arXiv:2603.22957v1 [math.QA] 24 Mar 2026

Soergel 双模的泡沫化方法

米哈伊尔·霍瓦诺夫、路易-阿德里安·罗伯特和埃马纽埃尔·瓦格纳

摘要。本文旨在建立某个泡沫 2-范畴与 A 型奇异 Soergel 双模范畴之间的 2-等价。

目录

1. 引言 1致谢 3约定 32. 网与泡沫 42.1. （复合）位置 42.2. 网 42.3. 泡沫 63. Soergel 双模 113.1. 固定约定 113.2. 图示表示 123.3. 关于2-态射 144. 2-等价 144.1. 一个表示2-函子 144.2. 引理证明 4.7 17参考文献 20

1. 引言

链环同调理论在过去三十年间得到发展和研究。它们范畴化了量子链环不变量。人们使用了不同的工具来构造这些同调理论。其中，最强大但仍有些神秘的理论之一是 HOMFLY-PT 同调，也称为三重分次同调 [KR08b]。它是利用 A 型 Soergel 双模 [Kho07]。

HOMFLY-PT 同调理论将双变量 HOMFLY-PT 多项式 [FYH+85, PT88], 范畴化；该多项式可特化为任意非负整数 N 对应的单变量 $\mathfrak{gl}_N$-多项式链环不变量。后者是量子变形李代数 $\mathfrak{gl}_N$ 或 $\mathfrak{sl}_N$ 及其基本表示 [Tur88, RT90]的 Reshetikhin–Turaev 量子不变量。双分次 $\mathfrak{gl}_N$ Khovanov–Rozansky 链环同调 [KR08a] 是单变量 $\mathfrak{gl}_N$-链环不变量的一种范畴化。这一同调理论最初以矩阵分解定义，后来则改用泡沫 [MV08, MSV09], 来重新定义；泡沫是平面图之间合适的余边界。这一构造使用了适用于曲面的 Kapustin-Li 求值公式 [KL03], , 并将其推广到泡沫 [KR07]。

HOMFLY-PT 多项式与单变量 $\mathfrak{gl}_N$- 链环不变量之间的关系通过拉斯穆森谱序列 [Ras15]进行范畴化。

Soergel 范畴具有二维图示描述，该描述最初在A 型中由 [EK10], 发现；另请参见 [Eli16]关于奇异 Soergel 2-范畴的推广。在这一描述中，Soergel 范畴内生成双模（Bott-Samelson 双模）的张量积之间的态射，由适当图表的线性组合模去定义关系给出。Mackaay 和 Vaz [MV10] 提出了这一描述的三维提升，其中双模的 Bott-Samelson 张量积由平面上的类辫图网表示，而它们之间的态射则由三维结构的线性组合给出。这些结构是类辫泡沫，位于 $\mathbb{R}^3$ 并满足特定的边界条件。更确切地说，Mackaay 和 Vaz 构造了一组从 A型Soergel 范畴到适当泡沫范畴（由类辫泡沫构成）的函子，并证明这些函子的并在态射上是单射。可以将泡沫描述视为 Soergel 范畴的三维表示，而 [EK10]中的图示描述是二维的，可以非正式地将其描述为泡沫描述的全息编码。

另一种泡沫研究方法是通过范畴化 Howe 对偶发展起来的，见 [LQR12、QR16、QR18、RW16、MY19] 以及许多其他论文。这种方法将研究范围限定于类梯形图网或类辫图网，以及它们之间的泡沫协边。通过与 KLR 代数和完全范畴化量子群的比较，可以证明由此得到的三维结构是非退化的。采用这种方法，Wedrich 建立了泡沫与 Soergel 范畴之间的联系 [Wed19], , 他定义了一个 2-函子，将类梯形图网及泡沫构成的 2-范畴映射到奇异 Soergel 双模构成的 2-范畴。这一思路构成了此后许多研究进展的基础，参见 [RW20b、QRSW21]。

发展泡沫理论的第三种方法是使用 Robert–Wagner 泡沫求值公式 [RW20a、RW20b]。本文采用这种方法。本文旨在建立奇异 Soergel 双模构成的 2-范畴与类辫泡沫构成的 2-范畴之间的 2-等价（本文称后者为*bl*-泡沫）。这解决了 [RW20b第 4 节中的猜想。3], 精确表述见定理4.6，并进一步发展了在 [MV10、Wed19]中发现并发展起来的泡沫与 Soergel 双模之间的关系。

本文的主要新结果涉及这两个 2-范畴中的 2-态射，可改述如下：

定理。 奇异 *Soergel* 双模之间的任意态射，都可以唯一地表示为泡沫的线性组合，模 ∞-等价关系。

最后，我们提到，泡沫视角应用于奇异 Soergel 双模的优势在于，它能大幅简化代数计算：进一步将奇异 Soergel 双模本身的元素也解释为泡沫，见第 4.1 节对这一表示函子的介绍。泡沫上的计算启发了 [QRSW21]中的定义与构造。特别是，这提供了一种便捷的方法来得到双模映射的复杂显式公式；我们在图 1中给出了一个示例。我们相信这一视角还可以进一步拓展，并计划在未来的工作中继续探索。

在我们的构造中，我们不取 Karoubi 完备化；我们所称的奇异 Soergel 2-范畴也可以称为奇异 Bott–Samelson 双模 2-范畴。

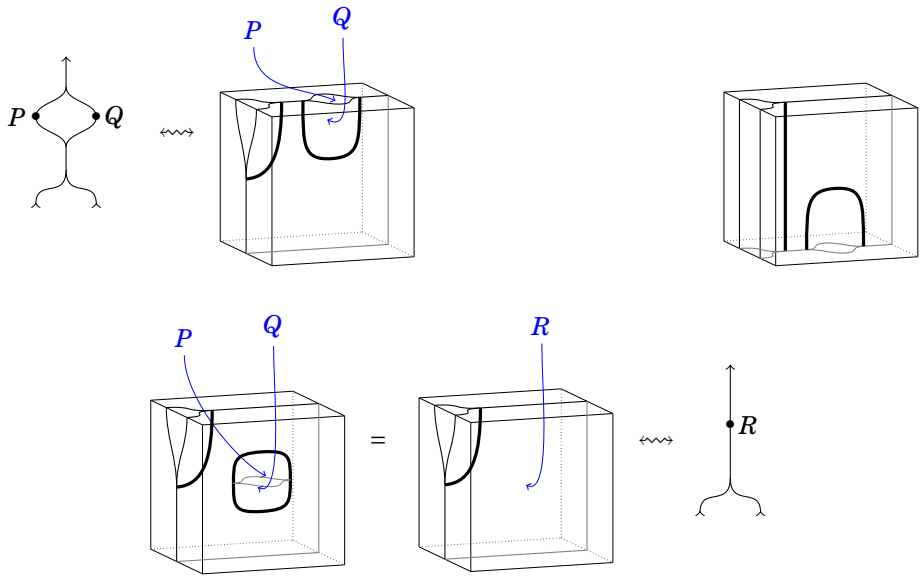


图 1. 顶排左侧展示了 Soergel 双模中的一个元素与其泡沫对应物之间的对应关系：右侧是一个元素型的树状 bl-泡沫，以及一个态射型 bl-泡沫的例子。第二排最左侧的图表示元素型 bl-泡沫，它是顶排中 Soergel 双模元素的（泡沫表示）经由顶排的泡沫态射作用后的像。等式在 ∞-等价意义下成立，其中 R 是对称多项式 $\sum_{I\sqcup J=\{1,\dots,a+b\}} \#I=a, \#J=b} P(x_I)Q(x_J)\prod_{i\in I, j\in J}(x_i - x_j)$（其中 P（分别为 Q）位于厚度为 a（分别为 b）的面片上）。

除引言外，本文分为三节。第 2 节介绍 bl-泡沫的 2-范畴（类辫泡沫），第 3 节介绍奇异 Soergel 双模（类型 A）。最后，第 4 节建立 2-范畴等价。

致谢。 M.K.部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2204033 项目和西蒙斯合作奖 994328“低维拓扑中的新结构”的资助。L.-H. R. 未获得任何与项目相关的资助。E.W.部分获得了法国国家研究署项目 Caget（ANR-25-CE40-4162）的资助。

约定。 出于对称性考虑，我们将空间及其间的同态按 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 而非 $\mathbb{Z}$ 分次。

若 $M = \bigoplus_{i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} M_i$ 是一个分次加性范畴中的对象，且 s 是半整数，则 $q^s M$ 表示将分次对象 M 向上移 s 所得的对象，即 $(q^s M)_i = M_{i-s}$。更一般地，若 $P = \sum_s a_s q^s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$，定义：

$$P(q)M := \bigoplus_s (q^s M)^{\oplus a_s}.$$

本文始终使用量子二项式的平衡形式，因此 $[2] = q^{-1} + q$。

2. 网与泡沫

2.1. （复合）组成。在全文中，$\mathbb{k}$表示非负整数。回顾一下，k 的组成是一个有限的正整数序列，其和为$\mathbb{k}$。除非另有说明，组成均指$\mathbb{k}$的组成。如果$k = (k_1,\dots, k_\ell)$是一个组成，则整数 $\mathrm{sh}(k) = \sum_{1\le i<j\le \ell} k_i k_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} k_i(\mathbb{k} - k_i)$称为$k$的移位。由$\mathbb{k}$ 个 1 组成的组成记作 $1^{\mathbb{k}}$。它的长度为$\mathbb{k}$ ，且移位为 $\binom{\mathbb{k}}{2}$。长度为 1 的组成（k）记作$\mathbb{k}$ ，其移位为0。

一个复合k' 是一个复合*decomposition* ，如果它是由复合$k = (k_1,\dots,k_\ell)$ 分解而来，并且k' 可以通过按原有顺序拼接复合$k_1,\dots,k_\ell$ 得到。特别地，k' 的长度大于或等于k ，且 $\mathrm{sh}(k')$ 大于或等于 $\mathrm{sh}(k)$。复合 $1^{\mathbb{k}}$ 是任意复合的分解，而任意复合都是$\mathbb{k}$的分解。如果k' 是k 的一个分解，且该分解的长度 ℓ' 等于 $\ell + 1$，其中 ℓ 是k的长度，那么分解k'就是初等的。例如，$(3,4,1,2,4)$ 是 $(3,4,3,4)$ 的一个初等分解。

一个位置 是一个有序对 (k, p)，其中$k = (k_1,\dots,k_\ell)$ 是$\mathbb{k}$ 的一个复合，而$p = (p_1,\dots,p_\ell)$ 是 $(0,1)$ 中一个长度为 ℓ 的严格递增点序列。可以将点p_i 视为携带整数k_i，因此我们常将位置 (k, p) 记作p。采用此记号，我们定义 $\pi(p) := k$ 为该位置p的“组合部分”。位置的移位 就是其组合部分 $\pi(p)$的移位，见上文。

2.2. 网。

2.2.1. 概述。一个部分带领圈曲面是一个对 (Σ, ι_Σ)，其中 Σ 是一个曲面，带有光滑嵌入 $\iota_\Sigma\colon \partial_c\Sigma \times [0;1[\to \Sigma,$ ，该映射将 $\partial_c\Sigma \times \{0\}$ 恒等地映到 $\partial_c\Sigma$，其中 $\partial_c\Sigma$ 是 $\partial\Sigma$的余维 0 闭子流形。

设 Σ 是一个部分带领圈曲面。Σ 中的一个网 是一个定向单三价图Γ ，它光滑地嵌入于 Σ 中，并带有厚度函数 $\mathrm{th}\colon E(\Gamma) \to \mathbb{N}_{>0}$，满足流条件和边界条件：

- 流条件：每个三价顶点都应符合以下两种局部模型之一：



注意，这是对函数 th 以及 Γ 嵌入Σ方式的条件。

- 边界条件：单价顶点的集合（记为 $\partial\Gamma$）位于 $\partial_c\Sigma$（即网 Γ 适当嵌入于 Σ中），并且对于一个 $\epsilon > 0$、 $\Gamma \cap \iota_\Sigma\big(\partial\Sigma \times [0;\ \epsilon)\big) = \iota_\Sigma\big((\partial\Gamma) \times [0;\ \epsilon)\big)$。该条件意味着，在其边界的邻域内，$\Gamma$ 以一种与曲面的领圈相容的方式嵌入。这使得粘合网时不会出现问题。注意， Γ的厚度函数为 $\partial\Gamma$ 中的每一点赋予一个厚度。

假设 Σ 配备了黎曼度量g。那么，对网 Γ的三价顶点局部模型施加的条件是， Γ 的定向在 $\Gamma \subseteq \Sigma$的每一点x 处定义一个单位切向量u_x 。进一步假设 Σ配备了向量场V。若网 *directed* Γ 位于(Σ, g, V)上，且对所有$x \in \Gamma$，都有$g(u_x, V_x) > 0$，则称其为有向网。

令I 表示标准单位区间 $[0,1]$。下文我们关注 $\mathbb{D}$ 中的有向网：$=I\times I\subseteq\mathbb{R}^2$，带有部分领圈 $\partial_c\mathbb{D}=I\times\{0,1\}$，并配备由 $\mathbb{R}^2$ 中的标准标量积导出的标准黎曼度量以及$V=\partial_y$。这类网称为类辫图网，简称*bl*-网。bl-网 Γ 的边界由$I\times\{0\}$中的位置p^0和$I\times\{1\}$中的位置p^1组成。称Γ 为从p^0 到p^1的bl-网。有向性意味着这两个位置包含相同数量的点$\mathtt{k}$。

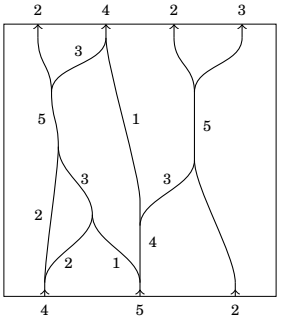


图 2. 一个带有$\mathtt{k}=11$的 bl-web 示例。它是从 (4,5,2) 到 (2,4,2,3) 的态射。

若一个 bl-web 的所有三价顶点高度各不相同[1]，则称其为良好呈现。

为便于后续使用，我们引入 bl-网的移位：若v 是一个合并顶点，将厚度为a 和b 的边合并为一条厚度为$a+b$ 的边，或将一条厚度为$a+b$ 的边分裂为厚度分别为a 和b的边，则将v 的移位定义为 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 中记作 $\mathrm{sh}(v)$ 的元素，其值为$ab-2$。bl-web Γ 的移位记作 $\mathrm{sh}(\Gamma)$，等于其各顶点移位之和。

2.2.2. *bl-web* 的1-范畴。可以考虑由层级$\mathtt{k}$的 bl-web 构成的范畴$\mathbf{BlWeb}_{\mathtt{k}}$，其中：

- 对象是$\mathtt{k}$的位置。
- 从位置p^0 到位置p^1 的态射，是从p^0 到<style id='p1 的 bl-web，视为在边界处保持不变的（bl-web 之间的）环境同痕类。
- 复合通过堆叠和重新缩放定义。值得注意的是，（部分）领圈条件确保两个 bl-web 的复合是光滑的。

注 2.1. (1) 如果一个 bl-网 $\Gamma\colon \mathrm{p}^0\to\mathrm{p}^1$ 没有顶点，那么 $\pi(\mathrm{p}^0)$ 和 $\pi(\mathrm{p}^1)$ 相等，并且 Γ是 $\mathrm{BlWeb}_{\mathtt{k}}$ 中的一个同构（事实上，这个同构是唯一的）。(2) 反过来，如果 p^0 和 p^1 是满足 $\pi(\mathrm{p}^0)=\pi(\mathrm{p}^1)$ 的位置，那么它们在 $\mathrm{BlWeb}_{\mathtt{k}}$ 中通过唯一的同构彼此同构。这个同构记作 $\mathrm{p}^0\mathrm{I}p^1$。(3) 如果一个 bl-网 $\Gamma\colon \mathrm{p}^0\to\mathrm{p}^1$ 有唯一的分裂（分别为合并）顶点，那么 $\pi(\mathrm{p}^1)$（分别为 $\pi(\mathrm{p}^0)$）是 $\pi(\mathrm{p}^0)$（分别为 $\pi(\mathrm{p}^1)$）的一个初等分解。

[1]高度 指I^2中的第二坐标。

(4) 如果 $\Gamma, \Gamma' : \mathrm{p}^0 \to \mathrm{p}^1$ 是两个各有唯一顶点的 bl-网，那么在 BlWeb_k中，$\Gamma = \Gamma'$，我们将这个态射记作 $\mathrm{p}^0 \mathrm{V} p^1$。(5) 每个 bl-网都同痕于一个三价顶点坐标各不相同的网。因此，BlWeb_k 的所有态射都是 ".V."s 和 ".I."s 的复合。以这种方式复合得到的 bl-网称为良好呈现。(6) 设 $\Gamma : \mathrm{p}^0 \to \mathrm{p}^1$ 是一个 bl-网。考虑 $\Gamma^\dagger$，即沿 $\mathrm{I} \times \{\frac{1}{2}\}$ 对 Γ 取镜像并反转所有定向所得的图形。它是一个从 p^1 到 p^0的 bl-网。这个过程赋予 BlWeb_k 一个 dagger 结构，即一个在对象上为恒等的反变对合自函子 †。(7) 范畴 $\mathrm{BlWeb} := \bigsqcup_k \mathrm{BlWeb}_k$ 带有一个幺半群结构 $\sqcup$，它来自水平（不相交）堆叠和重新缩放。(8) BlWeb 的 dagger 结构与幺半群结构相容，具体来说：$(\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2)^\dagger = \Gamma_1^\dagger \sqcup \Gamma_2^\dagger$。

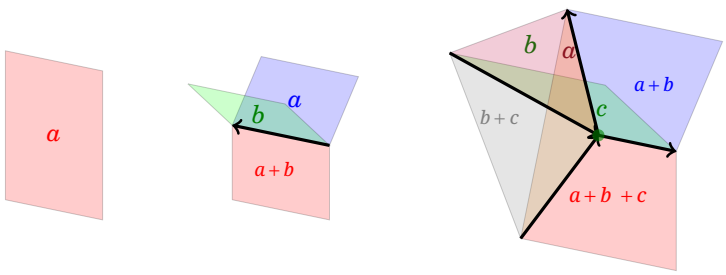
2.3. 泡沫。

2.3.1. 一般性。

定义 2.2。一个泡沫 F 是由面片 $F^{(2)} = (\Sigma_i)_{i \in I}$组成的集合，即由有限个带边界的定向连通曲面构成，并附带以下数据：

- 一个厚度函数 $\mathrm{th}: (\Sigma_i)_{i \in I} \to \mathbb{N}_{>0}$。
- 一组装饰，也就是说，对于每个面片$f \in F(2)$，指定一个关于 $\mathrm{th}(f)$ 个变量的对称多项式P_f，其系数为有理数。若$P_f = 1$，则称面片f为平凡装饰。

- 沿面片边界进行的“粘合方案”，使得粘合后出现以下三种可能的局部模型：点的邻域同胚于*(i)*一个曲面、*(ii)* 一个三脚架与一个区间的乘积，或*(iii)*四面体的1-骨架的锥，如下图所示。

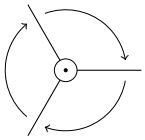


面片上出现的字母表示该面片的厚度。因此，泡沫由面片、粘合线或粘合线（它们是连通紧致定向一维流形）以及奇异顶点组成。每条粘合线带有：

– 一种定向，它与厚度为a 和b 的面片定向一致，但与厚度为$a + b$的面片定向相反。这样的粘合线具有类型 $(a, b, a + b)$。– 其周围三个面片的循环次序。当泡沫嵌入 $\mathbb{R}^3$时，我们要求这一循环次序相对于其定向符合左手定则[2]，中间的虚线圆圈表示

[2]这与 Khovanov 在 [Kho04]. 中使用的约定一致

即粘合的定向指向读者）。



与奇异顶点相邻的不同粘合线的循环次序应当彼此兼容。这意味着，奇异顶点的一个邻域可以嵌入 $\mathbb{R}^3$ ，并且嵌入方式符合左手定则；该奇异顶点与四条粘合线相邻。

特别是，忽略泡沫的厚度装饰和定向后，它具有紧致有限二维 CW 复形的结构。

记 $\mathscr{S}$为F各面片边界圆的集合。粘合方案包括：

- 取 $\mathscr{S}$的子集 $\mathscr{S}_\prime$ ，并将 $\mathscr{S}_\prime$ 中的每个圆细分为有限个闭区间。由此得到闭区间的集合 $\mathscr{I}$ 。
- 将 $\mathscr{I} \cup (\mathscr{S} \setminus \mathscr{S}_\prime)$划分为若干含三个元素的子集。对于该划分中的每个子集 $(Y1, Y2, Y3)$，固定三个微分同胚 $\phi_1 : Y_2 \to Y3$、 $\phi_2 : Y_3 \to Y1$、$\phi_3 : Y_1 \to Y2$，使得 $\phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \mathrm{id}_{Y2}$。

泡沫的粘合线是圆（ $\mathscr{S} \setminus \mathscr{S}_\prime$ 的元素）和区间（包含在 $\mathscr{S}_\prime$ 的圆中），上述粘合方案说明了如何沿公共的粘合区间和圆粘合三个面片。

泡沫的概念自然延伸为带边界的泡沫。泡沫的边界具有网的结构。为了能够以规范的方式将面片和粘合线粘合在一起，我们要求它们与边界局部正交。若要强调泡沫没有边界，我们称其为闭合。

定义 2.3. 设F 为一个闭合泡沫，并固定一个大于或等于F的面片最大厚度的整数$\mathtt{N}$。将厚度为a 的每个面片替换为$a(\mathtt{N}-a)$个该面片的副本，即可构造一个曲面 $\Sigma_{\mathtt{N}}(F)$。沿接缝和奇异顶点粘合这些平行副本，得到 $\Sigma_{\mathtt{N}}(F)$。F的$\mathtt{N}$-次数 是由 $\deg_{\mathtt{N}}(F)$ 定义的整数：

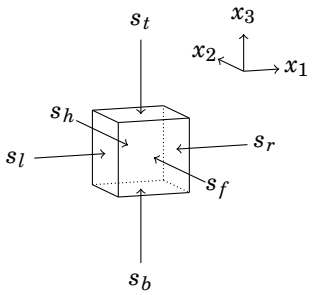
$$\deg_{\mathtt{N}}(F) := -\chi(\Sigma_{\mathtt{N}}(F)) + 2 \sum_{f \in F^{(2)}} \deg(P_f). \tag{1}$$

按照 [RW20a], $a(\mathtt{N}-a)$ 是对于给定的$\mathfrak{gl}_{\mathtt{N}}$着色，包含该面片的双色曲面的数量，其中面片中的颜料有a 种选择，而不在面片中的颜色有$\mathtt{N}-a$ 种选择。

当泡沫F 不闭合时，可以使用同一公式，但次数还需额外移移位一个仅取决于F 边界的量（见定义 2.5 和 4.1）。

2.3.2. *bl*-泡沫的2-范畴。 考虑立方体$C = I^3$ ，其边界按如下方式参数化：符号$s_\bullet$ 表示C边界的6个正方形，字母f、h、l、r、b、t 分别代表**f**ront（前）、**h**idden（隐藏）、**l**eft（左）、**r**ight（右）、**b**ottom（底）和**t**op（顶）。平面P 与正方形sf 和s_h平行。

定义 2.4. 设F 是嵌入在C中的带边界的泡沫。假设F的边界包含于$s_l \cup s_r \cup s_b \cup s_t$中，且 MOY 图$F \cap s_l$、$F \cap sr$,



$s_b = I^2 \times \{0\}$
$s_t = 我^2 \times \{1\}$
$sf = I \times \{0\} \times I$
$s_h = I \times \{1\} \times I$
$s_l = \{0\} \times 我^2$
$s_r = \{1\} \times I^2$

图 3. 标准立方体的参数化与记号。

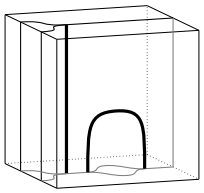


图 4. 态射型泡沫的示例。

$F \cap s_b$ 和 $F \cap s_t$ 均为类辫的。若对于 F 上的每一点 x，泡沫 F 在 x 处的法线与 P 不平行，则称 F 为 *bl*-泡沫。

设 p^0 和 p^1 是两个位置，$\Gamma_0, \Gamma_1 \colon p^0 \to p^1$ 是两个 bl-web。若 bl-泡沫 F 满足 $F \cap s_b = -\Gamma_0, \overline{F} \cap s_t = \overline{\Gamma_1}, F \cap s_l = -p^0 \times I$ 且 $F \cap s_r = \overline{p^1} \times \overline{I}$，则 FF 是态射型的，我们记作：$F \colon \Gamma_0 \to \Gamma_1$。

定义 2.5. 设 $\Gamma_0, \Gamma_1 \colon \Gamma_0, \Gamma_1 \colon p^0 \to p^1$ 是两个 bl-web，且 $F \colon \Gamma_0 \to \Gamma_1$ 是一个态射型泡沫。定义 F 的次数为：

$$\deg(F) := -\chi(\Sigma_{\mathrm{k}}(F)) + 2\sum_f \deg(P_f) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell^0} k_i^0(\mathrm{k} - k_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell^1} k_j^1(\mathrm{k} - k_j^1), \tag{2}$$

其中 $k^0 = (k_1^0, \ldots k_{\ell^0}^0)$（分别地 $k^1 = (k_1^1, \ldots k_{\ell^1}^1)$）是 k 在底层 p^0 和 p^1 上的复合。

根据此定义，我们可以构造 2-范畴 $\mathsf{TopBlFoam}_{\mathrm{k}}$：

- 对象是 k 的位置，
- 1-态射是 bl-网，
- 2-态射是态射型 bl-泡沫，按边界相对同伦视为等价。

1-态射和 2-态射的复合通过粘合和缩放给出。在 2-态射的复合中，装饰满足乘法性：复合中 $F \circ G$ 的面片 f 的装饰，等于构成 f 的 F 和 G 的面片装饰之积。bl-泡沫的次数或态射型相对于垂直复合和水平复合呈加性。

注 2.6。 2-范畴 $\mathsf{TopBlFoam}:=\bigsqcup_{k\geq 0}\mathsf{TopBlFoam}_k$ 具有幺半范畴结构，$k\geq 0$其定义为取不交并并沿 x_2-方向重新缩放（参数化见图3）。

顾名思义，$\mathsf{TopBlFoam}_k$ 是一个具有拓扑风格的范畴，类似于余边界范畴。为了引入该范畴的一个更具代数性质的版本，我们需要 ∞-等价的概念。

2.3.3. ∞-等价。 在 [RW20a], 中，对任意整数N，定义了闭合泡沫的 $\mathfrak{gl}_N$-求值。记作 τ_N。它将每个闭合泡沫F 关联到一个元素 $\tau_N(F)\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_N]^{\mathfrak{S}_N}$。具有共同边界 Γ 的两个泡沫的 $\mathbb{Q}$-线性组合$\sum_i \lambda_i F_i$ 和$\sum_j \mu_j G_j$ 称为 ∞-等价 ，如果对于任意一个边界为$-\Gamma$的泡沫H 以及任意整数N，以下恒等式成立：

$$\sum_i \lambda_i \tau_N(H\circ F_i)=\sum_j \mu_j \tau_N\left(H\circ G_j\right).$$

顾名思义， ∞-等价是一种等价关系，且它是齐次的，因此泡沫空间模去 ∞-等价后自然成为分次空间。

现在我们可以构造 2-范畴blFoam_k：

- 对象是 k 的复合，
- 1-态射是经过 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 分次平移的 bl-网的直和，
- 2-态射 2Hom 是形式上的 $\mathbb{Q}$ 线性组合的泡沫矩阵，其次数由分次平移之差规定，其中线性组合视为模 ∞-等价。

如处理分次范畴时通常所做的，若 Γ_0、Γ_1: $p^0\to p^1$ 是两个 bl-网，则通过对所有分次平移下的 2-态射求和，定义分次 $\mathbb{Q}$ 向量空间：

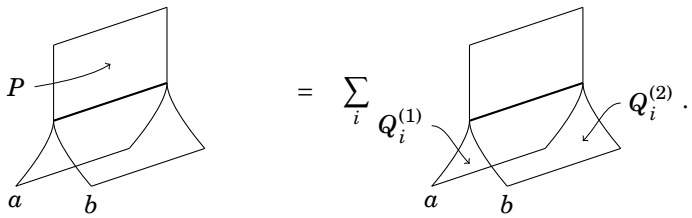
$$2\mathrm{HOM}_{\mathsf{blFoam}}(\Gamma_0,\Gamma_1)=\bigoplus_{i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} 2\mathrm{Hom}_{\mathsf{blFoam}}(\Gamma_0,q^i\Gamma_1).$$

与 $\mathsf{TopBlFoam}:=\bigsqcup_{k\geq 0}\mathsf{TopBlFoam}_k$ 类似，可以构造 $\mathsf{blFoam}:=\bigsqcup_{k\geq 0}\mathsf{blFoam}_k$。$k\geq 0$它继承了由不交并以及沿$x_2$-方向的重新缩放所给出的幺半范畴结构。

这里我们不打算详细介绍泡沫求值公式。不过，为便于后续使用，我们记录几条关于泡沫的局部关系，它们在 ∞-等价下成立，并以 Queffelec–Rose 的一个结果结束本节 [QR18] ，该结果对于证明定理4.6至关重要。

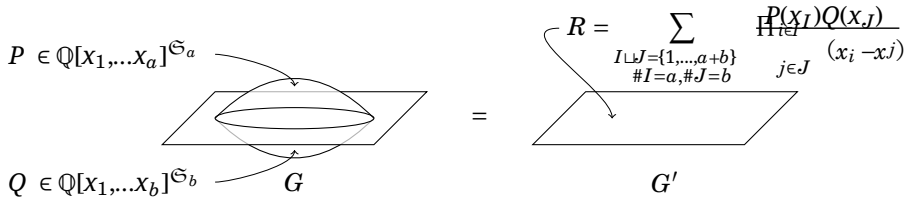
引理 2.7 (点迁移， [RW20a，公式 (11)])。 若 $P\in R[x_1,\dots,x_{a+b}]^{\mathfrak{S}_{a+b}}$ 被改写为 $a\sum i\, Q^{(1)}i\otimes Q^{(2)}i\in R[x_1,\dots,x_a]^{\mathfrak{S}_a}\otimes R[x_{a+1},\dots,x_{a+b}]^{\mathfrak{S}_b}$，则在 ∞-等价意义下，以下局部恒等式成立：

(3)



引理 2.8 (泡泡消去， [RW20a], [QRSW21，第17])。以下等式在 ∞-等价意义下成立：

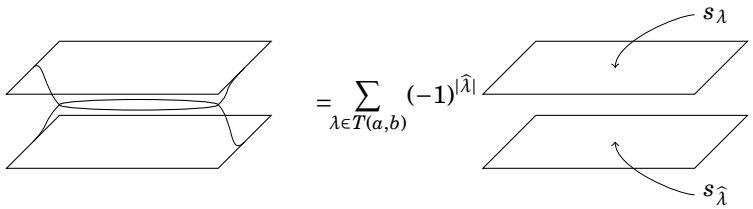
(4)



其中，泡由两个面片组成：一个厚度为 a 的圆盘（图示在顶）和一个厚度为 b 的圆盘（图示在底）。量 R 是关于 $a+b$ 个变量的对称多项式。

引理 2.9 (Diabolo 消去, [RW20a], [RW16, (4-3)])**.** 以下恒等式在 ∞-等价意义下成立：

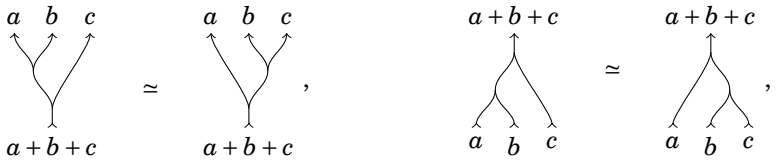
(5)



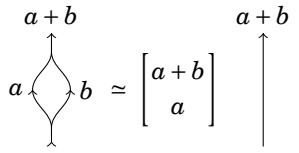
其中，左侧的泡沫由三个面片组成：两个厚度分别为 a（位于顶）和 b（位于底）的环带，以及一个厚度为 $a+b$、位于中间的圆盘。这三个面片具有共同的圆形边界。右侧的泡沫由两个互不相交的圆盘组成，厚度分别为 a（位于顶）和 b（位于底）。求和遍历所有至多有 a 行、b 列的杨图 λ，且 λ 是 λ 在 $a\times b$ 矩形中的补集的转置，因此它至多有 b 行、a 列。最后，s_λ 是与 λ 相关联的 a 个变量中的舒尔多项式，$\widehat{\ }$ $\widehat{s\lambda}$ 是与 λ 相关联的 b 个变量中的舒尔多项式，而 $|\lambda|$ 是 λ 中 $\widehat{\ }$ 个方格的数量。

命题 2.10 ([RW20a]，定理 3.30])。我们有 *blFoam* 中1-态射之间的如下同构：

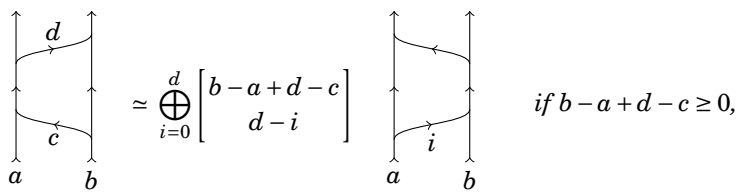
(6)

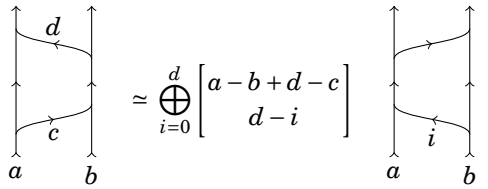


(7)



(8)



(9) 

if $a-b+d-c \geq 0$.

本文关注 blFoam，特别是在主定理的证明中，我们需要处理环形网和泡沫。从范畴论的角度来看，这意味着我们在 2-范畴 blFoam 的水平迹中工作。hTr(blFoam) 的对象是 blFoam 的 1-自同态。从 $\Gamma_0\colon \mathrm{p}^0 \to \mathrm{p}^0$ 到 $\Gamma_1\colon \mathrm{p}^1 \to \mathrm{p}^1$ 的态射是由有序对 (Γ,F) 构成的等价类，其中 $\Gamma\colon \mathrm{p}^0 \to \mathrm{p}^1$，且 $\mathrm{F}:\ \Gamma \circ \Gamma_0 \to \Gamma_1 \circ \Gamma$ 是一个 2-态射。该等价关系由以下条件生成：对于 $\Gamma,\Gamma'\colon \mathrm{p}^0 \to \mathrm{p}^1,,\ \mathrm{F}:\ \Gamma \circ\ \Gamma_0 \to \Gamma_1 \circ\ \Gamma'$，且 $\mathrm{F}'\colon\ \Gamma' \to \Gamma$，$(\Gamma,(\mathrm{Id}_{\Gamma_1}\cdot \mathrm{F}')\circ \mathrm{F})$ 与 $(\Gamma', \mathrm{F}' \circ\ (\mathrm{F}\cdot \mathrm{Id}_{\Gamma_0}))$ 等价。2-态射的竖直复合记作 $\circ$，而 $\cdot$ 表示 2-态射的水平复合。更多详情见 [QRS18, 第 4 节3]。

更具体地说，hTr(blFoam)中的态射是环形 bl-泡沫的 ∞-等价类的线性组合。这里所说的 bl-泡沫，是指其一般截面为 bl-网。

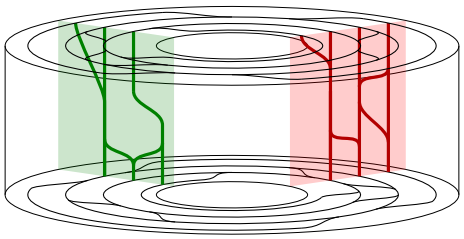


图5. 环形 bl-泡沫约束条件示意图

在 hTr(blFoam) 中，对象 Id_p 将发挥特殊作用。如果两个位置 p^0 和 p^1具有相同的底层分解，那么对象 Id_{p^0} 和 Id_{p^1} 在 hTr(blFoam) 中同构。对于每个复合 k of k，我们选取一个实现它的位置 p，并将 Id_p （在 hTr(blFoam) 中）记作 $\mathbb{S}_k$。

命题 2.11 (Queffelec–Rose 算法 [QR18，引理 5。2])。设 $\Gamma\colon p \to p$ 是hTr(blFoam)中的一个对象，那么存在多项式族 $(P_k(\Gamma))_k$ 和$(Q_k(\Gamma))_k$，它们属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q, q^{-1}]$，并以k的分解为索引，使得：

$$\Gamma \oplus \left(\bigoplus_{k} Q_k(\Gamma)\mathbb{S}_k\right) \simeq \bigoplus_{k} P_k(\Gamma)\mathbb{S}_k.$$

此外，这一分解具有算法性，即可以通过迭代使用命题*2.10*中给出的同构来实现。

该算法适用于以下两种构造：(1) 通过范畴化量子群构造的泡沫，如 [QR18], 中所述；以及 (2) 通过 Robert–Wagner 求值构造的泡沫 [RW20a] 及其 ∞-等价修改所构造的类辫泡沫和环面泡沫，见 [RW20b]及本文。

3. SOERGEL 双模

3.1. 固定约定。本节旨在介绍 A 型的奇异 Soergel 双模 2-范畴（主要是为了固定约定和记号）。在下文中，

R 是一个交换环，多项式代数 $R[x_1,...,x_k]$ 记作 $\mathbb{A}$。规定变量 x_i 的次数均为 2，从而为其赋予分次结构。它自然地受 $\mathfrak{S}_k$ 作用，其中 $\mathfrak{S}_k$ 是 k 个元素上的对称群。

对于一个复合 $k = (k_1,...,k_\ell)$，$\mathfrak{S}_k$ 表示与该复合自然关联的 $\mathfrak{S}_k$ 的抛物子群（同构于 $\prod^{\ell}_{i=1} \mathfrak{S}_{k_i}$）。代数 $\mathbb{A}^{\mathfrak{S}_k}$ 记作 $\mathbb{A}_k$，因此，特别地，$\mathbb{A}_{1^k} = \mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}_k$ 是 $x_1,...,x_k$ 中的 $\mathfrak{S}_k$-对称多项式代数。

如果 k' 是 k 的一个分解，那么 $\mathfrak{S}_{k'}$ 是 $\mathfrak{S}_k$ 的子群，因此，$\mathbb{A}_k$ 是 $\mathrm{sh}(k)$-$\mathrm{sh}(k')$ 的一个子代数。于是，（移位后的）代数 $q_2 \mathbb{A}_{k'}$ 可视为一个 $(\mathbb{A}_k, \mathbb{A}_{k'})$-双模（分别也可视为一个 $(\mathbb{A}_{k'}, \mathbb{A}_k)$-双模）。此双模记作 $kB_{k'}$（分别记作 $k'B_k$）。写作 $k_1 B_{k_2}$ 时，默认 k_1 是 k_2 的一个分解，或者反过来，k_1 是 k_2 的一个分解。这类双模及其张量积称为奇异 Bott–Samelson 双模。

R-代数 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 是由 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次 R-代数组成的 2-范畴，其中：

- 对象是 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次 R-代数；
- 1-态射是 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次双模；
- 2-态射是双模映射。

1-态射的复合通过对“中间”代数取张量积来定义。

2-范畴 R-SSoe_k 是 R-代数 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 的一个子 2-范畴：

- 对象是代数 $\mathbb{A}_k$，其中 k 遍历 k 的所有合成；
- 1-态射是奇异 Bott–Samelson 双模的复合的移位版本的直和。
- 2-态射是双模映射。

在不会造成混淆时，我们用 SSoe 代替 R-SSoe_k。文献通常关注 2-范畴 SSoe，即 SSoe 的 Karoubi 完备化。换言之，SSoe 的定义方式类似，只不过对于 1-态射，还可以取直和项。

3.2. **图示表示**。在研究 2-范畴 SSoe 之前，先陈述一些关于双模的基本事实是值得的。为此，暂时舍弃部分 2-范畴结构，转而考虑 1-范畴 **bim**，这样做更为方便：

- 对象是分次交换 R-代数，
- 态射是模同构意义下的分次双模，
- 复合由代数上的张量积给出。

在 R 上的张量积在 **bim** 上诱导出一个幺半群结构。

若 A 和 B 是交换代数，则任意 (A,B)-双模都可以视为一个 (B,A)-双模。这一简单事实在 **bim** 上诱导出一个 dagger 结构。

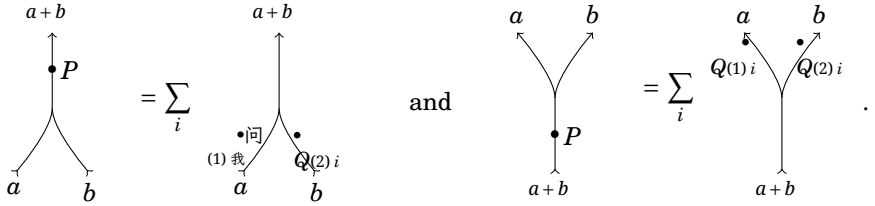
（奇异）Soergel 双模已被用于定义（带色）三重分次同调。在这一背景下，用图表表示它们很有用。形式上，这相当于使用一个 1-函子 $\mathscr{F}$，从范畴 **BlWeb** 到由下述方式定义的 **bim**。在对象上，$\mathscr{F}(p) = \mathbb{A}_{\pi(p)}$。在态射上，定义 $\mathscr{F}(pI_p) = \mathrm{Id}^{\mathbb{A}_{\pi(p)}}$（也就是说，将 $\mathbb{A}_{\pi(p)}$ 视为一个 $(\mathbb{A}_{\pi(p)}, \mathbb{A}_{\pi(p)})$-双模），并且 $\mathscr{F}(pVp') = pB_{p'}$。由于 p 显然是自身上的一个分解，因此还有 $\mathscr{F}(pI_p) = pB_p$。

[3] 复合 一词的多义性有些令人恼火；我们希望这不会造成任何混淆。当然，这里指的是作为 1-态射的复合。

这确实定义了一个函子 $\mathscr{F}$：唯一需要检查的是，两个同痕的、表示良好的 bl-web 会被映射为同构的双模。改变三价顶点顺序（相对高度）的同痕会诱导出双模的典范同构。函子 $\mathscr{F}$ 是幺半范畴的，并且保持 dagger 结构。

值得注意的是，对于良好呈现的 bl-web，我们关联的是实际的双模（而非同构类）。函子 $\mathscr{F}$ 使我们能够使用图示语言来讨论奇异 Soergel 双模。

若 Γ 是一个 bl-web，则 $\mathscr{F}(\Gamma)$中的元素可以表示为该网 Γ 各条边上的装饰的线性组合，并满足顶点处的点迁移关系。厚度为a 的边的装饰 是a 个变量的对称多项式。点迁移关系可表述如下：若$P \in R[x_1,\ldots, x_{a+b}]^{\mathfrak{S}_{a+b}}$ 被改写为 $\sum_i Q^{(1)}{}_i \otimes Q^{(2)}{}_i \in R[x_1,\ldots, x_a]^{\mathfrak{S}_a} \otimes R[x_{a+1}, \ldots, x_{a+b}]^{\mathfrak{S}_b}$，则有：



为便于阅读，只要上下文允许，我们就省略函子 $\mathscr{F}$，并将 bl-web 的图表视为双模。例如，下一条命题就是这种情况。

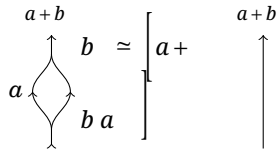
设 $(D_e)_{e\in E(\Gamma)}$ 是一组齐次装饰。它表示 $\mathscr{F}(\Gamma)$ 中的一个元素D。考虑到 $\mathscr{F}(\Gamma)$ 中的分次移位，D 的次数等于$2\sum \deg(D_e) - \mathrm{sh}(\Gamma)$。

命题3.1（民间传说，参见例如 [HRW21，附录 A] 或[QRS18，第5节。2]）。与良好呈现的 *bl-web* 相关联的双模（由 $\mathscr{F}$）满足以下恒等式：

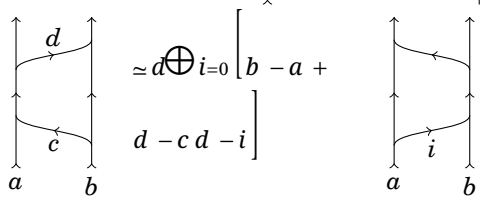
(10)



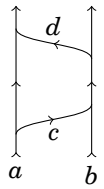
(11)

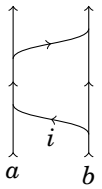


(12)



如果 $b - a + d - c \geq 0$,

(13) 

$\simeq \bigoplus_{i=0}^{d} \begin{bmatrix} a-b+d-c \\ d-i \end{bmatrix}$ 

$if\ a-b+d-c \geq 0.$

注记3.2。（1）函子 $\mathscr{F}$ 的幺半性意味着这些关系在“局部”上成立：它们两侧都可以有竖直线股包围。（2）第 4.1 节中定义的函子 Rep 以及网上的关系也意味着命题 3.1。

3.3. **关于 2-态射**。设$\boldsymbol{k}$ 是一个复合。回忆一下，${}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}}$ 是作为（$\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}},\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$）-双模考虑的代数 $\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}$（不带移位）。它是对象$\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$的恒等态射。${}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}}$ 的自同态空间同构于代数 $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$。它是一个自由分次$\boldsymbol{R}$-模；若$\boldsymbol{k}$ = （k_1,...，k_ℓ），则其关于$\boldsymbol{R}$ 的分次秩等于

(14) $$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q^{2k_i}}.$$

它也是一个自由分次$\mathbb{A}_{\mathbf{k}}$-模，其关于 $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}$ 的分次秩等于

(15) $$\prod_{i=1}^{\ell} q^{\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}})} \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ k_1 \cdots k_\ell \end{bmatrix}.$$

回忆一下，若$\boldsymbol{k}'$ 是$\boldsymbol{k}$ 的一个分解，则 $\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}$ 是 $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$的一个子代数，并且${}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}'}$（分别地，${}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}'}$）在分次平移意义下，$\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$ 被视为（$\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}},\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$）-双模（分别地，视为（$\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'},\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$）-双模）。因此，这些函子

(16) $${}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}'} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}} \cdot : \mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\text{-Mod} \to \mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\text{-Mod} \quad \text{and} \quad {}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}} \cdot : \mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\text{-Mod} \to \mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\text{-Mod}.$$

分别为归纳函子和限制函子。它们构成一个双伴随，因为二者互为左伴随和右伴随（因为 $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$ 是 $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$ 上的分次对称弗罗贝尼乌斯）。考虑分次移位后，对于任意分次 ($\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}},\mathbb{A}_{\boldsymbol{\ell}}$)-双模 $\boldsymbol{M}$ 和 ($\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'},\mathbb{A}_{\boldsymbol{\ell}}$)-双模 $\boldsymbol{N}$，有：

(17) $$\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\otimes\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{\ell}}}^{\mathrm{op}}}({}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \simeq q^{\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}}')-\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}})}\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\otimes\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{\ell}}}^{\mathrm{op}}}(\boldsymbol{M}, {}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{N}), \quad \text{and}$$

(18) $$\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\otimes\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{\ell}}}^{\mathrm{op}}}({}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}'} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}} \boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}) \simeq q^{\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}})-\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}}')}\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\otimes\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{\ell}}}^{\mathrm{op}}}(\boldsymbol{N}, {}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{M}).$$

类似地，对于任意分次 ($\mathbb{A}_{\boldsymbol{\ell}},\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}$)-双模 $\boldsymbol{M}$ 和 ($\mathbb{A}_{\boldsymbol{\ell}},\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$,)-双模 $\boldsymbol{N}$，有：

(19) $$\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{\ell}}}\otimes\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}^{\mathrm{op}}}(\boldsymbol{M} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}} {}_{\underline{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}, \boldsymbol{N}) \simeq q^{\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}}')-\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}})}\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{\ell}}}\otimes\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}^{\mathrm{op}}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}} {}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}\boldsymbol{B}_{\underline{\boldsymbol{k}}}), \quad \text{and}$$

$$\mathrm{HOM}^{\mathbb{A}_{\ell}\otimes\mathbb{A}_{\mathrm{op}\,k}}(\boldsymbol{N}\otimes_{\mathbb{A}_{k'}}{}_{k'}\boldsymbol{B}_{k}, \boldsymbol{M}) \simeq q^{\mathrm{sh}(k')-\mathrm{sh}(k)}\mathrm{HOM}^{\mathbb{A}_{\ell}\otimes\mathbb{A}_{\mathrm{op}\,k}}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}\otimes_{\mathbb{A}_{k}}{}_{k}\boldsymbol{B}_{k'}). \quad (20)$$

对于任意分次右 $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$-模 $\boldsymbol{M}$ 以及任意分次右 $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$-模 $\boldsymbol{N}$。

推论3.3。若 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是博特–萨梅尔森双模的两个复合，其中 $\boldsymbol{M}$ 是一个($\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}},\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'}$)-双模，$\boldsymbol{N}$ 是一个($\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}'},\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}$)-双模，则：

(21) $$\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}^{\mathrm{e}}}(\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}, \boldsymbol{M} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{N}) \simeq q^{2\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}}')-2\mathrm{sh}(\underline{\boldsymbol{k}})}\mathrm{HOM}_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}^{\mathrm{e}}}(\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}}, \boldsymbol{N} \otimes_{\mathbb{A}_{\underline{\boldsymbol{k}}'}} \boldsymbol{M}).$$

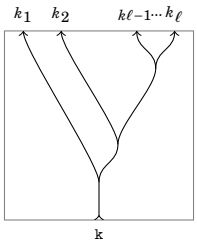
4. 2-EQUIVALENCE

4.1. **一个表示 2-函子**。本部分旨在描述一个 2-函子 $\widetilde{\mathsf{Rep}}$，它从$\mathsf{blFoam}_{\mathbf{k}}$ 映射到 $\mathbb{Q}$-$\mathsf{SSoe}_{\mathbf{k}}$。我们将这个 2-函子视为一个表示，作用于

类辫泡沫的拓扑 2-范畴，并映射到 Soergel 双模的代数 2-范畴。这个 2-函子将 bl-网映射为 Soergel 双模之间的同态，还能用泡沫来描述 Soergel 双模的元素。

从现在起，我们假设 $R = \mathbb{Q}$，从而 $\mathsf{SSoe} = \mathbb{Q}\text{-}\mathsf{SSoe}_{\mathrm{k}}$。若 p 是一个位置，且 $k = \pi(p)$ 是其组合部分，我们定义 $\mathsf{Rep}\left(p\right) = \mathbb{A}_k$。为了描述 1-态射上的 Rep，我们需要引入元素型标准树和泡沫。

回忆一下，$\underline{\mathrm{k}}$ 是长度为 1 的 k 的复合。我们也用它表示位置 $(\mathrm{k}, 1\ 2)$，也就是由 I 中的一个点（其中点）构成、权重为 k的位置。若 p 是一个位置，用 $k = (k_1,\ldots,k_\ell)$ 表示其组合部分 $\pi(p)$。固定一个形如树的标准 bl-网 $\mathsf{Y}_p : \mathrm{k} \to p$，并由下图描述：



树的具体选取并不重要；我们为每个位置固定这样一棵树。

定义 4.1. 设 p^0 和 p^1 是两个位置，且 $\Gamma\colon \mathrm{p}^0 \to \mathrm{p}^1$ 是一个 bl-web。若 bl-泡沫 F 满足 $\mathrm{F} \cap \mathrm{s}_b = -\mathrm{k} \times \mathrm{I}$、$\mathrm{F} \cap \mathrm{s}_t = \Gamma$、$\mathrm{F} \cap \mathrm{s}_l = -\mathrm{Y}_{p^0}$ 且 $\mathrm{F} \cap \mathrm{s}_r = \mathrm{Y}_{p^1}$（见图 6），则称 F 是 Γ 的元素型泡沫。元素型泡沫 F 的次数定义为：

$$\deg(F) := -\chi(\Sigma_{\mathrm{k}}(F)) + 2\sum_f \deg(P_f). \tag{22}$$

若对于任意 $t \in I$，元素型泡沫 树状 $F \cap \left(\{t\} \times I^2\right)$ 是一棵树，且所有非平凡装饰都位于与 s_t 相交的面片上，则称 bl-泡沫 F 是 树状 的。

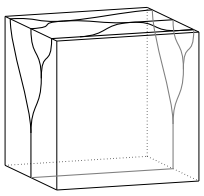


图 6. 元素型 bl-泡沫的边界条件示例。

在树状泡沫中，非平凡装饰只放置在界定顶 bl-web 的面片上。树状条件还确保此类面片与顶 bl-web 的边之间存在规范对应。因此，对于两个具有 Γ 的树状泡沫，我们可以比较它们的装饰，尤其可以理解引理 4.3 的假设。

引理 4.2 ([RW20b，引理 3。30])。 每个元素型泡沫都 ∞等价于树状泡沫的线性组合。

引理 4.3 ([RW20b，引理 3.32])。 若两个以 Γ 为对象的树状泡沫具有相同的装饰，则它们是 ∞-等价的。

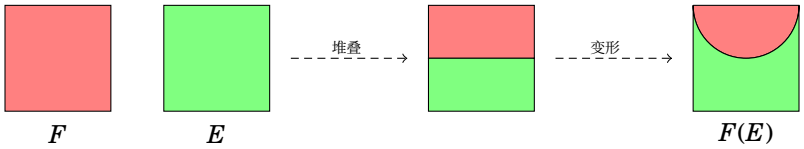
对于 Γ 一个 bl-web，记 Rep(Γ) 为由 $\mathbb{Q}$ 线性组合构成的、以 Γ 为元素型的泡沫空间，并视为模去 ∞ 等价关系。我们可以将 Rep(Γ) 视为从厚度为$\Bbbk$ 的区间到 Γ 的泡沫余边界（满足边界和 bl-泡沫条件），并模去 ∞ 等价关系。

令 Γ 为一个 bl-网，并令 $M := \mathscr{F}(\Gamma)$ 为相应的 Soergel 双模。由于泡沫上的点迁移关系可由 ∞-等价推出（见引理 2.7），引理 4.3 表明，我们可以定义一个从 M 到 Rep(Γ) 的映射，将 Γ 上的装饰映射为相应的树状泡沫。引理 4.2 表明此映射是满射。比较 M 与Rep(Γ) 的分次维数，可知此映射是一个同构。

引理 4.4 ([RW20b，第 4 节。3])。 对于任意 *bl*-网 Γ，Rep(Γ) 与 $\mathscr{F}(\Gamma)$作为分次 $\mathbb{Q}$-向量空间是同构的。

令 $\Gamma: p^0 \to p^1$ 为一个 bl-网。在与Y_{p^0} 和 Y_{p^1} 相接的面片上乘以装饰，使 Rep(Γ) 具有一个 $(\mathrm{Rep}\left(p^0\right), \mathrm{Rep}\left(p^1\right))$-双模结构。此结构与引理 4.4中的同构相容。此外，它也与 bl-网的复合以及双模的复合相容。因此，对于任意 bl-网 Γ，Rep(Γ) 与 $\mathscr{F}(\Gamma)$ 作为 Soergel 双模是同构的。

令 $\Gamma_0, \Gamma_1: p^0 \to p^1$ 为两个 bl-web，$F:\ \Gamma_0 \to \Gamma_1$ 一个态射型 bl-泡沫，而E 是一个关于 Γ_0 的元素型 bl-泡沫。构造关于 Γ_1 的元素型 bl-泡沫$F(E)$，如下图所示：



下面描述这一过程：将 bl-泡沫E 和F 彼此叠放并沿竖直方向缩放。这样会得到一个几乎属于态射型的 bl-泡沫，不同之处在于，由于附加了F，两侧树的叶线段变得更长；F由两侧的平行竖直线段组成。随后对泡沫进行变形，缩短叶线，并将其余部分的两棵树拉伸回原来的嵌入位置。

这一过程与 ∞-等价相容，因此F 诱导出一个 $\mathbb{Z}$-线性映射$\mathrm{Rep}(F): \mathrm{Rep}(\Gamma_0) \to \mathrm{Rep}(\Gamma_1)$。此外，它与$\mathrm{Rep}\left(p^0\right)$ 和$\mathrm{Rep}\left(p^1\right)$的作用相交换，因此Rep(*F*) 是一个双模映射。

上述全部讨论可概括如下。

命题 4.5 ([RW20b，命题 4.15])。 映射Rep 是一个从 $\widetilde{\mathrm{blFoam}_{\Bbbk}}$ 到SSoe的2-函子。

本文确立了以下结果。

定理 4.6。 Rep 这个2-函子是一个2-范畴之间的等价。

证明。 函子 Rep 是分裂本质满射的：对于 $\Bbbk$ 的每个合成k，都有 $\mathbb{A}_k \simeq \mathrm{Rep}\left(p_{\underline{\ }}\right)$，其中 p 是承载k的等间距位置。因此，接下来只需证明Rep是全忠实的。在此语境下，这意味着对于任意位置p^0 和p^1，，由Rep 在范畴 $\mathrm{Hom}(p^0, p^1)$上诱导的函子是本质满射且全忠实的。再次，本质满射性很容易证明：根据定义

$\widetilde{\text{SSoe}}$的对象是来自 bl- 网的双模的移位版本的有向直和。剩下唯一要证明的是这个函子的全忠实性。也就是说，它在 2-态射空间之间诱导双射。

我们不考虑移位后的 1-态射之间次数为 0 的 2-态射，而是研究未移位的 1-态射之间的分次 2HOM 空间。因此，定理可由以下引理推出。

引理 4.7. 设 $\Gamma_0, \Gamma_1 \colon p^0 \to p^1$ 是两个指标为 $\Bbbk$ 的 *bl*-网。*2*-函子 Rep 诱导出一个分次向量空间同构

$$2\mathrm{HOM}_{\mathsf{blFoam}_\Bbbk}(\Gamma_0, \Gamma_1) \quad \cong \quad 2\mathrm{HOM}_{\widetilde{\mathsf{SSoe}}}(\mathsf{Rep}(\Gamma_0), \mathsf{Rep}(\Gamma_1)). \qquad \square$$

4.2. 引理 4.7 的证明。 引理4.7 的证明分两步进行：首先化简为一个更简单的情形，然后在该情形下证明结论。

化简的关键论据是Rep 与第 3.3 节所述同构的相容性，以及 Queffelec–Rose 算法 [QR16]。

引理 4.8. 只需在 $p^0 = p^1$ 且 $\Gamma_0 = \Gamma_1 = p^0 \times I$ 的情形下证明引理 *4.7*。换言之，我们只需考虑 Γ_0 和 Γ_1 均为恒等 1-态射的情形。

证明。 首先，我们可以利用 2-范畴 blFoam 中 1-态射的同构来简化问题。我们先证明，除了使用命题 2.10 中列出的同构外，还可以沿立方体移动网。

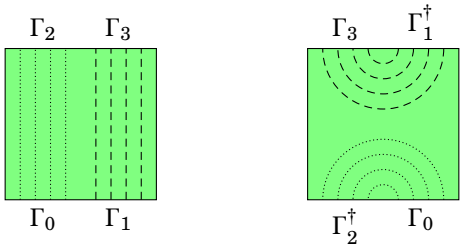
回想一下，若 $\Gamma \colon p^0 \to p^1$, $\Gamma^\dagger$ 是通过镜像对称和反转定向从 p^1 到 p^0 得到的 bl-web。第3.3节中由归纳/限制的伴随对所给出的同构，可以方便地用Rep 和 † 来表述：

$$2\mathrm{HOM}_{\widetilde{\mathsf{SSoe}}}(\mathsf{Rep}(\Gamma_1 \circ \Gamma_0), \mathsf{Rep}(\Gamma_3 \circ \Gamma_2)) \simeq$$
$$q^{\mathrm{sh}(p_0^0)+\mathrm{sh}(p_2^0)-\mathrm{sh}(p_1^0)-\mathrm{sh}(p_1^1)} 2\mathrm{HOM}_{\widetilde{\mathsf{SSoe}}}\left(\mathsf{Rep}\left(\Gamma_0 \circ \Gamma_2^\dagger\right), \mathsf{Rep}\left(\Gamma_1^\dagger \circ \Gamma_3\right)\right).$$

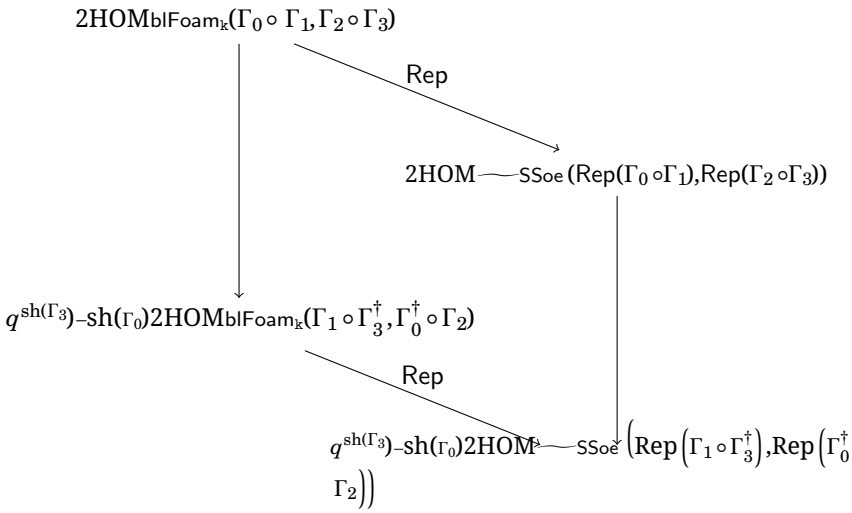
其中 $\Gamma_0 \colon p_0^0 \to {}_1^0$, $\Gamma_1 \colon p_1^0 \to p02$, $\Gamma_2 \colon p_0^0 \to p_1^1,,$ 且 $\Gamma_3 \colon p_1^1 \to p_0^2$。在泡沫一侧，使用相同记号，也有如下同构：

$$2\mathrm{HOM}_{\mathsf{blFoam}_\Bbbk}(\Gamma_1 \circ \Gamma_0, \Gamma_3 \circ \Gamma_2) \simeq q^{\mathrm{sh}(p_0^0)+\mathrm{sh}(p_2^0)-\mathrm{sh}(p_1^0)-\mathrm{sh}(p_1^1)} 2\mathrm{HOM}_{\mathsf{blFoam}_\Bbbk}(\Gamma_0 \circ \Gamma_2^\dagger, \Gamma_1^\dagger \circ \Gamma_3).$$

它来自 bl-泡沫的以下变形：



根据引理中给出的 Soergel 双模的泡沫描述4.4，可推出对于任意相容的 bl-网 Γ_0、Γ_1、Γ_2、Γ_3，方形



交换成立。由于竖直箭头是同构，顶端（倾斜的）水平箭头是同构，当且仅当底部水平箭头是同构。

因此，Rep 的全忠实性是一个环形问题，可以通过 Queffelec–Rose 算法来考察。接着，根据命题 2.11，唯一需要考察的情形是环形网为同心圆的情形。这正是该引理所声称的。□

要在较简单的情形下完成证明，关键在于 Beliakova– Habiro–Lauda–Webster 的一个定理 [BHLW17]，该定理关于 2-范畴的水平迹如何范畴化量子群；用泡沫的语言来表述时，它说明某些泡沫如何经过 ∞-等价化简。为应用该定理，我们考虑圆柱中的类辫泡沫，其两侧的边界分别是若干组同心圆，如下所示。

假设F 是加厚环带$A\times I$ 中的一个泡沫，它可以由一个 bl-webF'的迹得到：$\Gamma\to\Gamma$：它在环带的顶和底分别以若干组同心且定向一致的圆为边界。此外，它还满足一个方向条件：F 的泛型横截面都是 bl-网，且特别地朝上。满足方向条件的泡沫称为乙烯基泡沫。

命题 4.9 ([QRS18，定理 3.2（第二部分）])。 假设泡沫 F 是一个 *bl-web* F' 的迹：$\Gamma\to\Gamma$。那么 F ∞-等价于一个由以下形状的泡沫的带装饰版本构成的 $\mathbb{Q}$-线性组合 $\Gamma\times\mathbb{S}^1$。

换句话说，如果乙烯基泡沫的边界具有 $\mathbb{S}^1$-对称性，那么在模去 ∞-等价后，它是 $\mathbb{S}^1$-对称的。

在较简单情形下引理 *4.7* 的证明。 假设 $\Gamma_0=\Gamma_1=\mathrm{Id}^p$，并将$k=(k_1,\dots,k_\ell)$ 记为复合 $\pi(p)$。我们要证明，Rep 诱导出一个从 2HOMblFoam$_k$(Γ_0,Γ_0) 到 2HOM≀SSoe(Rep(Γ_0), Rep(Γ_0)) 的同构。前者由以 $\mathbb{S}_k$ （厚度由k给出的同心圆）为边界的 bl-泡沫的 $\mathbb{Q}$-线性组合构成，模去 ∞-等价。后者是$\mathbb{A}_k$ 视为自身上的双模时的自同态环，并且同构于 $\mathbb{A}_k$。

由Rep 诱导的映射是满射：事实上，如果$P=P_1\otimes\cdots\otimes P_\ell$ 是 $\mathbb{A}_k$中的一个可因式分解元素，那么与P 相对应的双模自同态等于

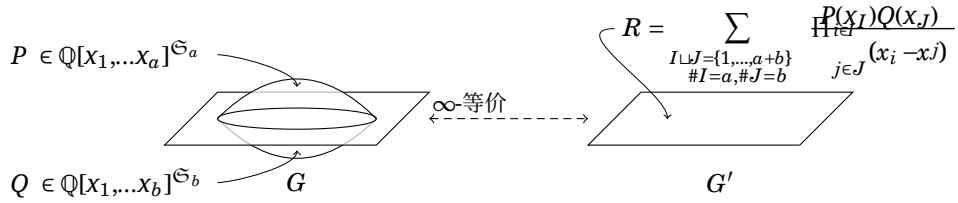
Rep($\mathbb{D}_P$)，其中 $\mathbb{D}_P$ 是由厚度为 $k_1,\ldots,k_\ell$ 的圆盘组成，并分别装饰有 $P_1,\ldots,P_\ell$。

非平凡的部分在于单射性。只需证明，任何以 $\mathbb{S}_k$ 为边界的 bl-泡沫都与 ∞ 等价于带装饰的圆盘的一个 $\mathbb{Q}$-线性组合。设 F 为这样的 bl-泡沫。回忆 F 位于标准立方体 C 中（见图3）。它是一个横截于 x_2-方向的 bl-泡沫。令 U 为 x_2 方向上的一条加厚线段，使得 $U \cap F$ 是若干（小）圆盘的不交并（它们具有不同的厚度和位置，可用 p' 等参数化）。将 U 进一步缩小加厚范围，以确保 $F \backslash U$ 是一个泡沫，记作 $\mathring{F}$。

泡沫 $\mathring{F}$ 嵌入于 $C \backslash U$ 中；该空间是一个加厚环带，并满足方向条件，因此符合命题 4.9 的假设。于是，它等价于一个 $\mathbb{Q}$-线性组合，由泡沫的带装饰版本组成 $\Gamma \times \mathbb{S}^1$，其中 bl-网 Γ：$p' \to p$。

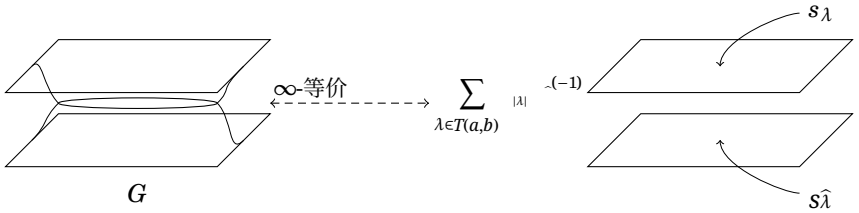
请记住，F 可通过沿着 $\mathbb{S}_p$ 用圆盘封盖 $\mathring{F}$ 得到。因此，只需证明：若 G 是一个针对 Γ 的带装饰、已封盖（在一侧）的泡沫 $\Gamma \times \mathbb{S}^1$：$p' \to p$ 是一个 bl-web，那么 G ∞ 等价于带装饰圆盘的不交并的一个 $\mathbb{Q}$-线性组合。我们对 Γ 的顶点数进行归纳论证。若 Γ 没有顶点，那么 G 已经是带装饰圆盘的不交并。否则，考虑 Γ 中距离 p' 最近的顶点 v。它要么是合并，要么是分裂。

假设 v 是一个合并顶点。这意味着 G 包含一个泡。这个泡可以在 ∞-等价意义下移除。这就是引理 2.8，如下图所示。



由此得到的泡沫 G' 可以通过封盖 $\Gamma' \times \mathbb{S}^1$ 的一个带装饰的版本获得，该版本比 Γ 少一个顶点，并且 Γ' 带有 Γ'，因此我们可以应用归纳法。

现在假设 v 是一个分裂顶点。这意味着 G 包含一个哑铃（带边盘或双面碟）。根据点迁移，我们可以假设圆盘上的装饰是平凡的。这个哑铃可以在相差一个 ∞ 等价的意义下移除。这就是引理 2.9，如下图所示。



所得线性组合由泡沫 G' 组成，这些泡沫可以通过封闭 $\Gamma' \times \mathbb{S}^1$ 的带装饰的版本而得到，其中 Γ' 比 Γ 少一个顶点。现在我们可以通过归纳得出证明。□

参考文献

[BHLW17] Anna Beliakova、Kazuo Habiro、Aaron D. Lauda 和 Ben Webster。当前代数与范畴化量子群。《伦敦数学学会杂志》（第二辑），95(1):248–276，2017。arXiv:1412.1417，doi:10.1112/jlms.12001。[EK10] Ben Elias 和 Mikhail Khovanov。Soergel 范畴的图示。《国际数学杂志》，58:978635，2010。arXiv:0902.4700，doi:10.1155/2010/978635。[Eli16] Ben Elias。A 型中的加厚 Soergel 微积分。《伦敦数学学会会刊》（第三辑），112(5):924–978，2016。arXiv:1009.2120，doi:10.1112/plms/pdw012。[FYH+85] Peter J. Freyd、David Yetter、Jim Hoste、W. B. Raymond Lickorish、Kenneth Millett 和 Adrian Ocneanu。纽结与链环的新多项式不变量。《美国数学学会通报》（新辑），12(2):239–246，1985。doi:10.1090/S0273-0979-1985-15361-3。[HRW21] Matthew Hogancamp、David E. V. Rose 和 Paul Wedrich。奇异 Soergel 双模的 skein 关系，2021。arXiv:2107.08117。[Kho04] Mikhail Khovanov。sl(3) 链环同调。《代数与几何拓扑》，4:1045–1081，2004。arXiv: math/0304375，doi:10.2140/agt.2004.4.1045。[Kho07] Mikhail Khovanov。三重分次链环同调与 Soergel 双模的 Hochschild 同调。《国际数学杂志》，18(8):869–885，2007。arXiv:math/0510265，doi:10.1142/S0129167X07004400。[KL03] Anton Kapustin 和 Yi Li。带边界的 Landau–Ginzburg 模型中的拓扑关联函数。《数学物理高级理论》，7(4):727–749，2003。URL: http://projecteuclid.org/euclid.atmp/1112627039，arXiv:hep-th/0305136。[KR07] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。世界面泡沫上的拓扑 Landau-Ginzburg 模型。《数学物理高级理论》，11(2):233–259，2007。arXiv:hep-th/0404189，doi:10. 4310/atmp.2007.v11.n2.a2。[KR08a] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。矩阵分解与链环同调。《基础数学》，199(1):1–91，2008。arXiv:math/0401268，doi:10.4064/fm199-1-1。[KR08b] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。矩阵分解与链环同调。II。《几何与拓扑》，12(3):1387–1425，2008。arXiv:math/0505056，doi:10.2140/gt.2008.12.1387。[LQR12] Aaron D. Lauda、Hoel Queffelec 和 David E. V. Rose。Khovanov 同调是范畴化量子 $\mathfrak{sl}(m)$的斜 Howe 2-表示，2012。arXiv:1212.6076。[MSV09] Marco Mackaay、Marko Stoši´c 和 Pedro Vaz。 $\mathfrak{sl}(N)$-链环同调（$N \geq 4$），使用泡沫和 Kapustin–Li 公式。《几何与拓扑》，13(2):1075–1128，2009。arXiv:0708.2228，doi:10. 2140/gt.2009.13.1075。[MV08] Marco Mackaay 和 Pedro Vaz。泡沫与矩阵分解 sl3 链环同调等价。《代数与几何拓扑》，8(1):309–342，2008。arXiv:0710.0771，doi:10.2140/agt. 2008.8.309。[MV10] Marco Mackaay 和 Pedro Vaz。图示 Soergel 范畴与 sl(N) 泡沫，适用于 N ≥4。《国际数学杂志》，(1):468968，2010。arXiv:0911.2485，doi:10.1155/2010/468968。[MY19] Marco Mackaay 和 Yasuyoshi Yonezawa。 $\mathfrak{sl}N$-网范畴与范畴化斜 Howe 对偶。《纯粹与应用代数杂志》，223(5):2173–2229，2019。doi:10.1016/j.jpaa.2018.07.013。[PT88] Józef H. Przytycki 和 Paweł Traczyk。Conway 型链环不变量。《神户数学杂志》，4(2):115–139，1988。URL: http://ci.nii.ac.jp/naid/110007040091，arXiv:1610.06679。[QR16] Hoel Queffelec 和 David E. V. Rose。 $\mathfrak{sl}n$ 泡沫 2-范畴：通过范畴斜 Howe 对偶给出的 Khovanov–Rozansky 同调的组合表述。《数学进展》，302:1251–1339，2016。arXiv:1405.5920，doi:10.1016/j.aim.2016.07.027。[QR18] Hoel Queffelec 和 David E. V. Rose。缝合环带 Khovanov–Rozansky 同调。《美国数学会汇刊》，370(2):1285–1319，2018。arXiv:1506.08188，doi:10.1090/tran/7117。[QRS18] Hoel Queffelec、David E. V. Rose 和 Antonio Sartori。环带求值与链环同调，2018。arXiv:1802.04131。[QRSW21] You Qi、Louis-Hadrien Robert、Joshua Sussan 和 Emmanuel Wagner。单位根处着色 Jones 多项式的一种范畴化，2021。arXiv:2111.13195。[Ras15] Jacob Rasmussen。Khovanov–Rozansky 同调上的一些微分。《几何与拓扑》，19(6):3031–3104，2015。arXiv:math/0607544，doi:10.2140/gt.2015.19.3031。[RT90] Nicolai Yu. Reshetikhin 和 Vladimir G. Turaev。带状图及其由量子群导出的不变量。《数学物理通讯》，127(1):1–26，1990。URL: http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104180037。

[RW16] David E. V. Rose 和 Paul Wedrich。通过泡沫对带色 $\mathfrak{sl}N$ 链环同调进行变形。《几何与拓扑》，20(6):3431–3517，2016。arXiv:1501.02567，doi:10.2140/gt.2016.20.3431。[RW20a] 路易-阿德里安·罗伯特和埃马纽埃尔·瓦格纳。泡沫求值的闭合公式。《量子拓扑》，11(3):411–487，2020。arXiv:1702.04140，doi:10.4171/qt/139。[RW20b] 路易-阿德里安·罗伯特和埃马纽埃尔·瓦格纳。对称 Khovanov–Rozansky 链环同调。《巴黎综合理工学院数学学报》，7:573–651，2020。arXiv:1801.02244，doi:10.5802/jep.124。[Tur88] Vladimir G. Turaev。Yang–Baxter 方程与链环不变量。《数学创刊》，92(3):527–553，1988。doi:10.1007/BF01393746。[Wed19] Paul Wedrich。带色 HOMFLY-PT 同调的指数增长。《数学进展》，353:471–525，2019。arXiv:1602.02769，doi:10.1016/j.aim.2019.06.023。

约翰斯·霍普金斯大学数学系，美国马里兰州巴尔的摩，MD 21218，美国电子邮箱：khovanov@jhu.edu

克莱蒙费朗-奥弗涅大学，LMBP，LMBP，LMBP，塞佐校区（塞佐，瓦萨雷利广场3号，TSA 60026 – CS 60026，63178 奥比埃尔奥比埃尔法国，法国电子邮箱：louis-hadrien.robert@uca.fr

巴黎第一大学（巴黎西岱大学，IMJ-PRG，巴黎第一大学索邦，法国国家科学研究中心，UMR 7586，F-75013，巴黎，法国电子邮箱：wagner@imj-prg.fr