arXiv:2603.22993v1 [math.CO] 24 Mar 2026

独立数为二的有向图中的哈密顿有向圈和路径中的反向弧

S. Gerke[1],Q. Guo[2],G. Gutin[2,3],Y. Hao[3],W. Veeranonchai[1],和 A. Yeo[4,5]

[1]伦敦大学皇家霍洛威学院数学系，英国[2]伦敦大学皇家霍洛威学院计算机科学系，英国[3]南开大学组合数学中心与 LPMC，中国[4]南丹麦大学数学与计算机科学系，丹麦

[5]约翰内斯堡大学数学系，南非 a

2026年3月25日

摘要

在有向图 $D=(V,\ A)$ 中，定向路径是由互不相同的顶点组成的序列 $P=x_1x_2\ldots x_p$，其中对于每个 $i\in[p-1]$，$x_ix_{i+1}\in A$、$x_{i+1}x_i\in A$ 或两者同时成立。若 $x_ix_{i+1}\in A$ 属于 P，则 x_ix_{i+1} 是 P 的正向弧；否则，$x_{i+1}x_i$ 是反向弧。独立数 $\alpha(D)$ 是满足以下条件的最大整数 p：D 有一个由 p 个顶点构成的集合，其中任意一对顶点之间都没有弧。有向图若其底层无向图是 k-连通的，则称其为 k-连通。Freschi 和 Lo（JCT-B，2024年）证明，每个有 n 个顶点且最小度为 $\delta\geq n/2$ 的定向图，都有一个至多含 $n-\delta$ 条反向弧的哈密顿定向圈。我们证明，每个满足 $\alpha(D)\leq 2$ 的 2-连通有向图 D，都有一个至多含五条反向弧的哈密顿定向圈；而每个满足 $\alpha(D)\leq 2$ 的 1-连通有向图 D，都有一条至多含两条反向弧的哈密顿定向路径。

1 引言

在有向图 $D=(V,\ A)$ 中，定向路径（或简称定向路）是由 $P=x_1x_2\ldots x_p$ 个互不相同的顶点组成的序列，使得对于每个 $i\in[p-1]$，$x_ix_{i+1}\in A$ 或 $x_{i+1}x_i\in A$ 或二者同时成立。如果 $x_ix_{i+1}\in A$ 属于 P，则 x_ix_{i+1} 是 P 的正向弧；如果 $x_{i+1}x_i\in A$，则 $x_{i+1}x_i$ 是 $P.$ 的反向弧。若定向路 P 的所有弧都是正向弧，则它是有向路径（或简称有向路）。如果定向路包含 D 的所有顶点，则称其为哈密顿定向路。类似地，我们可以定义定向圈和有向圈。对于定向路或定向圈 R，令 $\sigma^+(R)$ 和 $\sigma^-(R)$ 分别表示正向弧和反向弧的数量。

Erd˝os [7] 于 1963年 引入了双色无向图的图差异度概念。他的论文开启了关于这一主题的大量研究，例如参见 [8, 12] 中的参考文献。六十年后，Gishboliner、Krivelevich 和 Michaeli [12] 在哈密顿无向图中引入了哈密顿圈的定向差异。对于哈密顿有向圈 C，其差异度为 $|\sigma^+(C)-\sigma^-(C)|$。对于哈密顿图 G，其定向差异 $\mathrm{disc}(G)$ 是满足以下条件的最大整数 d：对 G 的每一种定向，都存在一个差异度至少为 d 的哈密顿有向圈。显然，要计算 $\mathrm{disc}(G)$，只需考虑满足 $\sigma^+(C)\geq\sigma^-(C)$。的哈密顿有向圈 C。由于 $\sigma^+(C)-\sigma^-(C)=2\sigma^+(C)-n$，其中 n 是 G 的阶，因此，在定向图中寻找具有最大差异度的哈密顿有向圈这一问题，等价于寻找具有最大数量正向弧（或最小数量反向弧）的哈密顿有向圈。

Gishboliner 等人 [12] 猜想了关于哈密顿无向图的狄拉克定理的如下加强：若一个有 n 个顶点的图 G 的最小度 δ 大于或等于 $n/2$，则 G 的每一种定向都含有一条至少包含 δ 条正向弧的哈密顿有向圈。Freschi 和 Lo [8] 证明了这一猜想，并提出是否存在将哈密顿无向图上的奥雷定理加强到定向

图上的版本。在 [1] 中，作者为这种加强提出了两个猜想，并分别提供了一些支持依据。

若有向图 D 的顶点集可划分为至少两个非空子集，称为部，使得 D 的每条弧都连接不同部中的顶点，且不同部中的每对顶点之间至少有一条弧，则称 D 为半完全多部有向图。如果半完全多部有向图的每个部都只有一个顶点，则称其为半完全有向图。如果每个顶点的出邻域和入邻域所诱导的有向图都是半完全有向图，则称该有向图为局部半完全有向图。

在 [13] 中，作者研究了若干竞赛图推广图类中哈密顿有向圈或路的差异度计算问题。他们证明，对于半完全有向图和局部半完全有向图，这两个问题都可以在多项式时间内求解。他们还证明，对于竞赛图的其他一些推广图类，这两个问题都是NP困难的。

有向图 D 的独立数 $\alpha(D)$ 是满足以下条件的最大整数 k： D 中存在 k个顶点，任意两者之间都没有弧。显然， $\alpha(D)=1$ 当且仅当 D 是半完全有向图。 D 的底层无向多重图 $UG(D)$ 是由 D 将 D 的每条弧 xy 替换为连接 x 和 y的一条边而得到的多重图。若 $UG(D)$ 连通（分别为ℓ-连通），则称其为连通（分别为ℓ-连通）。如果对于 D中任意一对顶点 x和 y，都存在一条(x,y)-有向路以及一条(y,x)-有向路，则称有向图 D 为强连通（或简称强）。

以下 R´edei 的定理广为人知。

定理 1.1。 *[15]* 每个半完全有向图都有一条哈密顿有向路。

因此，每个 n 阶半完全有向图 D 都有一条含 0 条反向弧的哈密顿或路，以及一条至多含 1 条反向弧的哈密顿有向圈。此外，根据卡缪定理 [4], ， D 有一条不含反向弧的哈密顿有向圈，当且仅当 D 是强连通的。

本文研究独立数为 2 的有向图中，哈密顿有向圈（分别为哈密顿或路）所含反向弧的最小数量的界限。这类有向图远比半完全有向图丰富。此类有向图已在包括 [2, 3, 5, 9, 10, 14, 16]在内的多篇论文中得到研究。

我们的主要结果如下:

定理 1.2。 *(i)* 若 D 是一个满足 $\alpha(D)\leq 2$ 的连通有向图，则 D 含有一条至多含两条反向弧的哈密顿或路。*(ii)* 存在一个满足 $\alpha(D)\leq 2$ 的连通有向图 D，它不含反向弧少于两条的哈密顿或路。

定理 1.3. *(i)* 若 D 是一个满足 $\alpha(D)\leq 2$的*2*-连通有向图，则 D 包含一个至多有五条反向弧的哈密顿有向圈。*(ii)* 存在一个满足 $\alpha(D)\leq 2$ 的*2*-连通有向图 D，它不含反向弧少于四条的哈密顿有向圈。

关于定理 1.2 和定理 1.3，我们有以下几点说明。

说明 1.4. 定理 *1.2* 和定理 *1.3* 给出的反向弧数量上界是一个常数，这多少令人意外。例如，在竞赛图的另一类推广——半完全多部有向图中，就不存在这样的上界：考虑一个半完全二部有向图，其两个部大小相同，且所有弧都从一个部指向另一个部。

说明 1.5. 定理 *1.2* 中 $UG(D)$ 的连通性以及定理 *1.3* 中 $UG(D)$ 的*2*-连通性，分别是 D 具有哈密顿或路和哈密顿有向圈的充要条件。显然，连通性是 D 具有哈密顿或路的必要条件。它也是充分条件，因为任何满足 $\alpha(D)\leq 2$ 的强连通有向图 D 都有哈密顿有向路，见下文定理 *1.7*。显然，无向图具有哈密顿回路的必要条件是*2*-连通。*Chv´atal* 和 *Erd˝os* *[6]* 证明了，独立数不大于连通度的无向图具有哈密顿回路。因此，独立数为*2*的*2*-连通有向图 D 具有哈密顿有向圈。

注 1.6. 在定理 *1.3* 中，上界与下界之间相差1 ，我们认为下界是紧的。

补充记号 对于 $X \subseteq V$ 和 $Y \subseteq V$，如果 $x \in X$ 且 $y \in Y$，则称弧集 xy 为 (X,Y)-弧；如果 $x_1 \in X$ 且 $x_p \in Y.$，则称有向路 $P = x_1x_2 \ldots x_p$ 为 (X,Y)-有向路。对于有向路$P = x_1x_2 \ldots x_p$ 和 $1 \leq i \leq j \leq p$，$P[x_i, x_j] = x_ix_{i+1} \ldots x_j$。有向圈也可以使用类似的记号，但此时指标按模 $p.$ 计算。若对于每个 $x \in X$ 和每个 $y \in Y$，都有 $xy \in A$，我们就将 $X \Rightarrow Y$ 写作 D。

为了证明定理 1.2 和定理 1.3，我们将使用以下众所周知的结果。

定理 1.7。 *[5]* ***(Chen-Manalastas)*** 若 D 是一个强有向图，且 $\alpha(D) \leq 2$，则 D 包含一条哈密顿有向路。

定理 1.8。 *[11]* ***(Gallai-Milgram)*** 对每个整数 $k \geq 1$，每个满足 $\alpha(D) \leq k$ 的有向图 D 至多有 k 条两两不相交的有向路覆盖其所有顶点 D。

论文结构 我们将在第 2 节证明定理 1.2。我们将在第 3 节证明定理 1.3 的第 (i) 部分，并在第 4 节证明第 (ii) 部分（对于 $k = 2$，见定理 4.2）；届时我们将简要考察独立数更大的有向图，并提出一些开放问题。

2 定理 1.2 的证明

为证明定理 1.2 的第 (ii) 部分，考虑以下简单例子。设 T_a 和 T_b 是两个顶点不相交的传递竞赛图，且

$$V(T_a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \quad V(T_b) = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

其中 $k,\ m \geq 3$，以及

$$A(T_a) = \{a_ia_j : \text{ for all } 1 \leq i < j \leq k\}, \quad A(T_b) = \{b_ib_j : \text{ for all } 1 \leq i < j \leq m\}.$$

定义有向图 D D：取 T_A 与 T_B 的不交并，并添加一条从 a_1 到 b_2的弧。当 $k = m = 3$时，参见图 1。

显然，$\alpha（D）= 2$，因为任一独立集至多包含 T_a 中的一个顶点，也至多包含 T_b中的一个顶点。设 P 是 D的一条哈密顿定向路。若弧 a_1b_2 在 P中是反向弧，则 P中还包含另一条反向弧；若弧 a_1b_2 相对于 P是正向的，则 P 至少包含两条反向弧，一条在 T_a 中，另一条在 T_b中。因此，D 的任一哈密顿定向路都至少包含两条反向弧。此外，D的哈密顿定向路 $a_2a_3 \ldots a_ka_1b_2b_3 \ldots b_mb_1$ 恰好包含两条反向弧。

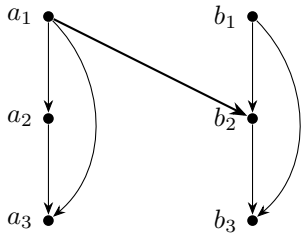


图 1：当 $k = m = 3$ 时的一个例子

我们先针对一个特殊情形证明定理 1.2 的第 (i) 部分。

引理 2.1. 设 D 是一个连通有向图，且 $\alpha(D) \leq 2$，并满足 $V(D) = V_1 \cup V_2$，$V_1 \cap V_2 = \emptyset$和 $D[V_i]$ 对 $i \in \{1,2\}$是半完全的。那么 D 包含一条至多含有两条反向弧的哈密顿或路。

证明。设 D 是一个连通有向图，其 $\alpha(D) \leq 2$，且 $V(D) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 并且 $D[V_i]$ 对于 $i \in \{1,2\}$ 是半完全的。设 $P = p_1p_2p_3 \ldots p_s$ 是 $D[V_1]$ 中的一条哈密顿有向路，且设 $Q = q_1q_2q_3 \ldots q_t$ 是 $D[V_2]$ 中的一条哈密顿有向路（这两条哈密顿有向路均由定理 1.1 保证存在）。由于

D 连通，因此我们可以不失一般性地假设， D 中存在一条弧 p_iq_j。注意，
$R = p_{i+1}p_{i+2}\dots p_sp_1p_2\dots p_iq_jq_{j+1}\dots q_tq_1q_2\dots q_{j-1}$ 是一条哈密顿或路，其中只有弧 p_sp_1 和 q_tq_1 可能是反向的。□

在本节余下部分，我们将证明定理 1.2 第 (i) 部分的一般情形。

引理 2.2. 设 D 是一个连通有向图，且满足 $\alpha(D) \le 2$，并设 $A' \subseteq A(D)$。若向 D 添加 A' 中各弧的反向弧后， D 变为强连通，则 D 含有一条至多包含 $|A'|$ 条反向弧的定向路。

证明。设 $A' \subseteq A(D)$，并设 D' 是由 D 添加 A' 中各弧的反向弧得到的。若 D' 是强连通的，则由定理 1.7，它包含一条哈密顿有向路 P。有向图 D 中定向路 P 的所有反向弧都属于 A'，证明完毕。□

引理 2.3. 若 D 是一个连通有向图，且满足 $\alpha(D) \le 2$，则或者 $V(D) = V_1 \cup V_2$， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$，并且对于 $i \in \{1,2\}$， $D[V_i]$ 是半完全的；或者我们可以向 D 添加至多两条弧，它们是已有弧的反向弧，使得 D 变为强连通。

证明。设 D 是一个满足 $\alpha(D) \le 2$ 的连通有向图。我们可以假设 D 不是强连通的。令 $I_1, I_2, \dots, I_s$ 为 D 的初始强分量，并令 $T_1, T_2, \dots, T_t$ 为 D 的终端强分量。由于不同的初始强分量之间没有弧，我们注意到 $1 \le s \le 2$，因为 $\alpha(D) \le 2$。类似地，我们也注意到 $1 \le t \le 2$。现在我们考虑以下三种涵盖所有可能性的情形。

情形 1： $1 = s = t$。在这种情况下， I_1 是唯一的初始强分量， T_1 是唯一的终端强分量，并且 $I_1 \ne T_1$。若 I_1 和 T_1 之间存在弧，则它必定是一个 (I_1, T_1)-弧， a。添加 a 的反向弧即可得到一个强有向图。因此，我们可以假设 I_1 和 T_1 之间没有弧。

令 X 包含 I_1 的所有顶点，以及 $V(D) \setminus (I_1 \cup T_1)$ 中所有没有弧指向 T_1的顶点，并令 $Y = V(D) \setminus X$。注意， X 中没有顶点有弧指向 T_1，这意味着 $\alpha(D[X]) = 1$；因为如果 X 中有两个不相邻顶点，那么它们与 T_1 中的一个顶点一起，就会在 D中构成一个大小为 3 的独立集。

注意， $V(T_1) \subseteq Y$。为导出矛盾，假设 $y \in Y$，且 D中存在一条 (I_1, y)-弧 a_I。这意味着 $y \notin V(T_1)$，并且由于 $y \notin X$， D中存在一条 (y, T_1)-弧 a_T。注意，添加 a_I 和 a_T的反向弧后， D 变为强连通。因此，我们可以假设对任意 $y \in Y$，都不存在 (I_1, y)-弧。

这意味着 $\alpha(D[Y]) = 1$，因为如果 Y 中有两个不相邻顶点，那么它们与 I_1 中的一个顶点一起，就会在 D 中构成一个大小为 3 的独立集。

现在， $V(D)$ 可以划分为两个半完全有向图，它们分别由 X 和 Y 诱导，因此得证。

情形 2： $\{s,t\} = \{1,2\}$。不失一般性，我们可以假设 $s = 2$ 和 $t = 1$ （否则可以将所有弧反向）。因此， I_1 和 I_2 是 D 的两个初始强分量，而 T_1 是 D 的唯一终端强分量。由于 I_1 和 I_2 都是 D 的初始强分量，它们之间没有弧。

如果在 D 中存在一条 (I_1, T_1)-弧 a_1，以及一条 (I_2, T_1)-弧 a_2，那么加入 a_1 的反向弧和 a_2 的反向弧，就能得到一个强有向图。因此，不失一般性，我们可以假设 D 中不存在 (I_2, T_1)-弧。这意味着 $I_1 \Rightarrow T_1$，因为如果对于某些 $u \in I_1$ 和 $v \in T_1$， $uv \notin A(D)$，那么 u、 v 以及 I_2 中的任意顶点都会在 D 中构成一个大小为 3 的独立集。

令 X 包含所有可从 I_1 出发沿有向路到达的顶点。注意， $I_1 \subseteq X$。令$Y = V(D) \setminus X$。我们现在考虑以下两个子情形。

子情况2a：存在一条 (I_2, X)弧。令 a'为 D 中任意一条 (I_1, T_1) 弧（由上文可知，此弧存在），并令 a^* 为任意一条 (I_2, X) 弧。令 D' 由 D 添加 a' 的反向弧和 a^*的反向弧得到。显然， D' 中的每个顶点都能到达 T_1 中的每个顶点，因为 D 也是如此（因为 T_1是唯一的终端强分量）。在 D' 中， T_1 中的每个顶点都能到达 I_1 中的每个顶点（因为 T_1 和 I_1 均强连通，且 a' 的反向弧是 D' 中的一条 (T_1, I_1) 弧）。因此，若 $a^* = uv$,

则 D' 中的每个顶点都能到达 v （因为 $v \in X$，所以 v 可从 I_1到达）。利用 a^*的反向弧可知，在 D' 中， T_1 中的每个顶点都能到达 I_1 和 I_2，因此 D' 是强连通的。

子情形 2b：不存在 (I_2, X)弧。 由于 X 中没有顶点有来自 I_2 的弧指向它，我们必有 $\alpha(D[X]) = 1$；因为如果 X 中有两个不相邻顶点，那么它们与 I_2 中的一个顶点将构成 D 中大小为 3 的独立集。

由于 Y 中没有顶点有来自 I_1 的弧指向它（否则该顶点将属于 X，而非 Y），我们注意到 $\alpha(D[Y]) = 1$ （如果 Y 中有两个不相邻顶点，那么它们与 I_1 中的一个顶点将构成 D 中大小为 3 的独立集）。

现在， $V(D)$ 可划分为两个由 X 和 Y 诱导的半完全有向图，证毕。

情形 3： $s = t = 2$。在这种情况下， I_1 和 I_2 是 D 的两个初始强分量，而 T_1 和 T_2 是 D 的两个终端强分量。由于 I_1 和 I_2 都是 D 的初始强分量，它们之间没有弧；类似地， T_1 和 T_2 之间也没有弧。现在我们将证明以下断言。

Clai断言 3.A： 我们不妨假设，在 D中存在一条从(I_1到 T_2)的有向路，以及一条从(I_2到 T_2)的有向路 .

断言 3.A 的证明： 令 X_i 包含所有可由从I_i 出发的有向路到达的顶点，其中 $i = 1,2$。注意，由于 I_1 和 I_2 是D中仅有的初始强分量，因此 $V(D) = X_1 \cup X_2$。若 $X_1 \cap X_2 = \emptyset$，则 D 将不连通（ X_1 与 X_2 之间没有弧），所以必有 $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$。任取 $x \in X_1 \cap X_2$。由于 T_1 和 T_2 是 D 中仅有的终端强分量，因此对某个 $j \in \{1,2\}$，必存在一条从x, T_j出发的有向路。我们可以对 T_1 和 T_2命名，使得 $j = 2$。现在注意到，在 D 中存在一条从I_1, T_2出发的有向路，以及一条从I_2, T_2出发的有向路（经过 x），证毕。

断言 3.B： 不失一般性，假设 D 中存在一条 （I_1、 T_1）-弧以及一条 （I_2、 T_2）-弧 .

断言 3.B 的证明： 如果对于任意 $j \in \{1,2\}$， D 中都不存在一条（I_j, T_2）-弧，那么取 I_1、 I_2 和 T_2 中的任意一个顶点，即可得到与 $\alpha(D) \leq 2$ 的矛盾。因此，不失一般性，我们可以假设 D 中存在一条（I_2, T_2）-弧（否则交换 I_1 和 I_2 的名称）。

假设 D 中不存在一条（I_1, T_1）-弧，否则结论显然成立。这意味着 $I_2 \Rightarrow T_1$，否则取 I_1、 I_2 和 T_1 中的一个顶点即可得到与 α （ D） ≤ 2 的矛盾。由于 D 中不存在一条（ I_1, T_1 ） - 弧，我们必须在 D 中有一个 $I_1 \Rightarrow T_2$，否则取 I_1、 T_1 和 T_2 中的一个顶点即可得到与α（D） ≤ 2 的矛盾。

我们现在已经证明了 $I_2 \Rightarrow T_1$ 和 $I_1 \Rightarrow T_2$，因此重新命名 I_1 和 I_2 后，就得到所需的 (I_1, T_1)-弧以及 D 中的 (I_2, T_2)-弧。

定义： 根据断言 3.B，设 a_1 是 D 中的一条 (I_1, T_1)-弧，且设 a_2 是 D中的一条 (I_2, T_2)-弧。令D^* 由 D 添加 a_1 的反向弧和 a_2的反向弧得到。由于 I_1、 I_2、 T_1 和 T_2 均强连通，且在 D^* 中， I_1 与 T_1 之间有一个二元有向圈， I_2与 T_2 之间也有一个二元有向圈，因此我们注意到 $I_1 \cup T_1$ 是 D^* 中某个强分支 C_1 的子集，而 $I_2 \cup T_2$ 是 D^*中某个强分支 C_2 的子集。

断言 3.C： 我们不妨假设 D^* 恰好包含两个强分支，即上文定义的 C_1 和 C_2。

断言 3.C 的证明： 首先假设 $C_1 = C_2$。此时 D^* 是强连通的，因为 D^* 中的每个顶点都有一条到 $T_1 \cup T_2$ 的有向路，且每个顶点都有一条从 $I_1 \cup I_2$出发的有向路。因此在此情形下，由引理 2.2 可知结论成立。所以我们可以假设 $C_1 \neq C_2$。

由断言 3.A， D中存在一条 (I_1, T_2)-有向路，这意味着 D^*中存在一条 (C_1, C_2)-有向路。为导出矛盾，假设 D^* 中有一个不同于 C_1和 C_2的强分支 C 。对于某些 $i, j \in \{1,2\}$， D^* 中存在一条 (I_i, C)-有向路和一条 (C, T_j)-有向路。若$i = j$，则 C 中存在一条到达和离开 C_i的有向路，这与 C 不同于 C_i矛盾。若 $j = 1$ 且$i = 2$，则存在一条 (C_2, C)-有向路和一条 (C, C_1)-有向路；这两条路与 D^* 中的 (C_1, C_2)-路径合起来意味着 $C = C_1 = C_2$，从而导致矛盾。因此，唯一可能的情况是 $i = 1$ 且 $j = 2$。

令 $u \in V(I_2)$，并令 $v \in V(T_1)$，再令 $w \in V(C)$。由于 $\{u, v, w\}$ 在 D 中不是独立的，因此弧 uw、 uv 或 wv 中至少有一条必须属于 D。若 $uw \in A(D)$，我们本可以选择 $i = 2$，这就产生了矛盾。若$wv \in A(D)$，我们本可以选择 $j = 1$，这就产生了矛盾。因此， $uv \in A(D)$。但在这种情况下， uv 是一条

$(C_2,\ C_1)$-弧，属于 D^*；它与 D^* 中的$(C_1,\ C_2)$-路径共同推出 $C_1 = C_2$，这就产生了矛盾。因此，C不存在，命题得证。

证明的其余部分。根据断言 3.C，C_1 和 C_2 是 D^*的仅有两个强连通分量。根据断言 3.A，D中存在一条（$I_1,\ T_2$）-有向路，这意味着 D^*中存在一条（$C_1,\ C_2$）-弧。现在我们将证明 α（C_1）$= 1$ 和 α（C_2）$= 1$。

为导出矛盾，假设 α（C_1）> 1，并令 $u,\ v \in V$（C_1），使得 u 和 v 在 D中不相邻。令 $w \in V$（I_2）为任意对象。我们必有 $wu \in A$（D）或 $wv \in A$（D），否则α（D）≥ 3。但这意味着 D^*中存在一条（$C_2,\ C_1$）-弧，这与矛盾（因为 D^*中存在一条（$C_1,\ C_2$）-弧）。因此，α（C_1）$= 1$。

类似地，如果 $\alpha(C_2) > 1$，那么考虑 C_2 中两个不相邻顶点以及 T_1 中一个顶点，可得到矛盾。因此，$\alpha(C_1) = 1$ 且 $\alpha(C_2) = 1$，证毕。□

3 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的第 (ii) 部分由下一节证明的定理 4.2（对于 $k = 2$）推出。本节其余部分用于证明定理 1.3 的第 (i) 部分。

在证明定理 1.3 之前，我们给出两个定义并证明八个引理。

定义 3.1。设 D 是一个半完全有向图，且 x、$y \in V$（D）是 D 中任意不同的顶点。令 b（x, y）表示任意哈密顿（x, y）定向路中反向弧的最小数目，并令 b（y, x）表示任意哈密顿（y, x）定向路中反向弧的最小数目。此外，对于子集 $V \in V$（D）以及 x、$y \in V$，令 b_V（x, y）表示 $D[V]$ 中任意哈密顿（x, y）定向路中反向弧的最小数目，并令 b_V（y, x）表示 $D[V]$ 中任意哈密顿（y, x）定向路中反向弧的最小数目。

定义 3.2. 设 D 是一个有向图。我们将 D^* 定义为由 UG（D）通过将每条边替换为一个二元有向圈而得到的有向图。也就是说，当且仅当 $uv \in A$（D）或 $vu \in A$（D）时，$uv \in A$（D^*）。

引理 3.3. 设 D 是一个强半完全有向图，并设 x、$y \in V(D)$ 是 D 中任意两个不同的顶点。以下两个结论成立。

(a) 若 C 是 D 中的一个哈密顿有向圈，则 $b(x、\ y) \leq 1$ 或 $xy \in A(C)$（或两者皆有）。

(b) $b(x, y) + b(y, x) \leq 2.$

证明。我们先证明 (a) 部分。设 C 是 D 中的一个哈密顿有向圈，并设 $C = v_1v_2v_3 \ldots v_nv_1$，且不失一般性地设 $x = v_1$ 和 $y = v_r$，其中 $r \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$。我们可以假设 $r \geq 3$，否则 (a) 成立。并且 $r < n$，否则 $v_1v_2v_3 \ldots v_n$ 是一个没有反向弧的哈密顿（x, y）定向路。因此，$2 < r < n$。

假设对于某个 $j \in \{2, 3, \ldots, r\}$，$v_nv_j \in A(D)$。此时，下面的哈密顿 (v_1, v_r)-定向路至多只有一条反向弧（可能是弧 $v_{j-1}v_{r+1}$）。

$$v_1v_2 \ldots v_{j-1}v_{r+1}v_{r+2} \ldots v_nv_jv_{j+1}v_{j+2} \ldots v_r$$

因此，我们可以假设对所有 $j \in \{2, 3, \ldots, r\}$，均有 $v_nv_j \notin A(D)$。我们还可以假设对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$，均有$v_{r+1}v_j \in A(D)$；否则，下面的哈密顿 (v_1, v_r)-定向路至多只有一条反向弧，即 v_nv_{j+1}（因为 $v_jv_{r+1} \in A(D)$）。

$$v_1v_2 \ldots v_jv_{r+1}v_{r+2} \ldots v_nv_{j+1}v_{j+2}v_{j+3} \ldots v_r$$

令 s 为满足以下条件的最大值：在 D 中存在一条弧 v_sv_j，其中 $j \in \{2, 3, \ldots, r-1\}$。由上可知，$r < s < n$，且下面的哈密顿 (v_1, v_r)-定向路至多只有一条反向弧，即 v_nv_{r+1}（根据 s 的极大性，$v_{j-1}v_{s+1} \in A(D)$）。

$$v_1v_2 \ldots v_{j-1}v_{s+1}v_{s+2} \ldots v_nv_{r+1}v_{r+2}v_{r+3} \ldots v_sv_jv_{j+1} \ldots v_r$$

这就完成了部分（a）的证明。

为了证明部分（b），令 C 为 D 中的任意哈密顿有向圈。如果 x 和 y 不是 C 上的相邻顶点，则部分（b）由部分（a）直接推出。因此，不失一般性，假设 $C = v_1v_2v_3 \dots v_n$ 是 D 中的一个哈密顿有向圈，且 $x = v_1$ 和 $y = v_n$。于是，$v_1v_2v_3 \dots v_n$ 是 D 中的一个哈密顿（x，y）定向路（不含反向弧），而 $v_nv_2v_3v_4 \dots v_{n-1}v_1$ 是 D 中的一个哈密顿（y，x）定向路，至多包含两条反向弧（可能是 v_nv_2 和 $v_{n-1}v_1$）。因此，在所有情况下，b（x，y）$+b$（y，x）≤ 2，如所需。□

引理 3.4. 设 D 是一个半完全有向图，且 x、$y \in V(D)$ 是任意两个不同的顶点。那么

（a） $b(x, y) \leq 2$。**（b）** $b(x, y) \leq 1$ 或 $b(y, x) \leq 1$。

证明。我们先证明 (a) 部分。若 $|V(D)| \leq 3$，则结论显然成立，因此假设 $|V(D)| \geq 4$。令 $D' = D - y$，并注意到只需向 D' 至多添加一条弧，就能使其强连通。因此，D' 中存在一个至多包含一条反向弧的哈密顿有向圈。删去 x 的前驱 x^- 与 x 之间的弧，并改为添加 x^- 与 y 之间的弧，即可得到所需的 D 中的定向路。至此，(a) 部分得证。

现在我们证明 (b) 部分。首先，假设 D 是强连通的。设 C 是 D 中的一个哈密顿有向圈，并且令 $x\, y \in V(D)$ 为任意不同的顶点。

记　作 x^+, y^+ 在 C 上的 x, y 的后继，以及 x^{++}, y^{++} 在 C 上的 x^+, y^+ 的后继　.

情形 1： $x^+ = y$ 或 $x = y^+$。

在 D 中，x 与 y 之间存在一条哈密顿有向路。

情形 2： $x^{++} = y$ 或 $x = y^{++}$，以及 $x^+ \neq y$ 和 $x \neq y^+$。

若 $x^{++} = y$ 和 $x = y^{++}$，则 $|V(D)| = 4$，且任意一条连接 x 和y 的哈密顿定向路长度均为 3，因此这条定向路或其反向就是所需的定向路。

否则，不失一般性，设 $x^{++} = y$ 和 $x \neq y^{++}$，此时 y在 C上的前驱 y^- 是 x^+。根据 x^+ 和 y^+ 之间的弧，以下两条哈密顿定向路之一就是所需的定向路。

$$P_1 = xx^+C[y^+, x^-]y,\ P_2 = yy^+x^+C[y^{++}, x]$$

情形 3： $x^{++} \neq y$、$x \neq y^{++}$、$x^+ \neq y$和 $x \neq y^+$。

根据 x^+ 和 y^+之间的弧，以下两条哈密顿定向路之一就是所需的定向路。

$$P_1 = xx^+C[y^+, x^-]C[x^{++}, y],\ P_2 = yy^+C[x^+, y^-]C[y^{++}, x].$$

至此，D 为强连通时的情形证明完毕。

现在考虑 D 不是强连通的情形。将 D 分解为强连通分量 V_1、.....、V_l，其中每当 $i < j$ ($l > 1$)时，所有弧都从 V_i 指向 V_j。所有强半完全有向图都包含哈密顿有向圈，因此包含一个从任意顶点出发或到达任意顶点的哈密顿有向路（不一定能同时满足这两点）。我们记 P_i 为 V_i中的任意一条哈密顿有向路；对于顶点 v，我们分别记 S_v（E_v）为包含v 的强连通分量中一条从 v 出发（以 v结束）的哈密顿有向路。

设 $x \in V_a$ 和 $y \in V_b$。不失一般性，我们可以假设 $a \leq b$。

情形 1： $a < b$。在这种情形下，所需的哈密顿（x，y）定向路如下：

$$S_xP_{a+1} \dots P_{b-1}P_{b+1} \dots P_lP_1 \dots P_{a-1}E_y$$

唯一的反向弧是从 P_l 指向 P_1的那条弧。

情形 2： $a = b$。不失一般性，我们可以假设 $b(x, y) \leq 1$ 位于强分支V_a中。设 $u_1u_2 \dots u_s$ 是一条哈密顿 (x，y)-定向路，且至多含有一条反向弧，其中 $u_1 = x$，$u_s = y$。若反向弧存在，设其位于 u_i 和 u_{i+1} 之间，其中 $i \in \{1, 2, \dots s-1\}$。那么，$D$ 中所需的哈密顿 (x，y)-定向路如下：

$$xu_2 \dots u_iP_{a+1} \dots P_lP_1 \dots P_{a-1}u_{i+1} \dots u_{s-1}y.$$

同样，唯一的反向弧是从 P_l 到 P_1 的弧。 □

引理 *3.5*。设 D 是一个有向图， X 和 Y 是 $V(D)$ 的不相交子集，且 $D[X]$ 和 $D[Y]$ 诱导出半完全有向图。设 P 和 Q 是 $UG[D]$ 中的 (X,Y)-路径，满足 P 和 Q 顶点不相交，且 $V(D) = X \cup Y \cup V(P) \cup V(Q)$。那么， D 包含一个哈密顿有向圈，其反向弧至多为$2 + (|V(P)| + |V(Q)|)/2$ 条。

证明。设 D 是一个有向图，其中 X 和 Y 是 $V(D)$ 的互不相交子集，且 $D[X]$ 和 $D[Y]$ 诱导出半完全有向图。设 P 和 Q 是引理陈述中所述的路径。我们不妨假设 P 和 Q 在如下意义下是极小的： $|V(P) \cap X| = |V(P) \cap Y| = |V(Q) \cap X| = |V(Q) \cap Y| = 1$。设 P 是一条 (p, p')-路径，设 Q 是一条 (q, q')-路径，使得 $p, q \in X$ 且 $p', q' \in Y$。

根据引理 3.4， $D[X]$ （分别为 $D[Y]$）包含两条端点相同的哈密顿定向路 H_1 （分别为 H_1'）和 H_2 （分别为 H_2'），其端点为 p, q （分别为 p', q'），并且 H_1 （分别为 H_1'）以 p （分别为 p'）为起点， H_2 （分别为 H_2'）以 q （分别为 q'）为起点，而 H_1 和 H_2 （分别为 H_1' 和 H_2'）中反向弧的数量之和至多为 3。

设 C_1 是 D 中包含 H_1、 Q、 H_2' 和 P 的哈密顿有向圈。设 C_2 是 D 中包含 H_2、 P、 H_1' 和 Q 的哈密顿有向圈。由于 C_1 和 C_2 中反向弧的数量之和至多为 $6 + |V(P)| - 1 + |V(Q)| - 1$，因此 C_1 和 C_2 中至少有一个至多含有 $2 + (|V(P)| + |V(Q)|)/2$ 条反向弧 □

推论 3.6. 设 D 是一个 *2*-连通有向图，使得 X 和 Y 是 $V(D)$ 的不相交子集，$X \cup Y = V(D)$，且 $D[X]$ 和 $D[Y]$ 诱导出半完全有向图。那么 D 含有一个至多包含 4 条反向弧的哈密顿有向圈。

证明。由于 D 是 2-连通的，存在 $x_1 \neq x_2 \in X$ 和 $y_1 \neq y_2 \in Y$，使得 $x_1y_1, x_2y_2 \in A(D^*)$。将引理 3.5 应用于 $X = X$， $Y = Y$， $P = x_1y_1$， $Q = x_2y_2$，可得一个至多含有 $2 + (2 + 2)/2 = 4$ 条反向弧的哈密顿有向圈。□

引理 3.7. 设 D 是非强半完全有向图。设 X 和 Y 是$V(D)$ 的非空子集，满足 $X \cup Y = V(D)$。那么存在 $x \in X$和 $y \in Y$，使得 $b(x, y) \leq 1$ 且$b(y, x) \leq 1$。

证明。将 D分解为强连通分量 $V_1, \ldots, V_l$，其中当$i < j$时，所有弧均从 V_i指向 V_j。所有强半完全有向图都含有哈密顿有向圈，因此也含有一条从任意顶点出发或到达任意顶点的哈密顿有向路（两种情况不必同时成立）。记 P_i 为 V_i中的任意一条哈密顿有向路；对于顶点 v，记 S_v （分别为E_v）为包含 v 的强连通分量中一条以 v 为起点（分别以 v为终点）的哈密顿有向路。

不失一般性，假设 $Y \not\subset V_1$。若 $X \cap V_1 \neq \emptyset$，则选取 $x \in X \cap V_1$ 和 $y \in Y \setminus V_1$。若 $X \cap V_1 = \emptyset$，则选取 $y \in Y \cap V_1$ 和 $x \in X \setminus V_1$。无论哪种情况，我们都有 $x \in X, y \in Y$，使得$x \in V_i, y \in V_j$，其中某个 $i \neq j$。不失一般性，可以假设 $i < j$。那么必定存在某个 $k \in \{i, i+1, \ldots j-1\}$，使得 $X \cap V_k \neq \emptyset$和 $Y \cap V_{k+1} \neq \emptyset$，最后我们选取新的$x \in X \cap V_k$和新的 $y \in Y \cap V_{k+1}$。

哈密顿或路

$$S_xP_{k+2} \ldots P_lP_1 \ldots P_{k-1}E_y$$

得出 $b(x, y) \leq 1$，以及哈密顿或路

$$S_yP_{k+2} \ldots P_lP_1 \ldots P_{k-1}E_x$$

得出 $b(y, x) \leq 1$。 □

引理 3.8。设 D 是半完全有向图。设 X 和 Y 是 $V(D)$ 的非空子集，满足 $X \cup Y = V(D)$。那么存在 $x \in X$ 和 $y \in Y$，使得 $b(x, y) \leq 1$，且 $b(x, y) + b(y, x) \leq 2$。

证明。若 D 不是强连通的，则由引理 3.7 可得结论。若 D 是强连通的，则必存在 $x \in X$ 和 $y \in Y$，使得对于某个哈密顿有向圈 C，有 $yx \in A(C)$；于是 $b(x,y) = 0$，且由引理 3.3 第 (b) 部分，$b(x,y) + b(y,x) \leq 2$。□

以下引理已在 [5]中作为引理 2 得到证明。

引理 3.9。设 D是有向图，$P = p_1 \dots p_s$和 $Q = q_1 \dots q_t$是其中两条有向路，并且对于每个 $p_i \in V(P)$和 $q_j \in V(Q)$，p_i与 q_j之间都有一条弧。那么 D中存在一条有向路 $R = r_1 \dots r_{s+t}$，使得 $D[V(P) \cup V(Q)]$，且 $r_1 \in \{p_1, q_1\}$和 $r_{s+t} = \{p_s, q_t\}$。

记 $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$。对于子集 $X \subset V(D)$，我们可以写作 $N_X(v) := N_D(v) \cap X$，其中 D 可由上下文确定。

引理 3.10。设 D 是一个有向图，且 $\alpha(D) \leq 2$；设 X 和 Y是$V(D)$ 的非空不相交子集，满足 $D[X]$是半完全的，$D[Y]$是连通的，且 $X \cup Y = V(D)$。设 $P = y_1 y_2 \dots y_k$是 $D[Y]$ 中的一条哈密顿或路，且至多含有2 条反向弧（由定理 *1.2* 可知其存在）。此外，若下列条件之一成立：

(a) $y_1 y_k \notin A(D^*)$，并且以下情况之一成立：X 是 D中规模最大的半完全有向图，或者 $|N_X(y_1)|, |N_X(y_k)| \geq 1$。

(b) P 至多有1 条反向弧，并且存在 $x \neq x' \in X$ 使得 $y_1 x, y_k x' \in A(D^*)$。

(c) $D[Y]$ 包含一个至多有2 条反向弧的哈密顿有向圈 $C = y_1 \dots y_k y_1$，并且存在$i \in \{1, 2, \dots, k\}$，$x_1 \in N_X(y_{i-1})$，$x_2 \in N_X(y_i)$以及 $x_3 \in N_X(y_{i+1})$，使得 $x_2 \notin \{x_1, x_3\}$。

(d) $|X| \geq 4$</style}，中的每个顶点在中至少有1 个邻点，并且 P 至多有1 条反向弧 .

那么，D 包含一个至多有5 条反向弧的哈密顿有向圈。

证明。对于 $x \neq x' \in X$，我们将 $Q[x, x']$ 记作 $D[X]$ 中任意一条反向弧数量最少的哈密顿（x，x'）定向路（在所有哈密顿（x，x'）定向路中取最小值）。

(a): 由于 $\alpha(D) \leq 2$，我们有 $N_X(y_1) \cup N_X(y_k) = X$。如果 X 是 D 中规模最大的半完全有向图，那么 $|N_X(y_1)|, |N_X(y_k)| \leq |X| - 1$，因此 $|N_X(y_1)|, |N_X(y_k)| \geq 1$。所以在两种情况下，我们都可以假设 $|N_X(y_1)|, |N_X(y_k)| \geq 1$。

由引理 3.8，存在 $x_1 \in N_X(y_1)$ 和 $x_2 \in N_X(y_k)$，使得 $Q[x_2, x_1]$ 至多有一条反向弧。该有向圈

$$PQ[x_2, x_1]y_1$$

是 D 中的一个哈密顿有向圈，至多含有 5 条反向弧，其中 P 中可能有两条反向弧，$Q[x_2, x_1]$中可能有一条，另有两条分别来自 $y_k x_2$ 和 $x_1 y_1$。

(b): 根据引理 3.4 (a)，$Q[x', x]$ 至多有 2 条反向弧。该有向圈

$$PQ[x', x]y_1$$

是 D 中的一个哈密顿有向圈，至多含有 5 条反向弧，其中 $Q[x', x]$中可能有两条反向弧，P 中可能有一条，另有两条分别来自 $y_k x'$ 和 xy_1。

(c): 若 $x_2 y_i \in A(D)$，则

$$y_i \dots y_k y_1 \dots y_{i-1} Q[x_1, x_2] y_i$$

是 D 中的一个哈密顿有向圈，至多含有 5 条反向弧，其中 $Q[x_1, x_2]$中可能有 2 条反向弧，$y_i \dots y_k y_1 \dots y_{i-1}$中有 2 条，另有 $y_{i-1} x_1$。反之，若 $y_i x_2 \in A(D)$，则

$$y_{i+1} \dots y_k y_1 \dots y_i Q[x_2, x_3] y_{i+1}$$

是 D 中的一个哈密顿有向圈，至多含有 5 条反向弧，其中 $Q[x_2, x_3]$中可能有 2 条反向弧，$y_{i+1} \dots y_k y_1 \dots y_i$中有 2 条，另有 $x_3 y_{i+1}$。

(d): 我们可以假设 $y_1 y_k \in A(D^*)$，否则由第 (a) 部分即可得证。因此，现在我们在 $D[Y]$中有一个至多包含 2 条反向弧的哈密顿有向圈。我们还可以假设 $|N_X(y_1)| = |N_X(y_k)| = 1$，否则由第 (b) 部分即可得证。

如果存在 $i \in \{2,\dots,k-1\}$ 使得 $y_1y_i \notin A(D^*)$，那么 $\alpha(D) \le 2$ 蕴含 $N_X(y_1) \cup N_X(y_i) = X$，进而蕴含 $|N_X(y_i)| \ge |X| - 1 \ge 3$。任取 $x_1 \in N_X(y_{i-1})$以及任意的 $x_3 \in N_X(y_{i+1})$。由于 $|N_X(y_i)| \ge 3$，我们可以选取 $x_2 \in N_X(y_i) \setminus \{x_1, x_3\}$。因此，$x_2 \notin \{x_1, x_3\}$，由第 (c) 部分即可得证。

因此，我们可以假设对于所有 $i \in \{2,\dots,k\}$，$y_1y_i \in A(D^*)$。类似地，我们也可以假设对于所有 $i \in \{1,\dots,k-1\}$，$y_ky_i \in A(D^*)$。进一步假设 Y 不是半完全的，否则由推论 3.6 即得结论。令 i 为满足存在 $j \in \{i+1,\dots,k-1\}$ 使得 $y_iy_j \notin A(D^*)$ 的最小数。注意，由于 $y_iy_{i+1} \in A(D^*)$，$i > 1$ 和 $j \ne i+1$。根据 i 的选取，我们有 $y_{i-1}y_{j+1} \in A(D^*)$

考虑

$$P' = y_jy_{j+1}\dots y_ky_{i+1}y_{i+2}\dots y_{j-1}y_1y_2\dots y_i,\ \ P'' = y_iy_{i+1}\dots y_{j-1}y_1y_2\dots y_{i-1}y_{j+1}y_{j+2}\dots y_ky_j.$$

我们可以看到，P' 是 $D[Y]$ 中一条至多含 3 条逆向弧（y_ky_{i+1}、$y_{j-1}y_1$，以及 P 中的一条逆向弧）的哈密顿定向路，且 y_j 与 y_i 之间没有弧；P'' 是 $D[Y]$ 中一条至多含 4 条逆向弧（$y_{j-1}y_1$、$y_{i-1}y_{j+1}$、y_ky_j，以及 P 中的一条逆向弧）的哈密顿定向路，且 y_i 与 y_j 之间没有弧。

由于 $\alpha(D) \ge 2$，我们有 $N_X(y_i) \cup N_X(y_j) = X$。由于 $|N_X(y_i)|$，$|N_X(y_j)| \ge 1$，根据引理 3.3 第 (b) 部分和引理 3.7，存在 $x_1 \in N_X(y_i)$ 和 $x_2 \in N_X(y_j)$，使得 $Q[x_1,x_2]$ 和 $Q[x_2,x_1]$ 中的反向弧总数至多为 2。

哈密顿有向圈

$$C_1 = P'Q[x_1,x_2]y_j,\ \ C_2 = P''Q[x_2,x_1]y_i$$

反向弧总数至多为 11（P' 和 P'' 中有 7 条，$Q[x_1,x_2]$ 和 $Q'[x_2,x_1]$ 中有 2 条，$\{x_1y_i, y_ix_1\}$ 和 $\{x_2y_j, y_jx_2\}$ 中各有 1 条）。因此，C_1 和 C_2 中至少有一个的反向弧至多为 5 条。□

现在我们准备证明定理 1.3。为方便读者，我们从定理陈述开始。

定理 1.3。若 D 是一个 *2*-连通有向图，且 $\alpha(D) \le 2$，则 D 包含一个至多有 *5* 条反向弧的哈密顿有向圈。

证明。设 D 是定理所述命题的一个反例。设 D_X 是 D 中规模最大的半完全有向图，并记为 $X = V(D_X)$。若 $|X| = |V(D)|$，那么将定理 1.1 给出的哈密顿有向路的首尾相连得到的有向圈会导致矛盾。因此，我们可以假设 $Y := V(D) \setminus X$ 非空。若 $|V(D)| \le 11$，则 D 是 2-连通的，且 $\alpha(D) \le 2$意味着 $UG(D)$包含一个哈密顿有向圈 C。因此，C 或其反向会产生一个至多有 $\lfloor 11/2 \rfloor = 5$ 条反向弧的哈密顿有向圈。故 $|V(D)| \ge 12 \ge 9 = R(3,4)$，这意味着 $|X| \ge 4$。

对于任意集合 $V \in V(D)$ 和任意 $v \ne v' \in V$，记 $Q_V[v,v']$ 为 $D[V]$ 中恰有 $b_V(v,\ v')$ 条反向弧的任意哈密顿（v, v'）定向路。若 $V = X$，则简记为 $Q[v,v']$。

情形 1： 对于每个顶点 $y \in Y$，都存在某个 $x \in X$ 使得 $xy \in A(D^*)$。

此时，引理 3.10 的 (d) 部分中的前两个条件已经满足。若 $D[Y]$ 含有一条至多有 1 条反向弧的哈密顿或定向路，就会得到矛盾。

情形 1.1： $D[Y]$ 不连通。

由于 $\alpha(D) \le 2$，$D[Y]$ 由两个顶点不相交且彼此之间没有弧的半完全有向图组成。记它们为 A 和 B。

首先假设对于所有 $a \in A$ 和所有 $b \in B$，$N_X(a) \cap N_X(b) = \emptyset$。任取 $a' \in A$，并令 $X_1 = N_X(a')$。对于所有 $a \in A$ 和所有 $b \in B$，有 $ab \notin A(D^*)$，因此 $N_X(a) \cup N_X(b) = X$。于是，对于所有 $b \in B$，都有 $N_X(b) = X \setminus X_1$。类似地，对于所有 $a \in A$，都有 $N_X(a) = X_1$。由于 D 是 2-连通的，必有 $|X_1|$，$|X \setminus X_1| \ge 2$。

任取 $x_1 \in X_1$ 和 $x_2 \in X \setminus X_1$。令 $X' = X \setminus \{x_1,x_2\}$，$Y' = Y \cup \{x_1,x_2\}$。我们有$D[X']$ 是半完全的，$D[Y']$ 是连通但非 2-连通的（因为 x_1 是 $D[Y']$的割点），且 $X' \cup Y' = V(D)$。注意，$|X_1 \setminus \{x_1,x_2\}| \ge 1$，$|(X \setminus X_1) \setminus \{x_1,x_2\}| \ge 1$ 以及 x_1，x_2 都与 X'中的所有顶点相邻，因此对所有 $y \in Y'$，都有 $|N_{X'}(y)| \ge 1$。由定理 1.2，$D[Y']$ 中存在一条至多含有 2 条反向弧的哈密顿定向路 $P = y_1y_2\dots y_k$。注意$k = |Y'| = |A| + |B| + 2 \ge 4$。由于 Y' 不是 2-连通的，必有 $y_1y_k \notin A(D^*)$。此外，$|N_{X'}(y_1)|$，$|N_{X'}(y_k)| \ge 1$，因此由引理 3.10 的 (a) 部分可得矛盾。

因此，存在 $x \in X, a \in A, b \in B$，使得 $ax, bx \in A(D^*)$。令 $X' = X \setminus \{x\}$。注意，我们可以找到 $a' \in A$，使得 $b_A(a, a') + b_A(a', a) \leq 2$。事实上，若 $|A| = 1$，则令 $a' = a$即可显然成立。若 $|A| \geq 2$，则我们对 $D \leftarrow D[A], X \leftarrow \{a\}, Y \leftarrow A \setminus \{a\}$ 应用引理 3.8，并找到 $a' \in A \setminus \{a\}$，使得 $b_A(a, a') + b_A(a', a) \leq 2$。类似地，存在 $b' \in B$，使得 $b_B(b, b') + b_B(b', b) \leq 2$。

由于 $a'b' \notin A(D^*)$ 和 $\alpha(D) \leq 2$，我们有 $N_X(a') \cup N_X(b') = X$，并且不妨设$|N_X(b')| \geq N_X(a')|$。由于 $|X| \geq 4$，我们有 $|N_X(b')| \geq 2$，进而得到 $|N_{X'}(b')| \geq 1$。接下来我们证明，总能找到 $a_1, a_2 \in A$，使得 $xa_1 \in A(D^*)$，且 $|N_{X'}(a_2)| \geq 1$，并且若 $|A| > 1$，则 $a_1 \neq a_2$。若存在 $a_0 \in A \setminus \{a\}$ 使得 $N_{X'}(a_0) \neq \emptyset$，则我们指定 $a_2 = a_0$ 并指定 $a_1 = a$。否则，由于对所有 $y \in Y$ 都有 $|N_X(y)| \geq 1$，因此对所有 $a_0 \in A \setminus a$ 都有 $N_X(a_0) = \{x\}$。由于 D 是 2-连通的，我们必有 $N_{X'}(a) \neq \emptyset$。在这种情况下，我们指定 $a_2 = a$，并且若$|A| \geq 2$，则将 a_1 指定为 $A \setminus \{a_2\}$ 中任意一个顶点；否则，若 $|A| = 1$，则令 $a_1 = a$。因此，我们得到具有所需性质的 a_1, a_2。

由引理 3.4，得 $b_A(a_1, a_2) + b_A(a_2, a_1) \leq 3$。由于 $a_2b' \notin A(D^*)$，我们有 $N_{X'}(a_2) \cup N_{X'}(b') = X'$。由引理 3.8，且由于 $|N_{X'}(a_2)| \geq 1$, $|N_{X'}(b')| \geq 1$ and $|X'| \geq 3$，存在$x_a \neq x_b \in X'$，使得 $x_a \in N_{X'}(a_2)$ $x_b \in N_{X'}(b')$，且 $b_{X'}(x_a, x_b) + b_{X'}(x_b, x_a) \leq 2$。考虑以下两个哈密顿有向圈

$$C_1 = Q_A(a_2, a_1)xQ_B(b, b')Q_{X'}(x_b, x_a)a_2 \ , \quad C_2 = a_2Q_{X'}(x_a, x_b)Q_B(b', b)xQ_A(a_1, a_2).$$

它们总共至多有 11 条反向弧，其中 $Q_A(a_1, a')$和 $Q_A(a', a_1)$的并集至多包含 3 条反向弧；$\{Q_{X'}(x_a, x_b)$ $Q_{X'}(x_b, x_a)\}$、 $\{Q_B(b, b')$ $Q_B(b', b)\}$各有 2 条反向弧； $\{a_1x, xa_1\}, \{bx, xb\}, \{b'x_b, x_bb'\}, \{a_2x_a, x_aa_2\}$各有 1 条反向弧。因此， C_1 或 C_2 是 D 中的哈密顿有向圈，且至多有 5 条反向弧，这就产生了矛盾。

情形 1.2： $D[Y]$ 是连通的。

情形 1.2.1： 存在 $y \in Y$，使得 $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \leq 1$。

设 $Y' = Y \setminus \{y\}$。由定理 1.8，我们可以将 $D[Y']$ 划分为两条有向路 $u_1 \dots u_s$ 和 $v_1 \dots v_t$。由引理 3.10 的 (d) 部分，只需在 $D[Y]$ 中找到一条至多含一条反向弧的哈密顿定向路，即可导出矛盾。

断言 0： $s, \ t \geq 2$

断言 0 的证明： 为导出矛盾，不失一般性，假设 $s = 1$。若 $t = 1$，则由于 $D[Y]$ 是连通的，$D[Y]$ 是一条长度为 2 且至多含一条反向弧的定向路，矛盾。因此， $t \geq 2$。

若 $yv_1 \notin A(D^*)$，则由于 $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \leq 1$，我们有 $u_1y, \ yv_2, \ yv_t \in A(D^*)$。注意，$v_1u_1 \in A(D^*)$，否则 $v_1 \dots v_tyu_1$ 至多有 2 条反向弧，由引理 3.10 的 (a) 部分可得矛盾。还要注意，$v_1u_1, \ u_1y, \ yv_t \in A(D)$，否则 $v_ty \in A(D)$ 或 $yu_1 \in A(D)$ 或 $u_1v_1 \in A(D)$，而 $D[Y]$ 中的哈密顿有向圈 $v_1 \dots v_tyu_1v_1$ 至多有 2 条反向弧，且其中包含 $D[Y]$ 中至多有 1 条反向弧的哈密顿或路，矛盾。现在我们得到 $D[Y]$ 中至多有 1 条反向弧的哈密顿或路 $v_1u_1yv_2 \dots v_t$，矛盾。

情形 $yv_t \notin A(D^*)$ 可用类似的方法证明。

若 $u_1y \notin A(D^*)$，则由于 $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \leq 1$，对所有 $i = 1, 2, \dots, t$，有 $yv_i \in A(D^*)$。由引理 3.9，存在一条哈密顿有向路 $p_1 \dots p_{t+1}$，它位于 $D[Y \setminus \{u_1\}]$中。注意， $u_1p_1, u_1p_{t+1} \notin A(D^*)$，否则 $u_1p_1 \in A(D^*)$ 或 $u_1p_{t+1} \in A(D^*)$，于是 $u_1p_1p_2 \dots p_{t+1}$ 或 $p_1p_2 \dots p_{t+1}u_1$ 是 $D[Y]$ 中至多含一条反向弧的哈密顿或路，这就产生了矛盾。由于 $\alpha(D) \leq 2$，我们有 $p_1p_{t+1} \in A(D^*)$。因为 $D[Y]$ 连通，所以对某个 $i \in 1, 2, \dots t+1$，必有 $u_1p_i \in A(D^*)$。于是， $u_1p_ip_{i+1} \dots p_{t+1}p_1p_2 \dots p_{i-1}$ 或 $p_{i+1}p_{i+2} \dots p_{t+1}p_1p_2 \dots p_iu_1$ 是 $D[Y]$ 中至多含一条反向弧的哈密顿或路，这就产生了矛盾。

现在剩下的情况是 $u_1y, \ yv_1, \ yv_t \in A(D^*)$。但在这种情况下，根据 y 和 u_1 之间的弧，$v_1v_2 \dots v_tyu_1$ 或 $u_1yv_1v_2 \dots v_t$ 是 $D[Y]$ 中至多含有一条反向弧的哈密顿定向路，这与结论矛盾。

这就完成了断言 0 的证明。

断言 1： $v_tu_1, \ u_sv_1 \in A\ (D^*)$

断言 1 的证明： 由于 $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \leq 1$，我们可以假设 $u_sy, \ v_1y \in A(D^*).u_1 \dots u_syv_1 \dots v_t$ 是有向图 D $D[Y]$ 中一条至多含有两条反向弧的哈密顿定向路。若 $v_tu_1 \notin A(D^*)$，则由引理 3.10 (a) 部分可得矛盾。因此 $v_tu_1 \in A(D^*)$。若 $yv_1 \in A(D)$ 或 $u_sy \in A(D)$,

那么 $u_1 \dots u_s y v_1 \dots v_t$ 就是有向图 D $D[Y]$ 中一条至多含有一条反向弧的哈密顿定向路，这同样会导致矛盾。因此 $v_1 y$, $y u_s \in A(D)$。由于 $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \leq 1$, $u_{s-1} y \in A(D^*)$ 或 $y v_2 \in A(D^*)$。那么 $v_1 \dots v_t u_1 \dots u_{s-1} y u_s$ 或 $v_1 y v_2 \dots v_t u_1 \dots u_s$ 是一条至多含有 2 条反向弧的哈密顿定向路。因此根据引理 3.10 (a) 部分， $v_1 u_s \in A(D)$。断言 1 的证明至此完成。

由于 $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \leq 1$，我们可以假设对所有 $i = 1$，2，……，t，都有 $y v_i \in A(D^*)$。由引理 3.9， $D[\{y, v_1, v_2, \dots, v_t\}]$ 中存在一条哈密顿有向路 p_1， $\dots p_{t+1}$，且 $p_1 = v_1$ 或 y，并且 $p_{t+1} = v_t$ 或 y。若 $u_1 y \in A(D^*)$，则 $p_{t+1} u_1 \in A(D^*)$，因此 $p_1 \dots p_{t+1} u_1 \dots u_s$ 是 $D[Y]$ 中至多含一条反向弧的哈密顿定向路。若 $u_1 y \notin A(D^*)$，则 $u_s y \in A(D^*)$，因此 $u_s p_1 \in A(D^*)$。于是， $u_1 \dots u_s p_1 \dots p_{t+1}$ 是 $D[Y]$ 中至多含一条反向弧的哈密顿定向路，这与矛盾相悖。情形 1.2.1 的证明至此完成。

情形 1.2.2： $|Y \setminus (N_Y(y) \cup \{y\})| \geq 2$ 对所有 $y \in Y$ 均成立。假设存在 $y' \in Y$ 使得 $|N_X(y')| = 1$。那么 $|X \setminus N_X(y')| = X - 1$，因此

$$|V(D) \setminus (N_D(y') \cup \{y\})| = |X \setminus N_X(y')| + |Y \setminus (N_Y(y') \cup \{y\})| \geq |X| + 1.$$

由于 $\alpha(D) \leq 2$， $D[V(D) \setminus (N_D(y') \cup \{y\})]$ 必定是一个比 X 更大的半完全有向图，这与 X 的极大性矛盾。因此，对所有 $y \in Y$， $|N_X(y)| \geq 2$ 均成立。若 Y 是半完全的，则由推论 3.6 可得矛盾。因此，存在 $y \neq y' \in Y$ 使得 $y y' \notin A(D^*)$。这意味着 $N_X(y) \cup N_X(y') = X$。由于 X 是规模最大的半完全有向图，我们必有 $N_X(y) \neq X$，因此 $N_X(y) \neq N_X(y')$。

根据定理 1.2，存在一条至多含两条反向弧的哈密顿定向路 $P = y_1 y_2 \dots y_k$，其位于有向图 D $D[Y]$ 中。由引理 3.10 的 (a) 部分可得 $y_1 y_k \in A(D^*)$。由于并非所有 $N_X(y)$ 都相等，因此必存在 $i \in \{1, \dots, k-1\}$，使得 $N_X(y_i) \neq N_X(y_{i+1})$。

任取 $x_{i+1} \in N_X(y_{i+1}) \setminus N_X(y_i)$。现在假设我们已选取 x_j，接着选取 $x_{j+1} \in N_X(y_{j+1}) \setminus \{x_j\}$（下标按模 k 计算）。如此继续，直至选取 $x_{i-1} \in N_X(y_{i-1}) \setminus \{x_{i-2}\}$。由于 $x_{i+1} \notin N_X(y_i)$，我们有 $|N_X(y_i) \setminus \{x_{i-1}, x_{i+1}\}| \geq 1$。因此，我们可以选取 $x_i \in N_X(y_i) \setminus \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$。

现在，对于所有 $i = 1$、2、……、k，都有 $x_i \notin \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$。如果存在 $i \neq j$ 使得 $x_i y_i$， $y_j x_j \in A(D)$，那么存在 t 使得 $y_t x_t$， $x_{t+1} y_{t+1} \in A(D)$。于是

$$Q[x_t, x_{t+1}] y_{t+1} y_{t+2} \dots y_k y_1 \dots y_t x_t$$

这是 D 中的一个哈密顿有向圈，至多含有 5 条逆向弧，其中 $Q[x_t, x_{t+1}]$ 中可能有 2 条反向弧，$y_{t+1} y_{t+2} \dots y_k y_1 \dots y_t$ 中可能有 3 条。

如果对于所有 i 都有 $x_i y_i \in A(D)$，或者对于所有 i 都有 $y_i x_i \in A(D)$，那么

$$Q[x_k, x_1] y_1 y_2 \dots y_k x_k$$

这是 D 中的一个哈密顿有向圈，至多含有 5 条逆向弧，其中 $Q[x_k, x_1]$ 中可能有 2 条反向弧， $y_1 \dots y_k$ 中可能有 2 条，并且 $x_1 y_1$， $y_k x_k$ 中有一条。

情形 1 到此结束。

情形 2： 存在某个顶点 $y \in Y$，使得对于所有 $x \in X$， $xy \notin A(D^*)$。令 Z 包含所有这样的顶点。由于 $\alpha(D) \leq 2$， $D[Z]$ 必须是半完全有向图。令 $W = Y \setminus Z$。考虑任意顶点 $w \in W$。由于 $\alpha(D) \leq 2$，且不存在 (X, Z)-弧，因此要么对于所有 $x \in X$， $xw \in A(D^*)$；要么对于所有 $z \in Z$， $zw \in A(D^*)$。前一种情况与 X 的极大性矛盾，因为 $D[X \cup \{w\}]$ 是一个比 X 更大的半完全有向图。因此，对于所有 $w \in W$ 和所有 $z \in Z$，必有 $zw \in A(D^*)$。此外，对于所有 $w \in W$，存在某个 $x \in X$ 使得 $xw \in A(D^*)$（否则这个 w 就会属于 Z）。

根据定理 1.8，我们可以将 W 划分为两条有向路 $u_1 \dots u_s$ 和 $v_1 \dots v_t$。根据定理 1.1，在 Z 中存在一条哈密顿有向路 $P_z = p_1 \dots p_l$。

断言 A: $v_t u_1, u_s v_1 \in A(D^*)$

断言 A 的证明： $u_1 \dots u_s P_z v_1 \dots v_t$ 是 $D[Y]$ 中的一条哈密顿定向路，且至多包含 2 条反向弧。如果 $v_t u_1 \notin A(D^*)$，则根据引理 3.10 的 (a) 部分可得矛盾。因此， $v_t u_1 \in A(D^*)$。类似地，我们还可得 $u_s v_1 \in A(D^*)$。

断言 B： </style}以下条件成立。

(1) 对所有 $x' \in N_X(u_s)$ 以及所有 $x \in N_X(v_1) \setminus \{x'\}$，都有 $v_1 x \in A(D)$。

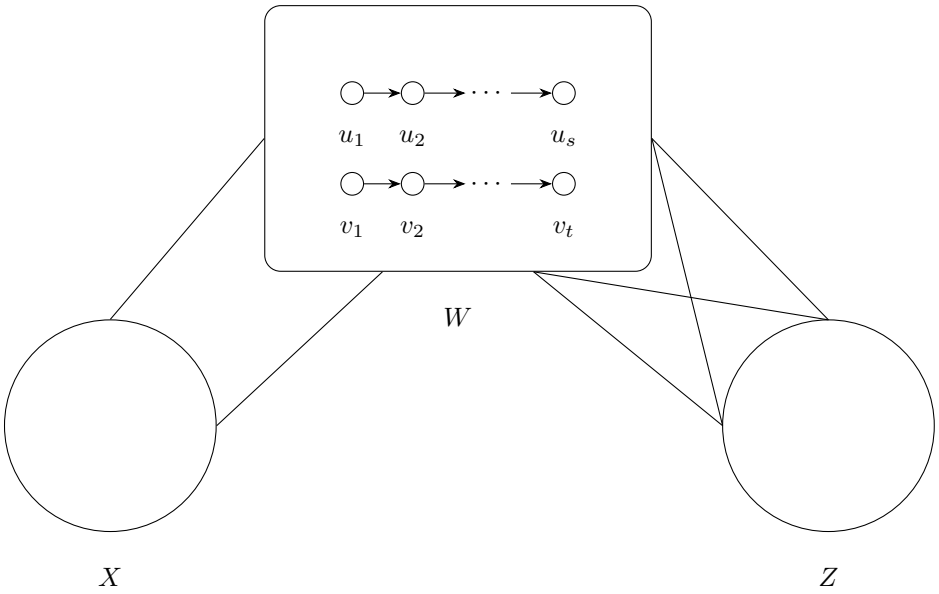


图2：情形 2

(2) 对所有 $x' \in N_X(v_1)$ 以及所有 $x \in N_X(u_s) \setminus \{x'\}$，都有 $xu_s \in A(D)$。
(3) 对所有 $x' \in N_X(v_t)$ 以及所有 $x \in N_X(u_1) \setminus \{x'\}$，都有 $u_1x \in A(D)$。
(4) 对所有 $x' \in N_X(u_1)$ 以及所有 $x \in N_X(v_t) \setminus \{x'\}$，都有 $xv_t \in A(D)$。

证明 **断言 B：** 我们首先证明第 (1) 部分。任取满足假设的 x, x'。If $xv_1 \in A(D)$, then

$$u_1 \dots u_s Q[x', x] v_1 \dots v_t p_1 \dots p_l u_1,$$

是有向图 D 中至多含有 5 条反向弧的哈密顿有向圈。可能的反向弧为 v_tp_1, p_lu_1, u_sx'，以及来自 $Q[x', x]$ 的 2 条弧。

类似地，设 x, x' 满足第 (2) 部分的假设。若 $u_sx \in A(D)$，则

$$u_1 \dots u_s Q[x, x'] v_1 \dots v_t p_1 \dots p_l u_1,$$

是 D 中的哈密顿有向圈，至多有 5 条反向弧。可能的反向弧为 v_tp_1、p_lu_1、$x'v_1$，以及来自 $Q[x', x]$的 2 条弧。

部 (3) 和 (4) 可用类似方法证明。由此证明了断言 B。

命题C： $|X| \geq 5$ 或 $|Z| = 1$。

命题C的证明： 假设 $|X| \leq 4$。由于任何半完全有向图 W' 中的 W 与 Z 中的所有顶点一起构成一个规模为 $|W'| + |Z|$的半完全有向图，而其规模必须至多为 $|X| \leq 4$。因此必有 $|W| \leq R(3、5 - |Z|) - 1$。若 $|Z| \geq 2$，则 $|Z| + |W| \leq 7$，所以 $|V(D)| \leq |X| + |Z| + |W| \leq 11$，这与 $|V(D)| \geq 12$ 矛盾。因此我们可以假设 $|Z| = 1$，因为 $|Z| = 0$ 是**情形 1**。命题C得证。

由断言 A，我们得到 $D[W]$ 中的哈密顿有向圈 $C_W = u_1 \dots u_s v_1 \dots v_t u_1$，其中至多有 2 条反向弧。我们可以将 C_W称为 $C_W = w_1 \dots w_{s+t} w_1$，其中 w_{s+t+1}表示 w_1。注意，对于 $i = 1, 2, \dots\dots, s$，有$w_i = u_i$。

断言 D： 对所有 $w \in W$，$|N_X(w)| \leq 2$。此外，如果 $|N_X(w_j)| = 2$，那么我们可以假设$|N_X(w_{j-1})| = |N_X(w_{j+1})| = 1$。

断言 D 的证明： 假设该断言不成立。不失一般性，我们可以假设存在一个顶点 u_i，对于某个 $i \in \{1, 2, \dots, s\}$，这与假设矛盾。因此，要么$|N_X(w_i)| \geq 3$，要么 $|N_X(w_i)| = 2$ 且 $|N_X(w_{i-1})| \geq 2$，要么 $|N_X(w_i)| = 2$ 且 $|N_X(w_{i+1})| \geq 2$。

若 $|N_X(w_i)| \geq 3$，我们可以任选一个 $x_1 \in N_X(w_{i-1})$ $x_3 \in N_X(w_{i+1})$，且有 $|N_X(w_i) \setminus \{x_1, x_3\}| \geq 1$。因此，我们可以选取 $x_2 \in N_X(w) \setminus \{x_1, x_3\}$。若 $|N_X(w_i)| = 2$ 且 $|N_X(w_{i-1})| \geq 2$，则选取 $x_3 \in N_X(w_{i+1})$ $x_2 \in N_X(w_i) \setminus \{x_3\}, x_1 \in N_X(w_{i-1}) \setminus \{x_2\}$。若 $|N_X(w_i)| = 2$ 且 $|N_X(w_{i+1})| \geq 2$，则选取 $x_1 \in N_X(w_{i-1})$ $x_2 \in N_X(w_i) \setminus \{x_1\}, x_3 \in N_X(w_{i+1}) \setminus \{x_2\}$。

因此，在所有情况下，我们都可以选取 $x_1 \in N_X(w_{i-1})$ $x_2 \in N_X(w_i)$ $x_3 \in N_X(w_{i+1})$，使得 $x_2 \notin \{x_1, x_3\}$。由引理 3.9，我们可以将 $v_1 \dots v_t$ 和 $p_1 \dots p_l$ 合并为一条有向路 $q_1 q_2 \dots q_{t+l}$，其中 $q_1 = v_1$ 或 p_1，且 $q_{t+l} = v_t$ 或 p_l。由于 p_1，$p_l \in Z$, u_1，$u_s \in W$，并且根据断言 A，我们有 $v_1 u_s$，$p_1 u_s$，$v_t u_1$，$p_l u_1 \in A(D^*)$。因此 $q_1 u_s$，$q_{t+l} u_1 \in A(D^*)$。我们在 $D[Y]$中有一个哈密顿有向圈 $C' = q_1 q_2 \dots q_{t+l} u_1 \dots u_s q_1$，其反向弧至多有 2 条（$q_{t+l} u_1$ 和 $u_s q_1$）。

情形 D1： $i \in \{2, \dots, s-1\}$。我们有 $w_{i-1} = u_{i-1}$，$w_i = u_i$，$w_{i+1} = u_{i+1}$。由于 $q_1 q_2 \dots q_{t+l} u_1 \dots u_s$ 是 $D[Y]$ 中至多含一条反向弧的哈密顿定向路，根据引理 3.10 第 (c) 部分，我们得到矛盾。

情形 D2： $i = s$，$s \geq 2$。我们有 $w_{i-1} = u_{s-1}$，$w_i = u_s$，$w_{i+1} = v_1$。根据断言 B 第 (2) 部分，我们有$x_2 u_s \in A(D)$。该有向圈

$$C'[u_s, u_1] u_2 \dots u_{s-1} Q[x_1, x_2] u_s,$$

是 D 中至多含 5 条反向弧的哈密顿有向圈。可能的反向弧包括 $C'[u_s, u_1]$ 中的 2 条、$Q[x_1, x_2]$ 中的 2 条，以及 $u_{s-1} x_1$。注意，若 $s = 2$，该有向圈就退化为 $C'[u_2, u_1] Q[x_1, x_2] u_2$。

情形 D3： $i = 1$，$s \geq 2$。我们有 $w_{i-1} = v_t$，$w_i = u_1$，$w_{i+1} = u_2$。根据断言 B 的第（3）部分，我们有$u_1 x_2 \in A(D)$。有向圈

$$C'[u_s, u_1] Q[x_2, x_3] u_2 \dots u_s,$$

是 D 中至多含有 5 条反向弧的哈密顿有向圈。可能的反向弧有：$C'[u_s, u_1]$ 中的 2 条、$Q[x_2, x_3]$ 中的 2 条，以及 $x_3 u_2$。注意，如果 $s = 2$，该有向圈就退化为 $C'[u_2, u_1] Q[x_2, x_3]$。

情形 D4： $i = s = 1$。在这种情况下，我们有 $w_{i-1} = v_t$，$w_i = u_1$，$w_{j+1} = v_1$。根据断言 B 的第（2）部分，我们有 $x_2 u_1 \in A(D)$；但根据断言 B 的第（3）部分，我们有 $u_1 x_2 \in A(D)$，这就产生了矛盾。由此证明了断言 D。

由于 $Y = Z \cup W$, $D[Z]$ 是半完全的，并且对于所有 $w \in W$，$z \in Z$ 都有 $zw \in A(D^*)$，如果 $D[W]$ 是半完全的，那么 $D[Y]$ 也必然是半完全的。根据引理 3.5，不妨设 $D[W]$ 不是半完全的。因此存在 $w \neq w' \in W$ 使得 $ww' \notin A(D^*)$。

由于 $\alpha(D) \leq 2$，我们有 $N_X(w) \cup N_X(w') = X$。如果 $|X| \geq 5$，那么 $|N_X(w)| \geq 3$ 或$|N_X(w')| \geq 3$。这两种情况都与断言 D 矛盾。因此根据命题C，我们必有 $|Z| = 1$ 和 $|X| = 4$。

由于 $|V(D)| \geq 12$，我们有 $|W| \geq 12 - |X| - |Z| = 7$。根据断言 D，$W$ 中的每个顶点在 $D[X]$ 中的度至多为 2，且其中至少有一半的顶点的度为 1。因此，W 中至少有 4 个顶点在 X 中的度恰好为 1。如果两个不同的顶点 w_1，$w_2 \in W$ 在 X 中的度为 1，那么存在某个 $x \in X \setminus (N_X(w_1) \cup N_X(w_2))$。由于 $\alpha(D) \leq 2$，我们有 $w_1 w_2 \in A(D^*)$。于是我们知道，Z 中的顶点与 W 中 4 个度为 1 的顶点共同诱导出一个大小为 $5 > |X|$ 的半完全有向图，这与 X 是 D 中最大的半完全有向图之一相矛盾。□

4 独立数至少为 2 的有向图中的哈密顿定向路和定向圈的开放问题

定理 1.2 和定理 1.3 表明，连通（分别为 2-连通）的有向图 D with $\alpha(D) = 2$ 存在一条哈密顿或路（分别为哈密顿有向圈），且其反向弧数量为常数。或许，这些结果可以推广到 $\alpha(D) = k \geq 3$ 的情形。

问题 4.1。设 D'（分别为 D''）是一个含有哈密顿或路（分别为有向圈）的有向图，并设 $b_P(D')$（分别为 $b_C(D'')$）是在 D'（分别为 D''）中哈密顿或路（分别为有向圈）所含反向弧数量的最小值。是否存在函数 $\beta_P(k)$ 和 $\beta_C(k)$，使得若 $\alpha(D') = \alpha(D'') = k$，则 $b_P(D') \leq \beta_P(k)$ 且 $b_C(D'') \leq \beta_C(k)$？

下面的简单归约表明，若存在函数 $\beta_C(k)$，则存在函数$\beta_P(k)$，且 $\beta_P(k) < \beta_C(k)$。事实上，设对每个 k 都存在 $\beta_C(k)$，并令 D' 为一个具有

哈密顿定向路且 $\alpha(D')=k$的有向图。向 D' 中添加一个新顶点 x ，并添加从 x到 $V(D')$的所有可能的弧；将所得有向图记为 D^*. 。注意， $\alpha(D^*)=k$， D^* 有一个哈密顿有向圈 Z，且其反向弧至多有 $\beta_C(k)$条。因此， D' 的哈密顿定向路 $Z-x$ 至多有 $\beta_C(k)$条 -1反向弧。

因此，如果问题 4.1 的答案是肯定的，那么只需考虑哈密顿有向圈子问题。下面的结果给出了 $\beta_C(k)$ 的一个下界（如果其存在）。

定理 4.2. 对于每个整数 $k\geq 2$，都存在一个有向图 D_k，其 $\alpha(D_k)=k$，使得 D_k 的每个哈密顿有向圈中，反向弧的数量至少为 $\lfloor 5k/2\rfloor-1$。

证明。令 $Q=TT(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ 为一个以五个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 为顶点的（传递）竞赛图，满足 $v_iv_j\in A(Q)$ 当且仅当 $i<j$。注意，哈密顿 (v_2,v_4) 定向路中反向弧的最小数量恰为一。事实上，$v_2v_3v_5v_1v_4$ 是一条仅含一个反向弧的哈密顿 (v_2,v_4) 定向路，而在任何哈密顿 (v_2,v_4) 定向路中， v_5 都必须与一个反向弧关联。此外，注意哈密顿 (v_4,v_2) 定向路 Z 中反向弧的最小数量为二。事实上，对于 Q 中的每一条哈密顿 (v_4,v_2) 定向路，从 v_4 到 v_3 的子路上必有一个反向弧，从 v_3 到 v_2 的子路上也必有一个反向弧。最后，注意 $v_4v_5v_1v_3v_2$ 是一条含有两个反向弧的哈密顿 (v_4,v_2) 定向路。

现在我们按如下方式构造一个有向图 D_k，其 $\alpha(D_k)=k$ （$k\geq 2$）；关于 D_6.，见图 3。从 k 个 Q副本开始，分别命名为 Q_1， Q_2，…，Q_k。按如下方式选取 x_i， $y_i\in V(Q_i)$。

- If $i\leq\frac{k}{2}$, let $Q_i=TT(u,x_i,v,y_i,w)$;
- If $i>\frac{k}{2}$, let $Q_i=TT(w,y_i,v,x_i,u)$.

然后任取一个 在 $k-2$ 个顶点 u_1， u_2，…，u_{k-2} 上的竞赛图 T，并在 T与 Q_k之间任意添加弧使得 $V(\quad Q_k)\cup V(T)$ 在 D_k中诱导出一个竞赛图。最后添加以下弧。

(a) y_iu_i, $x_{i+1}u_i$ 对所有 $i=1,2,\ldots,k-2$;

(b) x_1y_k 和 $y_{k-1}x_k$。

这就完成了 D_k 的构造。注意， D_k 可以分解为 k 个竞赛图：Q_1， Q_2、.....、Q_{k-1}， $D_k[V（Q_k）\cup V（T）$，这意味着 $\alpha（D_k）=k$。

现在我们将证明， D_k 中任意一个哈密顿有向圈都至少含有 $\lfloor 5k/2\rfloor-1$ 条反向弧。设 C 是 D_k 中反向弧数量最少的哈密顿有向圈。由于对于所有 $i\in\{1,2,\ldots,k-1\}$， C 都必须进入并离开 Q_i，我们注意到上文 (a) 和 (b) 中定义的所有弧都属于 C （有些是正向弧，有些是反向弧）。这意味着以下两种情形恰有一种成立：

情形 1： C 在 Q_i 中包含一条哈密顿（x_i， y_i）-定向路，对所有 $i\in\{1,2,\ldots,k-1\}$ 均成立；

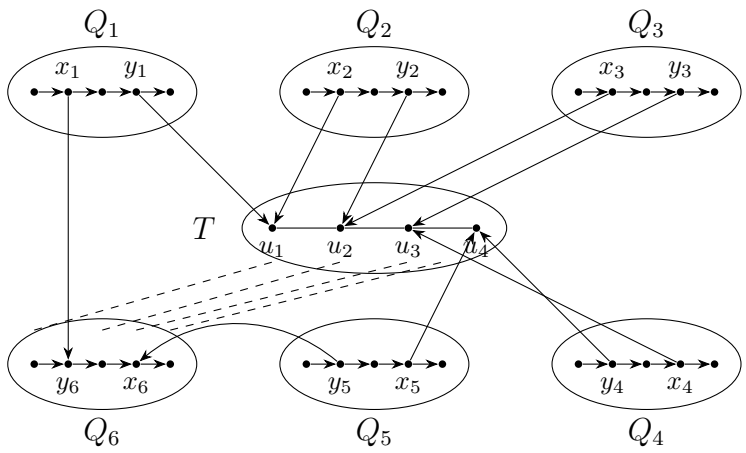
情形 2： C对所有 $i\in\{1,2,\ldots,k-1\}$都包含一条哈密顿（y_i， x_i）-定向路。

对于 $i=1$、2、.....、$k-2$，每个 u_i在 C中恰与两条弧关联，这两条弧必为 y_iu_i和$x_{i+1}u_i$。因此， T 与 Q_k 之间没有弧属于 C。所以，若情形 1成立，则 C 在 Q_k中包含一条哈密顿（x_k， y_k）-定向路；否则情形 2成立，且 C在 Q_k中包含一条哈密顿（y_k， x_k）-定向路。无论情形 1还是情形 2成立，所有包含于C中的 Q_i's 中的这些哈密顿定向路，至少总共包含 $2\lfloor k/2\rfloor+\lceil k/2\rceil=\lfloor 3k/2\rfloor$ 条反向弧。然而，上述 (a) 和 (b) 中定义的弧有一半也将是 C中的反向弧，因此， C 中的反向弧总数至少为 $\lfloor 3k/2\rfloor+k-1=\lfloor 5k/2\rfloor-1$。□

注意，当 $k=2$ 时，上述结果给出了一个例子，其中每个哈密顿有向圈都至少有四条反向弧。

请回顾以下尚未解决的问题。

问题 4.3. 是否每个具有 $\alpha(D)\leq 2$ 的 2-连通有向图 D 都含有一条至多有四条反向弧的哈密顿有向圈?



Fig图 3：当 $k = 6$ 时的一个示例。虚线表示 T 和 Q_6 完全连通 d.

根据第 1 节中陈述的 R´edei 和 Camion 定理，我们可以在多项式时间内确定半完全有向图的哈密顿有向圈（或定向路）中反向弧的最小数量。对于满足$\alpha(D) \leq 2$的有向图 D ，我们尚不清楚这些问题的计算复杂度。

问题 4.4. 设 D 是一个连通有向图，满足 $\alpha(D) \leq 2$。判定 D 的哈密顿或路中反向弧的最小数量，其计算复杂度如何?

问题 4.5. 设 D 是一个 2-连通有向图，满足 $\alpha(D) \leq 2$。判定 D 的哈密顿有向圈中反向弧的最小数量，其计算复杂度如何?

参考文献

[1] J. Ai, Q. Guo, G. Gutin, Y. Lan, Q. Shao, A. Yeo, and Y. Zhou. 满足 Ore 型条件的定向图中哈密顿圈的定向差异。arXiv 预印本，2026年2月。版本 2（arXiv:2501.05968v2），2026年2月11日。[2] J. Bang-Jensen, M. H. Nielsen, and A. Yeo. 竞赛图推广中的最长路径划分。《离散数学》，306(16):1830–1839，2006年。[3] J. A. Bondy. Chen–Manalastas 定理的简短证明。《离散数学》，146(1– 3):289–292，1995年。[4] P. Camion. 完全图的哈密顿路径与回路。《巴黎科学院周报 ´科学院 ´（巴黎），249:2151–2152，1959年。[5] C. C. Chen and P. Manalastas Jr. 每个稳定度为 2 的有限强连通有向图都有哈密顿路径。《离散数学》，44(3):243–250，1983年。[6] V. Chv´atal and P. Erd˝os. 关于哈密顿回路的一则注记。《离散数学》，2(2):111–113，1972年。[7] P. Erd˝os. 关于 Ramsey–van der Waerden 定理的组合问题。《数学札记》，14:29–37，1963年。[8] A. Freschi and A. Lo. 狄拉克定理的定向差异版本。《组合理论杂志 *B* 辑，169:338–351，2024年。[9] M. Frick and P. Katreniˇc. 定向图可追踪性猜想的研究进展。《离散数学与理论计算机科学》，10(3):105–114，2008年。

[10] M. Frick, S. A. van Aardt, J. E. Dunbar, M. H. Nielsen, and O. R. Oellermann. 定向图的可追踪性猜想。《组合学电子期刊》，15(1):R150，2008年。[11] T. Gallai and A.N. Milgram. 对 R´edei 图论定理的推广。《数学科学学报》（塞格德），21:181–186，1960年。[12] L. Gishboliner, M. Krivelevich, and P. Michaeli. 哈密顿圈的定向差异。《图论杂志》，103:780–792，2023年。[13] Q. Guo, G. Gutin, Y. Lan, Q. Shao, A. Yeo, and Y. Zhou. 竞赛图推广中的哈密顿有向圈与路径的正向弧最大化。arXiv 预印本，2026年2月。发布于2026年2月11日。[14] F. Havet. 与每条最长路径相交的稳定集。《离散数学》，289(1–3):169–173，2004年。[15] L. R´edei. 一个组合学定理。《塞格德文学学报》，7:39–43，1934年。竞赛图中关于哈密顿路径的经典定理。[16] S. A. van Aardt, J. E. Dunbar, M. Frick, P. Katreniˇc, M. H. Nielsen, and O. R. Oellermann. k-可追踪定向图的可追踪性。《离散数学》，310(8):1325–1333，2010年。