的相对论维里尔型算子。

定义（相对论维里尔算子）。设 H_D 为 (1.7) 中定义的狄拉克算子，G 为 (1.4) 中定义的膨胀生成算子。我们将相对论维里尔算子 定义为方程 (1.15) 的解，即算子

$$L := \{H_D, iG\}. \tag{1.16}$$

算子 L 确实起到了相对论维里尔算子的作用，其构造方式使狄拉克动力学与膨胀对称性相互联系。据我们所知，这样的算子并未出现在标准文献中，其定义似乎是全新的。

在（1.16）中定义的新相对论维里尔算子 L，也可以改写为

$$L = -\tfrac{1}{4}\left\{H_D, \left[H_0, |x|^2\right]\right\}.$$

因此，甚至可以定义（1.16）的如下广义版本，即

$$L_\phi := -\tfrac{1}{4}\{H_D, [H_0, \phi]\} = \{H_D, iG_\phi\}, \tag{1.17}$$

对于给定函数 $\phi\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，其中我们定义了

$$iG_\phi := -\tfrac{1}{4}[H_0, \phi]. \tag{1.18}$$

注意，上文定义的 L和 L_ϕ 都是二阶微分算子。

下面的恒等式是恒等式（1.13）和（1.14）的直接推论。

命题 1.1。令 L 和 L_ϕ 分别如 (1.16) 和 (1.17) 中所定义。考虑 $H = H_D + V$，其中 H_D 如 (1.7) 中所定义，则有

$$[H, L] = 2H_0 + [V, L], \tag{1.19}$$

$$[H, L_\phi] = -\tfrac{1}{4}\left[H_0, [H_0, \phi]\right] + [V, L_\phi]. \tag{1.20}$$

我们再次强调，上述两个恒等式应在适当的算子定义域上理解，在这些定义域上所涉及的每一项都有明确的定义。
恒等式 (1.19) 和 (1.20) 构成了这篇手稿的核心：(1.19) 将为 H 的点谱提供有价值的信息，而 (1.20) 将给出关于 Morawetz型估计和局部平滑

估计的纯实变量证明，适用于狄拉克演化方程，无需对整个哈密顿算子 H 平方，只需对自由算子 H_D.平方

在介绍主要结果之前，我们先提出以下假设，这些假设将在全文中用到。更具体地说，假设 (HS) 用于定态情形下的结果，而假设 (HE) 则用于相关的演化问题。

假设(HS)。 设 $H = H_D + V$，其中 H_D 表示式 (1.7) 中定义的自由狄拉克算子，且 V:$\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{N\times N}$ 是厄米矩阵值势，满足 $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$，并且 V 在任意包含原点的球外有界。我们假设 H 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\, \mathbb{C}^N)$ 上本质自伴，并在$L^2(\mathbb{R}^d;\, \mathbb{C}^N)$ 上自伴，其定义域为 $\mathcal{D}(H) \subseteq H^1(\mathbb{R}^d;\, \mathbb{C}^N)$。

假设(HE)。 设 $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{N\times N}$ 为厄米矩阵值势。我们假设存在$a \in [0,1)$，使得对任意 $\psi \in \mathcal{D}(H)$:

$$\|V\psi\|_{L^2} \le a\|\nabla\psi\|_{L^2} \quad a \in [0,1). \tag{1.21}$$

注记 1.2。 根据 Kato–Rellich 定理，假设（HE）是假设 (HS) 的充分条件，但不是必要条件。事实上，在若干经典情形下，假设（HE）也成立：如果 $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d;\, \mathbb{C}^{N\times N})$ 是厄米的，那么 $H = H_D + V$ 在自由狄拉克算子的定义域上是自伴的，特别地，在 $H^1(\mathbb{R}^d;\, \mathbb{C}^N)$ 上也是自伴的。 这是 Kato–Rellich 定理的推论，因为 V 是关于 H_D 有界且相对界为 0（例如参见 [31, 第 4] 章）。更一般地，只要 V 关于 H_D 相对有界且相对界严格小于 1，同样的结论也成立。

然而，基于关于 H_D–相对小性的条件在狄拉克框架下并非最优。三维静电 库仑势的情形已经清楚地表明了这一点，即 $V(x) = -\nu\,|x|^{-1} I_4$。事实上，根据哈代不等式，势 V 关于 H_D 相对有界且相对界为 $2|\nu|$，因此，只要 $|\nu| < 1/2$，狄拉克–库仑算子就在 $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ 上自伴。然而，这一范围并非最优：狄拉克–库仑算子在 $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ 上自伴，当且仅当$|\nu| < \sqrt{3}/2$ （参见 [31, 第 4] 章）。对于$\sqrt{3}/2 < |\nu| \le 1$，该算子具有无穷多个自伴扩张，例如可以通过有限势能或能隙方法 [14, 16] 选取一个规范的（“特殊”）延拓。对于 $|\nu| > 1$，还会出现进一步的病态情形，需要进行更精细的分析（参见上述参考文献）。

其他相关例子包括洛伦兹标量 库仑势 $V(x) = -\mu\,|x|^{-1}\beta$ 以及反常磁 库仑势 $V(x) = \tau(-i\alpha\cdot x\beta)|x|^{-2}$。在第一种情形下，对于所有 $\mu \in \mathbb{R}$，算子 H 在 $H^1(\mathbb{R}^3;\, \mathbb{C}^4)$ 上自伴；而在第二种情形下，自伴性在 $|\tau| < 1/2$ 时成立（见 [7]）。

现在我们可以陈述本手稿的主要结果。前两个定理讨论与下式相关的定态特征值问题

$$i\partial_t\psi = (H_D + V)\psi \tag{1.22}$$

具体而言，它们给出了关于 V 的临界函数尺度 小性条件，在这些条件下，算子$H = H_D + V$ 没有特征值。我们分别讨论无质量情形和有质量情形，因为二者表现出显著不同的特征。

定理 1.3 （含势无质量狄拉克算子：点谱缺失）。 设 $d \ge 3$、 $m = 0$，且假设 *(HS)* 成立。假设存在两个正常数 C_1 和 C_2，使得对于任意 $j = 1, \ldots\ldots, d$，均有

$$|\nabla V(x)| \le \frac{C_1}{|x|^2}, \qquad |[\alpha_j, V]| \le \frac{C_2}{|x|}. \tag{1.23}$$

那么，如果 C_1 和 C_2 满足

$$\frac{4C_1}{d-2} + C_2 < 1,$$

则可得 $\sigma_p(H_D + V) = \varnothing$.

在有质量情形下，我们得到前述结果的以下推广。

定理 1.4（有质量狄拉克算子与势：点谱缺失）。 令 $d \geq 3$、 $m > 0$，并令假设 *(HS)* 得到满足。假设存在四个正常数 C_1、C_2、C_3 和 C_4，使得对于任意 $j = 1, \ldots\ldots, d$，均有

$$|\nabla V(x)| \leq \frac{C_1}{|x|^2}, \qquad |[\alpha_j, V]| \leq \frac{C_2}{|x|}, \qquad \Big|(x \cdot \nabla)\big[\{V, \beta\}\big]\Big| \leq \frac{C_3}{|x|^2} \qquad |[\beta, V]| \leq \frac{C_4}{|x|^2}. \tag{1.24}$$

那么，若 C_1、C_2、C_3 和 C_4 满足

$$\frac{4C_1}{d-2} + C_2 + \frac{2mC_4}{d-2} + \frac{2mC_3}{(d-2)^2} < 1, \tag{1.25}$$

即可推出 $\sigma_p(H_D + V) = \varnothing$.

注 1.5（临界函数尺度）。 定理 1.3 和 1.4 中的小性假设反映了狄拉克算子的临界函数尺度。对于齐次 势，定理 1.3（无质量 情形）中的条件 (1.23) 划定了库仑尺度 $V(x) \sim \frac{c}{|x|}$，该尺度对于无质量狄拉克算子是临界的。在维数 $d = 3$ 中，对于静电库仑型势，即 $V(x) = (\frac{a}{|x|} \mp b)I$ 对于所有j，都有 $[\alpha_j, V] = 0$，因此 (1.23) 化为梯度界 $|\nabla V| \leq \frac{a}{|x|^2}$，并且只要 $a < \frac{1}{4}$，(1.25) 就成立（对于一般维数 $d \geq 3$，条件 (1.25) 给出了一个明确的、依赖于维数的耦合常数小性条件）。因此，定理 1.3 得出了这样一个结论：较小的库仑耦合在无质量情形下不会产生点谱。我们强调，当 $[\alpha_j, V] = 0$（例如 势为静电势时），无需对 V 在无穷远处施加额外的衰减要求。

我们强调，我们的结果并不与 Loss 和 Yau 在 [26]（另见 [3]）为具有某些按 $\langle x \rangle^{-2}$. 衰减的势的外尔-狄拉克算子构造的显式零能本征函数相矛盾。事实上，在他们的例子中，量 $\sup |x|^2 |\nabla V(x)|$ 为 1 的量级（并不像本文所要求的那样小）。这表明，当 (1.23) 中的常数较大时，确实会出现特征值（尤其是零模）。相比之下，定理 1.3 断言，若满足小性条件 (1.25)，则不会出现点谱。因此，该定理划分了小库仑耦合区间（无特征值）与大库仑耦合区间（可能出现零模）之间鲜明的定性二分。

对于有质量的狄拉克算子 , 此时尺度不变性不再成立 , 必须考虑两种不同的情形 。在更一般的情形下，若 V 与 β 不反对易，则假设 (1.24) 中会出现两个不同的临界区间：无穷远处的临界行为由逆平方尺度决定，而原点处的临界行为则由库仑势决定，即 $V(x) \sim \frac{c}{|x|+|x|^2}$. 在这种情况下，对于库仑型势，不能期待特征值不存在：总是可以预期（事实上，从狄拉克的计算 [13]也已知）谱隙内会出现特征值（$-m$, m），对应于相对论氢原子的离散能级。若干研究都强调了必须同时考虑库仑尺度和逆平方尺度，包括 Cuenin、Laptev 和 Tretter [11], 、D'Ancona 和 Fanelli [12],以及 Fanelli 和 Krejčiřík [17], 等人的工作。这些论文建立了极限吸收原理、色散估计和谱稳定性判据，均凸显了库仑阈值和逆平方阈值的特殊作用。

然而，在 V与狄拉克矩阵 β反对易的情形下，尽管存在上述障碍，库仑尺度仍然是可允许的。一个具有物理意义的例子由反常磁势给出，其定义为 $V = -i\beta\alpha \cdot \nabla\varphi$，其中 φ： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 是一个适当的标量函数。在三维情形下，对于$\varphi = \tau \log |x|$ 且 $\tau \in \mathbb{R}$，可得到库仑型反常磁势 $V = -i\tau\beta\alpha \cdot \frac{x}{|x|^2}$，它显然验证了 (1.24)。因此，只要小性条件 (1.25) 得到满足，定理 1.4 就能确保不存在特征值。这与 [7, 注 1.12], 中的结果一致，其中对特征值和特征函数进行了显式计算。事实上，仔细检查该结果可以发现，当 $|\tau| < 1/2$时，相应的特征函数并非 L^2-可积，这正是对应于假设 (HS) 的情形。

备注 1.6（与已有结果的比较）。 狄拉克算子的标准维里方法如下（参见 [1, 定理 4.1.2]和 [31,推论 4.22]）：设 G 为 (1.4) 中定义的膨胀生成元，对于特征值方程 $H\psi = \lambda\psi$, 的任意解 ψ，若满足 $H = H_D + V$, 则有

$$0 = \langle \psi, [H, iG]\psi \rangle = \langle \psi, -i\alpha \cdot \nabla\psi \rangle - \langle \psi, (x \cdot \nabla V)\psi \rangle = \lambda - m \langle \psi, \beta\psi \rangle - \langle \psi, (V + x \cdot \nabla V)\psi \rangle ,$$

其中，在第二个恒等式中，我们用到了 (1.11)。因此

$$\lambda - m\,\langle \psi,\, \beta\psi\rangle = \langle \psi,\, (V + x\cdot\nabla V)\psi\rangle\,. \tag{1.26}$$

通过哈代不等式，可以控制右侧的势项，前提是 $|V+x\cdot\nabla V| \lesssim |x|^{-1}$；当相应的耦合常数较小时，该势项也较小。因此，标准的维里论证要求 $both$ V和 ∇V在库仑尺度下都较小。此外，它们通常只能推出在受限谱区域内不存在特征值。例如，由 (1.26) 很容易得到：如果 $V(x) + x\cdot\nabla V$只有非正特征值，那么 $\lambda \le m.$。类似地，矩阵 $V(x) + x\cdot\nabla V$的正定性意味着 $\lambda \ge -m.$

不局限于维里型论证，人们还对扰动狄拉克算子是否具有特征值（尤其是嵌入特征值）进行了广泛研究。在 [29], Roze 证明，若势在无穷远处以快于库仑尺度的速度衰减，即在满足以下假设的条件下，狄拉克算子 $\alpha\cdot(p+A(x))+\beta+q(x)I$ 在本质谱中没有嵌入特征值

$$\lim_{|x|\to\infty} \big(|A(x)| + |q(x)|\big) = 0. \tag{1.27}$$

后来，Kalf [25] 用规范不变条件取代了在物理上不充分的条件 (1.27)：

$$\lim_{|x|\to\infty} \big(|B(x)| + |q(x)|\big) = 0, \qquad B = \operatorname{curl} A. \tag{1.28}$$

在同一篇论文中，他还用另一种假设取代了条件 (1.28)（该条件排除了库仑型势），这种假设允许库仑势，但需要对 q 的径向导数施加符号条件（见 [25, 定理 1]中的条件 (iii) 和 (iv)）。

Vogelsang [33] 改进了这一结果，只要求势的径向导数负部具有一定的衰减（注意，在这种情形下不涉及磁场）。Berthier 和 Georgescu 在 [5], 证明了与 [25] 和 [33]类似的结果，并将其推广到纯静电情形之外。他们将势 $V = L + W$ 分解为长程部分 L 和短程部分 W：长程分量 L满足局部有界性，且其径向导数满足符号条件；特别地，它包含库仑势（见 [5,(38)、(39)]）；而短程部分 W 可以是奇异的，并且在无穷远处像短程扰动一样衰减（见 [5, (40)、(57)]）。

关于这一方向的更多结果，参见 [6, 15, 19] 及其中的参考文献。近期关于纯磁性情形的其他结果可见于近期论文 [9, 23]。
在 [2], 中，作者得到的结果与上述定理 1.3 和 1.4 非常接近。他们的策略是将完整的哈密顿算子 H 平方，然后处理由此产生的一阶项。因此，与定理 1.3 和 1.4 相比，他们的方法要求对扰动作出更强的假设。这是因为在我们的证明中，只需将算子的自由部分平方。在无质量情形下，对于静电库仑势这一典型例子，这种结果上的差异已十分明显，即 $V(x) = -\nu|x|^{-1}I_N$. 事实上， [2] 中的定理 1.4 在条件$4\nu\,(d-2) + 4\nu^2\,(d-2)_2 < 1$下，证明了点谱缺失，而我们的定理 1.3 只要求$4\nu\,(d-2) < 1$.

注1.7（与非自伴结果的关系）。对于 H_D 的非自伴扰动，在可积性假设下，已经得到特征值的尖锐局部化界（例如参见 [11, 17]）。我们的定理讨论自伴情形，并在尺度临界的矩阵对易子条件下证明点谱缺失；从这个意义上说，两者互为补充，并凸显了算子 $L = \{H_D, iG\}$ 所体现的真正一阶狄拉克结构的作用。我们坚信，我们的方法也应适用于非自伴情形，这一问题将留待未来工作探讨。

新的相对论维里恒等式还为演化方程 (1.22) 提供了重要信息。具体而言，在对势作出适当假设的条件下，这一方法使我们能够确立局部平滑效应。我们给出两个不同的结果：一个适用于物理维数 $d = 3,$ ，另一个适用于高维 $d \ge 4.$。此外，与定常情形一样，我们分别讨论无质量情形和有质量情形。

定理 1.8 (无质量三维狄拉克方程**)**。设 $d=3, m=0$，且假设（*HE*）成立。假设存在 $\epsilon\in(0,1)$ 以及两个正常数 C_1和 C_2，使得对于任意 $j=1,2、3$,

$$|\nabla V|\le\frac{C_1}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}},\qquad |[\alpha_j,V]|\le\frac{C_2}{|x|^{1-\epsilon}+|x|^{1+\epsilon}},\tag{1.29}$$

并且满足

$$(c_{\epsilon/2})^2\left[\tfrac{3\sqrt{2}}{4}C_1+\tfrac{3\sqrt{2}+12}{8}C_2\right]<\tfrac{1}{6},\qquad (c_{\epsilon/2})^2\left[\tfrac{3\sqrt{2}}{4}C_1+\tfrac{3\sqrt{2}}{8}C_2\right]<\tfrac{1}{8},$$

wi其中 $c_{\epsilon/2}$ 如(A.2)中所定义。则对于(1.22) 的任意解 ψ，以下估计成立

$$\delta\sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_0^\infty\int_{|x|\le R}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\partial_\tau\psi|^2}{|x|}\,dx\,dt+\delta\sup_{R>0}\frac{1}{R^2}\int_0^\infty\int_{|x|=R}|\psi|^2\,d\sigma\,dt$$
$$\lesssim_d\|(H_D+V)\psi(0,\cdot)\|_{L^2}^2,\tag{1.30}$$

对于某个 $\delta>0$.

有质量情形下的相应结果如下:

定理 1.9 (有质量三维狄拉克方程**)**。 设 $d=3、\ m>0$，且满足假设（*HE*）。假设存在 $\epsilon\in(0、1)$ 以及四个正常数 $C_1、\ C_2、\ C_3$和 C_4，使得对于任意 $j=1,\ 2、3$,

$$\begin{aligned}|\nabla V|\le\frac{C_1}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}},\qquad |[\alpha_j,V]|\le\frac{C_2}{|x|^{1-\epsilon}+|x|^{1+\epsilon}},\\ |(x\cdot\nabla)\{V,\beta\}|\le\frac{C_3}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}},\qquad |[\beta,V]|\le\frac{C_4}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}},\end{aligned}\tag{1.31}$$

并且满足

$$(c_{\epsilon/2})^2\left[\tfrac{3\sqrt{2}}{4}C_1+\tfrac{3\sqrt{2}+12}{8}C_2+\tfrac{3\sqrt{2}m}{8}C_4\right]<\tfrac{1}{6},\qquad (c_{\epsilon/2})^2\left[\tfrac{3\sqrt{2}}{4}C_1+\tfrac{3\sqrt{2}}{8}C_2+\tfrac{3m}{8}C_3+\tfrac{3\sqrt{2}m}{8}C_4\right]<\tfrac{1}{8},$$

其中$c_{\epsilon/2}$ 如(A.2)中所定义。 那么，对于(1.22) 的任意解 ψ，(1.30) 中的界均成立，但 δ.较小

现在我们可以陈述高维情形下的另一组结果 $d\ge4.$。我们将从无质量情形的结果开始。

定理 1.10。 设 $d\ge4、\ m=0$，且假设（*HE*）成立。假设存在 $\epsilon\in(0、\ 1/2)$以及两个正常数 C_1和 C_2，使得对于任意 $j=1、2、\ldots\ldots、\ d$,

$$|\nabla V|\le\frac{C_1}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}},\qquad |[\alpha_j,V]|\le\frac{C_2}{|x|^{1-\epsilon}+|x|^{1+\epsilon}},\tag{1.32}$$

并且满足

$$\left[\tfrac{3}{4}C_1+\tfrac{3(d-1)}{16}C_2\right]c_\epsilon+\tfrac{3}{2}C_2(c_{\epsilon/2})^2<\tfrac{d-1}{4d},\qquad \left[\tfrac{3}{4}C_1+\tfrac{3(d-1)}{16}C_2\right]c_\epsilon<\tfrac{(d-1)(d-3)}{8},$$

其中 $c_\varepsilon、\ \varepsilon=\epsilon$ 或 $\varepsilon=\epsilon/2$如(A.2)中所定义。那么，对于(1.22) 的任意解 ψ，以下估计成立

$$\begin{aligned}&\delta\sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_0^\infty\int_{|x|\le R}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt+\delta\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx\,dt\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\partial_\tau\psi|^2}{|x|}\,dx\,dt+\frac{(d-1)}{16}\sup_{R>0}\frac{1}{R^2}\int_0^\infty\int_{|x|=R}|\psi|^2\,d\sigma\,dt\lesssim_d\|(H_D+V)\psi(0,\cdot)\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{1.33}$$

对于某个 $\delta>0$.

有质量情形下的对应结果如下:

定理 1.11. 令 $d \geq 4$、 $m > 0$，并满足假设（*HE*）。假设存在 $\epsilon \in (0,1)$以及四个正常数 C_1、C_2、C_3 和 C_4，使得对于任意 $j = 1, 2, \ldots, d$,

$$|\nabla V| \leq \frac{C_1}{|x|^{2-\epsilon} + |x|^{2+\epsilon}}, \quad |[\alpha_j, V]| \leq \frac{C_2}{|x|^{1-\epsilon} + |x|^{1+\epsilon}}, \quad |(x \cdot \nabla)\{V, \beta\}| \leq \frac{C_3}{|x|^2}, \quad |[\beta, V]| \leq \frac{C_4}{|x|^{2-\epsilon} + |x|^{2+\epsilon}}, \tag{1.34}$$

并且满足

$$\left[\tfrac{3}{4}C_1 + \tfrac{3(d-1)}{16}C_2 + \tfrac{3m}{8}C_4\right] c_\epsilon + \tfrac{3}{2}C_2(c_{\epsilon/2})^2 < \tfrac{d-1}{4d}, \qquad \left[\tfrac{3}{4}C_1 + \tfrac{3(d-1)}{16}C_2 + \tfrac{3m}{8}C_4\right] c_\epsilon + \tfrac{3m}{8}C_3 < \tfrac{(d-1)(d-3)}{8},$$

其中 c_ε、 $\varepsilon = \epsilon$ 或 $\varepsilon = \epsilon/2$如（A.2）中所定义。于是，对于任意满足（1.22）的解 ψ，（1.33）中的界以更小的 δ成立

注 1.12。 定理 1.8–1.11 的陈述中出现的 $\|(H_D + V)\psi(0, \cdot)\|_{L^2}^2$可以替换为 $\|\nabla\psi(0, \cdot)\|_{L^2} + m^2\|\psi(0, \cdot)\|_{L^2}$，也就是说，平滑估计仅取决于初始数据 $\psi(0, \cdot)$的 H^1-范数；更多细节见下文注 4.17。

论文结构

在预备部分第 2 节中，我们汇集了全文所用的记号和基本结果。
定态方程中新相对论维里恒等式的推导，以及定理 1.3 和 1.4 中所述谱稳定性结果的证明，均在第3节给出。

在第 4 节中，这些维里尔恒等式进一步推广到演化情形，并用于建立定理 1.8–1.11 的局部平滑估计。

最后，在附录 A 中，我们证明第 2 节中的一些结果。

2 预备知识

我们在此汇集若干将在全文中反复用到的性质。若略去证明，则该结果是显然的。

- 由狄拉克矩阵满足的反对易关系 (1.8)，对于任意 $\psi \in \mathcal{D}(H_D)$，有

$$\|H_D\psi\|_{L^2} = \|\nabla\psi\|_{L^2}, \qquad \|H_D\psi\|_{L^2}^2 = \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi\|_{L^2}^2. \tag{2.1}$$

- 由 (1.4) 定义的膨胀算子 G是对称的，因此 iG 是反对称的。此外，有

$$iG = \frac{d}{2} + x \cdot \nabla. \tag{2.2}$$

- 交换子算子 $[iG, V]$ 可明确写为

$$[iG, V] = (x \cdot \nabla)V. \tag{2.3}$$

- 对于任意径向函数 φ，有

$$[H_0, \varphi] = -\varphi'' - \tfrac{(d-1)}{r}\varphi' - 2\varphi'\partial_r. \tag{2.4}$$

- Us由（2.4）可知，对于 iG_ϕ 中定义的函数以及 ϕ 径向函数，有

$$iG_\phi = -\tfrac{1}{4}\left(\phi'' + \tfrac{(d-1)}{r}\phi'\right) - \tfrac{1}{2}\phi'\partial_r \tag{2.5}$$

- 交换子算子 $[iG_\phi, V]$ 可明确写为

$$[iG_\phi, V] = \tfrac{1}{2}\phi'\partial_r V. \tag{2.6}$$

- T交换子算子 $[H_D, V]$ 是反对称的。此外，它可明确写为

$$[H_D, V] = -i[(\alpha \cdot \nabla)V] - i[\alpha_j, V]\partial_j + m[\beta, V]. \tag{2.7}$$

- 我们将需要经典 *Hardy* 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq C_{\mathrm{H}}^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi|^2(x)\, dx, \qquad \forall\, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 3, \tag{2.8}$$

其中，最佳常数 C_{H}^2 由 $C_{\mathrm{H}}^2 := 4/(d-2)^2$. 给出

- Morrey-Campanato 范数定义为

$$|||u|||^2 := \sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|x|\leq R} |u|^2\, dx. \tag{2.9}$$

我们将始终使用以下界

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2}{(|x|^{1/2-\delta} + |x|^{1/2+\delta})^2}\, dx \right)^{1/2} \leq c_\delta |||u|||, \quad \text{for } \delta \in (0, 1/2), \tag{2.10}$$

其中， c_δ 由 (A.2) 给出。证明推迟至附录 A。

- 我们还引入球面范数

$$\|u\|_R^2 := \sup_{R>0} \frac{1}{R^2} \int_{|x|=R} |u|^2\, d\sigma,$$

以及类似的界

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2}{(|x|^{3/2-\delta} + |x|^{3/2+\delta})^2}\, dx \right)^{1/2} \leq \frac{c_\delta}{\sqrt{2}} \|u\|_R, \quad \text{for } \delta \in (0, 1/2), \tag{2.11}$$

其中 c_δ 在 (A.2) 中定义。证明同样推迟到附录 A。

3 扰动狄拉克算子的点谱

贯　　穿本节，我们假设假设 (HS)，并考虑以下特征值问题　　m

$$H\psi = \lambda\psi, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

它与自伴哈密顿算子 $H = H_D + V$，相关，其中 H_D 是 (1.7) 中定义的自由狄拉克算子。我们的主要目的是找出关于 V 的适当小性条件，使得方程 (3.1) 不存在解。为此，我们需要以下简单的积分恒等式。

引理 3.1（维里恒等式）。设 $\psi \in \mathcal{D}$（H） 是 *(3.1)* 的一个解，则有

$$\frac{1}{2}\langle\psi, [H, L]\psi\rangle = 0, \tag{3.2}$$

其中 L 是在 （1.16） 中定义的二阶反对称算子。

证明。 证明可通过简单应用所谓的乘子法得到：将方程 (3.1) 乘以测试函数 $L\psi$，其中 L 如 (1.16) 中所定义，然后取所得恒等式的实部，可得

$$\mathrm{Re}\langle H\psi, L\psi\rangle = \lambda\, \mathrm{Re}\langle\psi, L\psi\rangle. \tag{3.3}$$

由于 L 是反对称的，期望值 $\langle\psi,\ L\psi\rangle$ 是纯虚数，因此 (3.3) 的右端为零。只需注意到 $\mathrm{Re}\langle H\psi,\ L\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi,$ $[H, L]\psi\rangle$.，恒等式 (3.2) 即得。　　–　　□

注记 3.2。 要使引理 3.1 的证明完全严谨，必须确保测试函数 $v = L\psi$确实属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$。 一般而言，假设 $\psi \in H^1$ 不足以保证这一点，因为 v 可能无界，而且算子 L是二阶的。因此，严谨的证明应首先用一列在原点附近消失的紧支撑函数 ψ_R 逼近解 ψ，这些函数满足一个相关问题。接着注意到，关于势的假设 (HS) 使得可以证明每个 ψ_R 都具有更高正则性，具体而言是 $\psi_R \in H^2(\mathbb{R}^d)$。 由此可以严格地对 ψ_R 建立所需的恒等式，而引理 3.1 中的恒等式 (3.2) 最终可通过令 $R \to \infty$. 趋于极限得到。关于这一正则化论证的详细说明，参见 [2, 引理 3.1]。

现在我们进一步展开交换子 $[H, L]$. 。根据表达式 (1.19)，我们只需考虑涉及势的部分，即 $[V, L]$. 。下面给出以下结果。

引理 3.3。

$$\frac{1}{2}\langle\psi, [V, L]\psi\rangle = \mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, iG\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle[iG, V]\psi, H_D\psi\rangle. \tag{3.4}$$

证明。 将算子 L 按照 (1.16) 中的定义明确写出，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle\psi, [V, L]\psi\rangle &= \mathrm{Re}\langle V\psi, L\psi\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle V\psi, H_D iG\psi\rangle + \mathrm{Re}\langle V\psi, iGH_D\psi\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle H_D V\psi, iG\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle iGV\psi, H_D\psi\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle VH_D\psi, iG\psi\rangle + \mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, iG\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle iGV\psi, H_D\psi\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle VH_D\psi, iG\psi\rangle + \mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, iG\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle ViG\psi, H_D\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle[iG, V]\psi, H_D\psi\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, iG\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle[iG, V]\psi, H_D\psi\rangle,
\end{aligned}$$

□

备注 3.4。 在引理 3.3 中恒等式 (3.4) 的证明里，我们只用到了 V 和 H_D 是对称的，以及 L 和 iG 是反对称的。因此，将 L 替换为 L_ϕ，并将 iG替换为 iG_ϕ，恒等式 (3.4) 仍然成立， 其中 L_ϕ 和 iG_ϕ 分别定义于 (1.17) 和 (1.18) 中。

现在我们可以证明主要结果了。我们先证明有质量情形下的结果，即定理 1.4；随后，无质量对应情形下的定理 1.3 将作为一个简单推论得出。

定理 *1.4* 的证明。 我们以上述恒等式 (3.4) 为出发点。由于 $[H_D, V]$ 是反对称的，因此 $\langle[H_D, V]\psi,\ \psi\rangle$ 是纯虚数，故由 (2.2)，恒等式 (3.4) 化为

$$\tfrac{1}{2}\langle\psi, [V, L]\psi\rangle = \mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle[iG, V]\psi, H_D\psi\rangle.$$

现在，分别利用 (2.7) 和 (2.3) 中给出的交换子 $[H_D, V]$ 和 $[iG, V]$ 的显式表达式，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\langle\psi, [V, L]\psi\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle -i[(\alpha\cdot\nabla)V]\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle + \mathrm{Re}\langle -i[\alpha_j, V]\partial_j\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle + m\,\mathrm{Re}\langle[\beta, V]\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle[(x\cdot\nabla)V]\psi, H_D\psi\rangle.
\end{aligned}$$

最后，只需估计以下五项:

$$I_1 := \mathrm{Re}\langle -i[(\alpha\cdot\nabla)V]\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle, \quad I_2 := \mathrm{Re}\langle -i[\alpha_j, V]\partial_j\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle, \quad I_3 := m\,\mathrm{Re}\langle[\beta, V]\psi, x\cdot\nabla\psi\rangle,$$
$$I_4 := -\mathrm{Re}\langle[(x\cdot\nabla)V]\psi, -i\alpha\cdot\nabla\psi\rangle, \quad I_5 := -m\,\mathrm{Re}\langle[(x\cdot\nabla)V]\psi, \beta\psi\rangle.$$

利用柯西-施瓦茨不等式、哈代不等式以及假设 (1.24)，可得

$$|I_1| + |I_4| \le 2\||x||\nabla V||\psi\|\|\nabla\psi\| \le \frac{4C_1}{d-2}\|\nabla\psi\|^2.$$

对于 I_2，，如上所述，有

$$|I_2| \le \||x||[\alpha_j, V]||\partial_j\psi\|\|\nabla\psi\| \le C_2\|\nabla\psi\|^2.$$

对于 I_3，有

$$|I_3| \le m\||x|\|[\beta, V]\||\psi|\|\|\nabla\psi\| \le \frac{2mC_4}{d-2}\|\nabla\psi\|^2,$$

最后我们来估计 I_5。由于乘法算子 $(x\cdot\nabla)V$ 是对称的（因为 V 是厄米的），且 β 是对称的，因此 I_5 可以用这两个算子的反对易子来估计。此外，由于 β 是常矩阵，有 $\{(x\cdot\nabla)V,\ \beta\} = (x\cdot\nabla)\big[\{V,\beta\}\big]$。因此，利用 Hardy不等式可得

$$|I_5| = \Big|\frac{m}{2}\langle\psi, (x\cdot\nabla)[\{V,\beta\}]\psi\rangle\Big| \le \frac{2mC_3}{(d-2)^2}\|\nabla\psi\|^2.$$

现在，依次使用 (3.2)、(1.19) 和最后得到的界，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi\|^2 &\le |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| + |I_5| \\ &\le \Big(\frac{4C_1}{d-2} + C_2 + \frac{2mC_4}{d-2} + \frac{2mC_3}{(d-2)^2}\Big)\|\nabla\psi\|^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由假设 (1.25)，这便得到了所要证明的结论。 □

定理 *1.3* 的证明。 这个结果的证明直接沿用前一个结果的证明，只需注意在此情形下I_3 和 I_5 为零。

□

4 扰动狄拉克方程的局部平滑

本节中，我们始终假设假设（HE），并证明引言中给出的扰动狄拉克算子的局部平滑估计。与第3节不同，这里考虑的函数同时依赖于时间变量和空间变量，即 $\psi = \psi(t,\ x)$。若上下文清楚，我们会省略这一依赖关系；若其相关，则会明确写出。

为了证明本节引入的代数运算是合理的，我们用一列初始数据 $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$逼近与解 $\psi = e^{itH}f$, 对应的初始数据，并注意到相应的解 $\psi_j := e^{itH}f_j \in C(\mathbb{R};\ H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$. 为便于阅读，以下省略下标 j。

定理 1.8 至定理 1.11 的证明以演化方程 (1.22) 的以下维里恒等式为出发点。

引理 4.1 （含时维里恒等式）. 设 ψ 是 (1.22)的一个解，则有

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\psi D^2\phi\overline{\nabla\psi}\,dx + \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^d}\Delta^2\phi|\psi|^2\,dx - \frac{1}{2}\langle\psi, [V, L_\phi]\psi\rangle, \tag{4.1}$$

其中， iG_ϕ 在(1.18) 中定义， L_ϕ 在(1.17)中定义。

证明。 为得到 (4.1)，将方程 (1.22) 乘以测试函数 $L_\phi\psi$, 其中 L_ϕ 如 (1.17) 中所定义，然后对所得恒等式取实部。由此得到

$$\operatorname{Re}\langle i\partial_t\psi, L_\phi\psi\rangle = \operatorname{Re}\langle H\psi, L_\phi\psi\rangle. \tag{4.2}$$

让我们来从左侧开始。利用 L_ϕ 是反对称的且与时间无关，可得 s

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle i\partial_t\psi, L_\phi\psi\rangle &= -\operatorname{Im}\langle\partial_t\psi, L_\phi\psi\rangle \\ &= \frac{i}{2}\big(\langle\partial_t\psi, L_\phi\psi\rangle - \langle L_\phi\psi, \partial_t\psi\rangle\big) \\ &= \frac{i}{2}\frac{d}{dt}\langle\psi, L_\phi\psi\rangle.\end{aligned}$$

显式计算 $\langle \psi,\ L_\phi \psi\rangle$ 可得

$$\begin{aligned}\langle \psi, L_\phi\psi\rangle &= \langle \psi, \{H_D, iG_\phi\}\psi\rangle \\ &= \langle \psi, H_D iG_\phi\psi\rangle + \langle \psi, iG_\phi H_D\psi\rangle \\ &= \langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle - \langle iG_\phi\psi, H_D\psi\rangle \\ &= 2i\,\mathrm{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle.\end{aligned}$$

现在我们考察 (4.2) 的右端。利用恒等式 (1.20)，并将双重对易子明确写出，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle H\psi, L_\phi\psi\rangle &= \frac{1}{2}\langle \psi, [H, L_\phi]\psi\rangle \\ &= -\frac{1}{8}\langle \psi, [H_0,[H_0,\phi]]\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle \psi, [V, L_\phi]\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi D^2\phi\overline{\nabla\psi} - \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^d}\Delta^2\phi|\psi|^2\,dx + \frac{1}{2}\langle \psi, [V, L_\phi]\psi\rangle.\end{aligned}$$

将这些恒等式代入 (4.2)，再将所得恒等式乘以 -1 ，即可得到 (4.1)。 □

注记 4.2。注意，由于假设 $\psi \in H^{3/2}.$ ，前面的计算是严谨的。事实上，若 $\psi \in H^{3/2}$，则 $L_\phi\psi \in H^{-1/2}$，而 $H_D\psi \in H^{1/2}$，且 $V\psi \in H^{1/2}.$ 。后者由假设（ HE ）中的 Kato 小性 (1.21) 以及关于 $\nabla V.$ 的逐点界推出。因此，(4.2) 中的括号应理解为 $H^{1/2}$ 与 $H^{-1/2}.$之间的对偶配对

如前所述，恒等式 (4.1) 为定理 1.8–1.11 的证明提供了出发点。为此，必须选取一个合适的乘子 ϕ 。在下一节中，我们将明确引入这个乘子，并描述其主要性质。

4.1 乘子的选择

令 $r := |x|$，我们定义

$$\phi(r) = \phi_{\mathrm{M}}(r) + \phi_{\mathrm{ls}}(r), \tag{4.3}$$

其中 $\phi_{\mathrm{M}}(r) := r$ 是所谓的 *Morawetz* 乘子，而 $\phi_{\mathrm{ls}}(r)$ 是如下定义的局部平滑 乘子：对任意 $R > 0$，取 $\phi_{\mathrm{ls}}(r) := \int_0^r \varphi'_{\mathrm{ls}}(s)\,ds$，其中

$$\phi'_{\mathrm{ls}}(r) = \begin{cases} \dfrac{(d-1)}{2d}\dfrac{r}{R}, & \text{for } r \le R \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{R^{d-1}}{2dr^{d-1}} & \text{for } r > R. \end{cases} \tag{4.4}$$

按照惯例，局部平滑乘子 ϕ_{ls} 定义为一个函数：它在以原点为中心、半径为 R 的球内与维里乘子 r^2 具有相同的行为，而在球外则表现为 Morawetz 乘子 ϕ_{M}。

选定乘子后，我们将选择 (4.3) 代入引理 4.1 中得到的维里恒等式 (4.1)。随后，通过仔细估计所得恒等式中的每一项，便可得到我们的结果。
为清晰起见，我们将这些计算分为三部分：估计 (4.1) 右侧的动能项 ，估计 (4.1) 右侧的势项 ，最后处理 (4.1) 左侧的时间导数项 。

4.2 动能项

本节旨在为下列量建立一个合适的下界

$$K := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi D^2\phi\overline{\nabla\psi}\,dx - \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^d}\Delta^2\phi|\psi|^2\,dx, \tag{4.5}$$

其中 ϕ 如 (4.3) 中所定义，它出现在 (4.1) 的右侧。本节的主要结果如下:

命题 4.3. 设 K 为式 (4.5)中定义的动能项。则有

$$K \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\partial_\tau \psi|^2}{|x|}\,dx + \frac{(d-1)}{4d}\frac{1}{R}\int_{|x|\leq R}|\nabla\psi|^2\,dx + \frac{(d-1)(d-3)}{8}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx + \frac{(d-1)}{16}\frac{1}{R^2}\int_{|x|=R}|\psi|^2\,d\sigma(x). \tag{4.6}$$

注 4.4. 在下界 (4.6) 中，右侧的第三项在 $d = 3.$ 时消失。因此，在三维中，可用于控制扰动所产生各项的正性较弱。
为证明命题 4.3，我们需要 $\nabla\psi D^2\phi\nabla\psi$ 和 $\Delta^2\phi.$ 的一个更显式表达式。回顾式 (4.3)，以下结果对此很有用。

引理 4.5. 设 ϕ_M 为 *Morawetz* 乘子，即 $\phi_M(r) = r.$ 则有

$$\nabla\psi D^2\phi_M\overline{\nabla\psi} = \frac{|\partial_\tau\psi|^2}{r}, \qquad \Delta^2\phi_M = \begin{cases} -8\pi\delta_{x=0} & d=3, \\ -\frac{(d-1)(d-3)}{r^3} & d\geq 4. \end{cases} \tag{4.7}$$

引理 4.6. 设 ϕ_{ls} 为按式 (4.4)定义的局部平滑乘子。则有

$$\nabla\psi D^2\phi_{ls}\overline{\nabla\psi} = \tfrac{(d-1)}{2d}\tfrac{1}{R}|\nabla\psi|^2\chi_{\{|x|\leq R\}} + \Big[\tfrac{(d-1)}{2d}\tfrac{R^{d-1}}{r^d}|\partial_r\psi|^2 + \tfrac{1}{2d}\tfrac{R^{d-1}}{r^d}\Big(\tfrac{dr^{d-1}}{R^{d-1}}-1\Big)|\partial_\tau\psi|^2\Big]\chi_{\{|x|>R\}}, \tag{4.8}$$

$$\Delta^2\phi_{ls} = -\tfrac{(d-1)(d-3)}{2r^3}\chi_{[R,\infty)} - \tfrac{(d-1)2}{}\tfrac{1}{R^2}\delta_{|x|=R}. \tag{4.9}$$

备注 4.7。 由上面的恒等式 (4.8) 可立即得到以下有用的估计

$$\nabla\psi D^2\phi_{\rm ls}\overline{\nabla\psi} \geq \tfrac{(d-1)}{2d}\tfrac{1}{R}|\nabla\psi|^2\chi_{\{|x|\leq R\}} + \tfrac{(d-1)}{2d}\tfrac{R^{d-1}}{r^d}|\nabla\psi|^2\chi_{\{|x|>R\}} \geq \tfrac{(d-1)}{2d}\tfrac{1}{R}|\nabla\psi|^2\chi_{\{|x|\leq R\}}, \tag{4.10}$$

其中，在最后一个不等式中，我们仅仅舍弃了第二项，因为它是正的。
我们先证明引理 4.5。

*P*引理 *4.5* 的证明。 首先我们注意到，对于任意径向函数 φ，都有

$$\nabla\psi D^2\varphi\overline{\nabla\psi} = \varphi''|\partial_r\psi|^2 + \tfrac{\varphi'}{r}|\partial_\tau\psi|^2, \qquad \Delta\varphi = \varphi'' + \tfrac{(d-1)}{r}\varphi'. \tag{4.11}$$

将 $\phi_{\rm M}$ 代入 (4.11) 中的第一个恒等式，便可立即得到 (4.7) 中的第一个恒等式。
现在我们证明 (4.7) 中的第二个恒等式。利用 (4.11) 中的第二个恒等式，容易得到 $\Delta\phi_{\rm M} = {}_{(d-1)\ r}$ ·由于前面的 $\Delta\phi_{\rm M}$ 表达式中含有函数，而它表示维数为 $d = 3$ 的拉普拉斯算子的基本解，因此情形 $d = 3$ 和 $d \geq 4$ 略有不同。通过简单计算可得

$$\Delta^2\phi_{\rm M}(r) = \begin{cases} -8\pi\delta_{x=0} & d=3 \\ -\frac{(d-1)(d-3)}{r^3} & d\geq 4, \end{cases}$$

这就是论点。 □

我们继续证明引理 4.6。

*Proo*引理 *4.6* 的 *f*。证明与引理 4.5 的证明类似。只需使用 tha t

$$\phi''_{\rm ls}(r) = \begin{cases} \dfrac{(d-1)}{2d}\dfrac{1}{R}, & r\leq R \\ \dfrac{(d-1)}{2d}\dfrac{R^{d-1}}{r^d} & r>R. \end{cases} \tag{4.12}$$

于是很容易得到 (4.8) 和 (4.9)。 □

我们终于可以证明命题 4.3 了

命题 *4.3* 的证明。 下界 (4.6) 直接由引理 4.5 和引理 4.6 中的恒等式，以及注 4.7 中的估计得出。

□

4.3 势项

本节给出势项的一个估计

$$P := \frac{1}{2}\langle\psi, [V, L_\phi]\psi\rangle, \tag{4.13}$$

它出现在（4.1）右端，其中 ϕ 是（4.3）中引入的乘子。由引理 3.3 和注 3.4 可得

$$P = \mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, iG_\phi\psi\rangle - \mathrm{Re}\langle[iG_\phi, V]\psi, H_D\psi\rangle.$$

我们分别分析右端的两项。对于第一项，由于（2.7）和（2.4），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle[H_D, V]\psi, iG_\phi\psi\rangle =& \mathrm{Re}\langle -i[(\alpha\cdot\nabla)V]\psi - i[\alpha_j, V]\partial_j\psi + m[\beta, V]\psi, -\tfrac{1}{4}\left(\phi'' + \tfrac{(d-1)}{r}\phi'\right)\psi - \tfrac{1}{2}\phi'\partial_r\psi\rangle \\ =& -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle -i[(\alpha\cdot\nabla)V]\psi, \phi'\partial_r\psi\rangle - \tfrac{1}{4}\mathrm{Re}\langle -i[\alpha_j, V]\partial_j\psi, \left(\phi'' + \tfrac{(d-1)}{r}\phi'\right)\psi\rangle \\ & -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle -i[\alpha_j, V]\partial_j\psi, \phi'\partial_r\psi\rangle - \tfrac{m}{2}\mathrm{Re}\langle[\beta, V]\psi, \phi'\partial_r\psi\rangle.\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了算子 $-i[(\alpha\cdot\nabla)V]$ 和 $[\beta, V]$ 均为反对称的，且它们与对称算子 $\left(\phi'' + \frac{(d-1)}{r}\phi'\right)$ 对易这一事实。

对于第二项，由于（2.6），可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\langle[iG_\phi, V]\psi, H_D\psi\rangle =& \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle(\phi'\partial_r V)\,\psi, -i\alpha\cdot\nabla\psi\rangle + \tfrac{m}{2}\mathrm{Re}\langle(\phi'\partial_r V)\,\psi, \beta\psi\rangle \\ =& \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle(\phi'\partial_r V)\,\psi, -i\alpha\cdot\nabla\psi\rangle + \tfrac{m}{4}\langle(\phi'\partial_r\{V, \beta\})\,\psi, \psi\rangle.\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了算子 $\phi'\partial_r V$ 和 β 均为对称的，且 β 是常矩阵这一事实。

综上可得

$$\begin{aligned}P =& -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle -i[(\alpha\cdot\nabla)V]\psi, \phi'\partial_r\psi\rangle - \tfrac{1}{4}\mathrm{Re}\langle -i[\alpha_j, V]\partial_j\psi, (\phi'' - \tfrac{d-1}{r}\phi')\psi\rangle - \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle -i[\alpha_j, V]\partial_j\psi, \phi'\partial_r\psi\rangle \\ & + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle(\phi'\partial_r V)\,\psi, -i\alpha\cdot\nabla\psi\rangle + m\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle[\beta, V]\psi, \phi'\partial_r\psi\rangle + \tfrac{1}{4}\langle(\phi'\partial_r\{V, \beta\})\,\psi, \psi\rangle\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

首先，我们要更明确地写出该方程中出现的各项

引理 4.8。 设 P 为 (4.13) 中定义的势项，其中 ϕ 为 (4.3) 中定义的乘子， $\phi_M(r) = r$是 *Morawetz* 乘子，而 $\phi_{ls}(r)$ 是 (4.4)中定义的局部平滑乘子。定义

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi||\nabla V||\psi|\,dx, \quad I_2 := \int_{\mathbb{R}^d} |[\alpha_j, V]||\nabla\psi|\tfrac{|\psi|}{|x|}\,dx, \quad I_3 := \int_{\mathbb{R}^d} |[\alpha_j, V]||\nabla\psi|^2\,dx, \tag{4.15}$$

并且在质量 $m > 0$ 的情况下，也定义

$$I_{m,1} := \int_{\mathbb{R}^d} |[\beta, V]||\psi||\nabla\psi|\,dx. \quad I_{m,2} := \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_r\{V, \beta\}||\psi|^2\,dx, \tag{4.16}$$

Then

$$|P| \le \frac{3}{2}I_1 + \frac{3(d-1)}{8}I_2 + \frac{3}{4}I_3 + m\left(\frac{3}{4}I_{m,1} + \frac{3}{8}I_{m,2}\right). \tag{4.17}$$

证明。 证明通过直接计算 ϕ的导数得出。事实上，由 (4.12) 可知

$$\begin{aligned}|\phi'| =& \left(1 + \frac{(d-1)}{2d}\frac{r}{R}\right)\chi_{\{|x|\le R\}} + \left(\frac{3}{2} - \frac{R^{d-1}}{2dr^{d-1}}\right)\chi_{\{|x|>R\}} \le \frac{3d-1}{2d}\chi_{\{|x|>R\}} + \frac{3}{2}\chi_{\{|x|>R\}} \le \frac{3}{2}, \\ \left|\phi'' + \tfrac{d-1}{r}\phi'\right| =& \left(\frac{d-1}{2dR} + \frac{d-1}{r}\left(1 + \frac{(d-1)}{2d}\frac{r}{R}\right)\right)\chi_{\{|x|\le R\}} + \left(\frac{d-1}{2d}\frac{R^{d-1}}{r^d} + \frac{d-1}{r}\left(\frac{3}{2} - \frac{R^{d-1}}{2dr^{d-1}}\right)\right)\chi_{\{|x|>R\}} \\ =& \left(\frac{d-1}{r} + \frac{d-1}{2R}\right)\chi_{\{|x|\le R\}} + \left(\frac{3(d-1)}{2r}\right)\chi_{\{|x|\le R\}} \\ \le& \frac{3(d-1)}{r}\chi_{\{|x|\le R\}} + \frac{3(d-1)}{r}\chi_{\{|x|>R\}} \le \frac{3(d-1)}{r}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

将这些估计代入 (4.14)，得到 (4.17)。 □

我们以对 (4.13) 中定义的势项 P 作最后一个估计，作为本节的收尾。更确切地说，根据 (4.17)，只需估计 (4.15) 中的各项，以及当 $m>0$ 时 (4.16) 中的各项。我们根据维数给出两种不同的界，先讨论高维情形 $d\geq 4$，再讨论 $d=3$。

命题 4.9。令 $d\geq 4$、$m>0$，并令 P 为 (4.13) 中定义的势项。假设 (1.34) 中的假设成立，则有

$$|P| \leq \left(\frac{3}{4}C_1c_\epsilon + \frac{3(d-1)}{16}C_2c_\epsilon + \frac{3}{2}C_2(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3}{8}mC_4c_\epsilon\right)|||\nabla\psi|||^2 + \left(\frac{3}{4}C_1c_\epsilon + \frac{3(d-1)}{16}C_2c_\epsilon + \frac{3}{8}mC_4c_\epsilon + \frac{3}{8}mC_3\right)\|\psi\|^2_{L^2(|x|^{-3},dx)}. \quad (4.19)$$

其中，C_1、C_2、C_3、C_4 是 (1.34) 中出现的常数，c_ε 在(A.2)中定义。

Fr由前面的结果立即可得无质量情形下的相应结果 .

命题 4.10。令 $d\geq 4$、$m=0$，并令 P 为 (4.13) 中定义的势项。假设 (1.32)中的假设成立，则有

$$|P| \leq \left(\frac{3}{4}C_1c_\epsilon + \frac{3(d-1)}{16}C_2c_\epsilon + \frac{3}{2}C_2(c_{\epsilon/2})^2\right)|||\nabla\psi|||^2 + \left(\frac{3}{4}C_1c_\epsilon + \frac{3(d-1)}{16}C_2c_\epsilon\right)\|\psi\|^2_{L^2(|x|^{-3},dx)}. \quad (4.20)$$

其中，C_1 和 C_2 是 (1.32) 中出现的常数，c_ε 在(A.2)中定义。

现在我们可以证明命题 4.9 了。

命题 *4.9* 的证明。根据 (4.17)，只需估计 (4.15) 和 (4.16) 中的各项。我们先估计 I_1.利用假设 (1.34)，再由柯西-施瓦茨不等式可得， 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi||\nabla V||\psi|\,dx \leq C_1\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\psi|\,|\psi|}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}}\,dx = C_1\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\psi|}{|x|^{1/2-\varepsilon}+|x|^{1/2+\varepsilon}}\frac{|\psi|}{|x|^{3/2}}\,dx \\ &\leq C_1\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\psi|^2}{(|x|^{1/2-\varepsilon}+|x|^{1/2+\varepsilon})^2}\,dx\Big)^{1/2} \\ &\leq C_1\,c_\varepsilon|||\nabla\psi|||\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx\Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中我们用到了 (2.10)。
接下来考虑 I_2。利用假设 (1.34)，可得

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^d}|[\alpha_j,V]||\nabla\psi|\tfrac{|\psi|}{|x|}\,dx \leq C_2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\psi|}{(|x|^{1/2-\varepsilon}+|x|^{1/2+\varepsilon})}\frac{|\psi|}{|x|^{3/2}}\,dx \\ &\leq C_2\,c_\varepsilon|||\nabla\psi|||\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

现在我们估计 I_3. 。再次利用 (1.34) 和柯西-施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\mathbb{R}^d}|[\alpha_j,V]||\nabla\psi|^2\,dx \leq C_2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\psi|^2}{|x|^{1-\varepsilon}+|x|^{1+\varepsilon}}\,dx \leq 2C_2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\psi|^2}{(|x|^{1/2-\varepsilon/2}+|x|^{1/2+\varepsilon/2})^2}\,dx \\ &\leq 2C_2\,(c_{\varepsilon/2})^2|||\nabla\psi|||^2, \end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们再次用到了 (2.10)。
现在我们估计依赖质量 m. 的项。项 $I_{m,\,1}$ 本质上就是将 I_1 中的 $|\nabla V|$ 替换为 $|[\beta,V]|$ 后得到的项，这两者都满足 (1.34) 中相同的衰减估计。然后，按照上述推理可得

$$I_{m,1} \leq C_4c_\epsilon|||\nabla\psi|||\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx\right)^{1/2}.$$

最后，利用假设 (1.34)，可作如下估计 $I_{m,\ 2}$：

$$I_{m,2} = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_r\{V,\beta\}||\psi|^2\,dx \le C_3 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx.$$

结合上述所有估计以及 (4.17)，再利用初等不等式 $|ab| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$，即可得证。 — —

□

现在给出 $d = 3$ 中的相应界；至于高维情形，我们将先陈述有质量情形下的结果，因为 $m = 0$ 的结果可由此立即推出。

命题 4.11。设 $d = 3$、$m > 0$，并设 P 为 (4.13) 中定义的势项。假设条件 (1.31) 成立，则有

$$\begin{aligned}|P| \le &\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}C_1(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3\sqrt{2}+12}{8}C_2(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3\sqrt{2}\,m}{8}C_4(c_{\epsilon/2})^2\right)|||\nabla\psi|||^2 \\ &+ \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}C_1(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3\sqrt{2}}{8}C_2(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3\sqrt{2}\,m}{8}C_4(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3m}{8}C_3(c_{\epsilon/2})^2\right)\|\psi\|_R^2, \quad (4.21)\end{aligned}$$

其中，C_1、C_2、C_3、C_4 为 (1.34) 中出现的常数，c_ε 定义见 (A.2)。

由前一个结果可立即得到无质量情形下的相应结果。

命题 4.12。设 $d = 3$、$m = 0$，并设 P 为 (4.13) 中定义的势项。假设条件 (1.29)成立，则有

$$|P| \le \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}C_1(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3\sqrt{2}+12}{8}C_2(c_{\epsilon/2})^2\right)|||\nabla\psi|||^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}C_1(c_{\epsilon/2})^2 + \frac{3\sqrt{2}}{8}C_2(c_{\epsilon/2})^2\right)\|\psi\|_R^2, \quad (4.22)$$

其中，C_1 和 C_2 是 (1.34) 中出现的常数，而 c_ε 定义于 (A.2)。

现在我们来证明命题 4.11。

命题 *4.11* 的证明。与命题 4.9 的证明一样，由于 (4.17)，只需估计 (4.15) 和 (4.16) 中的各项。

我们先考虑 I_1。由 (1.31) 和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi||\nabla V||\psi|\,dx \le C_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla\psi|\,|\psi|}{|x|^{2-\epsilon}+|x|^{2+\epsilon}}\,dx \\ &\le 2C_1\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla\psi|^2}{\left(|x|^{1/2-\epsilon/2}+|x|^{1/2+\epsilon/2}\right)^2}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{\left(|x|^{3/2-\epsilon/2}+|x|^{3/2+\epsilon/2}\right)^2}\,dx\right)^{1/2} \\ &\le \sqrt{2}C_1(c_{\epsilon/2})^2|||\nabla\psi|||\,\|\psi\|_R\end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中我们用到了 (2.10) 和 (2.11)。

项 I_2 本质上就是项 I_1，只是将 $|\nabla V|$ 替换为 $|[\alpha_j, V]|/|x|$；二者在 (1.31) 中都满足相同的衰减估计。然后，仿照上面的推理，我们得到

$$I_2 \le \sqrt{2}C_2(c_{\epsilon/2})^2|||\nabla\psi|||\,\|\psi\|_R.$$

最后，通过重复命题 4.9 的论证即可得到对 I_3 的估计，结果为

$$I_3 \le 2C_2\,(c_{\varepsilon/2})^2|||\nabla\psi|||^2.$$

现在我们来估计依赖于质量的项 $m.$。项 $I_{m,\ 1}$ 本质上就是将 I_1 中的$|\nabla V|$ 替换为 $|[\beta, V]|$后得到的项，二者在 (1.34) 中都满足相同的衰减估计。于是，按照上述推理可得

$$I_{m,1} \le \sqrt{2}C_4(c_{\epsilon/2})^2|||\nabla\psi|||\,\|\psi\|_R.$$

最后，我们来考察 $I_{m,\ 2}$。利用 (1.31) 和柯西-施瓦茨不等式，可得

$$I_{m,2} = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_r\{V,\beta\}||\psi|^2\,dx \le C_3 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{|x|^{3-\epsilon}+|x|^{3+\epsilon}}\,dx \le 2C_3 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{(|x|^{3/2-\epsilon/2}+|x|^{3/2+\epsilon/2})^2}\,dx$$
$$\le C_3(c_{\epsilon/2})^2\|u\|_R^2.$$

将上述所有估计与 $d=3$ 处的 (4.17) 结合，并应用初等不等式 $|ab| \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$，即可得证。 — — □

4.4 时间导数

本节将对下列量给出估计

$$T := \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle,$$

它出现在 (4.1) 的左端。其中，ϕ 的定义与 (4.3) 中相同。
我们从以下引理开始。

引理 4.13。设 ϕ 为(4.3)中定义的乘子。则存在一个正常数 $C_d > 0$，它依赖于维数，使得

$$|\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle| \le C_d(\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi\|_{L^2}^2). \tag{4.23}$$

证明。结合 (2.5)、(4.18) 和哈代不等式 (2.8)，可得

$$\|iG_\phi\psi\|_{L^2} \le \left(\frac{3(d-1)}{4(d-2)}+\frac{3}{4}\right)\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 = \frac{3(2d-3)}{4(d-2)}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2$$

利用柯西-施瓦茨不等式和上述界，可得

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle| &\le \|\nabla\psi\|_{L^2}\|iG_\phi\psi\|_{L^2} + m\|\psi\|_{L^2}\|iG_\phi\psi\|_{L^2}\\ &\le c_d\Big[\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + m\|\psi\|_{L^2}\|\nabla\psi\|_{L^2}\Big]\\ &\le \frac{3}{2}c_d\Big[\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi\|_{L^2}^2\Big].\end{aligned}$$

这里我们定义

$$c_d = \frac{3(2d-3)}{4(d-2)}.$$

于是，结论由 $C_d = \frac{3}{2}c_d$. 得出 – □

4.5 能量界

在证明我们的主要结果定理 1.8–定理 1.11 之前，我们注意到，尽管原则上，如果$V \neq 0$ 动能 $\|\nabla\psi(t)\|_{L^2}$ 不守恒，对势作出适当的假设仍可对 H_D-范数给出一些先验估计，正如下述结果所明确说明的那样。

命题 4.14（范数的先验估计）。假设（*HE*）成立。则 （1.22） 的任意解ψ 都满足

$$\|H_D\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = \|\nabla\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \le \tfrac{1}{(1-a)^2}\|(H_D+V)\psi(0,\cdot)\|_{L^2}^2 \tag{4.24}$$

在证明这一结果之前，我们还需要一些初步结果。

命题 4.15。设假设（*HE*）成立，且 $\psi \in \mathcal{D}(H)$ 是 (1.22) 的一个解。则有

$$M(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)|^2\,dx = M(0) \qquad \textit{(Conservation of mass)} \tag{4.25}$$

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |(H_D+V)\psi(t,x)|^2\,dx = H(0) \qquad \textit{(Conservation of Hamiltonian)} \tag{4.26}$$

证明。 首先注意，在假设（HE）下，对于任意 $\psi \in \mathcal{D}(H_D+V)$， $H_D\psi$和 $V\psi$都属于 $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^N)$。这使得下面进行的方程运算具有严格的依据。
现在我们转而证明（4.25）中陈述的质量守恒。在（1.22）的弱形式中取 ψ 作为测试函数，并考虑所得恒等式的虚部，可得

$$\mathrm{Im}\langle i\partial_t\psi,\psi\rangle = \mathrm{Im}\langle H_D\psi,\psi\rangle + \mathrm{Im}\langle V\psi,\psi\rangle. \tag{4.27}$$

由于 H_D和 V都是自伴的，（4.27）右端的两个内积都是实数，因此右端为零。另一方面，容易看出

$$\mathrm{Im}\langle i\partial_t\psi,\psi\rangle = \mathrm{Re}\langle\partial_t\psi,\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\psi,\psi\rangle,$$

由此即可得到质量守恒。
现在我们来讨论哈密顿量守恒（4.28）。首先，我们用 $f_j \in C_c^\infty$，近似初始数据 $f \in \mathcal{D}(H)$，再用相应的解 $\psi_j = e^{itH}f_j \in C(\mathbb{R};\, H^{3/2}(\mathbb{R}^d))$。为便于阅读，以下省略下标 j。在我们的假设下，可以证明 $\partial_t(H_D+V)\psi \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)$。用这个测试函数乘以（1.22），并取所得恒等式的实部，可得

$$\mathrm{Re}\langle i\partial_t\psi,\partial_t(H_D+V)\psi\rangle = \mathrm{Re}\langle(H_D+V)\psi,\partial_t(H_D+V)\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(H_D+V)\psi\|^2. \tag{4.28}$$

此处的括号表示 $H^{1/2}$ 与 $H^{-1/2}$. 之间的对偶配对。由于 (H_D+V) 是自伴的，且与 ∂_t 对易，因此内积 $\langle\partial_t\psi,\ \partial_t(H_D+V)\psi\rangle$ 为实数，故 $\mathrm{Re}\langle i\partial_t\psi,\ (H_D+V)\partial_t\psi\rangle = \mathrm{Re}\ i\langle\partial_t\psi,\ (H_D+V)\partial_t\psi\rangle = -\,\mathrm{Im}\langle\partial_t\psi,\ (H_D+V)\partial_t\psi\rangle = 0.$。代入 (4.28)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(H_D+V)\psi\| = 0. \tag{4.29}$$

这就得到了近似解 ψ_j. 的 (4.26)。原解对应的恒等式则通过取极限得到。

□

注 4.16。 哈密顿量守恒 (4.26) 可以直接由以下更一般的结果推出。设 K 是一个自伴时不变算子，使得 $K\partial_t\psi \in \mathcal{D}(H_D+V)$ 且 $[K, H_D+V]=0$。那么 $\langle(H_D+V)\psi(t,\ \cdot)\ K\psi(t,\ \cdot)\rangle$ 守恒。证明沿用相同的论证：在 (1.22) 中取 $K\partial_t\psi$ 为测试函数，并对所得恒等式取实部。

现在我们可以证明命题 4.14 了

命题 *4.14* 的证明。由 (1.8) 和 (1.21)，我们有

$$\|V\psi(t,\cdot)\|_{L^2} \le a\|\nabla\psi(t,\cdot)\|_{L^2} \le a\sqrt{\|\nabla\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2} = a\|H_D\psi(t,\cdot)\|_{L^2}$$

由此并利用三角不等式，我们得到

$$\|H_D\psi(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|(H_D+V)\psi(t,\cdot)\|_{L^2} + \|V\psi(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|(H_D+V)\psi(t,\cdot)\|_{L^2} + a\|H_D\psi(t,\cdot)\|_{L^2}$$

将此结果与 (4.26) 结合，证明得证。 □

注 4.17。 当满足假设（HE）时，利用 (1.21)，我们可以将 (4.24) 修改如下

$$\|\nabla\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \le \tfrac{(1+a)^2}{(1-a)^2}\left(\|\nabla\psi(0,\cdot)\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi(0,\cdot)\|_{L^2}\right)$$

这一结果可以解释为，方程 (1.22) 的解的 H_D-范数几乎守恒。因此，定理 1.8–1.11 中出现的项 $\|(H_D+V)\psi(0,\ \cdot)\|_{L^2}^2$ 可以替换为 $\|\nabla\psi(0,\ \cdot)\|_{L^2}^2 + m^2\|\psi(0,\ \cdot)\|_{L^2}^2$.

4.6 局部平滑估计的证明

有了以上所有工具，我们终于可以证明定理 1.8 至定理 1.11 中的结果。我们将从高维情形的结果开始 $d \geq 4$，即定理 1.11。

定理 *1.11* 的证明。 由恒等式 (4.1) 可得

$$-\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle = K + P,$$

其中 ϕ 定义于 (4.3) 中， K 如 (4.5) 中所述， P 定义于 (4.13) 中。由命题 4.3 中关于 K 的界可得

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle \geq \frac{(d-1)}{4d}\frac{1}{R}\int_{|x|\leq R}|\nabla\psi|^2\,dx + \frac{(d-1)(d-3)}{8}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx \\ + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\partial_\tau\psi|^2}{|x|}\,dx + \frac{(d-1)}{16}\frac{1}{R^2}\int_{|x|=R}|\psi|^2\,d\sigma - |P|.\end{aligned}$$

利用命题 4.9 中关于 $|P|$ 的界 (4.19)，可得

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\langle H_D\psi, iG_\phi\psi\rangle \leq \delta\frac{1}{R}\int_{|x|\leq R}|\nabla\psi|^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx \\ + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\partial_\tau\psi|^2}{|x|}\,dx + \frac{(d-1)}{16}\frac{1}{R^2}\int_{|x|=R}|\psi|^2\,d\sigma,\end{aligned}$$

其中 δ 是一个明确的严格正常数，其值可由证明追溯得到。对前述估计关于时间积分，并对 $R > 0$ 取上确界，再结合 (4.23)、能量界 (4.24) 和质量守恒 (4.25)，可得

$$\begin{aligned}\delta\sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_0^\infty\int_{|x|\leq R}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt + \delta\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2}{|x|^3}\,dx\,dt \\ + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\partial_\tau\psi|^2}{|x|}\,dx\,dt + \frac{(d-1)}{16}\sup_{R>0}\frac{1}{R^2}\int_0^\infty\int_{|x|=R}|\psi|^2\,d\sigma\,dt \lesssim_d \|H\psi(0,\cdot)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

这便是要证明的结论。 □

定理 *1.10*、定理 *1.9* 和定理 *1.8* 的证明。 这些结果的证明与前一个证明步骤相同，只需对 $|P|$ 使用不同于 (4.19) 的界，即分别使用 (4.20)、(4.21) 和 (4.22)。

□

A 积分估计

本附录旨在证明 (2.10) 和 (2.11)。

(2.10) 的证明和 (2.11)。 回顾一下，对于任意可积函数 f

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,dx = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{2^j\leq|x|\leq 2^{j+1}} f\,dx. \tag{A.1}$$

得益于此，并且由于函数 $r \in (0,+\infty) \mapsto (r^{1/2-\delta} + r^{1/2+\delta})^{-2}$ 在 $0 < \delta < 1/2$ 时递减，我们可以将 (2.10) 的右侧改写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|u|^2}{(|x|^{1/2-\delta}+|x|^{1/2+\delta})^2}dx &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{2^j\leq|x|\leq 2^{j+1}}\frac{|u|^2}{(|x|^{1/2-\delta}+|x|^{1/2+\delta})^2}dx \\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{j+1}}{((2^j)^{1/2-\delta}+(2^j)^{1/2+\delta})^2}\cdot\frac{1}{2^{j+1}}\int_{|x|\leq 2^{j+1}}|u|^2dx \\ &\leq c_\delta^2|||u|||^2,\end{aligned}$$

其中我们定义了

$$c_\delta^2 := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2}{(2^{-\delta j}+2^{\delta j})^2} \approx \frac{2}{\delta\log(2)}. \tag{A.2}$$

现在考虑（2.11）。按照上述推理并使用余面积公式，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2}{(|x|^{3/2-\delta}+|x|^{3/2+\delta})^2}\,dx &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{\left(\rho^{1/2-\delta}+\rho^{1/2+\delta}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{\rho^2}\int_{|x|=\rho}|u|^2\,d\sigma\right)d\rho \\ &\le \|u\|_R^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{j+1}-2^j}{((2^j)^{1/2-\delta}+(2^j)^{1/2+\delta})^2} = \frac{c_\delta^2}{2}\|u\|_R^2.\end{aligned}$$

这就完成了（2.10）的证明。 □

致谢

L.C. 获得由 MCIN/AEI/10.13039/50110 资助的 Ram´on y Cajal RYC2021-032803-I 项目以及 Ikerbasque 的支持。
L.C、L.F. 和 F.P. 获得由 MICIU/AEI/10.130 39/501100011033 及 ERDF/EU 资助的 PID2024-155550NB-I00 项目的部分支持。
L.F. 和 F.P. 获得巴斯克政府通过 BERC 2022-2025计划提供的部分支持，以及科学与创新部通过 BCAM Severo Ochoa认证 CEX2021-001142-S/MICIN/AEI/ 10.13039/ 501100011033 PID2021-123034NB-I00（由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 /FEDER,UE 资助）提供的部分支持。

L.F. 也获得了由巴斯克政府资助的项目 IT1615-22 以及 Ikerbasque 的支持。

参考文献

[1] S. Albeverio. 关于 N 体系统连续谱中的束缚态及维里定理。《物理年刊》，71:167–276，1972。

[2] N. Arrizabalaga、L. Cossetti 和 M. Morales。论电磁狄拉克算子的点谱，2025年。[3] A. A. Balinsky 和 W. D. Evans。论泡利算子的零模。《泛函分析杂志》，179(1):120–135，2001 年。[4] J. A. Barcelo 、 A. Ruiz 和 L. Vega。亥姆霍兹方程的加权估计及其若干应用。《泛函分析杂志》，150(2):356–382，1997年。[5] A. Berthier 和 V. Georgescu。论狄拉克算子的点谱。《泛函分析杂志》，71(2):309–338，1987年。[6] N. Boussa¨ıd 和 A. Comech。论非线性狄拉克方程的谱稳定性。《泛函分析杂志》，271(6):1462–1524，2016年。[7] B. Cassano 和 F. Pizzichillo。库仑型球对称势下狄拉克算子的自伴扩张。《数学物理通讯》，108(12):2635–2667，2018年。[8] P. Constantin 和 J. Saut。色散方程的局部光滑性质。《美国数学会杂志》，1(2):413–439，1988年4月。[9] L. Cossetti、L. Fanelli 和 D. Krejˇciˇr´ık。通过乘子法证明狄拉克与泡利哈密顿算子不存在特征值。《数学物理通讯》，379(2):633–691，2020年。

[10] L. Cossetti 和 D. Krejcirik。维里定理与谱理论中的乘子法，2024年。[11] J.-C. Cuenin、A. Laptev 和 C. Tretter。实轴上非自伴狄拉克算子的特征值估计。《亨利·庞加莱年刊》，15(4):707–736，2014年。[12] P. D’Ancona 和 L. Fanelli。具有磁势的色散方程的 Strichartz 估计和平滑估计。《偏微分方程通讯》，33(6):1082–1112，2008年。[13] P. A. M. Dirac。电子量子理论。《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学与物理学论文集》，117(778):610–624，1928年。[14] J. Dolbeault、M. J. Esteban 和 E. S´er´e。带间隙算子的特选自伴扩张与特征值：狄拉克-库仑算子的应用。《谱理论杂志》，13(2):491–524，2023年。[15] M. B. Erdo˘gan、M. Goldberg 和 W. R. Green。二维及更高维狄拉克算子的极限吸收原理与 Strichartz 估计。《数学物理通讯》，367(1):241–263，2019年。[16] M. J. Esteban、M. Lewin 和 E. S´er´e。一般电荷分布下的狄拉克-库仑算子 I：特选扩张与极小极大公式。《亨利·勒贝格年刊》，4:1421–1456，2021年。[17] L. Fanelli 和 D. Krej˘ci˘r´ık。三维非自伴狄拉克算子特征值的位置。《数学物理快报》，109(7):1473–1485，2019年。[18] T. Friedrich。《黎曼几何中的狄拉克算子》，《数学研究生教材》第25卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。由 Andreas Nestke 从1997年德文原版译出。[19] V. Georgescu 和 M. M˘antoiu。论奇异狄拉克型哈密顿量的谱理论。《算子理论杂志》，46(2):289–321，2001年。[20] R. T. Glassey。论非线性薛定谔方程柯西问题解的爆破。《数学物理学杂志》，18(9):1794–1797，1977年9月。[21] S. Herr、C. Maul´en 和 C. Mu˜noz。非线性狄拉克方程解的衰减，2025年。[22] S. Herr、C. Maul´en 和 C. Mu˜noz。非线性狄拉克方程解的衰减：二维情形，2026年。[23] D. Hundertmark 和 H. Kova˘r´ık。泡利算子与狄拉克算子不存在嵌入特征值。《泛函分析杂志》，286(4):论文编号110288，35页，2024年。[24] S. I. Pohozaev。方程 $\delta u + \lambda f(u) = 0$ 的特征函数。《苏联数学文摘》，6:1408–1411，1965年。[25] H. Kalf。狄拉克算子不存在特征值。《爱丁堡皇家学会会刊：A辑数学》，89(3–4):309–317，1981年。[26] E. H. Lieb 和 M. Loss。磁场下库仑系统的稳定性。II. 多电子原子与单电子分子。《数学物理通讯》，104(2):271–282，1986年。[27] C. S. Morawetz。非线性克莱因-戈尔登方程的时间衰减。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，306:291–296，1968年。[28] B. Perthame 和 L. Vega。亥姆霍兹方程的 Morrey–Campanato估计。《泛函分析杂志》，164(2):340–355，1999年。[29] S. N. Roze。论狄拉克算子的谱。《理论与数学物理》，2(3):275–279，1970年。[30] P. Sj¨olin。薛定谔方程解的正则性。《杜克数学杂志》，55:699–715，1987年。

[31] B. Thaller.《狄拉克方程》。物理学文本与专著。施普林格出版社，柏林，1992年。[32] L. Vega.薛定谔方程：逐点收敛至初始数据。《美国数学会会刊》，102(4):874–878，1988年1月。[33] V. Vogelsang.长程势下狄拉克方程的嵌入特征值不存在。《*Analysis*》，7(3-4):259–274，1987年。[34] V. E. Zakharov.朗缪尔波的塌缩。《苏联实验与理论物理学杂志》，35:908，1972年1月。