arXiv:2603.23056v1 [math.FA] 24 Mar 2026

厄米矩阵与正规矩阵的特征值稳定性

ADAM PARUSI´NSKI 和 ARMIN RAINER

Abstract. 有序特征值在厄米矩阵的实向量空间上定义了一个 Lipschitz 映射。我们证明，对于有界开域上的所有 $1 \leq q < \infty$，该映射通过叠加作用于 Sobolev 空间 $W^{1,q}$ 时连续，但并非一致连续。对于 $q = \infty$，这种作用仍然是定义良好且有界的，但不连续。我们证明，这一稳定性结果可推广到正规矩阵，其中特征值可自然地解释为 Almgren 意义下的多值 Sobolev 函数。本文还给出了若干应用，包括奇异值、矩阵条件数、特征值图像的表面积以及希尔伯特空间中紧自伴算子的稳定性。

Contents

目录 . . .1
1. 引言 .2 2. 函数空间 .13 3. 厄米矩阵和正规矩阵 .17 4. 厄米矩阵和正规矩阵的一致块对角化 .19 5. 厄米矩阵的特征值稳定性：单参数情形 .26 6. 厄米矩阵的特征值稳定性：多参数情形 .34 7. 示例 .36 8. d-值 Sobolev 函数 .39 9. 正规矩阵的特征映射 .44 10. 正规矩阵的特征值稳定性：单参数情形 .45 11. 正规矩阵的特征值稳定性：多参数情形 .51 12. 紧自伴算子的一个应用 .52 参考文献 .55

Date：2026年3月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 15A18、15A42、15B57、46E35、47A55、47B15、47H30。*Key words and phrases.* 特征值稳定性、厄米矩阵、正规矩阵、奇异值、紧自伴算子、索伯列夫正则性、Lipschitz连续性、叠加算子、条件数。本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）资助，数字对象标识符 10.55776/PAT1381823。为实现开放获取，作者已对因本次投稿而产生的任何经作者接受的稿件版本适用知识共享署名许可（CC BY）公共版权许可。

1. Introduction

厄米算子和正规算子的扰动理论有着悠久的历史。解析理论始于 Rellich 的工作 [Rel37], , 并在 Kato 的专著中达到顶峰[Kat76], , 近年来又在更多论文中扩展至光滑扰动理论，例如[AKLM98], [KM03、KMR11、KMR12], [Rai09、Rai13、Rai22], 以及 [PR20]。关于更全面的历史介绍，参见最近的综述文章[PR25]。

对于本文而言，Weyl扰动定理 [Wey12] 发挥着基础性作用。该定理断言，当厄米矩阵空间配备算子范数、特征值配备 ∞-范数时，有序特征值构成该空间上的一个利普希茨映射，且利普希茨常数为 1。结合 L¨owner 定理 [L¨ow34], （它给出了相应的 2-范数结果）, 以及 Hoffman 和 Wielandt [HW53], 将其推广到正规矩阵的结果，该定理是本文几乎所有结果的基础。当然，对于正规矩阵，特征值必须配备一种度量，以考虑到它们是一般复数、无法进行一致排序这一事实。另见 [BDM83] , 其中给出了一种采用算子范数的变体（但其利普希茨常数 C 满足 $1 < C < 3$）。对于正规矩阵的局部利普希茨曲线，特征值的每个连续选取实际上都是局部利普希茨的，如[Rai13]所示。如果（实）参数空间的维数至少为 2，正规矩阵的特征值可能不存在连续选取。

特征值作为矩阵函数的 Lipschitz连续性，立即意味着：厄米矩阵或正规矩阵的 Lipschitz族会被映射为其特征值的 Lipschitz族，且映射有界，也就是说，Lipschitz常数受到控制。由此定义的映射称为特征映射：在厄米情形下，它由与有序特征值映射的叠加给出；在正规情形下，则由与无序特征值映射的叠加给出。本文关注特征映射的连续性性质。

特征映射关于（特征值上的）Lipschitz拓扑并不连续，但对于每个 $W^{1,\,q}$ 它关于 Sobolev 拓扑连续。具体而言，我们证明，对于厄米矩阵，特征映射从 $W^{1,\,q}$ 矩阵到有序 $W^{1,\,q}$特征值连续，但并非一致连续；而对于正规矩阵，它从 $W^{1,\,q}$矩阵到无序 $W^{1,\,q}$ 特征值连续——两种情形均对每个 $1 \le q < \infty$成立。在后一种情形中，无序特征值自然可视为 Almgren 意义下的多值 Sobolev 函数 [Alm00]; 另见 [DLS11]。

这些结果明显强于近期论文 [PR24a] 和 [PR24b]分别针对双曲多项式和一般多项式所建立的解映射的相关连续性性质。解映射的定义类比于特征映射。回顾一下，Bronshtein 定理 [Bro79]表明，一个 $C^{d-1,1}$ 族的次数为 d 的双曲（即首一实根）多项式的有序根是局部利普希茨连续的; [PR15]以系数的 $C^{d-1,1}$ 范数表示出了根的利普希茨常数的显式界。根据[PR24a], , 对于每个 $1 \le q < \infty$, 次数为 d 的双曲多项式的解映射关于根上的 $W^{1,q}{}_{\mathrm{loc}}$ 拓扑，从C^d 系数到 $C^{0,1}$ 根是连续的——但关于 $C^{0,1}$ 拓扑则并非如此。对于一般复数

多项式，根的最优 Sobolev 正则性 $W^{1,q}$，对于 $1 \le q < \frac{d}{d-1}$，根的 [PR16、PR18、PR20a], 中确立了这一结果，而解映射的存在性和有界性则建立在这些结果之上。如 [PR24b], 所示，对于每个 $1 \le q < \frac{d}{d-1}$，解映射随后从 C^d 系数到无序 $W^{1,q}$ 根是连续的。

还有两点凸显了矩阵方法的优越性。首先，与多项式情形不同，矩阵的大小无关紧要。其次，厄米矩阵及其特征值的索ob列夫空间是全局定义的，而双曲多项式的系数空间和根空间则必然是局部的。

这些结果也有具体应用。我们将讨论其中几种，包括奇异值、矩阵的条件数、特征值图像的表面积，以及希尔伯特空间中的紧自伴算子（这得益于维数无关性）。

需要指出的是，在这种情形下，正交归一特征向量并不具备特征值那样的正则性，而且一般来说，甚至不连续。

除了Weyl扰动定理及其相关结果外，证明中的一个关键要素是 [PR20], 提出的复三角矩阵分裂引理；该引理出现在稍有不同的背景下。只要特征值并非全部相同，它就能对厄米矩阵和正规矩阵进行局部一致的酉分块对角化。这启发了按矩阵大小进行归纳论证，并且有一项优点：可以直接处理矩阵本身，而不必借助其特征多项式。

下面，我们将更详细地介绍我们的结果。

1.1. 厄米矩阵。 令 $M_d(\mathbb{C})$ 为复 $d \times d$ 矩阵构成的复向量空间。我们在 $M_d(\mathbb{C})$ 上赋予弗罗贝尼乌斯范数 $\|A\|_2 = (\sum_{i,\,j=1}^{d} |a_{ij}|^2)^{1/2}$。

令 $\mathbf{Herm}(d) = \{A \in M_d(\mathbb{C}) : A^* = A\}$ 表示复厄米 $d \times d$ 矩阵构成的实向量空间。我们将递增排列的特征值与 $A \in \mathbf{Herm}(d)$ 相关联

$$\lambda_1^{\uparrow}(A) \le \lambda_2^{\uparrow}(A) \le \cdots \le \lambda_d^{\uparrow}(A)$$

从而得到一个连续映射

$$\lambda^{\uparrow} = (\lambda_1^{\uparrow}, \ldots, \lambda_d^{\uparrow}) : \mathrm{Herm}(d) \to \mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

事实上，根据 L¨owner [L¨ow34]（见命题 3.2），该映射甚至是 Lipschitz 连续的：对于 $A,\ B \in \mathrm{Herm}(d)$,

$$\|\lambda^{\uparrow}(A) - \lambda^{\uparrow}(B)\|_2 \le \|A - B\|_2. \tag{1.2}$$

因此（见命题 3.5），映射（1.1）诱导出一个有界映射

$$\mathcal{E} := (\lambda^{\uparrow})_* : W^{1,q}(U, \mathrm{Herm}(d)) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d), \quad A \mapsto \lambda^{\uparrow} \circ A, \tag{1.3}$$

对于每个 $1 \le q < \infty$，它将 $W^{1,\,q}$ 族厄米矩阵映射为按递增顺序排列的 $W^{1,\,q}$ 特征值，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且有界的。（$q = \infty$ 的情况也如此，但下文将单独讨论。）

我们将 $\mathcal{E} = (\lambda^{\uparrow})_*$ 称为特征映射，不论其定义域和陪域为何，因为它们可能随不同语境而变化。

我们将证明特征映射（1.3）是连续的。

定理 1.1。 设 $1 \le q < \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 开且有界。则特征映射

$$\mathcal{E} : W^{1,q}(U, \mathrm{Herm}(d)) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d), \quad A \mapsto \lambda^{\uparrow} \circ A,$$

是连续的。

定理 1.1 将在第 5 节证明， $m = 1$ 而一般情形将在第 6节从这一特殊情形推得。

注 1.2. 注意，任意利普希茨函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$的叠加都会诱导一个连续映射 $f_*\colon W^{1,q}(U) \to W^{1,q}(U)$，对每个 $1 \le q < \infty$均成立，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且有界的；参见 [MM79]。然而，存在 Lipschitz映射 $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$，满足 $k \ge 2$，使得诱导映射 $f_*\colon W^{1,q}(U, \mathbb{R}^k) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R}^\ell)$不连续；另见 [Mus91], ，其中也给出了连续性的充分条件。不过，我们对定理 1.1 的证明将采用不同的策略。

注 1.3. 特征映射的像为

$$\mathcal{E}(W^{1,q}(U, \mathrm{Herm}(d))) = W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d_{\uparrow}),$$

空间 $f \in W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d)$ 满足 $f(U) \subseteq \mathbb{R}^d_{\uparrow} := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \le \cdots \le x_d\}$。连续满射 $\mathcal{E}\colon W^{1,q}(U,$ 厄米矩阵$(d)) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d_{\uparrow})$ 存在一个连续右逆，它将 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d_{\uparrow})$ 映射到对角矩阵，其对角线元素为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$。

我们陈述定理 1.1 的一个简单推论。这里 $\|f\|_{L^q(U,\ \mathbb{R}^d)} := \big\|\|f\|_2\big\|_{L^q(U)}$，记号见第 1.7 节。

推论 1.4。 设 $1 \le q < \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界。若 $A_n \to A$ 属于$W^{1,q}(U,$ 厄米矩阵 $(d))$ 当 $n \to \infty$ 时，则对所有 $1 \le j \le m$,

$$\big\|\|\partial_j(\mathcal{E}(A))\|_2 - \|\partial_j(\mathcal{E}(A_n))\|_2\big\|_{L^q(U)} \to 0$$

and

$$\|\partial_j(\mathcal{E}(A_n))\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)} \to \|\partial_j(\mathcal{E}(A))\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)}$$

如 $n \to \infty$。

证明。 令 $\lambda := \mathcal{E}(A)$，且 $\lambda_n := \mathcal{E}(A_n)$。于是

$$\begin{aligned}\big|\|\partial_j\lambda\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)} - \|\partial_j\lambda_n\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)}\big| &= \big|\big\|\|\partial_j\lambda\|_2\big\|_{L^q(U)} - \big\|\|\partial_j\lambda_n\|_2\big\|_{L^q(U)}\big| \\ &\le \big\|\|\partial_j\lambda\|_2 - \|\partial_j\lambda_n\|_2\big\|_{L^q(U)} \le \big\|\|\partial_j\lambda - \partial_j\lambda_n\|_2\big\|_{L^q(U)} = \|\partial_j\lambda - \partial_j\lambda_n\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

因此，由定理 1.1，即可得出上述结论。 □

现在我们转而讨论利普希茨情形（即 $q = \infty$）。显然，(1.2) 也诱导出一个有界映射

$$\mathcal{E} : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Herm}(d)) \to C^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^d), \quad A \mapsto \lambda^{\uparrow} \circ A,$$

它将厄米矩阵的利普希茨族映射为按递增顺序排列的利普希茨特征值族，其利普希茨常数满足

$$|\mathcal{E}(A)|_{C^{0,1}(\overline{U},\mathbb{R}^d)} \le |A|_{C^{0,1}(\overline{U},M_d(\mathbb{C}))}, \tag{1.4}$$

关于厄米矩阵(d)和 $\mathbb{R}^d$上的 2-范数。

作为定理 1.1的直接推论，我们得到下面的定理，它回答了 [PR24a]中的问题 1.11。

定理 1.5。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界。则特征映射

$$\mathcal{E} : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Herm}(d)) \to C_q^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^d), \quad A \mapsto \lambda^{\uparrow} \circ A,$$

对所有 $1 \leq q < \infty$ 都连续，其中 $C^{0,1}_q(\overline{U}, \mathbb{R}^d)$ 表示配备了包含映射 $C^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^d)$ 的迹拓扑的集合 $C^{0,1}(U, \mathbb{R}^d) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d)$。

但我们将在例 7.1 中看到，映射 $\mathcal{E}: C^{0,1}(U, \text{厄米矩阵}(d)) \to C^{0,1}(U, \mathbb{R}^d)$ 并不连续：目标空间 $C^{0,1}(U, \mathbb{R}^d)$ 上的自然拓扑过强。

作为定理 1.5的推论，我们发现，对所有 $0 < \alpha < 1$， $\mathcal{E}$ 连续映射到带有其自然拓扑的 Hölder 空间 $C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^d)$。

推论 1.6。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为有界开利普希茨区域。则特征映射

$$\mathcal{E} : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Herm}(d)) \to C^{0,\alpha}(\overline{U}, \mathbb{R}^d), \quad A \mapsto \lambda^{\uparrow} \circ A,$$

对所有 $0 < \alpha < 1$ 都连续，但对 $\alpha = 1$ 不连续。

在推论 1.6中，我们将在第 6节证明， U 是一个利普希茨区域，因为我们使用了莫里不等式。

在定理 1.5的设定下，我们实际上将在第 5节（对于 $m = 1$）和第 6节证明一个更强的结果：

定理 1.7。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个开集。设 $A_n \to A$ 属于 $C^{0,1}(U, \text{厄米矩阵}(d))$ 且 $n \to \infty$。那么，对每个 $1 \leq j \leq m$ 以及几乎处处的 $x \in U$，

$$\partial_j(\mathcal{E}(A_n))(x) \to \partial_j(\mathcal{E}(A))(x) \quad as\ n \to \infty. \tag{1.5}$$

因此，我们得到定理 1.5 的第二个证明，该证明基于控制收敛定理；参见定理 6.2。显然，如果我们只假设对某个 $1 \leq q < \infty$， $A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(U, \text{厄米矩阵}(d))$，且满足 $n \to \infty$，则（1.5）通常不成立。

根据叶戈罗夫定理， [Ego11], 我们可以得出， $\partial_j(\mathcal{E}(A_n)) \to \partial_j(\mathcal{E}(A))$ 在 U 上几乎处处一致收敛，当 $n \to \infty$ 时。一般而言，该收敛在 U 上并非一致；参见例 7.1。

1.2. 正规矩阵。 复正规 $d \times d$ 矩阵构成一个实代数子集

$$\mathrm{Norm}(d) := \{A \in M_d(\mathbb{C}) : A^*A = AA^*\}$$

向量空间 $M_d(\mathbb{C})$ 中所有复数 $d \times d$ 矩阵组成的集合。集合 $\mathrm{Norm}(d)$ 是一个实奇异锥；关于其几何背景，参见 [Huh01] 。

对于 $A \in \mathrm{Norm}(d)$，我们关联其 d 特征值 $\lambda_1(A) \ldots, \lambda_d(A)$（含重数）以及无序特征值向量

$$\Lambda(A) = [\lambda_1(A), \ldots, \lambda_d(A)].$$

由此，我们得到一个映射

$$\Lambda : \mathrm{Norm}(d) \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C}), \tag{1.6}$$

其中 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 是无序复数 d元组空间（见第8.1节），相对于度量

$$\mathbf{d}_2([z],[w]) := \min_{\sigma\in \mathrm{S}_d} \Big(\sum_{i=1}^{d} |z_i - w_{\sigma(i)}|^2\Big)^{1/2},$$

其中 S_d 是对称群。根据 Hoffman 和 Wielandt 的结果，映射 (1.6) 是 Lipschitz 连续的 [HW53]（见命题 3.3）：对于 $A,\ B \in$ 范数(d),

$$\mathbf{d}_2(\Lambda(A),\Lambda(B)) \le \|A-B\|_2. \tag{1.7}$$

根据 Almgren [Alm00], , 存在一个双 Lipschitz 嵌入 $\Delta:\ \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$，其中 $N = N(d)$, 可用来定义取值于 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 的函数的 Sobolev 空间：对于开集 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 和 $1 \le q \le \infty$，我们设

$$W^{1,q}(U,\mathcal{A}_d(\mathbb{C})) := \{f : U \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) : \Delta\circ f \in W^{1,q}(U,\mathbb{R}^N)\}.$$

由 De Lellis 和 Spadaro[DLS11]（另见定义 8.4）给出了 $W^{1,q}(U,\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 的一个等价内在定义。空间 $W^{1,q}(U,\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 带有度量

$$\rho^{1,q}_{\Delta}(f,g) := \|\Delta\circ f - \Delta\circ g\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^N)}$$

它使该空间成为完备度量空间；参见 [PR24b，引理 3。1]。由该度量诱导的拓扑与 Almgren 嵌入的选择无关Δ，见定理 8.11。

映射 (1.6) 诱导出一个有界映射

$$\mathcal{E}_u := \Lambda_* : W^{1,q}(U,\mathrm{Norm}(d)) \to W^{1,q}(U,\mathcal{A}_d(\mathbb{C})),\quad A \mapsto \Lambda\circ A,$$

对每个 $1 \le q < \infty$，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个有界开集，参见命题 9.1。（Lipschitz 情形 $q=\infty$ 将在下文讨论。）记作 $W^{1,\,q}(U,\ \mathrm{Norm}(d))$ 的是由所有满足 $A(U) \subseteq \mathrm{Norm}(d)$ 的 $A \in W^{1,\,q}(U,\ M_d(\mathbb{C}))$ 构成的（非线性）空间，其拓扑由它在 $W^{1,\,q}(U,\ M_d(\mathbb{C}))$ 中的嵌入诱导。

在此设置下，我们称 $\mathcal{E}_u = \Lambda_*$ 为特征映射。

定理 1.8。设 $1 \le q < \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界的。那么特征映射

$$\mathcal{E}_u : W^{1,q}(U,\mathrm{Norm}(d)) \to W^{1,q}(U,\mathcal{A}_d(\mathbb{C})),\quad A \mapsto \Lambda\circ A,$$

是连续的。

事实证明，定理 1.8 是定理 1.1的推广；参见第 8.4 节。

在下面的定理 1.8 的推论中，$|\Lambda|$ 表示度量速度，而 $\mathscr{E}_q(\Lambda)$ 表示曲线 q 的 $\Lambda \in W^{1,\,q}(I,\ \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$；定义见第 2.4 节。

推论 1.9。设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$为一个有界开区间。设 $A_n \to A$属于 $W^{1,\,q}(I,$ 范数$(d))$ 当 $n \to \infty$ 时，并令 $\Lambda :\ = \mathcal{E}_u(A)$ $\Lambda_n :\ = \mathcal{E}_u(A_n) :\ I \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$。那么

$$\|\mathbf{d}_2(\Lambda,\Lambda_n)\|_{L^\infty(I)} \to 0,$$
$$\big\||\dot\Lambda| - |\dot\Lambda_n|\big\|_{L^q(I)} \to 0,$$
$$\big|\mathscr{E}_q(\Lambda) - \mathscr{E}_q(\Lambda_n)\big| \to 0,$$

如 $n \to \infty$。

在推论 1.9 的设定下，总是存在 $W^{1,q}$ 参数化 λ、λ_n：$I \to \mathbb{C}^d$ 分别对应于 A、A_n 的特征值；见命题 8.5。我们将看到，推论1.9 由以下推论推出；其证明见第 10.4节。

推论 1.10. 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个有界开区间。设 $A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(I, \text{范数}(d))$ 当 $n \to \infty$ 时。设 λ、$\lambda_n \in W^{1,q}(I, \mathbb{C}^d)$ 分别为 A、A_n 的特征值参数化。那么

$$\big\| \|\lambda'\|_2 - \|\lambda_n'\|_2 \big\|_{L^q(I)} \to 0,$$
$$\|\lambda_n'\|_{L^q(I,\mathbb{C}^d)} \to \|\lambda'\|_{L^q(I,\mathbb{C}^d)},$$

当 $n \to \infty$ 时。

另见下文的定理 1.13、定理 1.14以及（1.8）。

现在考虑 Lipschitz 情形（$q = \infty$）。由（1.7）可立即得出，对于所有 A，$B \in$ 范数(d)，

$$\|\mathbf{d}_2(\mathcal{E}_u(A), \mathcal{E}_u(B))\|_{L^\infty(U)} \le \|A - B\|_{L^\infty(U, M_d(\mathbb{C}))},$$

然而，正如厄米情形所示，（由（1.7）诱导的）有界映射

$$\mathcal{E}_u : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Norm}(d)) \to C^{0,1}(\overline{U}, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$$

并不连续。不过，由定理 1.8可立即得到以下结果。

定理 1.11. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界集。特征映射

$$\mathcal{E}_u : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Norm}(d)) \to W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C})), \quad A \mapsto \Lambda \circ A,$$

对所有 $1 \le q < \infty$ 都连续。

显然，$f \in C^{0,\alpha}(\overline{U}, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 当且仅当 $\Delta \circ f \in C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^N)$，这使得以下推论有意义；其证明见第 11 节。

推论 1.12. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为有界开利普希茨区域。若 $A_n \to A$属于 $C^{0,1}(U, \text{范数}(d))$，则当 $n \to \infty$ 时，对所有 $0 < \alpha < 1$，$\mathcal{E}_u(A_n) \to \mathcal{E}_u(A)$ 属于 $\overline{C}^{0,\alpha}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$，但对 $\alpha = 1$ 不成立，其含义是

$$\|\Delta \circ \mathcal{E}_u(A) - \Delta \circ \mathcal{E}_u(A_n)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U}, \mathbb{R}^N)} \to 0 \quad as\ n \to \infty,$$

对于每个 *Almgren* 嵌入 Δ：$\mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$。

我们有定理 1.8 和定理 1.11的以下变体。

定理 1.13. 设 $1 \le q < \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界。设 $A_n \to A$属于 $W^{1,q}(U, \text{范数}(d))$ 当 $n \to \infty$ 时。假设 $\lambda, \lambda_n \in W^{1,q}(U, \mathbb{C}^d)$ 分别是 A, A_n 的特征值的参数化。假设 $\lambda_n \to \lambda$ 在 L^∞ 中，沿 U 内与坐标轴平行的几乎所有线段，$\mathcal{L}^{m-1}$。那么对于所有 $1 \le j \le m$，当 $n \to \infty$ 时，$\partial_j \lambda_n \to \partial_j \lambda$ 属于 $L^q(U, \mathbb{C}^d)$。

定理 1.14。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界集。设 $A_n \to A$ 在$C^{0,1}(U, \text{范数}(d))$趋于 $n \to \infty$。假设 $\lambda, \lambda_n \in C^{0,1}(U, \mathbb{C}^d)$ 分别是 A, A_n的特征值参数化。假设 $\lambda_n \to \lambda$ 在 L^∞中几乎所有与坐标轴平行的 $\mathcal{L}^{m-1}$-线段上成立。那么对所有 $1 \le j \le m$，当 $n \to \infty$时，$\partial_j \lambda_n \to \partial_j \lambda$ 在 U 中几乎处处成立。

定理 1.13 和定理 1.14 将在第 10.3 节（关于 $m = 1$）和第 11节中证明。显然（见推论 1.4的证明），在其设定中，对所有$1 \le j \le m$,

$$\begin{aligned} \big\| \|\partial_j \lambda\|_2 - \|\partial_j \lambda_n\|_2 \big\|_{L^q(U)} &\to 0, \\ \|\partial_j \lambda_n\|_{L^q(U,\mathbb{C}^d)} &\to \|\partial_j \lambda\|_{L^q(U,\mathbb{C}^d)}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

如 $n \to \infty$。然而，如果 $m \ge 2$ 所需的参数化 λ，λ_n 可能并不总是存在。（例如，对于 $q > m$，$W^{1,q}(U)$ 的元素（其中 $U \subseteq \mathbb{R}^m$）具有连续代表，但多参数正规矩阵族的特征值并不总能表示为连续函数，例如，

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ |x| & 0 \end{pmatrix},$$

对于 $x \in \mathbb{C}$。）

1.3. **结果的最优性**。本文得到的特征值稳定性结果基本上是最优的。下面我们简要介绍几个能够证明这一事实的例子；随后将在第 7 节中详细讨论这些例子。我们还将提出一个开放问题。

我们将重点讨论厄米情形中的局限性，因为这些局限性显然会导致更一般的正规情形中的相应否定性结论。

(1) *The map* $\mathcal{E} : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Herm}(d)) \to C^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^d)$ *is not continuous.*

例如，

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & x \\ x & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = A(x) \quad \text{as } n \to \infty \tag{1.9}$$

在 $\mathbb{R}$ 的每个紧区间上关于所有导数一致地成立。于是 $\mathcal{E}(A_n) = (-a_n, a_n)$，并且 $\mathcal{E}(A) = (-a, a)$，其中 $a_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ 且 $a(x) = |x|$。我们将在例 7.1 中看到，对于所有包含 0 的有界开区间I 以及所有充分大的 n，$|a - a_n|_{C^{0,1}(I)} \ge 2 - \sqrt{2}$。还需注意，在 0 以外，导数 a_n' 逐点趋于 a'，但在 0 的任何邻域内都不一致收敛。

(2) *For no* $1 \le q < \infty$, *the map* $\mathcal{E} : C^{0,1}(\overline{U}, \mathrm{Herm}(d)) \to C_q^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^d)$ *is uniformly continuous.*

事实上，这些矩阵

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \varphi_n(x) \\ \varphi_n(x) & -\frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad B_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n} & \varphi_n(x) \\ \varphi_n(x) & -\frac{1}{2n} \end{pmatrix},$$

其中 $\varphi_n \colon [0,1] \to [0, \frac{1}{n}]$是利普希茨常数为 1 的锯齿函数，满足$\|A_n - B_n\|_{C^{0,1}([0,1],\, M_2(\mathbb{C}))} \to 0$ 当 $n \to \infty$时成立，但对于它们的非负特征值 a_n和 b_n，我们在例 7.2中发现 $\|a_n' - b_n'\|_{L^q([0,1])} \ge \frac{1}{12 \cdot 2^{1/q}}$。

(3) 对于任意 $\alpha \in (0, 1)$，映射 $\mathcal{E} \colon C^{0,1}(\overline{U}, \text{厄米矩阵}(d)) \to C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^d)$ 都不是一致连续的。

这在例7.3中通过以下矩阵得以说明：

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^r} & nx \\ nx & -\frac{1}{n^r} \end{pmatrix}, \quad B_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n^r} & nx \\ nx & -\frac{1}{2n^r} \end{pmatrix},$$

其中 $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$。

尽管（2）和（3）中的映射并非一致连续，但对于一些有意义的（对应用而言）紧子空间，找出它们在这些子空间上的限制的有效连续模仍十分可取，例如 $C^{0,1}(U, \text{厄米矩阵}(d))$。例如，给定 $C > 0$和 $\beta \in (0,1]$, 该集合

$$K := \left\{ A \in C^{1,\beta}(\overline{U}, \mathrm{Herm}(d)) : \|A\|_{C^{1,\beta}(\overline{U}, M_d(\mathbb{C}))} \leq C \right\}, \tag{1.10}$$

是 $C^{0,1}(U, \text{厄米矩阵}(d))$ 的相对紧子集，这是由 Arzel`à–Ascoli 定理得出的。因此，根据定理 $\mathcal{E}|_K \colon K \to C^{0,\frac{1}{q}}(U, \mathbb{R}^d)$，对于 $1 \leq q < \infty$，以及 $\mathcal{E}|_K \colon K \to C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^d)$，对于$0 < \alpha < 1$，均是一致连续的，参见定理 1.5 和推论 1.6。

问题 1.15。 求特征映射 $\mathcal{E}$ 在有意义的紧子空间上的限制的有效连续模。

例如，利用（1.9）中的序列 A_n，我们将在例7.4 中看到，对于$1 \leq q < \infty$和 $q^{-1} < \alpha \leq 1$，映射 $\mathcal{E}|_K \colon K \to C^{0,\frac{1}{q}}([0,1], \mathbb{R}^d)$ 并非 α-H¨older 连续。

注 1.16。 根据 Rellich [Rel37], ，厄米矩阵的实解析曲线存在实解析的特征值系以及由特征向量构成的实解析标准正交标架。这一结果有多种推广，例如推广到正规矩阵或其他类别（光滑准解析类、形式幂级数），参见[AKLM98], [Rai13], 和 [PR20]。但一般而言，特征向量并不存在连续的标准正交标架，以下 C^∞ Rel [中的一个例子37]对此作了说明：

$$A(x) := e^{-1/x^2} \begin{pmatrix} \cos x^{-1} & \sin x^{-1} \\ \sin x^{-1} & -\cos x^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A(0) := 0.$$

设 $I \ni x \mapsto A(x)$ 是一条厄米矩阵光滑曲线，其特征值 λ_j 互不相同且光滑，并且对应的正交归一特征向量v_j也光滑。对方程 $A(x)v_j(x) = \lambda_j(x)v_j(x)$ 求导，并将结果与 $v_k \neq v_j$ 作厄米内积，得到

$$\langle v_k(x), v_j'(x) \rangle = \frac{\langle v_k(x), A'(x)v_j(x) \rangle}{\lambda_j(x) - \lambda_k(x)}$$

这表明，当 λ_j 和 λ_k 相互接近的速度快于分子趋于零的速度时，速度从 v_j' 到 v_k 的投影是无界的。这与物理学中的绝热定理和量子霍尔效应有关。

1.4. 奇异值。 考虑复数 $D \times d$ 矩阵的向量空间 $M_{D,d}(\mathbb{C})$，其中 $d \leq D$ （不失一般性）。$A \in M_{D,d}(\mathbb{C})$ 的奇异值是厄米矩阵 A^*A 的特征值的非负平方根，通常按降序排列

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_d(A) \geq 0.$$

这定义了一个映射 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \colon M_{D,d}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^d$。

注意到厄米矩阵

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A} \\ \tilde{A}^* & 0 \end{pmatrix},$$

˜其中， A 是通过在 A 中添加 $D-d$ 个全零列得到的 $D\times D$ 矩阵，其特征值为

$$\sigma_1(A),\dots,\sigma_d(A),0,\dots,0,-\sigma_d(A),\dots,-\sigma_1(A),$$

由（3.3）可得，对于 A，$B\in M_{D,\,d}(\mathbb{C})$ 和 $1\le i\le d$，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\|\sigma(A)-\sigma(B)\|_2\le\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2&=|\operatorname{Tr}\left((\mathbf{A}-\mathbf{B})^*(\mathbf{A}-\mathbf{B})\right)|^{1/2}\\&=|2\operatorname{Tr}\left((\tilde{A}-\tilde{B})^*(\tilde{A}-\tilde{B})\right)|^{1/2}=\sqrt{2}\,\|A-B\|_2,\end{aligned}$$

也就是说，

$$\|\sigma(A)-\sigma(B)\|_2\le\|A-B\|_2. \tag{1.11}$$

因此，对于每个 $1\le q<\infty$，映射

$$\sigma_*:W^{1,q}(U,M_{D,d}(\mathbb{C}))\to W^{1,q}(U,\mathbb{R}^d),\quad A\mapsto\sigma\circ A,$$

是良定义且有界的，并且

$$\sigma_*:C^{0,1}(\overline{U},M_{D,d}(\mathbb{C}))\to C^{0,1}(\overline{U},\mathbb{R}^d),\quad A\mapsto\sigma\circ A.$$

此外，定理 1.1、定理1.5、推论 1.6和定理1.7 立即给出以下结果。

定理 1.17。 设 $U\subseteq\mathbb{R}^m$ 是开且有界的。那么：

(1) 对每个 $1\le q<\infty$，映射 σ_*：$W^{1,q}(U,M_{D,d}(\mathbb{C}))\to W^{1,q}(U,\mathbb{R}^d)$ 连续。
(2) 对所有 $1\le q<\infty$，映射 σ_*：$C^0,1(U,M_{D,d}(\mathbb{C}))\to C^0,_q\,^1(U,\mathbb{R}^d)$ 连续。
(3) 另外假设 U 是一个利普希茨区域。那么对所有 $0<\alpha<1$，映射 σ_*：$C^0,1(U,M_{D,d}(\mathbb{C}))\to C^{0,\alpha}(U,\mathbb{R}^d)$ 连续，但对 $\alpha=1$ 不连续。*(4)* 如果 $A_n\to A$ 属于 $C^0,1(U,M_{D,d}(\mathbb{C}))$，那么对每个 $1\le j\le m$ 和几乎处处的 $x\in U$，当 $n\to\infty$ 时，$\partial_j(\sigma_*(\overline{A}_n))(x)\to\partial_j(\sigma_*(A))(x)$。

—

该定理回答了 [PR24a第 7 节中提出的一个问题。5]。

1.5. 应用。 下面介绍我们结果的一些应用。

1.5.1. 定义在谱或奇异值上的函数。 显然，特征值和奇异值的稳定性结果可直接应用于谱隙 $\lambda_{i+1}(A)-\lambda_i(A)$ 或 Ky Fan 范数 $\sum_{i=1}^k\sigma_i(A)$，以及$1\le k\le d$。利用 [MM79]的一个结果，还可以进一步推广。

推论 1.18。 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数。设 $1\le q<\infty$。设$U\subseteq\mathbb{R}^m$ 是开且有界的。则映射

$$W^{1,q}(U,M_{D,d}(\mathbb{C}))\to W^{1,q}(U,\mathbb{R}),\quad A\mapsto f\circ\sigma_i\circ A, \tag{1.12}$$

是定义良好且连续的，其中 $\sigma_1(A)\ge\cdots\ge\sigma_d(A)$ 是A的奇异值。若以有序特征值代替奇异值，并将$M_{D,d}(\mathbb{C})$ 替换为厄米矩阵(d)，该结论仍然成立。

证明。 映射 (1.12) 是以下映射的复合

$$W^{1,q}(U, M_{D,d}(\mathbb{C})) \xrightarrow{(\sigma_i)_*} W^{1,q}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{f_*} W^{1,q}(U, \mathbb{R}).$$

第一个映射根据定理 1.17是连续的，第二个映射则根据 [MM79]。对于厄米矩阵，使用定理 1.1 代替定理 1.17。 □

例如：

(1) Schatten p-范数 $\sum_{i=1}^{d} \sigma_i(A)^p$ 的 p 次幂（其中 $1 \leq p < \infty$）诱导出连续映射 $W^{1,q}(U, M_{D,d}(\mathbb{C})) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R})$。(2) 若 $A \in W^{1,q}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ 是一族密度矩阵（即 $\mathrm{Tr}(A) = 1$），且 $\inf_{x\in U} \min_{1\leq i\leq d} \lambda_i(A(x)) > 0$，则冯·诺依曼熵$-\sum_{i=1}^{d} \lambda_i(A) \log \lambda_i(A)$ 属于 $W^{1,q}(U)$，并随 A 连续变化。(3) 在 (2) 的设定下，R´enyi 熵 $\frac{1}{1-\alpha} \log\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i(A)^\alpha\right)$（其中 $\alpha > 1$）属于 $W^{1,q}(U)$，并随 A 连续变化。

——

1.5.2. 条件数。 设 $A \in M_d(\mathbb{C})$，且 $\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_d(A)$ 是 A 的奇异值。在数值分析中， A 的条件数 定义为

$$\kappa(A) := \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_d(A)}.$$

考虑线性方程 $Ax = b$，并假设 A 非奇异（即 $\sigma_d(A) > 0$）， $\kappa(A)$ 描述了 x 中的相对误差与 b 中的相对误差之比的最大值。如果 $\kappa(A)$ 远大于 1，则认为该问题是病态的。

定理 *1.19.* 设 $1 \leq q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。假设 $A_0 \in W^{1,q}(I, M_d(\mathbb{C}))$ 且 $\inf_{x\in I} \sigma_d(A_0(x)) > 0$。那么 $\kappa(A) \in W^{1,q}(I, \mathbb{R})$ 在 W^1 中 A_0 的某个邻域 $\mathcal{U}$ 内定义良好，并且 $\kappa\colon \mathcal{U} \to W^{1,q}(I, \mathbb{R})$ 连续。

定理1.19 将在第5.4节证明。

1.5.3. 表面积。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个有界开集，且 $f \in W^{1,1}(U, \mathbb{R})$。那么，根据面积公式， f 的图的表面积为

$$\mathrm{Area}(f) := \mathcal{H}^m(\overline{f}(U)),$$

其中 $f\colon U \to U \times \mathbb{R},\ x \mapsto (x, f(x))$ 是图映射，且 $\mathcal{H}^m$ 为 m 维豪斯多夫测度；参见 [MSZ03]。

定理 1.20。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界集。假设 $A_n \to A$在$C^{0,1}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ 中连续。令 $\lambda_j := \mathcal{E}(A)_j$ 且 $\lambda_{n,j} := \mathcal{E}(A_n)_j$，对任意 $1 \leq j \leq d$。则：

(1) *For* $1 \leq j \leq d$,

$$\mathrm{Area}(\overline{\lambda}_{n,j}) \to \mathrm{Area}(\overline{\lambda}_j) \quad \text{as } n \to \infty.$$

(2) 令 $Z := \bigcup_{j=1}^{d} \lambda_j(U) \subseteq U \times \mathbb{R}$，分别地，$Z_n := \bigcup_{j=1}^{d} \lambda_{n,j}(U)$，为 A 和 A_n 的特征多项式的总零点集。则

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}^m(Z_n) \geq \mathcal{H}^m(Z).$$

证明。 这由定理 1.5 和定理 1.7 结合 [PR24a]中推论 7.7 和推论 7.8 的证明可得。（使用（1.2）代替 Bronshtein 定理。）□

1.5.4. 紧自伴算子。 希尔伯特空间中的紧自伴非负算子 A 的谱是一个可数集，由具有有限重数的特征值组成；我们按降序排列这些特征值

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots$$

以及可能的零。特征值 λ_i（A）仅在零处聚积。

定理 1.21。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为有界开集， H 为希尔伯特空间。假设 A、$A_n \in C^{0,1}(U$、$K(H))$（其中 $n \geq 1$）是紧自伴非负算子族（关于空间 $K(H)$上紧算子的算子范数），并且是 *Lipschitz*族。假设 $A(x)$ 对所有 $x \in U$ 和 $A_n \to A \in C^{0,1}(U$、$K(H))$ 在 $n \to \infty$时均为正定。则：

(1) 按递减顺序排列的特征值 $\lambda_i(A)$ 和 $\lambda_i(A_n)$，对所有 i 以及充分大的 n，均属于 $C^{0,1}(U)$。(2) 对所有 $1 \leq j \leq m$ 以及几乎处处的 $x \in U$，(3) 对每个 $1 \leq q < \infty$，

$$\lim_{n\to\infty} \partial_j(\lambda_i(A_n))(x) = \partial_j(\lambda_i(A))(x), \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_i(A) - \lambda_i(A_n)\|_{W^{1,q}(U)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

本定理将在第12节证明。

1.6. **论文结构**。 在大部分证明中，我们将厄米情形与正规情形分开处理，因为正规情形需要更多工具来处理无序特征值映射和多值 Sobolev 函数。只关注厄米情形的读者可以放心跳过第8–11节。

在第2节中，我们介绍相关的函数空间，并讨论本文中经常用到的一些工具。在第3节中，我们回顾矩阵范数以及关于厄米矩阵和正规矩阵谱变分的结果。由此，我们引入厄米矩阵的特征映射。第4 节专门讨论厄米矩阵和正规矩阵的局部一致酉分块对角化，以及这类矩阵的绝对连续曲线导数的相关逐点界。本节同时处理厄米情形和正规情形。

厄米情形主要结果的证明在第 5 节和第 6 节中完成。我们在第 5 节讨论单参数情形，随后在第6节通过分割论证推导出多参数情形。在第 7 节中，我们讨论四个示例，以说明结果的最优性。

针对正规情形，我们在第8 节介绍无序 d 元复数组的度量空间以及取值于该空间的索博列夫映射所需的背景知识。这使我们能够在第 9 节引入正规矩阵的特征映射。随后，我们在第 10 节（单参数情形）和第11节（多参数情形）完成正规矩阵主要结果的证明。

最后一节12 专门介绍我们的一些结果在希尔伯特空间上的紧自伴算子中的应用。

1.7. 记号。 $\mathbb{R}^m$ 中的 m 维勒贝格测度记为 $\mathcal{L}^m$。除非另有说明，“可测”均指“勒贝格可测”，“几乎处处”均指“相对于勒贝格测度几乎处处”。对于可测的 $E \subseteq \mathbb{R}^m$，我们通常写作 $|E| = \mathcal{L}^m(E)$。我们还将使用 k 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^k$。

对于 $1 \le p \le \infty$，$\|x\|_p$ 表示 $x \in \mathbb{R}^d$ 的 p-范数。如果 $f\colon E \to \mathbb{R}^d$ 对可测的 $E \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个可测映射，则我们定义

$$\|f\|_{L^p(E,\mathbb{R}^d)} := \big\|\|f\|_2\big\|_{L^p(E)}.$$

下文中，如果一个集合是有限集，或其基数与 $\mathbb{N}$ 相同，则称其为可数。

我们考虑对称群 S_d 在 $\mathbb{C}^d$ 上的标准作用，即通过置换坐标：对于 $\sigma \in \mathsf{S}_d$ 和 $z \in \mathbb{C}^d$，

$$\sigma z = \sigma(z_1, \dots, z_d) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(d)}).$$

我们用 $X^{<2>} = \{(x, y) \in X \times X\colon x \ne y\}$ 表示去掉对角线后的笛卡尔积。

我们用记号 $C(d, \dots)$ 表示一个仅依赖于 $d, \dots$ 的常数；其值可能随行而变。

2. Function spaces

下面固定记号，并回顾本文所用函数空间的相关背景。

2.1. 勒贝格空间。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开集，且 $1 \le q \le \infty$。我们用 $L^q(U)$ 表示关于 m 维勒贝格测度 $\mathcal{L}^m$ 的勒贝格空间，而 $\|\cdot\|_{L^q(U)}$ 为相应的 L^q- 范数。我们还将使用空间 $L^q{}_{\mathrm{loc}}(U)$，它由满足 $\|f\|_{L^q(K)} < \infty$ 的可测函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 组成，其中条件须对所有紧子集 $K \subseteq U$ 成立。对于勒贝格可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^m$，我们也记作 $|E| = \mathcal{L}^m(E)$。注意，对于连续函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$，有（并且我们将交替使用） $\|f\|_{L^\infty(U)} = \|f\|_{C^0(\overline{U})}$。

映射 $f = (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ 可测，当且仅当每个 f_i 均可测。现在，如果对所有 $1 \le i \le n$，$f_i \in L^q(U)$，则 f 属于 $L^q(U, \mathbb{R}^n)$，等价地

$$\|f\|_{L^q(U,\mathbb{R}^n)} := \big\|\|f\|_2\big\|_{L^q(U)} < \infty.$$

2.2. **Sobolev 空间**。对于 $1 \le q \le \infty$，我们考虑 Sobolev 空间

$$W^{1,q}(U) := \{f \in L^q(U) : \partial_i f \in L^q(U) \text{ for } 1 \le i \le m\},$$

其中 $\partial_i f$ 是分布导数，并赋予范数

$$\|f\|_{W^{1,q}(U)} := \|f\|_{L^q(U)} + \sum_{i=1}^{m} \|\partial_i f\|_{L^q(U)}.$$

映射 $f = (f_1, \ldots, f_n)$: $U \to \mathbb{R}^n$ 属于 $W^{1,q}(U, \mathbb{R}^n)$，当且仅当对所有$1 \le j \le m$，$f_j \in W^{1,q}(U)$成立，或者等价地，

$$\|f\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^q(U,\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{m} \|\partial_i f\|_{L^q(U,\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界开区间。设 $1 \le q < \infty$。函数 $f : I \to \mathbb{R}$属于 $W^{1,q}(I)$，当且仅当 f 存在一个绝对连续代表，其经典导数属于 $L^q(I)$。此外，$f \in W^{1,\infty}(I)$ 当且仅当f 存在一个 Lipschitz 连续代表。

设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是有界开集。设 $1 \le q < \infty$。函数 $u \in L^q(U)$ 属于 $W^{1,q}(U)$，当且仅当它存在一个代表，该代表在 U 中与坐标轴平行的$\mathcal{L}^{m-1}$-几乎所有线段上绝对连续，且其经典一阶偏导数属于 $L^q(U)$。它们与 f的弱导数 $\mathcal{L}^m$-几乎处处相等。若 U 是一个利普希茨区域，则$f \in W^{1,\infty}(U)$ 当且仅当 f存在一个利普希茨连续代表。

2.3. **利普希茨和霍¨尔德空间**。设 (M_i, d_i)、$i = 1, 2$ 是度量空间。映射 $f : M_1 \to M_2$ 称为 α-霍¨尔德连续的，若对 $\alpha \in (0, 1]$, , 有

$$|f|_{C^{0,\alpha}(M_1,M_2)} := \sup_{x \ne y \in M_1} \frac{\mathsf{d}_2(f(x), f(y))}{\mathsf{d}_1(x, y)^\alpha} < \infty.$$

在 $\alpha = 1$ 的情形下，f 称为利普希茨连续映射；我们有时也用 $\mathrm{Lip}(f)$ 表示利普希茨常数$|f|_{C^{0,1}(M_1, M_2)}$。
通常，M_1 是有界开集 $U \subseteq \mathbb{R}^m$，而 $M_2 = \mathbb{R}^n$ 也配备由 2-范数诱导的度量。于是，对于 $\alpha \in (0, 1]$, ，我们考虑巴拿赫空间 $C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^n)$，它由连续映射 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 构成, 这些映射可连续延拓至 $\overline{U}$，其范数为

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in U} \|f(x)\|_2 + |f|_{C^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

我们用 $C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^n)$ 表示定义在 U 上的连续函数空间，这些函数对每个相对紧开集 $V \Subset U$ 都属于$C^{0,\alpha}(V, \mathbb{R}^n)$；并赋予 $C^{0,\alpha}(U, \mathbb{R}^n)$ 自然的弗雷歇拓扑。

2.4. **度量空间中的绝对连续曲线**。设 $I \subseteq \mathbb{R}$是一个有界开区间。设 $1 \le q \le \infty$。完备度量空间(X, d)中的曲线 $\gamma : I \to X$ 属于 $AC^q(I, X)$，当且仅当存在 $m \in L^q(I)$使得

$$\mathsf{d}(\gamma(x), \gamma(y)) \le \int_x^y m(t)\, dt, \quad \text{for all } x, y \in I,\ x \le y. \tag{2.1}$$

在这种情况下，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{d}(\gamma(x+h),\gamma(x))}{|h|}=:|\dot\gamma|(x)$$

几乎处处存在 $x\in I$，称为度量速度，它属于 γ 在 x处。此外，$|\dot\gamma|\in L^q(I)$ 和 (2.1) 中的 m 替换为 $|\dot\gamma|$后仍成立；有 $|\dot\gamma|\le m$ 在 I 中几乎处处成立，对每个满足 (2.1) 的 m 。参见 [AGS08，定义 1.1。1]。

对于 $1\le q<\infty$， q-能量 $\mathscr{E}_q(\gamma)$ 定义为 $\gamma\in AC^q(I,\ X)$ 的

$$\mathscr{E}_q(\gamma):=\int_I(|\dot\gamma|(t))^q\,dt.$$

我们也用 AC 表示 AC^1。

2.5. **维塔利收敛定理**。设 $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ 是一个测度空间，具有非负测度 μ （有限或取值于 $[0,\infty]$） 。函数族 $\mathcal{F}\subseteq L^1(\mu)$ 称为一致可积，如果

$$\lim_{C\to+\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{|f|>C}|f|\,d\mu=0.$$

定理 2.1 (德拉瓦莱´–普桑判据 [Bog07，定理 4.5。9])。设 μ 是一个有限非负测度。函数族 $\mathcal{F}$ 由 μ-可积函数组成，当且仅当存在一个非负递增函数 G 定义在 $[0,\infty)$ 上，使得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{G(t)}{t}=\infty\quad and\quad\sup_{f\in\mathcal{F}}\int G(|f(x)|)\,\mu(dx)<\infty.$$

在这种情况下，可以选取一个凸递增函数 G。

回顾一下，若复值可测函数序列 f_n 在 X 上依测度收敛 到 f，则称该序列依测度收敛；若对所有 $\epsilon>0$,

$$\mu(\{x\in X:|f(x)-f_n(x)|\ge\epsilon\})\to 0\quad\text{as } n\to\infty.$$

定理 2.2 (（维塔利收敛定理 [Bog07，定理 4.5。4]） 。 设 μ 是一个有限非负测度。假设 f 是一个 μ-可测函数，并且 $\{f_n\}$ 是一个 μ-可积函数序列。则以下命题等价：

(1) $f_n\to f$ 依测度收敛，且 $\{f_n\}$ 一致可积。(2) f 可积，且 $f_n\to f$ 在 $L^1(\mu)$ 中。

下一个引理是维塔利收敛定理的一个简单应用，我们在此陈述，以便后续引用。

引理 2.3。 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是一个有限测度空间。假设 $\{f_n\}$ 是非负 μ-可积函数序列，且 $\{X_i\}$ 是由 μ-可测集构成的 X 的一个可数覆盖。若 $\{f_n\}$ 一致可积，并且

$$\int_{X_i}f_n\,d\mu\to 0\quad as\ n\to\infty,$$

对于每个 i，那么

$$\int_X f_n\,d\mu\to 0\quad as\ n\to\infty.$$

证明。对于每个 i，存在 (n) 的一个子列 (n_k^i)，使得当 $k \to \infty$ 趋于 X_i 中的 X_i 时，$f_{n_k^i} \to 0$ μ 几乎处处成立。通过依次选取子列，我们可以假设对于所有 i，(n_k^{i+1}) 都是 (n_k^i) 的一个子列。于是，对于 $n_k := n_k^k$，我们发现当 $k \to \infty$ 趋于 X 中的 X 时，$f_{n_k} \to 0$ μ 几乎处处成立。

由于 $\{f_n\}$一致可积，维塔利收敛定理 2.2 推出

$$\int_X f_{n_k}\, d\mu \to 0 \quad \text{as } k \to \infty;$$

注意到在有限测度空间上，几乎处处收敛蕴含依测度收敛，这由叶戈罗夫定理可知。这就得到了所述结论。□

2.6. **斜率收敛**。此处给出的结果用于第1.7 节中定理5.3的证明。

定义 2.4（斜率收敛）。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为有界开集，且$U^{<2>} := \{(x, y) \in U \times U : x \neq y\}$。对于 $f \in C^{0,1}(U, \mathbb{R}^\ell)$，考虑由下式定义的斜率函数 $s_f : U^{<2>} \to \mathbb{R}$

$$s_f(x, y) := \frac{\|f(x) - f(y)\|_2}{\|x - y\|_2}.$$

设 $f, f_n \in C^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^\ell)$，其中 $n \geq 1$。我们称 f_n 斜率收敛 到 f，如果

$$\|s_f - s_{f_n}\|_{L^\infty(U^{<2>})} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \tag{2.2}$$

也就是说，斜率函数一致收敛。

我们有斜率收敛的如下刻画。

引理 2.5. 设 $f, f_n \in C^{0,1}(U, \mathbb{R}^\ell)$, 对于 $n \geq 1$。那么 f_n 斜率收敛到 f 当且仅当，对每个子集 $F \subseteq U^{<2>}$,

$$\sup_F s_{f_n} \to \sup_F s_f \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.3}$$

特别地，对于每个子集 $E \subseteq U$，利普希茨常数收敛，

$$|f_n|_{C^{0,1}(E,\mathbb{R}^\ell)} \to |f|_{C^{0,1}(E,\mathbb{R}^\ell)} \quad \text{as } n \to \infty.$$

证明。对于任意的 $(x, y) \in U^{<2>}$，我们有

$$s_f(x, y) \leq s_{f_n}(x, y) + \|s_f - s_{f_n}\|_{L^\infty(U^{<2>})}$$

因此，对于每个子集 $F \subseteq U^{<2>}$,

$$\sup_{(x,y)\in F} s_f(x, y) \leq \sup_{(x,y)\in F} s_{f_n}(x, y) + \|s_f - s_{f_n}\|_{L^\infty(U^{<2>})}.$$

因此，由对称性,

$$\left| \sup_{(x,y)\in F} s_f(x, y) - \sup_{(x,y)\in F} s_{f_n}(x, y) \right| \leq \|s_f - s_{f_n}\|_{L^\infty(U^{<2>})}$$

这表明（2.2）蕴含（2.3）。

反过来，假设（2.2）不成立。那么，存在 $\epsilon > 0$ 以及序列 $n_k \to \infty$和（x_k，y_k）$\in U^{<2>}$ 使得

$$|s_f(x_k, y_k) - s_{f_{n_k}}(x_k, y_k)| \geq \epsilon.$$

取 k的一个子列后，我们可以假设

$$s_f(x_k,y_k)-s_{f_{n_k}}(x_k,y_k)\geq\epsilon \quad \text{or} \quad s_{f_{n_k}}(x_k,y_k)-s_f(x_k,y_k)\geq\epsilon.$$

在前一种情况下，令 $F:=\{(x_k,\ y_k):\ k\geq 1\}$,

$$\sup_{(x,y)\in F} s_f(x,y)\geq \sup_{(x,y)\in F} s_{f_{n_k}}(x,y)+\epsilon$$

这与（2.3）矛盾。后一种情况类似。 □

下一个引理表明， $C^{0,\ 1}$ 收敛蕴含斜率收敛。

引理 2.6. 设 $f, f_n\in C^{0,\ 1}(U,\mathbb{R}^{\ell})$，其中 $n\geq 1$。若

$$|f-f_n|_{C^{0,1}(\overline{U},\mathbb{R}^{\ell})}\to 0 \quad as\ n\to\infty,$$

则 f_n 斜率收敛于 f。

证明。 我们有

$$\begin{aligned}\big|s_f(x,y)-s_{f_n}(x,y)\big| &= \Big|\frac{\|f(x)-f(y)\|_2}{\|x-y\|_2}-\frac{\|f_n(x)-f_n(y)\|_2}{\|x-y\|_2}\Big|\\ &\leq \frac{\|f(x)-f(y)-(f_n(x)-f_n(y))\|_2}{\|x-y\|_2}=s_{f-f_n}(x,y)\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{(x,y)\in U^{<2>}}\big|s_f(x,y)-s_{f_n}(x,y)\big|\leq \sup_{(x,y)\in U^{<2>}} s_{f-f_n}(x,y)=|f-f_n|_{C^{0,1}(\overline{U},\mathbb{R}^{\ell})}$$

这就证明了该断言。 □

3. Hermitian and normal matrices

本节回顾有关厄米矩阵和正规矩阵的一些预备知识。

3.1. 矩阵范数。 令 $M_d(\mathbb{C})$表示复数 $d\times d$ 矩阵的向量空间。 $A\in M_d(\mathbb{C})$的算子范数 定义为

$$\|A\|_{\mathrm{op}}:=\sup\{\|Ax\|_2 : x\in\mathbb{C}^d,\ \|x\|_2=1\}.$$

我们还将使用 $A=(a_{ij})\in M_d(\mathbb{C})$的弗罗贝尼乌斯范数 或 2-范数 ,

$$\|A\|_2:=\big(\mathrm{Tr}(A^*A)\big)^{1/2}=\Big(\sum_{i,j=1}^{d}|a_{ij}|^2\Big)^{1/2}.$$

若 $\sigma_1(A)\geq\sigma_2(A)\geq\cdots\geq\sigma_d(A)\geq 0$ 是A的按降序排列的奇异值，则

$$\|A\|_{\mathrm{op}}=\sigma_1(A) \quad \text{and} \quad \|A\|_2=\Big(\sum_{j=1}^{d}\sigma_j(A)^2\Big)^{1/2}.$$

算子范数和弗罗贝尼乌斯范数都具有酉不变性（即，对于酉 $U,\ V,\ \|A\|_{\mathrm{op}}=\|UAV\|_{\mathrm{op}}$和 $\|A\|_2=\|UAV\|_2$）。不难看出

$$\|A\|_{\mathrm{op}}\leq\|A\|_2\leq\sqrt{d}\,\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

若 A 是正规矩阵，且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ 是 A的特征值，则

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \max_{1\le j\le d} |\lambda_j| \quad \text{and} \quad \|A\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^{d} |\lambda_j|^2\Big)^{1/2}.$$

除非另有说明，我们在 $M_d(\mathbb{C})$ 上（及其子集上）使用弗罗贝尼乌斯范数。

3.2. **厄米矩阵与正规矩阵的谱变分。** 回顾 $\lambda^{\uparrow}$: $\mathrm{Herm}(d) \to \mathbb{R}^d$ 是一个映射，它将厄米 $d\times d$ 映射为其 d-元递增有序特征值组；见（1.1）。

命题 3.1 (Weyl扰动定理 [Wey12]; 例如参见 [Bha97, III.2.6])。设 $A, B \in \mathrm{Herm}(d)$。则

$$\|\lambda^{\uparrow}(A) - \lambda^{\uparrow}(B)\|_{\infty} \le \|A - B\|_{\mathrm{op}}. \tag{3.1}$$

在 [Bha97], 中，该结果针对按递减顺序排列的特征值向量给出，但显然，反转顺序不会改变（3.1）左侧的值。

大多数时候，我们会使用 2-范数，以下由 L¨owner [L¨ow34] 给出的变体适用于这种范数。

命题 3.2 ([L¨ow34], 例如参见 [Bha97, III.6.15])。设 $A, B \in \mathrm{Herm}(d)$。则

$$\|\lambda^{\uparrow}(A) - \lambda^{\uparrow}(B)\|_{2} \le \|A - B\|_{2}. \tag{3.2}$$

L¨owner 的结果被 Hoffmann 和 Wielandt[HW53]推广到了正规矩阵。正规矩阵的谱没有规范的排序。我们转而考虑映射 $\Lambda : \mathrm{Norm}(d) \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$，它将一个正规 $d\times d$ 矩阵映射为其无序的 d 元特征值组；参见 (1.6)。回顾一下， $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 带有度量 $\mathbf{d}_2([z],[w]) = \min_{\sigma\in \mathrm{S}_d} \|z - \sigma w\|_2$，其中 $\sigma w = \sigma(w_1, \ldots, w_d) = (w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(d)})$。

命题 3.3 ([HW53], 例如参见 [Bha97, VI.4.1])。设 $A, B \in \mathrm{Norm}(d)$。则

$$\mathbf{d}_2(\Lambda(A), \Lambda(B)) \le \|A - B\|_2. \tag{3.3}$$

若 A 和 B 是厄米矩阵，则 (3.3) 化为 (3.2)；参见引理 8.3。

关于算子范数，Bhatia、Davis 和 McIntosh 给出了以下结果 [BDM83], 其中 $\mathbf{d}_\infty([z], [w]) = \min_{\sigma\in \mathrm{S}_d} \|z - \sigma w\|_\infty$。

命题 3.4 ([BDM83], 例如参见 [Bha97, VII.4.1])。设 A, $B \in$ 范数(d)。那么

$$\mathbf{d}_\infty(\Lambda(A), \Lambda(B)) \le C \|A - B\|_{\mathrm{op}},$$

其中 C 是满足 $1 < C < 3$的一个普适常数。

3.3. **厄米矩阵的特征映射。**

命题 3.5. 设 $1 \le q \le \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且有界的。则特征映射

$$\mathcal{E} : W^{1,q}(U, \mathrm{Herm}(d)) \to W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d), \quad A \mapsto \lambda^{\uparrow} \circ A$$

有良好定义且有界，并满足

$$\|\mathcal{E}(A)(x)\|_2 \le \|A(x)\|_2 \quad \textit{and} \quad \|\nabla(\mathcal{E}(A))(x)\|_2 \le \|\nabla A(x)\|_2 \tag{3.4}$$

对于几乎处处的 $x \in U$。

证明。众所周知（参见 [ADM90]），与 1-利普希茨映射 $\lambda^{\uparrow}$ 叠加（参见命题 3.2）定义了一个有界映射，从 $W^{1,q}(U, \text{厄米矩阵}(d))$ 到 $W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d)$，其中

$$\|\lambda^{\uparrow} \circ A\|_2 \leq \|A\|_2,$$

因为 $\lambda^{\uparrow}(0) = 0$，并且

$$\|\nabla(\lambda^{\uparrow} \circ A)\|_2 \leq \|\nabla A\|_2$$

在 U 中几乎处处成立。这就得出了所述结论。 □

在命题 9.1中，我们将遇到命题 3.5 关于正规矩阵的一个变体；其表述需要一些关于多值 Sobolev 函数的背景知识，我们将在第 8节回顾这些内容。

4. Uniform block-diagonalization of Hermitian and normal matrices

4.1. **复三角矩阵的分裂引理。** 以下关于复三角矩阵的分裂引理，可由 [PR20 引理 2 中亨泽尔引理的证明推出。1] 该引理在该文中以另一种框架表述，即针对形式幂级数环上的正规矩阵 $\mathbb{C}[\![X]\!]$，其中 $X = (X_1, \ldots, X_m)$。

我们将在纳什实代数框架中表述这个引理，因为酉群 $U_d(\mathbb{C})$ 并非复流形，而只是一个非奇异实代数簇。回顾一下，如果一个映射是实解析的，且其图是半代数的，那么它就是实纳什映射。非奇异实代数簇的开子集之间的纳什映射构成了包含多项式态射且满足隐函数定理的最小映射族，关于纳什映射的更多内容，参见例如 [BCR98] 。

引理 4.1（矩阵的局部酉块三角化）。 设 $A_0 \in M_d(\mathbb{C})$是一个复数块三角矩阵，

$$A_0 = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ D_0 & C_0 \end{pmatrix},$$

其中 $B_0 \in M_{d_1}(\mathbb{C})$、$C_0 \in M_{d_2}(\mathbb{C})$、$D_0 \in M_{d_2,d_1}(\mathbb{C})$，对 $d = d_1 + d_2$ 成立，并且 B_0 和 C_0 的特征多项式互素。则存在 A_0 在 $M_d(\mathbb{C})$ 中的一个邻域 $\mathcal{V}$，以及一个到酉矩阵的纳什映射，

$$U : \mathcal{V} \to U_d(\mathbb{C}), \quad U(A_0) = \mathbb{I}_d,$$

使得对所有 $A \in \mathcal{V}$，

$$U^*(A) A\, U(A) = \begin{pmatrix} B(A) & 0 \\ D(A) & C(A) \end{pmatrix}.$$

证明。 考虑

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) : U_d(\mathbb{C}) \times M_{d_1}(\mathbb{C}) \times M_{d_2}(\mathbb{C}) \times M_{d_2,d_1}(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C}),$$

定义为

$$(U, Y_1, Y_2, Y_3) \to U^* \begin{pmatrix} B_0 + Y_1 & 0 \\ D_0 + Y_3 & C_0 + Y_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_4 \\ \Psi_3 & \Psi_2 \end{pmatrix}.$$

回顾一下，在 $\mathbb{I}_d$ 处， $U_d(\mathbb{C})$ 的切向量是一个反厄米矩阵$\mathbf{u}$，满足$\mathbf{u} = -\mathbf{u}^*$。我们将其写作

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{x} \\ -\mathbf{x}^* & \mathbf{z}_2 \end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{z}_1$和$\mathbf{z}_2$均为反厄米矩阵。 Ψ在向量$(\mathbf{u},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3)$处的微分在$(\mathbb{I}_d,0,0,0)$处为

$$\begin{aligned}
d\Psi_1(\mathbf{u},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3) &= \mathbf{y}_1 - \mathbf{z}_1 B_0 + B_0\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}D_0,\\
d\Psi_2(\mathbf{u},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3) &= \mathbf{y}_2 - \mathbf{z}_2 C_0 + C_0\mathbf{z}_2 + D_0\mathbf{x},\\
d\Psi_3(\mathbf{u},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3) &= \mathbf{y}_3 + D_0\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 D_0 + \mathbf{x}^* B_0 - C_0\mathbf{x}^*,\\
d\Psi_4(\mathbf{u},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3) &= B_0\mathbf{x} - \mathbf{x}C_0.
\end{aligned}$$

当且仅当 $d\Psi_4$ 是线性满射时，这个微分才是线性满射。后者成立，这要归功于 [Coh84，引理 2。3], 另见 [Zur93]或 [PR20，引理 2。4]。

引理 4.2. 设 R 是一个酉交换环， $A \in M_p(R)$、 $B \in M_q(R)$、$C \in M_{p,\,q}(R)$，且特征多项式 P_A 与 P_B 互素，即存在多项式 U和 V使得 $UP_A + VP_B = 1$。那么存在一个矩阵 $M \in M_{p,\,q}(R)$ 使得 $AM - MB = C$。

根据纳什隐函数定理，例如参见 [BCR98，推论 2.9。8], 存在一个邻域 $\mathcal{V}$，它属于 A_0 中的 $M_d(\mathbb{C})$，以及一个纳什映射

$$\Phi = (U, Y_1, Y_2, Y_3) : \mathcal{V} \to U_d(\mathbb{C}) \times M_{d_1}(\mathbb{C}) \times M_{d_2}(\mathbb{C}) \times M_{d_2,d_1}(\mathbb{C}),$$

$\Phi(A_0) = (\mathbb{I}_d, 0, 0, 0)$，满足 $\Psi \circ \Phi(A) = A$，其中 $A \in \mathcal{V}$。因此，只需取$U(A) := \Phi_1^*(A)$。 □

推论 4.3（正规矩阵的局部酉块对角化）。 在引理 *4.1* 的假设下，若进一步有 A_0 是正规（分别为厄米）矩阵，则 A_0是块对角矩阵，即 $D_0 = 0$，因此对于所有正规（分别为厄米） $A \in \mathcal{V}$矩阵

$$U^*(A)A\,U(A) = \begin{pmatrix} B(A) & 0 \\ 0 & C(A) \end{pmatrix}$$

是正规（分别为厄米）矩阵。

证明。 这立即由以下事实得出：酉矩阵共轭保持正规（分别为厄米）矩阵，且每个块三角正规矩阵都是块对角矩阵。□

4.2. **一致酉块对角化**。

定义 4.4（厄米矩阵与正规矩阵空间）。令 $\mathrm{Herm}_T(d)$（分别为 $\mathrm{Norm}_T(d)$）表示迹为零的厄米（分别为正规） $d \times d$ 矩阵空间，而 $\mathrm{Herm}_T^0(d)$（分别为 $\mathrm{Norm}_T^0(d)$）表示其中范数为 1 的矩阵构成的紧子空间，即

$$\begin{aligned}
\mathrm{Herm}_T(d) &= \{A \in \mathrm{Herm}(d) : \mathrm{Tr}(A) = 0\},\\
\mathrm{Herm}_T^0(d) &= \{A \in \mathrm{Herm}_T(d) : \|A\|_2 = 1\},\\
\mathrm{Norm}_T(d) &= \{A \in \mathrm{Norm}(d) : \mathrm{Tr}(A) = 0\},\\
\mathrm{Norm}_T^0(d) &= \{A \in \mathrm{Norm}_T(d) : \|A\|_2 = 1\}.
\end{aligned}$$

令 $A_0 \in \mathrm{Norm}_T(d)\setminus\{0\}$。则 A_0 至少有两个不同的特征值。因此，经过酉坐标变换后，我们可以假设 A_0 是分块对角的，

$$A_0 = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & C_0 \end{pmatrix},$$

其中 B_0，C_0 均为正规矩阵，且 B_0与 C_0 的特征多项式的结式非零。

若 $A_0 \in \mathrm{Herm}_T(d) \setminus \{0\}$，则 B_0，C_0均为厄米矩阵。在这种情况下，我们还可以进一步假设 B_0 的最大特征值严格小于 C_0的最小特征值。

根据推论 4.3，存在一个开邻域 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{A_0}$，它是 A_0 在 $M_d(\mathbb{C})$ 中的开邻域，以及一个纳什映射 $U\colon \mathcal{V} \to U_d(\mathbb{C})$，满足 $U(A_0) = \mathbb{I}_d$，使得对所有 $A \in \mathcal{V} \cap \mathrm{Norm}(d)$，

$$U^*(A)A\,U(A) = \begin{pmatrix} B(A) & 0 \\ 0 & C(A) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中 $B(A)$ 和 $C(A)$ 均为正规矩阵，并满足 $B(A_0) = B_0$ 且 $C(A_0) = C_0$。稍微缩小 $\mathcal{V}$ 后，我们可以假设映射$U\colon \mathcal{V} \to U_d(\mathbb{C})$ 的所有阶导数均有界。此外，我们还可以假设 $\mathcal{V}$ 是凸集。

此外，通过在必要时进一步缩小 $\mathcal{V}$，我们可以假设存在$\chi = \chi_{A_0} > 0$，使得对所有 A_1，$A_2 \in \mathcal{V}$∩范数(d) 和 $B_j := B(A_j)$，$C_j := C(A_j)$，对于 $j = 1, 2$，由（4.1）给出，我们有

$$|\mu_1 - \nu_2| > \chi \tag{4.2}$$

对于 B_1 的所有特征值 μ_1 以及 C_2 的所有特征值 ν_2。

若 A_0 是厄米的，则对于 $A \in \mathcal{V}$∩厄米(d)，我们有（4.1），其中厄米 $B(A)$ 和 $C(A)$。若有必要，缩小 $\mathcal{V}$后，我们可以假设，对于所有 $A \in \mathcal{V}$∩厄米(d)，$B(A)$ 的最大特征值严格小于$C(A)$ 的最小特征值。

对于 $A_0 \in$ 范数$^0_T(d)$，开邻域 $\mathcal{V}_{A_0}$构成紧空间范数$^0_T(d)$ 的开覆盖。我们固定一个有限子覆盖 $\{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_s\}$。于是，对于每个$i = 1$，...，$s$，存在一个纳什映射 $U_i\colon \mathcal{V}_i \to U_d(\mathbb{C})$，其在 $\mathcal{V}_i$ 上的导数有界，使得

$$U_i^*(A)A\,U_i(A) = \begin{pmatrix} B_i(A) & 0 \\ 0 & C_i(A) \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{V}_i \cap \mathrm{Norm}(d), \tag{4.3}$$

其中 $B(A)$ 和 $C(A)$ 都是正规的。由勒贝格覆盖引理，存在$\delta > 0$，使得 $\mathrm{Norm}^0_T(d)$ 的每个直径小于 δ 的子集都包含在某个 $\mathcal{V}_i$ 中。取 $r \in (0, \min\{\delta/2, 1\})$。那么对于每个 $A_0 \in \mathrm{Norm}^0_T(d)$，都存在$1 \le i \le s$ 使得

$$B(A_0, r) \cap \mathrm{Norm}^0_T(d) \subseteq \mathcal{V}_i \cap \mathrm{Norm}^0_T(d). \tag{4.4}$$

根据性质（4.2），存在 $\chi > 0$，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$和 A_1，$A_2 \in \mathcal{V}_i \cap \mathrm{Norm}(d)$，都有

$$|\mu_1 - \nu_2| > \chi \tag{4.5}$$

所有特征值 μ_1 属于 $B_i(A_1)$以及所有特征值 ν_2 属于 $C_i(A_2)$，其中 $B_i(A_1)$和$C_i(A_2)$由式（4.3）定义。

由于厄米矩阵$^0_T(d)$ $\subseteq$范数$^0_T(d)$，厄米矩阵$^0_T(d)$也包含在 $\{\mathcal{V}_1,\dots,\mathcal{V}_s\}$ 中，且（4.3）对厄米矩阵 $B_i(A)$ $C_i(A)$成立，并且对所有 $B_i(A)$，其最大特征值严格小于 $C_i(A)$的最小特征值，对所有 $A\in\mathcal{V}_i$ ∩厄米矩阵(d)。

定义 4.5（一致酉块对角化）。我们称刚才固定的数据

$$(\{U_i:\mathcal{V}_i\to U_d(\mathbb{C})\}_{i=1}^s, r, \chi)$$

分别是 $\mathrm{Norm}^0_T(d)$ 和 $\mathrm{Herm}^0_T(d)$ 的一致酉块对角化 。

4.3. 厄米矩阵与正规矩阵的绝对连续曲线的逐点界。在本节余下部分，固定一个 $\mathrm{Norm}^0_T(d)$ 的一致酉块对角化 $(\{U_i:\mathcal{V}_i\to U_d(\mathbb{C})\}_{i=1}^s, r, \chi)$。固定 $i\in\{1,\dots,s\}$，并简记 $U:\mathcal{V}\to U_d(\mathbb{C})$ 为 $U_i:\mathcal{V}_i\to U_d(\mathbb{C})$。设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个有界开区间。那么 U 诱导出一个映射

$$U_*:AC(I,\mathcal{V})\to AC(I,U_d(\mathbb{C})),\quad A\mapsto U\circ A$$

且链式法则成立；例如参见 [MM72]。

下文中，我们使用范数

$$\|f\|_{C^k}:=\max_{0\le j\le k}\sup_{x\in\mathcal{V}}\|d^jf(x)\|_{L_j(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)}$$

在空间 $C^k(\mathcal{V},\mathbb{R}^\ell)$上，其中 $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m$ 是开且有界的，而 $L_j(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)$ 是由 j-线性映射构成的空间，这些映射有 j 个自变量，取值于 $\mathbb{R}^m$，值域属于 $\mathbb{R}^\ell$。

引理 4.6。设 $A_1,A_2\in AC(I,\mathcal{V})$。则对每个 $x\in I$，

$$\|U_*(A_1)(x)-U_*(A_2)(x)\|_2\le\|U\|_{C^1}\|A_1(x)-A_2(x)\|_2 \tag{4.6}$$

并且，对几乎所有 $x\in I$ 和 $j=1,2$，

$$\begin{aligned}&\|(U_*(A_1))'(x)-(U_*(A_2))'(x)\|_2\\&\quad\le\|U\|_{C^2}\big(\|A_j'(x)\|_2\|A_1(x)-A_2(x)\|_2+\|A_1'(x)-A_2'(x)\|_2\big).\end{aligned} \tag{4.7}$$

证明。中值定理蕴含（4.6）。我们有

$$\begin{aligned}\|(U_*(A_1))'(x)-(U_*(A_2))'(x)\|_2&=\|dU(A_1(x))A_1'(x)-dU(A_2(x))A_2'(x)\|_2\\&\le\|(dU(A_1(x))-dU(A_2(x)))A_1'(x)\|_2+\|dU(A_2(x))(A_1'(x)-A_2'(x))\|_2\\&\le\|U\|_{C^2}\|A_1(x)-A_2(x)\|_2\|A_1'(x)\|_2+\|U\|_{C^1}\|A_1'(x)-A_2'(x)\|_2\end{aligned}$$

这蕴含（4.7），对 $j=1$ 成立。关于 $j=2$ 的断言由对称性得出。 □

设 $A\in AC(I$，范数$_T(d))$，并假设 $0\notin A(I)$。则

$$\underline{A}(x):=\frac{A(x)}{\|A(x)\|_2}\in\mathrm{Norm}^0_T(d)$$

对 $x\in I$ 是定义良好的。如果 $\underline{A}(I)\subseteq\mathcal{V}_i$ 对某个 $i\in\{1,\dots,s\}$ 成立，则

$$U_i^*(\underline{A})\underline{A}\,U_i(\underline{A})=\begin{pmatrix}\underline{B}_i(\underline{A})&0\\0&\underline{C}_i(\underline{A})\end{pmatrix}$$

因此

$$U_i^*(\underline{A})A\,U_i(\underline{A})=\begin{pmatrix}B_i(A)&0\\0&C_i(A)\end{pmatrix},\tag{4.8}$$

其中 $B_i(A) = \|A\|_2 \cdot B_i(\underline{A})$ 和 $C_i(A) = \|A\|_2 \cdot C_i(\underline{A})$ 均为正规矩阵。

根据性质（4.5），存在 $\chi > 0$ 使得下述结论成立。假设 A_1，$A_2 \in AC(I$，范数 $_T(d)\setminus\{0\})$ 且 $A_1(I)\ A_2(I) \subseteq \mathcal{V}_i$ 对某个 $i \in \{1, \ldots, s\}$成立。那么，对所有 $x \in I$，

$$\big|\|A_2(x)\|_2\,\mu_1(x) - \|A_1(x)\|_2\,\nu_2(x)\big| > \chi\,\|A_1(x)\|_2\|A_2(x)\|_2 \tag{4.9}$$

对于 μ_1 的所有特征值 $B_i(A_1)$ 以及 ν_2 的所有特征值 $C_i(A_2)$，其中 $B_i(A_1)$ 和$C_i(A_2)$ 由（4.8）定义。

若 $A \in AC(I$，厄米$_T(d))$，则 $\underline{A}$、$B_i(A)$ 和 $C_i(A)$ 均为厄米矩阵，且 $B_i(A)$的最大特征值严格小于 $C_i(A)$ 的最小特征值，在 I 上，即，

$$\mathcal{E}(A) = (\mathcal{E}(B_i(A)), \mathcal{E}(C_i(A))). \tag{4.10}$$

在引理 4.8中，我们推导了两个正规矩阵的绝对连续曲线 A_1，A_2 所对应的表达式（4.8）之差的逐点界。特别地，这些界也适用于厄米矩阵。我们需要以下预备引理。

引理 4.7. 设 $A \in AC(I, M_d(\mathbb{C}))$，并假设 $0 \notin A(I)$。那么，在 I上几乎处处，

$$\|A\|_2' = \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(\underline{A}^* A'), \tag{4.11}$$

$$\big|\|A\|_2'\big| \le \|A'\|_2, \tag{4.12}$$

$$\|\underline{A}'\|_2 \le 2\,\frac{\|A'\|_2}{\|A\|_2}. \tag{4.13}$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\|A\|_2' &= (\operatorname{Tr}(A^*A)^{1/2})' = \frac{\operatorname{Tr}(A^*A') + \operatorname{Tr}((A^*)'A)}{2\|A\|_2} \\ &= \frac{\operatorname{Tr}(A^*A') + \operatorname{Tr}((A')^*A)}{2\|A\|_2} = \frac{\operatorname{Tr}(A^*A') + \overline{\operatorname{Tr}(A^*A')}}{2\|A\|_2} = \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(\underline{A}^*A').\end{aligned}$$

因此，

$$\big|\|A\|_2'\big| \le \|\underline{A}^*\|_2\|A'\|_2 = \|A'\|_2.$$

最后，

$$\|\underline{A}'\|_2 = \Big\|\frac{A'\|A\|_2 - A\|A\|_2'}{\|A\|_2^2}\Big\|_2 \le \frac{\|A'\|_2}{\|A\|_2} + \frac{\big|\|A\|_2'\big|}{\|A\|_2} \le 2\,\frac{\|A'\|_2}{\|A\|_2}$$

引理得证。 □

引理 4.8. 对于 $j = 1,\ 2$，令 $A_j \in AC(I$，范数$_T(d))$ 满足 $0 \notin A_j(I)$。假设 $A_1(I)\ A_2(I) \subseteq \mathcal{V}_i$，其中 $i \in \{1, \ldots, s\}$。为简便起见，我们记$U:\ \mathcal{V} \to U_d(\mathbb{C})$ 为 $U_i:\ \mathcal{V}_i \to U_d(\mathbb{C})$。那么，在 I 上逐点，

$$\|U^*(\underline{A}_1)A_1U(\underline{A}_1) - U^*(\underline{A}_2)A_2U(\underline{A}_2)\|_2 \le C\,\|A_1 - A_2\|_2 \tag{4.14}$$

并且，在 I 上几乎处处成立；对于 $j = 1,\ 2$，

$$\begin{aligned}&\|(U^*(\underline{A}_1)A_1U(\underline{A}_1))' - (U^*(\underline{A}_2)A_2U(\underline{A}_2))'\|_2 \\ &\quad\le C\left(\|A_1' - A_2'\|_2 + \big(\|A_1'\|_2 + \|A_2'\|_2\big)\|A_j\|_2^{-1}\|A_1 - A_2\|_2\right),\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 C 是仅依赖于 d 的普适常数。

证明。对于 $j=1,\ 2$，有

$$\|\underline{A}_1-\underline{A}_2\|_2\le 2\,\|A_j\|_2^{-1}\|A_1-A_2\|_2, \tag{4.16}$$

因为

$$\begin{aligned}\|\underline{A}_1-\underline{A}_2\|_2&=\Big\|\frac{A_1}{\|A_1\|_2}-\frac{A_2}{\|A_2\|_2}\Big\|_2\\&\le\frac{\|A_1-A_2\|_2\|A_2\|_2+\|A_2\|_2\,\big|\|A_1\|_2-\|A_2\|_2\big|}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2}\le 2\,\frac{\|A_1-A_2\|_2}{\|A_1\|_2}\end{aligned}$$

而情形 $j=2$ 由对称性可得。因此，由 (4.6) 和 (4.16)，

$$\begin{aligned}&\|U^*(\underline{A}_1)A_1U(\underline{A}_1)-U^*(\underline{A}_2)A_2U(\underline{A}_2)\|_2\\&\quad\le\|(U^*(\underline{A}_1)-U^*(\underline{A}_2))A_1\,U(\underline{A}_1)\|_2+\|U^*(\underline{A}_2)A_1(U(\underline{A}_1)-U(\underline{A}_2)\|_2\\&\qquad+\|U^*(\underline{A}_2)(A_1-A_2)U(\underline{A}_2)\|_2\\&\quad\lesssim\|A_1\|_2\|\underline{A}_1-\underline{A}_2\|_2+\|A_1-A_2\|_2\lesssim\|A_1-A_2\|_2\end{aligned}$$

从而证明了 (4.14)。

下面证明 (4.15)。由 (4.11)，

$$\begin{aligned}\big|\|A_1\|_2'-\|A_2\|_2'\big|&=\big|\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\underline{A}_1^*A_1')-\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\underline{A}_2^*A_2')\big|\\&=\big|\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}((\underline{A}_1^*-\underline{A}_2^*)A_1')+\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\underline{A}_2^*(A_1'-A_2'))\big|\\&\le\|\underline{A}_1^*-\underline{A}_2^*\|_2\|A_1'\|_2+\|\underline{A}_2^*\|_2\|A_1'-A_2'\|_2\\&=\|\underline{A}_1-\underline{A}_2\|_2\|A_1'\|_2+\|A_1'-A_2'\|_2,\end{aligned}$$

因此由对称性，对于 $j=1,\ 2$，有

$$\big|\|A_1\|_2'-\|A_2\|_2'\big|\le\|\underline{A}_1-\underline{A}_2\|_2\|A_j'\|_2+\|A_1'-A_2'\|_2.$$

利用（4.16），我们得出，对于 $j=1,\ 2$，

$$\big|\|A_1\|_2'-\|A_2\|_2'\big|\lesssim\frac{\|A_j'\|_2}{\|A_j\|_2}\|A_1-A_2\|_2+\|A_1'-A_2'\|_2. \tag{4.17}$$

我们断言

$$\|\underline{A}_1'-\underline{A}_2'\|_2\lesssim\frac{\|A_2'\|_2\|A_1-A_2\|_2}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2}+\frac{\|A_1'-A_2'\|_2}{\|A_1\|_2}. \tag{4.18}$$

事实上

$$\begin{aligned}\|\underline{A}_1'-\underline{A}_2'\|_2&=\Big\|\frac{A_1'\|A_1\|_2-A_1\|A_1\|_2'}{\|A_1\|_2^2}-\frac{A_2'\|A_2\|_2-A_2\|A_2\|_2'}{\|A_2\|_2^2}\Big\|_2\\&\le\Big\|\frac{A_1'\|A_1\|_2\|A_2\|_2^2-A_2'\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2}{\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2^2}\Big\|_2\\&\quad+\Big\|\frac{A_2\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2'-A_1\|A_2\|_2^2\|A_1\|_2'}{\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2^2}\Big\|_2.\end{aligned}$$

第一项等于

$$\Big\|\frac{A_1'\|A_2\|_2-A_2'\|A_1\|_2}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2}\Big\|_2=\Big\|\frac{(A_1'-A_2')\|A_2\|_2-A_2'(\|A_1\|_2-\|A_2\|_2)}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2}\Big\|_2$$

$$\lesssim \frac{\|A_1' - A_2'\|_2}{\|A_1\|_2} + \frac{\|A_2'\|_2 \|A_1 - A_2\|_2}{\|A_1\| \|A_2\|_2}$$

并且，根据（4.12）和（4.17），第二项的上界为

$$\left\| \frac{\|A_2\|_2'(A_2\|A_1\|_2^2 - A_1\|A_2\|_2^2)}{\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2^2} \right\|_2 + \left\| \frac{A_1\|A_2\|_2^2(\|A_2\|_2' - \|A_1\|_2')}{\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2^2} \right\|_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left|\|A_2\|_2'\right| \left\|A_2\|A_1\|_2^2 - A_2\|A_1\|_2\|A_2\|_2 + A_2\|A_1\|_2\|A_2\|_2 - A_1\|A_2\|_2^2\right\|_2}{\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2^2} \\
&\quad + \frac{\left|\|A_1\|_2' - \|A_2\|_2'\right|}{\|A_1\|_2} \\
&\lesssim \frac{\|A_2'\|_2 \left|\|A_1\|_2 - \|A_2\|_2\right|}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2} + \frac{\|A_2'\|_2 \left\|A_2\|A_1\|_2 - A_1\|A_2\|_2\right\|_2}{\|A_1\|_2^2\|A_2\|_2} \\
&\quad + \frac{\|A_2'\|_2\|A_1 - A_2\|_2}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2} + \frac{\|A_1' - A_2'\|_2}{\|A_1\|_2} \\
&\lesssim \frac{\|A_2'\|_2\|A_1 - A_2\|_2}{\|A_1\|_2\|A_2\|_2} + \frac{\|A_1' - A_2'\|_2}{\|A_1\|_2}
\end{aligned}$$

并且由（4.18）可得。

由（4.7）、（4.13）、（4.16）和（4.18），

$$\begin{aligned}
\|(U(\underline{A}_1) - U(\underline{A}_2))'\|_2 &\lesssim \|\underline{A}_2'\|_2\|\underline{A}_1 - \underline{A}_2\|_2 + \|\underline{A}_1' - \underline{A}_2'\|_2 \\
&\lesssim \frac{\|A_2'\|_2}{\|A_2\|_2}\frac{\|A_1 - A_2\|_2}{\|A_1\|_2} + \frac{\|A_1' - A_2'\|_2}{\|A_1\|_2}, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

对 U^* 也可类似地得到。

最后，我们希望对其进行界定

$$\begin{aligned}
&\|(U^*(\underline{A}_1)A_1U(\underline{A}_1))' - (U^*(\underline{A}_2)A_2U(\underline{A}_2))'\|_2 \\
&\quad \le \|((U^*(\underline{A}_1) - U^*(\underline{A}_2))A_1U(\underline{A}_1))'\|_2 + \|(U^*(\underline{A}_2)A_1(U(\underline{A}_1) - U(\underline{A}_2)))'\|_2 \\
&\qquad + \|(U^*(\underline{A}_2)(A_1 - A_2)U(\underline{A}_2))'\|_2.
\end{aligned}$$

第一项可由以下不等式界定

$$\begin{aligned}
&\|(U^*(\underline{A}_1) - U^*(\underline{A}_2))'\|_2\|A_1\|_2 + \|U^*(\underline{A}_1) - U^*(\underline{A}_2)\|_2\|A_1'\|_2 \\
&\qquad + \|U^*(\underline{A}_1) - U^*(\underline{A}_2)\|_2\|A_1\|_2\|(U(\underline{A}_1))'\|_2 \\
&\quad \lesssim \frac{(\|A_1'\|_2 + \|A_2'\|_2)}{\|A_2\|_2}\|A_1 - A_2\|_2 + \|A_1' - A_2'\|_2,
\end{aligned}$$

利用（4.6）、（4.13）、（4.16）和（4.19）。第二项的界定方法类似，第三项可由以下不等式界定

$$\begin{aligned}
&\|(U^*(\underline{A}_2))'\|_2\|A_1 - A_2\|_2 + \|A_1' - A_2'\|_2 + \|A_1 - A_2\|_2\|U(\underline{A}_2))'\|_2 \\
&\quad \lesssim \frac{\|A_2'\|_2}{\|A_2\|_2}\|A_1 - A_2\|_2 + \|A_1' - A_2'\|_2.
\end{aligned}$$

因此，4.15）得证。 □

注记 4.9. 在证明中，我们没有用到这些矩阵是正规的这一事实。

注记 4.10. 引理 4.8 在以下意义下仍然成立：若 $A_1(I) \subseteq \mathcal{V}_{i_1}$, $A_2(I) \subseteq \mathcal{V}_{i_2}$，对于 $i_1 \neq i_2 \in \{1, \dots, s\}$，且 $\|A_1(x) - A_2(x)\|_2 \geq \epsilon$，对于某个普适常数 $\epsilon > 0$，在 I上逐点成立，

$$\|U_{i_1}^*(\underline{A}_1)A_1U_{i_1}(\underline{A}_1) - U_{i_2}^*(\underline{A}_2)A_2U_{i_2}(\underline{A}_2)\|_2 \leq C\,\|A_1 - A_2\|_2$$

并且，在 I 上几乎处处成立，且对于 $j = 1,\ 2$,

$$\begin{aligned}\|(U_{i_1}^*(\underline{A}_1)A_1U_{i_1}(\underline{A}_1))' - (U_{i_2}^*(\underline{A}_2)A_2U_{i_2}(\underline{A}_2))'\|_2 \\ \leq C\Big(\|A_2' - A_1'\|_2 + \big(\|A_1'\|_2 + \|A_2'\|_2\big)\|A_j\|_2^{-1}\|A_1 - A_2\|_2\Big),\end{aligned}$$

其中，C 是仅依赖于 d 的普适常数。

事实上，

$$\|U_{i_1}(\underline{A}_1) - U_{i_2}(\underline{A}_2)\|_2 \leq \|U_{i_1}(\underline{A}_1)\|_2 + \|U_{i_2}(\underline{A}_2)\|_2 \lesssim \epsilon \leq \|\underline{A}_1 - \underline{A}_2\|_2$$

and

$$\begin{aligned}\|(U_{i_1}(\underline{A}_1) - U_{i_2}(\underline{A}_2))'\|_2 &\leq \|(U_{i_1}(\underline{A}_1))'\|_2 + \|(U_{i_2}(\underline{A}_2))'\|_2 \\ &\lesssim (\|\underline{A}_1'\|_2 + \|\underline{A}_2'\|_2)\epsilon \leq (\|\underline{A}_1'\|_2 + \|\underline{A}_2'\|_2)\|\underline{A}_1 - \underline{A}_2\|_2.\end{aligned}$$

注意，（4.8）中对应于 i_1 和 i_2 的块大小可能不同。

5. Eigenvalue stability for Hermitian matrices: one-parameter case

本节旨在证明单参数情形下的定理 1.1 和定理 1.7 。此外，我们将在第 1.19 节证明定理 5.4。

下面的定理是定理 1.1 关于 $m = 1$ 的一个版本。

定理 5.1。设 $1 \leq q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。设 $A_n \to A$属于 $W^{1,\,q}(I,$ 厄米矩阵$(d))$，即，

$$\|A - A_n\|_{W^{1,q}(I,M_d(\mathbb{C}))} \to 0 \quad as\ n \to \infty.$$

Then

$$\|\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A_n)\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad as\ n \to \infty.$$

定理 5.1 的证明包括第 5.1 节和第 5.2节。

5.1. 初步观察与约化。

引理 5.2。设 $A \in W^{1,\,q}(I, M_d(\mathbb{C}))$，其中 $1 \leq q < \infty$ 且 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。于是，对所有 $x \in I$,

$$\|A(x)\|_2 \leq |I|^{-1/q}\,\|A\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))} + |I|^{1-1/q}\,\|A'\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))}. \tag{5.1}$$

证明。对于 x，$y \in I$，我们有

$$A(x) - A(y) = \int_y^x A'(t)\,dt$$

并对 y 积分，得到

$$A(x) - A_I = \frac{1}{|I|}\int_I \int_y^x A'(t)\,dt\,dy,$$

其中 $A_I := |I|^{-1}\int_I A(y)\,dy$。因此，

$$\|A(x)-A_I\|_2 \le \frac{1}{|I|}\int_I\int_I \|A'(t)\|_2\,dt\,dy = \|A'\|_{L^1(I,M_d(\mathbb{C}))}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|A(x)\|_2 &\le \|A_I\|_2 + \|A(x)-A_I\|_2\\ &\le |I|^{-1}\|A\|_{L^1(I,M_d(\mathbb{C}))} + \|A'\|_{L^1(I,M_d(\mathbb{C}))}\\ &\le |I|^{-1/q}\|A\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))} + |I|^{1-1/q}\|A'\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))},\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式。 □

推论 5.3. 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个有界开区间。设$A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(I, M_d(\mathbb{C}))$ 当 $n \to \infty$ 时。那么

$$\|A - A_n\|_{L^\infty(I,M_d(\mathbb{C}))} \to 0 \quad as\ n \to \infty. \tag{5.2}$$

证明。 将 (5.1) 应用于 $A - A_n$ 而不是 A。 □

推论 5.4. 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$为一个有界开区间。设$A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(I,$ 厄米矩阵$(d))$ 当 $n \to \infty$ 时。那么

$$\|\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A_n)\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad as\ n \to \infty.$$

证明。 这可由 (3.2) 和推论 5.3得出。 □

要完成定理 5.1 的证明，根据推论 5.4，只需证明

$$\|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_{L^q(I,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

我们将 $A \in W^{1,q}(I,$ 厄米矩阵$(d))$ 与 $\tilde{A} := A - \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(A)\mathbb{I}_d \in W^{1,q}(I,$ 厄米矩阵$_T(d))$ 联系起来。注意，

$$\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(\tilde{A}) = \frac{1}{d}\,\mathrm{Tr}(A)(1,1,\dots,1). \tag{5.3}$$

引理 5.5。 设 $1 \le q < \infty$。令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。假设 $A_n \to A$ 在 $W^{1,q}(I,$ 厄米矩阵$(d))$ 中当 $n \to \infty$时成立。那么：

(1) $\tilde{A}_n \to \tilde{A}$ *in* $W^{1,q}(I, \mathrm{Herm}_T(d))$ *as* $n \to \infty$.

(2) *Moreover,*

$$\|\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A_n)\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^d)} \to 0$$

if and only if

$$\|\mathcal{E}(\tilde{A}) - \mathcal{E}(\tilde{A}_n)\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^d)} \to 0$$

as $n \to \infty$.

证明。 显然，$\mathrm{Tr}(A_n) \to \mathrm{Tr}(A)$ 在 $W^{1,q}(I)$ 中当 $n \to \infty$成立。第二个断言可由（5.3）轻易得到。 □

根据引理 5.5，我们可以假设对所有 A，都有 $\mathrm{Tr}(A_n) = 0$ $(n \ge 1)$。

5.2. **定理 5.1 的证明。** 根据第 5.1 节中的初步约化，只需证明以下命题：

命题 5.6. 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。设$A_n \to A$属于 $W^{1,\,q}(I,$ 厄米矩阵$_T)$)，且 $n \to \infty$。那么

$$\|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_{L^q(I,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad as\ n \to \infty. \tag{5.4}$$

我们将对 d 使用归纳法。若 $d = 1$，则该断言显然成立。因此，假设 $d \ge 2$。

我们先考虑零点集

$$Z_A := \{x \in I : A(x) = 0\} = \{x \in I : \mathcal{E}(A)(x) = 0\} =: Z_{\mathcal{E}(A)}$$

A的零点集。由于 $\mathcal{E}(A) \in W^{1,\,q}(I,\ \mathbb{R}^d)$，导数 $\mathcal{E}(A)'$在I上几乎处处存在。若 x_0 属于 Z_A的聚点集，记作 acc(Z_A)，且$\mathcal{E}(A)'(x_0)$存在，则必有 $\mathcal{E}(A)'(x_0) = 0$。

引理 5.7. 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。假设$A_n \to A$属于 $W^{1,\,q}(I,$ 厄米矩阵$(d))$，且 $n \to \infty$。那么

$$\|\mathcal{E}(A_n)' - \mathcal{E}(A)'\|_{L^q(Z_A,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad as\ n \to \infty.$$

证明。令 E 为 $x \in$ acc(Z_A)的集合，其中对所有 $n \ge 1$，导数 $A'(x)$、$\mathcal{E}(A)'(x)$以及$A_n'(x)$、$\mathcal{E}(A_n)'(x)$均存在。对每个 $x \in E$，$A'(x) = 0$、$\mathcal{E}(A)'(x) = 0$，并且

$$\left\|\mathcal{E}(A_n)'(x)\right\|_2 \le \|A_n'(x)\|_2,$$

由（3.2）或（3.4）。由于 E 在 Z_A中具有全测度，因此得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}(A_n)' - \mathcal{E}(A)'\|_{L^q(Z_A,\mathbb{R}^d)} &= \|\mathcal{E}(A_n)'\|_{L^q(Z_A,\mathbb{R}^d)} \\ &\le \|A_n'\|_{L^q(Z_A,M_d(\mathbb{C}))} = \|A_n' - A'\|_{L^q(Z_A,M_d(\mathbb{C}))},\end{aligned}$$

这就推出了所要证明的结论。 □

下一个引理处理 Z_A的补集；在补集中的每个点附近，我们都能找到一个区间，使得对充分大的 n，存在同时酉块对角化。

固定一个对$\{U_i :\ \mathcal{V}_i \to U_d(\mathbb{C})\}_{i=1}^s$、$r$、$\chi$)的厄米矩阵$_T^0(d)$的一致酉块对角化；见定义 4.5。

引理 5.8。 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。假设$A_n \to A$属于 $W^{1,\,q}(I,$ 厄米矩阵$_T(d))$作为 $n \to \infty$。设 $x_0 \in I \setminus Z_A$。那么存在一个开区间 J，满足 $x_0 \in J \subseteq I \setminus Z_A$、$n_0 \ge 1$，且 $i \in \{1, \dots, s\}$，使得

(1) 对于所有 $n \ge n_0$，曲线 $\underline{A} := A/\|A\|_2$ 和 $\underline{A}_n := A_n/\|A_n\|_2$ 属于$W^{1,\,q}(J,$厄米矩阵$_T^0(d))$并满足 $A(J)\ A_n(J) \subseteq \mathcal{V}_i$；

(2) 在 J 上，对于所有 $n \ge n_0$，我们有

$$U_i^*(\underline{A})A\,U_i(\underline{A}) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad U_i^*(\underline{A}_n)A_n\,U_i(\underline{A}_n) = \begin{pmatrix} B_n & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中 $B, B_n \in W^{1,q}(J,$厄米矩阵$(d_1))$以及 $C, C_n \in W^{1,q}(J,$厄米矩阵$(d_2))$且 $d_1 + d_2 = d$;

(3) 在 J 上，且对所有 $n \geq n_0$，我们有

$$\mathcal{E}(A) = (\mathcal{E}(B), \mathcal{E}(C)), \quad \mathcal{E}(A_n) = (\mathcal{E}(B_n), \mathcal{E}(C_n)); \tag{5.6}$$

(4) 我们有

$$\|B - B_n\|_{W^{1,q}(J, M_{d_1}(\mathbb{C}))} \to 0, \quad \|C - C_n\|_{W^{1,q}(J, M_{d_2}(\mathbb{C}))} \to 0 \tag{5.7}$$

as $n \to \infty$.

证明。设 $x_0 \in I \setminus Z_A$。由于 $A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(I, \text{厄米矩阵}(d))$，且 $n \to \infty$，存在 $n_0 \geq 1$ 使得

$$\|A' - A_n'\|_{L^1(I, M_d(\mathbb{C}))} \leq \frac{r}{32} \|A(x_0)\|_2 \quad \text{if } n \geq n_0. \tag{5.8}$$

由 (5.2)，存在 $n_1 \geq n_0$ 使得

$$\|A(x_0) - A_n(x_0)\|_2 \leq \frac{r}{8} \|A(x_0)\|_2 \quad \text{if } n \geq n_1, \tag{5.9}$$

因此，特别地，

$$\frac{1}{2} \|A(x_0)\|_2 \leq \|A_n(x_0)\|_2 \leq \frac{3}{2} \|A(x_0)\|_2. \tag{5.10}$$

选取一个包含 x_0 的开子区间 $J \subseteq I$，使得

$$\|A'\|_{L^1(J, M_d(\mathbb{C}))} \leq \frac{r}{32} \|A(x_0)\|_2. \tag{5.11}$$

对于 $x \in J$，我们有

$$|\|A(x)\|_2 - \|A(x_0)\|_2| \leq \|A(x) - A(x_0)\|_2 \leq \|A'\|_{L^1(J, M_d(\mathbb{C}))} \leq \frac{r}{32} \|A(x_0)\|_2,$$

因此

$$\frac{1}{2} \|A(x_0)\|_2 \leq \|A(x)\|_2 \leq \frac{3}{2} \|A(x_0)\|_2. \tag{5.12}$$

对于 $x \in J$，由（5.8）、（5.10）和（5.11），也有

$$\begin{aligned} |\|A_n(x)\|_2 - \|A_n(x_0)\|_2| &\leq \|A_n(x) - A_n(x_0)\|_2 \\ &\leq \|A_n'\|_{L^1(J, M_d(d))} \leq \frac{r}{16} \|A(x_0)\|_2 \leq \frac{r}{8} \|A_n(x_0)\|_2 \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2} \|A_n(x_0)\|_2 \leq \|A_n(x)\|_2 \leq \frac{3}{2} \|A_n(x_0)\|_2. \tag{5.13}$$

因此，$\underline{A} := A/\|A\|_2$ 和 $\underline{A}_n := A_n/\|A_n\|_2$ 在 J 上有定义，且属于 $W^{1,q}(J, \text{厄米矩阵}_T^0(d))$。由（4.16）和（5.9），

$$\|\underline{A}(x_0) - \underline{A}_n(x_0)\|_2 \leq \frac{2}{\|A(x_0)\|_2} \|A(x_0) - A_n(x_0)\|_2 \leq \frac{r}{4}.$$

此外，由（4.13）和（5.12），对于 $x \in J$，

$$\|\underline{A}'(x)\|_2 \leq 2 \frac{\|A'(x)\|_2}{\|A(x)\|_2} \leq 4 \frac{\|A'(x)\|_2}{\|A(x_0)\|_2}$$

并且，由式（5.12）和（5.10），

$$\|\underline{A}_n'(x)\|_2 \leq 2 \frac{\|A_n'(x)\|_2}{\|A_n(x)\|_2} \leq 8 \frac{\|A_n'(x)\|_2}{\|A(x_0)\|_2}.$$

因此，由式（5.11），

$$\|\underline{A}'\|_{L^1(J,M_d(\mathbb{C}))} \leq \frac{r}{8}$$

并且，根据（5.8）和（5.11），

$$\|\underline{A}'_n\|_{L^1(J,M_d(\mathbb{C}))} \leq \frac{r}{2}.$$

因此 $\underline{A}(J) \subseteq \underline{B}(A(x_0), r/4)$ 且 $A_n(J) \subseteq B(A_n(x_0), r/2) \subseteq B(A(x_0), 3r/4)$。根据（4.4），存在 $i \in \{1,\dots,s\}$ 使得

$$\underline{A}(J) \subseteq \mathcal{V}_i \quad \text{and} \quad \underline{A}_n(J) \subseteq \mathcal{V}_i$$

对所有 $n \geq n_1$ 均成立。因此，(1) 得证。

根据 (4.8) 和 (4.10)，我们得到同时酉块对角化 (5.5)，以及在 J 上对 $n \geq n_1$ 的 (5.6)。我们来检查 B、B_n、C、C_n 在 J 上属于 $W^{1,q}$ 类，并满足 (5.7)。为此，我们省略下标，只写作 $U: \mathcal{V} \to U_d(\mathbb{C})$，对应于 $U_i: \mathcal{V}_i \to U_d(\mathbb{C})$。根据引理 4.8，在 J 上逐点有，

$$\|U^*(\underline{A})A\,U(\underline{A}) - U^*(\underline{A}_n)A_n\,U(\underline{A}_n)\|_2 \leq C\,\|A - A_n\|_2$$

并且还利用（5.12），在 J 上几乎处处成立，

$$\begin{aligned}
&\|(U^*(\underline{A})A\,U(\underline{A}))' - (U^*(\underline{A}_n)A_n\,U(\underline{A}_n))'\|_2 \\
&\qquad \leq C\left(\|A' - A'_n\|_2 + (\|A'\|_2 + \|A'_n\|_2)\|A\|_2^{-1}\|A - A_n\|_2\right), \\
&\qquad \leq C\left(\|A' - A'_n\|_2 + 2\,\|A(x_0)\|_2^{-1}\,(\|A'\|_2 + \|A'_n\|_2)\|A - A_n\|_2\right),
\end{aligned}$$

其中 C 是一个仅依赖于 d 的普适常数。这意味着

$$\|U^*(\underline{A})A\,U(\underline{A}) - U^*(\underline{A}_n)A_n\,U(\underline{A}_n)\|_{L^q(J,M_d(\mathbb{C}))} \leq C\,\|A - A_n\|_{L^q(J,M_d(\mathbb{C}))}$$

and

$$\begin{aligned}
&\|(U^*(\underline{A})A\,U(\underline{A}))' - (U^*(\underline{A}_n)A_n\,U(\underline{A}_n))'\|^q_{L^q(J,M_d(\mathbb{C}))} \\
&\quad \leq (2C)^q\,\|A' - A'_n\|^q_{L^q(J,M_d(\mathbb{C}))} \\
&\qquad + \Big(\frac{8C}{\|A(x_0)\|_2}\Big)^q\big(\|A'\|^q_{L^q(J,M_d(\mathbb{C}))} + \|A'_n\|^q_{L^q(J,M_d(\mathbb{C}))}\big)\|A - A_n\|^q_{L^\infty(J,M_d(\mathbb{C}))}.
\end{aligned}$$

根据推论 5.3，我们得到（5.7）。证明完毕。 □

根据引理 5.5、引理 5.8以及归纳假设，对于每个 $x_0 \in I \setminus Z_A$，存在一个开区间 J，满足 $x_0 \in J \subseteq I \setminus Z_A$，使得

$$\|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_{L^q(J,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此，根据引理5.7，存在一个可数覆盖 $\{F_i\}_{i\geq 1}$，用可测集覆盖 I，使得对于每个 F_i,

$$\|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_{L^q(F_i,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

根据引理 2.3（应用于 $f_n := \|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_2^q$），所需的断言（5.4）将由下面的引理推出。

引理 5.9。设 $1 \leq q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。假设$A_n \to A$ 在 $W^{1,q}(I,$ 厄米矩阵$(d))$ 当 $n \to \infty$时。则 $\{\|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_2^q: \quad n \geq 1\} \subseteq L^1(I)$ 一致可积。

证明。由于 $A_n' \to A'$ 在 $L^q(I,\ M_d(\mathbb{C}))$ 当 $n \to \infty$时，集合 $\{\|A'\|_2^q + \|A_n'\|_2^q :\ n \geq 1\} \subseteq L^1(I)$ 根据维塔利收敛定理 2.2 一致可积。因此，根据德拉瓦莱 · 普桑判据 2.1，存在一个非负递增函数G 在 $[0,\infty)$ 上，使得 $G(t)/t \to \infty$ 当 $t \to \infty$ 时且

$$\sup_{n\geq 1} \int_I G(2^q(\|A'\|_2^q + \|A_n'\|_2^q))\, dx < \infty.$$

由（3.2）或（3.4），在 I中几乎处处成立，

$$\|\mathcal{E}(A)' - \mathcal{E}(A_n)'\|_2^q \leq 2^q(\|A'\|_2^q + \|A_n'\|_2^q)$$

因此，根据 de la Vall´ee Poussin 判别法 2.1 ，断言再次成立。 □

这就完成了命题5.6 的证明，从而也完成了定理 5.1的证明。

5.3. **特征值的导数几乎处处收敛**。下面的定理是定理 1.7 在 $m = 1$中的一个版本。

定理 5.10. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。设 $A_n \to A$ 属于$C^{0,\ 1}(I,$厄米矩阵$(d))$ 当 $n \to \infty$时。那么，对几乎每个 $x \in I$,

$$\mathcal{E}(A_n)'(x) \to \mathcal{E}(A)'(x) \quad n \to \infty. \tag{5.14}$$

我们按照定理 5.1 的证明来证明定理 5.10 ，并指出所需的修改。

类比引理 5.5，容易得出以下引理，它允许我们假设对所有 A，都有 $= \mathrm{Tr}(A_n)\ = 0$ 。$n \geq 1$。

引理 5.11。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。假设 $A_n \to A$ 属于$C^{0,1}(I,$厄米矩阵$(d))$，其中 $n \to \infty$。则：

(1) $\tilde{A}_n \to \tilde{A}$ *in* $C^{0,1}(\overline{I}, \mathrm{Herm}_T(d))$ *as* $n \to \infty$.

(2) 此外，

$$\mathcal{E}(A_n)' \to \mathcal{E}(A)' \quad \textit{almost everywhere in } I$$

当且仅当

$$\mathcal{E}(\tilde{A}_n)' \to \mathcal{E}(\tilde{A})' \quad \textit{almost everywhere in } I$$

当 $n \to \infty$ 时。

我们用 5.14) 的归纳法证明 d。若 $d = 1$ ，则该断言显然成立。因此假设 $d \geq 2$。

在 A的零点集 Z_A 上，我们有以下引理。

引理 5.12. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间，并假设 $A_n \to A$ 属于$C^{0,1}(I,$厄米矩阵$(d))$ 当 $n \to \infty$ 时。那么，对于几乎所有的 $x \in Z_A$,

$$\mathcal{E}(A_n)'(x) \to 0 \quad \textit{as } n \to \infty.$$

证明. 根据命题 3.2，对每个 $n \geq 1$,

$$\sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\|\mathcal{E}(A_n)(x)-\mathcal{E}(A_n)(y)\|_2}{|x-y|} \leq \sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\|A_n(x)-A_n(y)\|_2}{|x-y|}.$$

根据引理 2.5和引理 2.6,

$$\sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\|A_n(x)-A_n(y)\|_2}{|x-y|} \to \sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\|A(x)-A(y)\|_2}{|x-y|} = 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

令 E 为 $x \in \mathrm{acc}(Z_A)$ 的集合，其中对所有 $n \geq 1$，导数 $\mathcal{E}(A_n)'(x)$ 均存在。对每个 $x_0 \in E$，存在一个序列 $x_k \to x_0$，使得 $x_k \in Z_A$，且对所有 $k \geq 1$都有 $x_k \neq x_0$。因此，对于固定的 n,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{E}(A_n)'(x_0)\right\|_2 &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathcal{E}(A_n)(x_0)-\mathcal{E}(A_n)(x_k)\|_2}{|x_0-x_k|} \\ &\leq \sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\|\mathcal{E}(A_n)(x)-\mathcal{E}(A_n)(y)\|_2}{|x-y|}.\end{aligned}$$

因此我们可以得出结论：对于每个 $x_0 \in E$,

$$\mathcal{E}(A_n)'(x_0) \to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

证明至此完成，因为 E 在 Z_A中具有全测度。 □

我们需要以下引理 5.8的一个变体。

引理 5.13. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。假设 $A_n \to A$ 在$C^{0,\,1}(I,$ 厄米矩阵$_T(d))$ 上为 $n \to \overline{\infty}$。设 $x_0 \in I \setminus Z_A$。那么存在一个开区间J，满足 $x_0 \in J \subseteq I \setminus Z_A$、 $n_0 \geq 1$，且 $i \in \{1,\ldots,s\}$，使得

(1) 对于所有 $n \geq n_0$，曲线 $A := A/\|A\|_2$ 和 $A_n := A_n/\|A_n\|_2$ 属于$C^{0,\,1}(J,$ 厄米矩阵$\overline{_T(d)})$，并满足 $A(J)\, A_n(J) \subsetneq \mathcal{V}_i$;—

(2) 在 J 上，对所有 $n \geq n_0$，我们有

$$U_i^*(\underline{A})A\,U_i(\underline{A}) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad U_i^*(\underline{A_n})A_n\,U_i(\underline{A_n}) = \begin{pmatrix} B_n & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix},$$

where $B, B_n \in C^{0,1}(\overline{J}, \mathrm{Herm}(d_1))$ *and* $C, C_n \in C^{0,1}(\overline{J}, \mathrm{Herm}(d_2))$ *with* $d_1 + d_2 = d$;

(3) 在 J 上，对所有 $n \geq n_0$，我们有

$$\mathcal{E}(A) = (\mathcal{E}(B), \mathcal{E}(C)), \quad \mathcal{E}(A_n) = (\mathcal{E}(B_n), \mathcal{E}(C_n));$$

(4) 我们有

$$\|B - B_n\|_{C^{0,1}(\overline{J}, M_{d_1}(\mathbb{C}))} \to 0, \quad \|C - C_n\|_{C^{0,1}(\overline{J}, M_{d_2}(\mathbb{C}))} \to 0$$

as $n \to \infty$.

证明。存在 J、 n_0和 i ，使得 $A(J)\ A_n(J) \subseteq \mathcal{V}_i$，对于 $n \geq n_0$，由引理5.8 可知（因为 $C^{0,\,1}$-收敛意味着 $W^{1,\,q}$-收敛）。其他结论由（4.8）、（4.10）和引理4.8可轻易得出。 □

由引理5.11、引理5.13以及归纳假设，对于每个 $x_0 \in I \setminus Z_A$，存在一个开区间 J，满足 $x_0 \in J \subseteq I \setminus Z_A$ 使得

$$\mathcal{E}(A_n)' \to \mathcal{E}(A)' \quad \text{almost everywhere in } J \text{ as } n \to \infty.$$

结合引理5.12，这意味着

$$\mathcal{E}(A_n)' \to \mathcal{E}(A)' \quad \text{almost everywhere in } I \text{ as } n \to \infty$$

从而完成了定理5.10的证明。

5.4. **矩阵条件数的稳定性**。 我们将以定理1.19的证明结束本节。

回顾一下，非奇异矩阵 $A \in M_d(\mathbb{C})$ 的条件数是最大奇异值与最小奇异值之比:

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_d(A)}.$$

设 $1 \le q < \infty$。令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个有界开区间。假设 $A_0 \in W^{1,q}(I, M_d(\mathbb{C}))$ 且 $\inf_{x\in I} \sigma_d(A_0(x)) > 0$。我们必须证明，$\kappa(A) \in W^{1,q}(I, \mathbb{R})$ 在 W^1 中 A_0 的某个邻域 $\mathcal{U}$ 内是良定义的，并且诱导的映射 $\kappa\colon \mathcal{U} \to W^{1,q}(I, \mathbb{R})$ 是连续的。

根据定理 1.17，$\sigma_*\colon W^{1,q}(I, M_d(\mathbb{C})) \to W^{1,q}(I, \mathbb{R}^d)$ 的连续性，以及引理 5.2 和（1.11），存在 W^1 中 A_0 的一个邻域 $\mathcal{U}$，$^{,q}(I, M_d(\mathbb{C}))$，使得

$$\delta := \inf_{A\in\mathcal{U}} \inf_{x\in I} \sigma_d(A(x)) > 0.$$

因此，映射 $\kappa\colon \mathcal{U} \to W^{1,\ q}(I,\ \mathbb{R})$ 是良定义的。

为考察连续性，令 $A,\ B \in \mathcal{U}$。那么，在 I 中，

$$(\kappa(A) - \kappa(B))\sigma_d(A)\sigma_d(B) = (\sigma_1(A) - \sigma_1(B))\sigma_d(B) - \sigma_1(B)(\sigma_d(A) - \sigma_d(B))$$

并且，在 I 中几乎处处，

$$\begin{aligned}(\kappa(A)' - \kappa(B)')\sigma_d(A)\sigma_d(B) &+ (\kappa(A) - \kappa(B))\sigma_d(A)'\sigma_d(B)\\ &+ (\kappa(A) - \kappa(B))\sigma_d(A)\sigma_d(B)'\\ = (\sigma_1(A)' - \sigma_1(B)')&\sigma_d(B) - \sigma_1(B)'(\sigma_d(A) - \sigma_d(B))\\ &+ (\sigma_1(A) - \sigma_1(B))\sigma_d(B)' - \sigma_1(B)(\sigma_d(A)' - \sigma_d(B)').\end{aligned}$$

我们看到，在 I中，

$$|\kappa(A) - \kappa(B)| \le \frac{\|B\|_2}{\delta^2}\big(|\sigma_1(A) - \sigma_1(B)| + |\sigma_d(A) - \sigma_d(B)|\big)$$

并且，在 I 中几乎处处，

$$\begin{aligned}|\kappa(A)' - \kappa(B)'| \le \frac{1}{\delta^2}\Big(&\|B\|_2|\sigma_1(A)' - \sigma_1(B)'| + |\sigma_1(B)'||\sigma_d(A) - \sigma_d(B)|\\ &+ |\sigma_d(B)'||\sigma_1(A) - \sigma_1(B)| + \|B\|_2|\sigma_d(A)' - \sigma_d(B)'|\\ &+ \big(\|B\|_2|\sigma_d(A)'| + \|A\|_2|\sigma_d(B)'|\big)|\kappa(A) - \kappa(B)|\Big).\end{aligned}$$

现在，$\kappa\colon\ \mathcal{U} \to W^{1,\ q}(I,\ \mathbb{R})$ 的连续性可由定理 1.17结合引理 5.2 和（1.11）轻易推出。定理1.19 的证明至此完成。

6.

EIGENVALUE STABILITY FOR HERMITIAN MATRICES: MULTIPARAMETER CASE

本节将证明定理 1.1、定理 1.5、推论1.6 和定理 1.7。

6.1. 定理 1.1 的证明。 下面的定理 6.1 蕴含定理 1.1 ，因为$W^{1,\,q}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ 是第一可数的。

定理 6.1。 设 $1 \le q < \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且有界集。设 $A_n \to A$属于 $W^{1,\,q}(U,$ 厄米矩阵$(d))$，且 $n \to \infty$。那么 $\mathcal{E}(A_n) \to \mathcal{E}(A)$ 属于 $W^{1,\,q}(U,\ \mathbb{R}^d)$，且 $n \to \infty$。

证明。 令 $\lambda := \mathcal{E}(A)$ 且 $\lambda_n := \mathcal{E}(A_n)$。由 (3.2)，可得

$$\|\lambda - \lambda_n\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)} \le \|A - A_n\|_{L^q(U,M_d(\mathbb{C}))} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此我们需要证明

$$\|\partial_j \lambda - \partial_j \lambda_n\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \tag{6.1}$$

对所有 $1 \le j \le m$ 均成立。只需证明存在一个具有此性质的子列 (n_k)。

首先假设 $U = I_1 \times \cdots \times I_m$ 是一个边平行于坐标轴的开盒。令 $j = 1$。我们不妨假设 A 和 A_n 在 U 中几乎所有平行于 x_1-轴的线段上绝对连续，且 $\partial_1 A \in L^q(U,$ 厄米矩阵$(d))$。令 $x = (x_1,\ x')$，其中 $x' \in U' = I_2 \times \cdots \times I_m$。由托内利定理，

$$\int_{U'} \int_{I_1} \|A(x_1,x') - A_n(x_1,x')\|_2^q \, dx_1 \, dx' = \|A - A_n\|^q_{L^q(U,M_d(\mathbb{C}))}$$

and

$$\int_{U'} \int_{I_1} \|\partial_1 A(x_1,x') - \partial_1 A_n(x_1,x')\|_2^q \, dx_1 \, dx' = \|\partial_1 A - \partial_1 A_n\|^q_{L^q(U,M_d(\mathbb{C}))}.$$

因此存在一个子列 (n_k)，使得

$$\int_{I_1} \|A(x_1,x') - A_{n_k}(x_1,x')\|_2^q \, dx_1 \to 0$$

and

$$\int_{I_1} \|\partial_1 A(x_1,x') - \partial_1 A_{n_k}(x_1,x')\|_2^q \, dx_1 \to 0$$

几乎处处 $x' \in U'$ 当 $k \to \infty$时。根据定理 5.1，

$$F_{1,n_k}(x') := \int_{I_1} \|\partial_1 \lambda(x_1,x') - \partial_1 \lambda_{n_k}(x_1,x')\|_2^q \, dx_1 \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

对于几乎所有 $x' \in U'$。

根据维塔利收敛定理 2.2，$\|\partial_1 A - \partial_1 A_n\|_{L^q(U,\ M_d(\mathbb{C}))} \to 0$ 当 $n \to \infty$可知集合 $\{\|\partial_1 A\|_2^q + \|\partial_1 A_n\|_2^q : n \ge 1\} \subseteq L^1(U)$ 一致可积，因此根据德拉瓦莱-普桑判据 2.1，存在一个非负递增凸函数 G 定义在 $[0,\infty)$ 上，使得 $G(t)/t \to \infty$ 当 $t \to \infty$ 且

$$\sup_{n \ge 1} \int_U G(2^q(\|\partial_1 A(x)\|_2^q + \|\partial_1 A_n(x)\|_2^q)) \, dx < \infty.$$

我们断言 $\{|I_1|^{-1}F_{1,n_k}\colon\ k\geq 1\}$，因此 $\{F_{1,n_k}\colon\ k\geq 1\}\subseteq L^1(U')$ 一致可积。根据托内利定理、詹森不等式以及（3.4），

$$\begin{aligned}\int_{U'} G(|I_1|^{-1}F_{1,n_k}(x'))\,dx' &= \int_{U'} G\Big(\int_{I_1}\|\partial_1\lambda(x_1,x')-\partial_1\lambda_{n_k}(x_1,x')\|_2^q\,\frac{dx_1}{|I_1|}\Big)\,dx'\\ &\leq \int_{U'}\int_{I_1} G(\|\partial_1\lambda(x_1,x')-\partial_1\lambda_{n_k}(x_1,x')\|_2^q)\,\frac{dx_1}{|I_1|}\,dx'\\ &\leq \frac{1}{|I_1|}\int_U G(2^q(\|\partial_1\lambda(x)\|_2^q+\|\partial_1\lambda_{n_k}(x)\|_2^q))\,dx\\ &\leq \frac{1}{|I_1|}\int_U G(2^q(\|\partial_1 A(x)\|_2^q+\|\partial_1 A_{n_k}(x)\|_2^q))\,dx\end{aligned}$$

有界，其上界是一个与 k无关的常数；由此可得所需结论，再次应用德拉瓦莱·普桑判据 2.1。

由维塔利收敛定理2.2 和托内利定理，

$$\|\partial_1\lambda-\partial_1\lambda_{n_k}\|_{L^q(U,M_d(\mathbb{C}))}\to 0\quad \text{as } k\to\infty.$$

对 $2\leq j\leq m$的论证类似。因此，在6.1）中，$U=I_1\times\cdots\times I_m$的情形得证。

现在设 U 是 $\mathbb{R}^m$中的一般有界开子集。由于 U 是由边平行于坐标轴的有界开盒 V_i 构成的可数并集，结论（6.1）由引理2.3 应用于 f_n 可得：$=\|\partial_j\lambda-\partial_j\lambda_n\|_2^q$，注意到 $\{f_n\}$ 一致可积，这一点可仿照引理5.9的证明看出。证明至此结束。□

6.2. **定理1.5 和定理1.7的证明**。首先注意，定理1.7由定理5.10（逐坐标应用后者）容易推出。

如前所述，定理1.5 是定理1.1的直接推论。利用定理1.7，我们可推出以下稍强的版本。

定理 6.2. 设 $U\subseteq\mathbb{R}^m$ 为开且有界集。假设当 $n\to\infty$ 时，$A_n\to A$ 在$C^{0,1}(U,$厄米矩阵 $(d))$ 中。则

$$\|\mathcal{E}(A)-\mathcal{E}(A_n)\|_{L^\infty(U,\mathbb{R}^d)}\leq\|A-A_n\|_{L^\infty(U,M_d(\mathbb{C}))}\to 0 \tag{6.2}$$

并且，对每个 $1\leq j\leq m$ 及所有 $1\leq q<\infty$，

$$\|\partial_j(\mathcal{E}(A))-\partial_j(\mathcal{E}(A_n))\|_{L^q(U,\mathbb{R}^d)}\to 0 \tag{6.3}$$

当 $n\to\infty$ 时。

证明。 首先，(6.2) 由 (3.2) 立即可得。

由（1.4），

$$|\mathcal{E}(A_n)|_{C^{0,1}(\overline{U},\mathbb{R}^d)}\leq|A_n|_{C^{0,1}(\overline{U},M_d(\mathbb{C}))}\leq L,$$

其中常数 $L>0$ 与 n 无关。特别地，对于每个 $1\leq j\leq m$ 以及几乎处处的 $x\in U$，

$$\|\partial_j(\mathcal{E}(A_n))(x)\|_2\leq L.$$

由定理 6.3，根据定理 1.7和控制收敛定理，得出结论。 □

6.3. **推论 1.6的** 证明 。推论 1.6 是定理6.1 的以下推论以及例 7.1的直接结果。

推论 6.3. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个有界开利普希茨区域。设 $A_n \to A$ *in* $C^{0,1}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ *as* $n \to \infty$. 那么，对每个 $0 < \alpha < 1$,

$$\|\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A_n)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

证明. 该断言可由定理 6.1 和莫雷不等式得到,

$$\|\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A_n)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbb{R}^d)} \le C \|\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A_n)\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^d)},$$

其中 $\alpha = 1 - m/q$、 $q > m$ 和 $C = C(d, m, q, U)$. □

7. Examples

例 7.1 表明，特征映射 $\mathcal{E}\colon C^{0,1}(U,$ 厄米矩阵$(d)) \to C^{0,1}(\overline{U}, \mathbb{R}^d)$ 不连续。该例曾发表于 [PR24a，例 1.12 和 7。13]；为方便读者，我们在此重述。

例 7.1. 对称 2×2 矩阵的曲线序列 $(A_n)_n$

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & x \\ x & -\frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

收敛到

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

在每个紧区间上，所有导数都一致收敛。我们有 $\mathcal{E}(A_n) = (-a_n, a_n)$ 和 $\mathcal{E}(A) = (-a, a)$，其中

$$a_n(x) := \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n^2}} \quad \text{and} \quad a(x) := |x|.$$

于是， $\mathcal{E}(A_n) \not\to \mathcal{E}(A)$ 当 $n \to \infty$ 时，在 $C^{0,\ 1}$ 拓扑中收敛。

事实上，对于每个包含 0 的有界开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |a - a_n|_{C^{0,1}(\overline{I})} &\ge \sup_{0<x\in I} \left| \frac{(a(x) - a_n(x)) - (a(0) - a_n(0))}{x} \right| \\ &= \sup_{0<x\in I} \left| \frac{x - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}}{x} \right| \ge \left| \frac{\frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right| = 2 - \sqrt{2}, \end{aligned}$$

当 n足够大时。

此外，注意到

$$a_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}$$

当 $x \neq 0$ 为任意值时，它逐点趋于 $a'(x)$ =sgn(x)，但在 0 的任何邻域内都不一致收敛:

$$a_n'(\pm\tfrac{1}{n}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

这也违背了推论 1.4 关于 $q = \infty$的结论。

下面的例子 7.2 证明，对于任何 $1 \le q < \infty$，特征映射$\mathcal{E}$: $C^{0,\,1}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ $\to C^{0,\,q}(U,\ \mathbb{R}^d)$ 都不是一致连续的。

例 7.2. 设 $\varphi_n(x)$: $I := (0,1) \to \mathbb{R}$ 为锯齿函数，定义如下

$$\varphi_n(x) = (-1)^k(x - \tfrac{k}{n}) + \varphi_n(\tfrac{k}{n}) \quad \text{if } k = 0, \dots, n-1 \text{ and } \tfrac{k}{n} \le x \le \tfrac{k+1}{n}.$$

于是，在 I 中几乎处处有 $|\varphi_n'| = 1$ 。此外，在 I 中有 $0 \le \varphi_n \le \frac{1}{n}$，并且在 I 的一个测度为 $|E_n| = \frac{1}{2}$ 的可测子集 E_n 上有 $\varphi_n \ge \frac{1}{2n}$。

考虑

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \varphi_n(x) \\ \varphi_n(x) & -\frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad B_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n} & \varphi_n(x) \\ \varphi_n(x) & -\frac{1}{2n} \end{pmatrix}, \quad x \in I.$$

Then

$$\|A_n\|_{C^{0,1}(\bar{I},M_2(\mathbb{C}))} = \frac{2}{n} + \sqrt{2}, \quad \|B_n\|_{C^{0,1}(\bar{I},M_2(\mathbb{C}))} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}n} + \sqrt{2},$$

有界且

$$\|A_n - B_n\|_{C^{0,1}(\bar{I},M_2(\mathbb{C}))} = \frac{\sqrt{2}}{2n} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

A_n 和 B_n 的非负特征值 a_n 和 b_n，

$$a_n = \sqrt{\varphi_n^2 + \tfrac{1}{n^2}}, \quad b_n = \sqrt{\varphi_n^2 + \tfrac{1}{4n^2}},$$

是利普希茨函数，并且在 I 中几乎处处满足，

$$\begin{aligned} |a_n' - b_n'| &= \varphi_n |\varphi_n'| \Big| \frac{n}{\sqrt{n^2\varphi_n^2 + 1}} - \frac{2n}{\sqrt{4n^2\varphi_n^2 + 1}} \Big| \\ &= \varphi_n \frac{3n}{\sqrt{n^2\varphi_n^2 + 1}\sqrt{4n^2\varphi_n^2 + 1}\big(2\sqrt{n^2\varphi_n^2 + 1} + \sqrt{4n^2\varphi_n^2 + 1}\big)}. \\ &\ge \frac{n\,\varphi_n}{6}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

由于 $\varphi_n \le \frac{1}{n}$，因此分母有界于

$$\sqrt{2}\sqrt{5}(2\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} \le 18.$$

因此，在 E_n中几乎处处，

$$|a_n' - b_n'| \ge \frac{1}{2n} \cdot \frac{n}{6} = \frac{1}{12}$$

从而，

$$\|a_n' - b_n'\|_{L^q(I)}^q \ge \|a_n' - b_n'\|_{L^q(E_n)}^q \ge \frac{1}{12^q}|E_n| = \frac{1}{2 \cdot 12^q},$$

对于每个 $1 \le q < \infty$，这表明映射 $\mathcal{E}$: $C^{0,\,1}(I,$ 厄米矩阵$(2))$ $\to C^{0,\,q}(I,\ \mathbb{R}^2)$ 不是一致连续的。

下一个例7.3 表明，对于任何 $0 < \alpha < 1$，特征映射$\mathcal{E}$: $C^{0,\,1}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ $\to C^{0,\,\alpha}(U,\ \mathbb{R}^d)$并非一致连续。与例 7.2不同，对称矩阵的曲线是光滑的，但其利普希茨常数无界。

例 7.3。 令 $\alpha \in (0,\ 1)$，并设 $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$。考虑

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^r} & nx \\ nx & -\frac{1}{n^r} \end{pmatrix}, \quad B_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n^r} & nx \\ nx & -\frac{1}{2n^r} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Then

$$A_n - B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n^r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2n^r} \end{pmatrix}$$

当 $n \to \infty$ 时，在所有导数意义下都一致趋于零。A_n 和 B_n 的非负特征值为

$$a_n(x) = \sqrt{n^2x^2 + \tfrac{1}{n^{2r}}} \quad \text{and} \quad b_n(x) = \sqrt{n^2x^2 + \tfrac{1}{4n^{2r}}}.$$

对于每个包含 0 的有界开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned} |a_n - b_n|_{C^{0,\alpha}(\bar{I})} &\geq \sup_{0<x\in I} \frac{|(a_n(x) - b_n(x)) - (a_n(0) - b_n(0))|}{x^\alpha} \\ &= \sup_{0<x\in I} \frac{\left|\sqrt{n^2x^2 + \frac{1}{n^{2r}}} - \sqrt{n^2x^2 + \frac{1}{4n^{2r}}} - \frac{1}{n^r} + \frac{1}{2n^r}\right|}{x^\alpha} \end{aligned}$$

并令 $x = n^{-1/(1-\alpha)}$，

$$\begin{aligned} &\geq \frac{\left|\sqrt{\frac{1}{n^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}} - \sqrt{\frac{1}{n^{2r}} + \frac{1}{4n^{2r}}} - \frac{1}{n^r} + \frac{1}{2n^r}\right|}{\frac{1}{n^r}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

当 n 足够大时，这表明映射 $\mathcal{E}\colon C^{0,\ 1}(I,$ 厄米矩阵$(2))^{-} \to C^{0,\ \alpha}(I,\ \mathbb{R}^2)$ 不是一致连续的。

由莫雷不等式还可知，对于每个 $1 < q < \infty$，$\mathcal{E}\colon \bar{C}^{0,\ 1}(I,$ 厄米矩阵$(2)) \to C^{0,\ \frac{1}{q}}(I, \mathbb{R}^2)$ 都不是一致连续的。

如第 1.3节所述，理想情况下，我们希望为特征映射 $\mathcal{E}$ 在$C^{0,\ 1}(U,$ 厄米矩阵$(d))$ 的（相对）紧子空间上的限制找到有效的连续性模函数，例如在（1.10）中定义的子集 K。下面的例 7.4排除了 α-Hölder 连续性：$K \to C^{0,\ \frac{1}{q}}(U,\ \mathbb{R}^d)$，其中 α 取决于 q 的某个范围。

例 7.4. 设 A_n，对于 $n \geq 1$，为式（7.1）中定义的对称矩阵光滑曲线，且 a_n 是 A_n的非负特征值。对于 $x > 0$，我们通过与式（7.2）类似的计算可得

$$|a_n'(x) - a_{2n}'(x)| = \frac{3nx}{\sqrt{n^2x^2+1}\sqrt{4n^2x^2+1}(\sqrt{4n^2x^2+1} + 2\sqrt{n^2x^2+1})}.$$

若 $x \in (0,\ \frac{1}{n})$，则分母有上界 18。因此，对于固定的 $1 \leq q < \infty$，

$$\|a_n' - a_{2n}'\|^q_{L^q((0,1))} \geq \|a_n' - a_{2n}'\|^q_{L^q((0,\frac{1}{n}))} \geq \frac{n^q}{6^q}\int_0^{1/n} x^q\,dx = \frac{1}{6^q(q+1)n},$$

使得

$$\|a_n' - a_{2n}'\|_{L^q((0,1))} \geq \frac{1}{6(q+1)^{1/q}\,n^{1/q}},$$

而

$$\|A_n - A_{2n}\|_{L^\infty(\mathbb{R},M_2(\mathbb{C}))} = \frac{\sqrt{2}}{2n} \quad \text{and} \quad A_n' - A_{2n}' \equiv 0.$$

这意味着，对于任何 $\alpha \in (q^{-1}, 1]$，映射 $\mathcal{E}: C^{0,1}(I,$厄米矩阵$(2)) \to C^{0,\frac{1}{q}}(I, \mathbb{R}^2)$都不是 α-*Hölder* 连续的，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是任意一个包含0的有界开区间。

8. d-valued Sobolev functions

本节旨在为定理 1.8 及其证明奠定背景并提供工具。我们遵循 [PR24b第 3] 节。

8.1. 无序 d元复数元组。 对称群 S_d 通过置换坐标作用于 $\mathbb{C}^d$，

$$\sigma z = \sigma(z_1, \dots, z_d) := (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(d)}), \quad \sigma \in \mathrm{S}_d,\ z \in \mathbb{C}^d,$$

从而诱导出一个等价关系。$z = (z_1, \dots, z_d)$ 的等价类是无序元组 $[z] = [z_1, \dots, z_d]$。考虑集合

$$\mathcal{A}_d(\mathbb{C}) := \{[z] : z \in \mathbb{C}^d\}$$

无序复数 d 元组的集合，并为其赋予度量

$$\mathbf{d}_2([z],[w]) := \min_{\sigma \in \mathrm{S}_d} \|z - \sigma w\|_2.$$

于是，$(\mathcal{A}_d(\mathbb{C}), \mathbf{d}_2)$ 是一个完备度量空间，且诱导映射 $[\,]: \mathbb{C}^d \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 是Lipschitz映射，其 $\mathrm{Lip}([\,]) = 1$。

元素 $[z_1, \dots, z_d]$ 属于 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 也可以表示为和 $\sum_{i=1}^d [\![z_i]\!]$，其中 $[\![z_i]\!]$ 表示位于 $z_i \in \mathbb{C}$处的狄拉克质量。如果归一化，即 $\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d [\![z_i]\!]$，那么在这一表示下，$\frac{1}{\sqrt{d}}\mathbf{d}_2$ 由定义在 L^2上的概率测度空间上的、基于 $\mathbb{C}$的瓦瑟斯坦度量诱导。（由于这一原因，在 [PR24b的第 3], 节中，因子 $\frac{1}{\sqrt{d}}$ 被纳入 $\mathbf{d}_2$的定义中。）

—

8.2. **d值 Sobolev 函数。** 由于 Almgren [Alm00], 另见 [DLS11]，存在一个整数 $N = N(d)$ 以及一个单射 Lipschitz映射

$$\Delta : \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$$

具有利普希茨常数 $\mathrm{Lip}(\Delta) \le 1$ 和利普希茨逆映射 $\Delta|_{\Delta}^{-1}{}_{(\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))}$，其利普希茨常数为 $\mathrm{Lip}(\Delta|_{\Delta}^{-1}{}_{(\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))}) \le C(d)$。此外，存在一个从 $\mathbb{R}^N$ 到 $\Delta(\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$的利普希茨收缩映射。

按照 Almgren 的做法，双 Lipschitz 嵌入 Δ 可用于定义取值于 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 的函数的 Sobolev 空间：对于开集 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 和 $1 \le q \le \infty$，令

$$W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C})) := \{f : U \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) : \Delta \circ f \in W^{1,q}(U, \mathbb{R}^N)\}.$$

关于 $W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 的等价内在定义，参见 [DLS11，定义 0.5 和定理 2.4]。于是，$W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 配备度量

$$\rho_\Delta^{1,q}(f,g) := \|\Delta \circ f - \Delta \circ g\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^N)} \tag{8.1}$$

这使其成为一个完备度量空间（将几乎处处相等的函数视为相同）；参见 [PR24b，引理 3.1]。

我们将在定理 8.11 中看到，对于 $1 \le q < \infty$，由 $\rho^{1,q}_\Delta$ 在 $W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 上诱导的拓扑与 Almgren 嵌入 Δ 的选择无关。

注记 8.1. 在 [Alm00] 和 [DLS11], $W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^\ell))$ 对任意 ℓ 进行了研究。

8.3. **Almgren嵌入**。 让我们回顾一下 Almgren 针对 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 的 Δ 构造。

定义 8.2 （Almgren映射）。 我们称

$$H : \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^d$$

是一个 ***Almgren*映射**，如果存在一个单位复数 $\theta \in \mathbb{C}$，使得 $H([z])$ 是由 d 个实数 $\eta(z_i)$ 组成的数组：$=\mathrm{Re}(\theta z_i)$ 按递增顺序排列，即

$$H([z]) = H([z_1, \dots, z_d]) = (\eta(z_{\sigma(1)}), \dots, \eta(z_{\sigma(d)}),$$

其中 $\sigma \in \mathsf{S}_d$ 的选取满足 $\eta(z_{\sigma(1)}) \le \eta(z_{\sigma(2)}) \le \cdots \le \eta(z_{\sigma(d)})$。我们还称 H 为与实线性形式 η 相关联的Almgren映射。

根据Almgren组合引理（例如参见 [DLS11，引理 2。3]），存在$\alpha = \alpha(d) > 0$ 以及一个由线性形式构成的有限集合 $\Lambda = \{\eta_1, \dots \eta_h\}$，其中 $\eta_l(z)$：$= \mathrm{Re}(\theta_l z)$，对应于单位复数 θ_l，具有以下性质：给定任意一组 d^2复数，$\{z_1, \dots, z_{d^2}\} \subseteq \mathbb{C}$，存在 $\eta_l \in \Lambda$ 使得

$$|\eta_l(z_k)| \ge \alpha |z_k| \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, d^2\}. \tag{8.2}$$

例如，我们可以取由集合 $\{\theta_1, \dots \theta_h\}$诱导的 $h = 2d^2+1$ 和 $\{\eta_1, \dots, \eta_l\}$，其中 $\{\theta_1, \dots \theta_h\}$包含所有 h 次单位根。

令 H_l 表示与 $\eta_l \in \Lambda$相关联的 Almgren映射。于是，***Almgren* 嵌入**Δ：$\mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$, $N = dh$，定义如下：

$$\Delta([z]) = h^{-1/2}(H_1([z]), \dots, H_h([z])). \tag{8.3}$$

性质（8.2）保证 Δ 满足第 8.2 节的要求；例如参见 [DLS11，第 2.1 节。2]。

8.4. **空间** $\mathcal{A}_d(\mathbb{R})$。考虑 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 的子空间 $\mathcal{A}_d(\mathbb{R}) := \{[x] : x \in \mathbb{R}^d\}$。对于 $x \in \mathbb{R}^d$，令 $x^\uparrow \in \mathbb{R}^d$ 为等价类 $[x]$ 的代表元，其坐标按递增顺序排列。显然，$x^\uparrow$ 仅取决于 $[x]$，因此我们有一个单射映射 $(\,)^\uparrow : \mathcal{A}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$。它是 $[\,] : \mathbb{R}^d \to \mathcal{A}_d(\mathbb{R})$ 的右逆。

引理 8.3 ([PR24a，引理 7。1])。 我们有

$$\mathbf{d}_2([x], [y]) = \|x^\uparrow - y^\uparrow\|_2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

特别地，$(\,)^\uparrow : \mathcal{A}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$ 和 $[\,] : \mathbb{R}^d \to \mathcal{A}_d(\mathbb{R})$ 都是 ***Lipschitz*映射**。

容易验证，映射 $H = (\,)^\uparrow : \mathcal{A}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$ 是一个 Almgren映射（以$\mathbb{R}$ 代替 $\mathbb{C}$，且对应于实线性形式 $\eta = \mathrm{id}$），而（8.2）在 $\Lambda = \{\mathrm{id}\}$时显然成立。因此 $\Delta = H = (\,)^\uparrow : \mathcal{A}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$ 是一个 Almgren 嵌入。

因此，我们可以在空间上赋予度量

$$W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{R})) = \{f : U \to \mathcal{A}_d(\mathbb{R}) : f^\uparrow \in W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d)\}$$

使其具有度量

$$\rho^{1,q}_\uparrow(f, g) := \|f^\uparrow - g^\uparrow\|_{W^{1,q}(U, \mathbb{R}^d)}.$$

因此，定理1.1 可视为定理1.8的一个特例。

8.5. **类 $W^{1,q}$ 在 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$中的曲线。** 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。我们回顾 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 的一个等价定义（见 [DLS11，定义 0.5]），该定义与 Almgren嵌入无关。

定义 8.4（内在定义）。若存在函数 $\varphi \in L^q(I, \mathbb{R}_{\geq 0})$，使得可测函数 $f : I \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 属于 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ $(1 \leq q \leq \infty)$，则

(i) $x \mapsto \mathbf{d}_2(f(x), T) \in W^{1,q}(I)$ 对所有 $T \in \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 均成立；

(ii) $|(\mathbf{d}_2(f, T))'| \leq \varphi$ 在 I 上几乎处处成立，对所有 $T \in \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 均成立。

满足 (ii) 的最小函数 $\tilde{\varphi}$，即

$$\tilde{\varphi} \leq \varphi \quad \text{almost everywhere for every other } \varphi \text{ satisfying (ii)},$$

是可测的，我们将其记为 $|Df|$。

命题 8.5 ([DLS11，命题 1.2])。设 $f \in W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$。那么，

(a) $f \in AC(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$，此外，对于 $q > 1$，$f \in C^{0,1-\frac{1}{q}}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$；

(b) 存在一个参数化 $f_1, \ldots, f_d \in W^{1,q}(I, \mathbb{C})$，使得 f，即：

$$f = [\![f_1]\!] + \cdots + [\![f_d]\!],$$

使得 $|Df_i| = |f_i'| \leq |Df|$ 几乎处处成立。

实际上，8.5 中命题 [DLS11] 的证明表明，$f \in W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 属于 $AC^q(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$，其含义见第 2.4 节。在命题 8.5的情形下，我们始终默认 f 和 f_i 是连续代表。

根据 [DLS11，定义 1。9], 我们也可以定义微分 Df。

定义 8.6（微分）。设 $f = \sum_i [\![f_i]\!] : I \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 且 $x_0 \in I$。如果存在满足以下条件的 d 个复数 L_i，则称 f 在 x_0 处可微：

(i) $\mathbf{d}_2(f(x), T_{x_0} f(x)) = o(|x - x_0|)$, where

$$T_{x_0} f(x) := \sum_i [\![f_i(x_0) + L_i \cdot (x - x_0)]\!];$$

(ii) $L_i = L_j$ if $f_i(x_0) = f_j(x_0)$.

称 d 值映射 $T_{x_0} f$ 为 f 在 x_0 处的一阶近似。我们用 $Df_i(x_0)$ 表示 L_i，点 $Df(x_0) := \sum_i [\![Df_i(x_0)]\!] \in \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 称为 f 在 x_0 处的微分。

根据定义8.6(ii)，该记号是一致的（参见 [DLS11，注记 1。11]）：若g_1，.....，g_d是 f的另一个参数化，f在 x_0处可微，且 $\sigma \in \mathrm{S}_d$满足 $g_i(x_0) = f_{\sigma(i)}(x_0)$ 对所有 $1 \leq i \leq d$都成立，那么 $Dg_i(x_0) = Df_{\sigma(i)}(x_0)$。

根据命题 8.5，每个 $f \in W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 几乎处处可微；如果 f_1，...，$f_d \in W^{1,q}(I, \mathbb{C})$ 是 f的参数化，那么 $Df = \sum_i [\![f_i']\!]$ 几乎处处成立；参见 [PR24b，第 3 节。4]。

8.6. **在** $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 上的距离概念。以下定义取自[PR24b，定义 3。6]。

定义 8.7（距离 $\mathbf{d}^{1,q}_E$）。设 $f, g \in W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$，并设

$$f = [\![f_1]\!] + \cdots + [\![f_d]\!], \quad g = [\![g_1]\!] + \cdots + [\![g_d]\!]$$

是 , g的参数化，其中 $f_i, g_i \in W^{1,q}(I, \mathbb{C})$ 如命题 8.5 中所述。令

$$\mathbf{s}_0(f, g)(x) := \mathbf{d}_2(f(x), g(x)).$$

固定 S_d 中元素的任意一种排列。对于 $x \in I$，令

$$\tau(x) := \min\Big\{\tau \in \mathrm{S}_d : \Big(\sum_i |f_i(x) - g_{\tau(i)}(x)|^2\Big)^{1/2} = \mathbf{d}_2(f(x), g(x))\Big\}.$$

对于 $x \in I$，若 $Df(x) = \sum_i [\![Df_i(x)]\!]$ 和 $Dg(x) = \sum_i [\![Dg_i(x)]\!]$ 按照定义 8.6 的意义存在，令

$$\mathbf{s}_1(f, g)(x) := \max\Big(\sum_i |Df_i(x) - Dg_{\tau(x)(i)}(x)|^2\Big)^{1/2}, \tag{8.4}$$

其中，最大值取遍 S_d 的所有排列。根据上述注记，$\mathbf{s}_1(f, g)(x)$ 对几乎所有 $x \in I$ 都有定义，且与 f 和 g 的参数化 $f_1, \ldots, f_d$ 及 $g_1, \ldots, g_d$ 的选取无关。

对于每个可测子集 $E \subseteq I$，我们定义

$$\mathbf{d}^{1,q}_E(f, g) := \|\mathbf{s}_0(f, g)\|_{L^\infty(E)} + \|\mathbf{s}_1(f, g)\|_{L^q(E)}$$

这是合理的，因为函数 $\mathbf{s}_i(f, g) : I \to \mathbb{R}$，当 $i = 0$ 时，1 都是博雷尔可测的，见 [PR24b，引理 3。7]。

引理 8.8 ([PR24b，引理 3。8])。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个有界开区间，$E \subseteq I$ 为一个可测集。设 $f, g \in W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$。则：

(1) $\mathbf{d}^{1,q}_E(f, f) = 0$。(2) $\mathbf{d}^{1,q}_E(f, g) = 0$ 蕴含 $f = g$ 在 E上。(3) $\mathbf{d}^{1,q}_E(f, g) = \mathbf{d}^{1,q}_E(g, f)$。

特别地，$\mathbf{d}^{1,q}_I$ 是 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 上的一个半度量。

8.7. **在** $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ **中的收敛**。在$W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$中有一种弱收敛 的概念，见 [DLS11，定义 2.9], 但它并不适用于我们的目的。我们基于半度量$\mathbf{d}^{1,q}_I$ 引入一种更强的收敛概念。

定义 8.9（强收敛）。设 f_n、$f \in W^{1,q}(I、\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$。如果 f_n在 f中 $W^{1,q}(I、\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 收敛到 f，$W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 当 $n \to \infty$ 时，记作 $f_n \to f$，如果

$$\mathbf{d}^{1,q}_I(f, f_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

强收敛于 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 等价于关于由度量 $\rho^{1,q}_\Delta$ （见（8.1））所诱导的拓扑的收敛，其中 Almgren 嵌入 Δ:

定理 8.10 （[PR24b，定理 3.11]）。设 $\Delta: \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$ 是一个 *Almgren* 嵌入。则 $f_n \to f$ 在 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 当且仅当 $n \to \infty$

$$\rho^{1,q}_{\Delta}(f, f_n) \to 0 \quad as\ n \to \infty.$$

特别地，由度量 $\rho^{1,q}_{\Delta}$ 在 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 上诱导的拓扑与 Almgren 嵌入 Δ 的选择无关。我们将在下文看到，这在多个变量的情形下也成立。

8.8. **由 $\rho^{1,q}_{\Delta}$ 在 $W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 上诱导的拓扑与 Δ 无关**。下述定理是 [PR24b 中定理 10 的改进版本。2]。

定理 8.11. 设 $\Delta^i: \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^{N_i}$ 是两个 *Almgren* 嵌入，其中 $i = 1,2$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且有界的，且 $1 \le q < \infty$。设 $f, f_n \in W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$，其中 $n \ge 1$。那么，

$$\|\Delta^1 \circ f - \Delta^1 \circ f_n\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^{N_1})} \to 0$$

当且仅当

$$\|\Delta^2 \circ f - \Delta^2 \circ f_n\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^{N_2})} \to 0$$

当 $n \to \infty$ 时。

证明。映射

$$\Delta^2 \circ (\Delta^1)|^{-1}_{\Delta^1(\mathcal{A}_d(\mathbb{C}))} : \Delta^1(\mathcal{A}_d(\mathbb{C})) \to \mathbb{R}^{N_2}$$

是利普希茨的，并且可 Γ 延拓为定义在整个 $\mathbb{R}^{N_1}$ 上的利普希茨映射。因此（见 [ADM90]），与 Γ 叠加定义了一个从 $W^{1,q}(U, \mathbb{R}^{N_1})$ 到 $W^{1,q}(U, \mathbb{R}^{N_2})$ 的有界映射，其中，令 $C := \mathrm{Lip}(\Gamma)$，对于 $F \in W^{1,q}(U, \mathbb{R}^{N_1})$，

$$\|\Gamma \circ F\|_2 \le C \|F\|_2,$$

因为 $\Gamma(0) = 0$，并且

$$\|\nabla(\Gamma \circ F)\|_2 \le C \|\nabla F\|_2 \tag{8.5}$$

在 U 中几乎处处成立。

令 $F^i := \Delta^i \circ f$ 且 $F^i_n := \Delta^i \circ f_n$，对于 $i = 1, 2$。假设

$$\|F^1 - F^1_n\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^{N_1})} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{8.6}$$

那么 $\{\|F^1\|_2^q + F^1_n\|_2^q : \ n \ge 1\}$ 和 $\{\|\partial_j F^1\|_2^q + \|\partial_j F^1_n\|_2^q : \ n \ge 1\}$，对于 $1 \le j \le m$，是 (U) 的一致可积子集。由于 $F^2 = \Gamma \circ F^1$ 且 $F^2_n = \Gamma \circ F^1_n$，我们可以仿照引理5.9 的证明（使用（8.5））得出，集合$\{\|F^2 - F^2_n\|_2^q : \ n \ge 1\}$ 和 $\{\|\partial_j F^2 - \partial_j F^2_n\|_2^q : \ n \ge 1\}$，对于 $1 \le j \le m$，均一致可积。

设 $U = I_1 \times \cdots \times I_m$ 是一个各边平行于坐标轴的开有界长方体。设 $j = 1$。对于 $x' \in U' = I_2 \times \cdots \times I_m$ 和 $i = 1, 2$，考虑

$$A^i_n(x') = \int_{I_1} \left\|\partial_1 F^i(x_1, x') - \partial_1 F^i_n(x_1, x')\right\|_2^q dx_1,$$

$$B^i_n(x') = \int_{I_1} \left\|F^i(x_1, x') - F^i_n(x_1, x')\right\|_2^q dx_1.$$

根据（8.6）和托内利定理，

$$\int_{U'} A_n^1(x')\,dx' \to 0 \quad \text{and} \quad \int_{U'} B_n^1(x')\,dx' \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此存在一个子列（n_k），使得 $A_{n_k}^1(x') \to 0$且 $B_{n_k}^1(x') \to 0$对几乎处处的 $x' \in U'$ 均成立 $k \to \infty$。对于每个这样的 x'，定理 8.10 推出$A_{n_k}^2(x') \to 0$ 且 $B_{n_k}^2(x') \to 0$ 成立 $k \to \infty$。

托内利定理以及集合 $\{\|F^2 - F_n^2\|_2^q : \ n \geq 1\}$和$\{\|\partial_j F^2 - \partial_j F_n^2\|_2^q : \ n \geq 1\}$对于 $1 \leq j \leq m$，结合 de la Vall´ee Poussin 判据 2.1可知 $\{A_n^2 : \ n \geq 1\}$ 和 $\{B_n^2 : n \geq 1\}$ 是一致可积的。（参见定理 6.1 的证明。）

那么维塔利收敛定理2.2 和托内利定理给出

$$\|F^2 - F_{n_k}^2\|_{L^q(U,\mathbb{R}^{N_2})} \to 0 \quad \text{and} \quad \|\partial_1 F^2 - \partial_1 F_{n_k}^2\|_{L^q(U,\mathbb{R}^{N_2})} \to 0$$

由于 $2 \leq j \leq m$ 的偏导数 ∂_j（对于 $2 \leq j \leq m$）可以用同样的方法处理，我们已经证明存在一个子列（n_k），使得

$$\|F^2 - F_{n_k}^2\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^{N_2})} \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

这意味着

$$\|F^2 - F_n^2\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^{N_2})} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

在 $U = I_1 \times \cdots \times I_m$ 的情况下。

是 U 的一个一般有界开子集 $\mathbb{R}^m$ 由引理2.3（应用于 $f_n := \|F^2 - F_n^2\|_2^q$ 以及 $f_n := \|\partial_j F^2 - \partial_j F_n^2\|_2^q$）可得，因为 U是边平行于坐标轴的有界开盒的可数并。□

9. The characteristic map for normal matrices

现在我们准备介绍正规矩阵的特征映射。

命题 9.1。设 $\Delta : \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$ 是一个 *Almgren* 嵌入。设 $1 \leq q \leq \infty$。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且有界的。则映射

$$\mathcal{E}_u : W^{1,q}(U, \mathrm{Norm}(d)) \to W^{1,q}(U, \mathcal{A}_d(\mathbb{C})), \quad A \mapsto \Lambda \circ A,$$

定义良好且有界，并满足

$$\|\Delta(\mathcal{E}_u(A)(x))\|_2 \leq C\,\|A(x)\|_2 \quad \textit{and} \quad \|\nabla(\Delta(\mathcal{E}_u(A)(x)))\|_2 \leq C\,\|\nabla A(x)\|_2$$

对几乎处处的 $x \in U$，其中 C 是 Δ 的利普希茨常数。

证明。映射 $\Delta \circ \Lambda : \mathrm{Norm}(d) \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$ 是利普希茨映射，其利普希茨常数为 $C = \mathrm{Lip}(\Delta)$，由命题 3.3可知。根据 Kirszbraun 定理，它存在一个保持利普希茨常数 $L : M_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$ 的 Lipschitz 延拓 C。

众所周知（参见 [ADM90]），与 L 进行叠加定义了一个从 $W^{1,q}(U, M_d(\mathbb{C}))$ 到 $W^{1,q}(U, \mathbb{R}^N)$ 的有界映射，其中

$$\|L \circ A\|_2 \leq C\,\|A\|_2,$$

因为 $L(0) = \Delta(\Lambda(0)) = 0$，并且

$$\|\nabla(L \circ A)\|_2 \leq C\,\|\nabla A\|_2$$

在 U 中几乎处处。这就证明了所述结论。 □

我们回顾一下 AC-曲线在 $\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$中的度量速度与任意参数化的导数之间的重要关系。

引理 9.2 ([PR24b，引理 11。1])。设 $\lambda\colon I \to \mathbb{C}^d$ 是一条绝对连续曲线，且 $\gamma\colon I \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 由下式定义： $\gamma(x) = [\lambda(x)]$，对 $x \in I$成立。于是， γ 的度量速度为

$$|\dot\gamma|(x) = \|\lambda'(x)\|_2 \quad \textit{for almost every } x \in I.$$

在区间 I上，我们可以用 $\mathcal{E}_u\colon W^{1,q}(I, \text{范数}(d)) \to W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$ 来表示其有界性，其中涉及$\mathbf{s}_0$和 $\mathbf{s}_1$,，它们在定义 8.7 中引入。

命题 9.3。设 $1 \le q < \infty$ 和 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。那么，对于$A \in W^{1,q}(I,$ 范数$(d))$，

$$\|\mathbf{s}_0(\mathcal{E}_u(A), [0])\|_{L^\infty(I)} \le |I|^{-1/q}\,\|A\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))} + |I|^{1-1/q}\,\|A'\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))}, \tag{9.1}$$

$$\|\mathbf{s}_1(\mathcal{E}_u(A), [0])\|_{L^q(I)} \le \|A'\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))}. \tag{9.2}$$

证明。设 $A \in W^{1,q}(I,$ 范数$(d))$。设 $\lambda \in W^{1,q}(I,\ \mathbb{C}^d)$ 是 $\Lambda := \mathcal{E}_u(A)$ 的一个参数化（参见命题 8.5）。由（5.1），对所有 $x \in I$，

$$\|\lambda(x)\|_2 = \|A(x)\|_2 \le |I|^{-1/q}\,\|A\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))} + |I|^{1-1/q}\,\|A'\|_{L^q(I,M_d(\mathbb{C}))},$$

这意味着（9.1）。由引理 9.2 和（3.3），对于几乎所有 $x \in I$，

$$\|\lambda'(x)\|_2 = |\dot\Lambda|(x) \le \|A'(x)\|_2,$$

从而得到（9.2）。 □

10. Eigenvalue stability for normal matrices: one-parameter case

鉴于定理 8.10，下面的定理是定理1.8 在$m = 1$上的一个版本。回顾在定义 $\mathbf{d}^{1,q}_I$ 上引入的半度量 $W^{1,q}(I,\ \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$。8.7。

定理 10.1。设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。设$A_n \to A$属于 $W^{1,q}(I,$ 范数$(d))$当 $n \to \infty$。那么

$$\mathbf{d}^{1,q}_I(\mathcal{E}_u(A), \mathcal{E}_u(A_n)) \to 0 \quad \textit{as } n \to \infty.$$

定理10.1 和定理 8.10 推出以下推论。

推论 10.2。设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。设$\Delta\colon \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$ 为 *Almgren* 嵌入。设 $A_n \to A$属于 $W^{1,q}(I,$ 范数$(d))$当$n \to \infty$时。那么

$$\|\Delta \circ \mathcal{E}_u(A) - \Delta \circ \mathcal{E}_u(A_n)\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \textit{as } n \to \infty.$$

定理 10.1 的证明由第10.1 节和第 10.2节组成。

10.1. 初步观察与约化。 设 $1 \le q < \infty$。令 $I \subseteq \mathbb{R}$为一个有界开区间，并假设当 $n \to \infty$时， $A_n \to A$属于 $W^{1,q}(I, \text{范数}(d))$。

根据命题 9.1， $\Lambda := \mathcal{E}_u(A)$ 和 $\Lambda_n := \mathcal{E}_u(A_n)$ 属于 $W^{1,q}(I, \mathcal{A}_d(\mathbb{C}))$。令 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in W^{1,q}(I, \mathbb{C}^d)$ 和 $\lambda_n = (\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,d}) \in W^{1,q}(I, \mathbb{C}^d)$ 分别为 Λ 和 Λ_n 的参数化；见命题 8.5。那么，对于 $1 \le i \le d$, $n \ge 1$ 以及几乎处处的 $x \in I$,

$$D\lambda_i(x) = \lambda_i'(x) \quad \text{and} \quad D\lambda_{n,i}(x) = \lambda_{n,i}'(x);$$

见定义 8.6。

根据命题 3.3 和引理 5.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2(\Lambda(x), \Lambda_n(x)) &\le \|A(x) - A_n(x)\|_2 \\ &\le |I|^{-1/q} \|A - A_n\|_{L^q(I, M_d(\mathbb{C}))} + |I|^{1-1/q} \|A' - A_n'\|_{L^q(I, M_d(\mathbb{C}))} \end{aligned}$$

从而

$$\|\mathbf{s}_0(\Lambda, \Lambda_n)\|_{L^\infty(I)} = \|\mathbf{d}_2(\Lambda, \Lambda_n)\|_{L^\infty(I)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{10.1}$$

因此，为了完成定理 10.1的证明，只需证明

$$\widehat{\mathbf{d}}_I^{1,q}(\Lambda, \Lambda_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \tag{10.2}$$

其中，对每个可测集 $E \subseteq I$，定义

$$\widehat{\mathbf{d}}_E^{1,q}(\Lambda, \Lambda_n) := \|\mathbf{s}_1(\Lambda, \Lambda_n)\|_{L^q(E)};$$

见（8.4）中对$\mathbf{s}_1$的定义。

对于 $A \in W^{1,q}(I, \text{范数}(d))$，我们关联 $\tilde{A} := A - \frac{1}{d}\text{Tr}(A)\mathbb{I}_d \in W^{1,q}(I, \text{范数}_T(d))$。

引理 10.3。 设 $1 \le q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为有界开区间。设 $A_n \to A$属于 $W^{1,q}(I, \text{范数}(d))$，且 $n \to \infty$。则：

(1) $\tilde{A}_n \to \tilde{A}$ *in* $W^{1,q}(I, \text{Norm}_T(d))$ *as* $n \to \infty$.

设 Λ、Λ_n、$\tilde{\Lambda}$、$\tilde{\Lambda}_n$： $I \to \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 分别为 A、A_n、$\tilde{A}$、$\tilde{A}_n$ 的无序特征值曲线。则：

(2) $\widehat{\mathbf{d}}_I^{1,q}(\Lambda, \Lambda_n) \to 0$ *if and only if* $\widehat{\mathbf{d}}_I^{1,q}(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}_n) \to 0$ *as* $n \to \infty$.

证明。 (1) 这是显然的，因为 $A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(I, \text{范数}(d))$ 意味着 $\text{Tr}(A_n) \to \text{Tr}(A)$ 在 $W^{1,q}(I, \mathbb{C})$ 中 $n \to \infty$。

(2) 根据（10.1）和（1）， $\|\mathbf{d}_2(\Lambda, \Lambda_n)\|_{L^\infty(I)} \to 0$ 以及 $\|\mathbf{d}_2(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}_n)\|_{L^\infty(I)} \to 0$ 均$n \to \infty$。假设 $\widehat{\mathbf{d}}_I^{1,q}(\Lambda, \Lambda_n) \to 0$ 为 $n \to \infty$。根据定理 8.10，我们有

$$\|\Delta \circ \Lambda - \Delta \circ \Lambda_n\|_{W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

对每个 Almgren 嵌入 $\Delta : \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^N$。令 $H : \mathcal{A}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^d$ 为一个Almgren映射，其关联的实线性形式 η （见定义 8.2）为

$$H \circ \Lambda - H \circ \tilde{\Lambda} = \tfrac{1}{d}\eta(\text{Tr}(A))(1, 1, \dots, 1),$$
$$H \circ \Lambda_n - H \circ \tilde{\Lambda}_n = \tfrac{1}{d}\eta(\text{Tr}(A_n))(1, 1, \dots, 1).$$

因此 $\|H \circ \Lambda - H \circ \Lambda_n\|_{W^{1,q}(I, \mathbb{R}^d)} \to 0$ 并且由此，根据 (8.3),

$$\|\Delta \circ \tilde{\Lambda} - \Delta \circ \tilde{\Lambda}_n\|_{W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

这意味着 $\mathbf{d}^{1,\,q}_{I}(\tilde{\Lambda},\ \tilde{\Lambda}_n) \to 0$ 因此 $\widehat{\mathbf{d}}^{1,\,q}_{I}(\tilde{\Lambda},\ \tilde{\Lambda}_n) \to 0$，同样由定理 8.10。反方向可由相同的论证得出。□

根据引理 10.3，我们可以假设所有矩阵 A、A_n 都是无迹的。

10.2. **证明** (10.2)**.** 我们将对 d进行归纳。若 $d=1$ 则

$$\widehat{\mathbf{d}}^{1,q}_{I}(\Lambda,\Lambda_n) = \|A' - A'_n\|_{L^q(I,M_1(\mathbb{C}))} \to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

因此假设 $d \geq 2$。

在 A 的零点集 Z_A 上，有如下引理。

引理 10.4. 设 $1 \leq q < \infty$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界开区间。假设当 $n\to\infty$时，$A_n \to A$ 属于 $W^{1,q}(I,$ 范数$(d))$。设 $\Lambda := \mathcal{E}_u(A)$ 且 $\Lambda_n := \mathcal{E}_u(A_n)$。那么

$$\widehat{\mathbf{d}}^{1,q}_{Z_A}(\Lambda,\Lambda_n) \to 0 \quad \textit{as } n\to\infty.$$

证明。设 λ、$\lambda_n \in W^{1,\,q}(I,\mathbb{C}^d)$ 分别是 Λ、Λ_n 的参数化；见命题 8.5。设 E 为 $x \in \operatorname{acc}(Z_A)$ 的集合，其中对所有 $n\geq 1$，导数 $A'(x)$、$\lambda'(x)$ 以及 $A'_n(x)$、$\lambda'_n(x)$ 都存在。对每个 $x\in E$，$A'(x)=0$、$\lambda'(x)=0$，并且由引理 9.2 和 (3.3),

$$\big\|\lambda'_n(x)\big\|_2 = |\dot{\Lambda}_n|(x) \leq \|A'_n(x)\|_2.$$

由于 E 在 Z_A中具有全测度，因此我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{d}}^{1,q}_{Z_A}([\lambda],[\lambda_n]) &= \|\mathbf{s}_1([\lambda],[\lambda_n])\|_{L^q(Z_A)} = \big\|\|\lambda'_n\|_2\big\|_{L^q(Z_A)} \\ &\leq \big\|\|A'_n\|_2\big\|_{L^q(Z_A)} = \|A' - A'_n\|_{L^q(Z_A,M_d(\mathbb{C}))}\end{aligned}$$

这就推出了所述结论。□

令我们固定一个一致酉块对角化（$\{U_i\colon\ \mathcal{V}_i \to U_d(\mathbb{C})\}_{i=1}^{s}$，$r$，$\chi$）用于范数$^0_T(d)$；参见定义 4.5。

引理 10.5。令 $1\leq q<\infty$。设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为一个有界开区间。假设 $A_n \to A$ 在 $W^{1,\,q}(I,$ 范数$_T(d))$ 中关于 $n\to\infty$。令 $x_0 \in I\setminus Z_A$。则存在一个开区间 J，使得 $x_0 \in J \subseteq I\setminus Z_A$，$n_0\geq 1$，并且 $i\in\{1,\dots,s\}$ 满足

(1) 对于所有 $n\geq n_0$，曲线 $\underline{A} := A/\|A\|_2$ 和 $\underline{A_n} := A_n/\|A_n\|_2$ 属于$W^{1,\,q}(J,$ 范数 $^0_T(d))$ 并满足 $A(J)\ A_n(J) \subseteq \mathcal{V}_i$；

(2) 在 J 上，且对于所有 $n\geq n_0$，我们有

$$U_i^*(\underline{A})A\,U_i(\underline{A}) = \begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix},\quad U_i^*(\underline{A_n})A_n\,U_i(\underline{A_n}) = \begin{pmatrix} B_n & 0\\ 0 & C_n\end{pmatrix}, \tag{10.3}$$

其中 $B,B_n \in W^{1,q}(J,$范数$(d_1))$ 以及 $C,C_n \in W^{1,q}(J,$范数$(d_2))$ 满足 $d_1+d_2=d$;

(3) 对于所有 $x\in J$ 和 $n\geq n_0$，我们有

$$\big|\|A_n(x)\|_2\,\mu(x) - \|A(x)\|_2\,\nu_n(x)\big| > \chi\,\|A(x)\|_2\|A_n(x)\|_2 \tag{10.4}$$

对于所有特征值 $\mu(x)$ 的 $B(x)$，以及所有特征值 $\nu_n(x)$ 的 $C_n(x)$，其中B 和 C_n 由(10.3)定义;

(4) *we have*

$$\|B - B_n\|_{W^{1,q}(J,M_{d_1}(\mathbb{C}))} \to 0, \quad \|C - C_n\|_{W^{1,q}(J,M_{d_2}(\mathbb{C}))} \to 0$$

as $n \to \infty$.

证明。证明与引理5.8的证明几乎完全相同。（特别是，(5.8)–(5.13)成立，我们将在下文引理10.6 的证明中使用它们。）第（3）项由(4.9)得出。□

酉块对角化（10.3）将使我们能够使用归纳法假设。

考虑 $\Lambda = \mathcal{E}_u(A)$ 和 $\Lambda_n = \mathcal{E}_u(A_n)$ 的参数化 λ、$\lambda_n \in W^{1,q}(I, \mathbb{C}^d)$。在引理 10.5 的情形下，如有必要，通过独立于 x 的重新排序，我们可以假设 $\Lambda^1 = [\lambda_1(x) \dots, \lambda_{d_1}(x)]$ 是 $B(x)$ 的特征值的无序 d_1-元组，而 $\Lambda^2 = [\lambda_{d_1+1}(x) \dots, \lambda_d(x)]$ 是 $C(x)$ 的特征值的无序 d_2-元组，对于 $x \in J$。类似地，我们可以假设 $\Lambda_n^1 = [\lambda_{n,1}(x) \dots, \lambda_{n,d_1}(x)]$ 是 $B_n(x)$ 的特征值的无序 d_1- 元组，而 $\Lambda_n^2 = [\lambda_{n,d_1+1}(x) \dots, \lambda_{n,d}(x)]$ 是 $C_n(x)$ 的特征值的无序 d_2-元组，对于 $x \in J$ 和 $n \geq n_0$。由于重新排序独立于 x， λ 和 λ_n 仍然分别是在 $W^{1,q}(J, \mathbb{C}^d)$ 中对 Λ 和 Λ_n 在 J 上的参数化。

根据引理 10.3、引理 10.5以及归纳假设，

$$\widehat{\mathbf{d}}_J^{1,q}(\Lambda^1, \Lambda_n^1) \to 0 \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{d}}_J^{1,q}(\Lambda^2, \Lambda_n^2) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

其中 $\widehat{\mathbf{d}}_J^{1,q}([\Lambda^j], [\Lambda_n^j])$ 按维数 d_j 解释，其中 $j = 1, 2$。由下述引理可知，

$$\widehat{\mathbf{d}}_J^{1,q}(\Lambda, \Lambda_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{10.5}$$

引理 10.6。 在引理 *10.5*的情形下，适当增大 n_0后，对所有$x \in J$ 和 $n \geq n_0$，以下结论成立。若 $\tau \in \mathrm{S}_d$ 满足

$$\|\lambda(x) - \tau\lambda_n(x)\|_2 = \mathbf{d}_2([\lambda(x)], [\lambda_n(x)]) \tag{10.6}$$

则 τ满足 (10.3)，其含义是 $\tau(\{1, \dots, d_1\}) = \{1, \dots, d_1\}$，且（因此） $\tau(\{d_1 + 1, \dots, d\}) = \{d_1 + 1, \dots, d\}$。

证明。 由（10.4），对所有 $x \in J$， $n \geq n_0$， $1 \leq i \leq d_1$，以及 $d_1 + 1 \leq j \leq d$，

$$\big|\|A_n(x)\|_2 \lambda_i(x) - \|A(x)\|_2 \lambda_{n,j}(x)\big| > \chi \|A(x)\|_2 \|A_n(x)\|_2. \tag{10.7}$$

由（5.10）、（5.12）以及（5.13），

$$\|A(x)\|_2 \|A_n(x)\|_2 \geq \frac{1}{8} \|A(x_0)\|_2^2$$

因此，由（10.7），

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{8} \|A(x_0)\|_2^2 &< \big|\|A_n(x)\|_2 \lambda_i(x) - \|A(x)\|_2 \lambda_{n,j}(x)\big| \\ &\leq \big|\|A_n(x)\|_2 - \|A(x)\|_2\big||\lambda_i(x)| + |\lambda_i(x) - \lambda_{n,j}(x)|\|A(x)\|_2. \end{aligned}$$

由（5.12），

$$|\lambda_i(x)| \leq \|A(x)\|_2 \leq \frac{3}{2} \|A(x_0)\|_2.$$

由于 $\|A-A_n\|_{L^\infty(I,\ M_d(\mathbb{C}))}\to 0$ 作为 $n\to\infty$，根据推论 5.3，

$$\left|\|A_n(x)\|_2-\|A(x)\|_2\right|\le\frac{\chi}{24}\|A(x_0)\|_2$$

对所有 $x\in J$，若 n 足够大。因此

$$\frac{\chi}{8}\|A(x_0)\|_2^2<\frac{\chi}{16}\|A(x_0)\|_2^2+\frac{3}{2}\|A(x_0)\|_2|\lambda_i(x)-\lambda_{n,j}(x)|$$

这意味着

$$\frac{\chi}{24}\|A(x_0)\|_2<|\lambda_i(x)-\lambda_{n,j}(x)|, \tag{10.8}$$

对所有 $x\in J$，以及所有充分大的 n，例如对所有满足 $n_1\ge n_0$ 的 $n\ge n_1$。

由（10.1），存在 $n_2\ge n_1$ 使得

$$\mathbf{d}_2([\lambda(x)],[\lambda_n(x)])<\frac{\chi}{24}\|A(x_0)\|_2, \tag{10.9}$$

对所有 $x\in J$ 和 $n\ge n_2$。

假设 $\tau\in\mathsf{S}_d$ 满足 $\tau(\{1,\dots,d_1\})\ne\{1,\dots,d_1\}$。那么存在 i，j，使得 $1\le i\le d_1<j\le d$ 且 $\tau(i)=j$。

固定 $x\in J$ 和 $n\ge n_2$ 并假设 τ 满足（10.6）。由（10.8）和（10.9），

$$\begin{aligned}\frac{\chi}{24}\|A(x_0)\|_2<|\lambda_i(x)-\lambda_{n,j}(x)|&\le\|\lambda(x)-\tau\lambda_n(x)\|_2\\&=\mathbf{d}_2([\lambda(x)],[\lambda_n(x)])<\frac{\chi}{24}\|A(x_0)\|_2,\end{aligned}$$

矛盾。引理得证。 □

由引理 10.4 和（10.5），区间 I 可被可数多个可测集覆盖 F_i 使得

$$\widehat{\mathbf{d}}^{1,q}_{F_i}(\Lambda,\Lambda_n)\to 0\quad\text{as } n\to\infty.$$

由引理 2.3（应用于 $f_n=\mathbf{s}_1(\Lambda,\ \Lambda_n)^q$），我们得到（10.2）。事实上，$\{\mathbf{s}_1(\Lambda,\ \Lambda_n)^q:\ n\ge 1\}\subseteq L^1(I)$ 一致可积，这一点可按照引理 5.9 证明中的论证，并注意到

$$\mathbf{s}_1(\Lambda,\Lambda_n)\le\|\lambda'\|_2+\|\lambda_n'\|_2\le\|A'\|_2+\|A_n'\|_2,$$

在 I中几乎处处成立，由引理 9.2 和（3.3）。

这就完成了归纳法，从而证明了定理 10.1。

10.3. **定理 10.1 的变体。** 定理 10.7 和定理 10.8 分别是定理 1.13 和定理 1.14 针对 $m=1$ 的版本。

定理 10.7. 设 $1\le q<\infty$。设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个有界开区间。设 $A_n\to A$ 属于 $W^{1,q}(I,\mathrm{Norm}(d))$，且满足 $n\to\infty$。假设 $\lambda,\lambda_n\in W^{1,q}(I,\mathbb{C}^d)$ 分别是 A, A_n 的特征值参数化，并且对于某个 $x_0\in I$，有 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x_0)=\lambda(x_0)$。那么，$\lambda_n\to\lambda$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$ 当且仅当 $\lambda_n'\to\lambda'$ 属于 $L^q(I,\mathbb{C}^d)$，且满足 $n\to\infty$。

证明。假设 $\lambda_n \to \lambda$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$，且满足 $n\to\infty$。则可由定理 10.1 的证明中的论证稍作修改，得到 $\lambda_n' \to \lambda'$ 属于 $L^q(I,\mathbb{C}^d)$，且满足 $n\to\infty$；具体证明可对 d 使用归纳法。引理 10.3 和引理 10.4 很容易作相应调整，而引理 10.5 则可直接使用。在引理 10.5 的情形下，存在 $\mu,\mu_n \in W^{1,q}(J,\mathbb{C}^{d_1})$ 和 $\nu,\nu_n \in W^{1,q}(J,\mathbb{C}^{d_2})$，使得

$$\lambda = (\mu,\nu) \quad \text{and} \quad \lambda_n = (\mu_n,\nu_n). \tag{10.10}$$

由于 $\lambda_n \to \lambda$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$，因此 $\mu_n \to \mu$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^{d_1})$，且 $\nu_n \to \nu$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^{d_2})$，如 $n\to\infty$ 所示。归纳假设表明，存在 $\{F_i\}$ 对 I 的可数可测集覆盖，使得对所有 F_i，

$$\|\lambda' - \lambda_n'\|_{L^q(F_i,\mathbb{C}^d)} \to 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

这意味着 $\lambda_n' \to \lambda'$ 属于 $L^q(I,\mathbb{C}^d)$，这要归功于引理 2.3。

反过来，假设 $\lambda_n' \to \lambda'$ 属于 $L^q(I,\mathbb{C}^d)$，如 $n\to\infty$ 所示。那么，对 $x\in I$，

$$\begin{aligned}\|\lambda(x)-\lambda_n(x)\|_2 &= \left\|\lambda(x_0)-\lambda_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}\lambda'(t)-\lambda_n'(t)\,dt\right\|_2\\ &\le \|\lambda(x_0)-\lambda_n(x_0)\|_2 + \|\lambda'-\lambda_n'\|_{L^1(I,\mathbb{C}^d)}\\ &\le \|\lambda(x_0)-\lambda_n(x_0)\|_2 + |I|^{1-1/q}\|\lambda'-\lambda_n'\|_{L^q(I,\mathbb{C}^d)}\end{aligned}$$

这意味着 $\lambda_n \to \lambda$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$，如 $n\to\infty$ 所示。 □

定理 10.8。设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个有界开区间。设 $A_n \to A$ 属于 $C^{0,1}(I,\text{范数}(d))$，如 $n\to\infty$ 所示。假设 $\lambda,\lambda_n\colon I\to\mathbb{C}^d$ 分别是 A, A_n 的特征值的连续（因而是利普希茨）参数化，并且极限 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x_0)=\lambda(x_0)$，其中 $x_0\in I$。那么，$\lambda_n\to\lambda$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$ 当且仅当 $\lambda_n'\to\lambda'$ 对 I 中的几乎处处成立，如 $n\to\infty$ 所示。

证明。每个连续的参数化 λ，λ_n 分别是 A，A_n 的特征值，实际上都是利普希茨连续的，这由 [Rai13，命题 6。3], (3.3) 以及引理 9.2 可知。

若 $\lambda_n'\to\lambda'$ 在 I 中几乎处处成立，则 $\lambda_n'\to\lambda'$ 在 $L^q(I,\mathbb{C}^d)$ 中当 $n\to\infty$ 时，由控制收敛定理可得。因此 $\lambda_n\to\lambda$ 在 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$ 中当 $n\to\infty$ 时，由定理 10.7 可得。

假设当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\lambda$ 在 $L^\infty(I,\mathbb{C}^d)$ 中收敛。通过调整定理 10.1 证明中的论证可知，当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n'\to\lambda'$ 几乎处处成立。引理 10.3 和引理 10.5 很容易作相应调整。我们用引理 10.9 替代引理 10.4。这里，对于 $\mu,\mu_n\in C^0,1(J,\mathbb{C}^{d_1})$ 和 $\nu,\nu_n\in C^0,1(J,\mathbb{C}^{d_2})$，有 (10.10)。因此，当 $n\to\infty$ 时，$\mu_n\to\mu$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^{d_1})$，且 $\nu_n\to\nu$ 属于 $L^\infty(I,\mathbb{C}^{d_2})$。由归纳假设和引理 10.9 可得，当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n'\to\lambda'$ 在 I 中几乎处处成立。□

引理 10.9。设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为一个有界开区间，并假设当 $n\to\infty$ 时，$A_n\to A$ 属于 $C^0,1(I,\text{范数}(d))$。设 $\lambda_n\in C^0,1(I,\mathbb{C}^d)$ 是 $\Lambda_n=\mathcal{E}_u(A_n)$ 的参数化。那么，对于几乎所有的 $x\in Z_A$，

$$\lambda_n'(x)\to 0 \quad as\ n\to\infty. \tag{10.11}$$

证明。 这只是对引理 5.12的证明所作的简单修改。根据命题3.3、引理 2.5和引理 2.6,

$$\sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\mathbf{d}_2(\Lambda_n(x),\Lambda_n(y))}{|x-y|} \le \sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}} \frac{\|A_n(x)-A_n(y)\|_2}{|x-y|} \to 0$$

作为 $n\to\infty$。令 E 为 $x\in \operatorname{acc}(Z_A$，其中导数 $\lambda_n'(x)$ 对所有$n\ge 1$ 都存在。对于每个 $x_0\in E$，存在一个序列 $x_k\to x_0$ 满足 $x_k\in Z_A$ 且$x_k\ne x_0$ 对所有 $k\ge 1$均成立。因此，由引理9.2，对于固定的 n,

$$\|\lambda_n'(x_0)\|_2 = |\dot\Lambda_n|(x_0) = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{d}_2(\lambda_n(x_0),\lambda_n(x_k))}{|x_0-x_k|} \le \sup_{(x,y)\in Z_A^{<2>}}\frac{\mathbf{d}_2(\lambda_n(x),\lambda_n(y))}{|x-y|}.$$

这意味着（10.11），因为 E 在 Z_A中具有全测度。 □

10.4. 推论1.9 和推论1.10的证明。令 $1\le q<\infty$。令 $I\subseteq\mathbb{R}$为一个有界开区间。令 $A_n\to A$属于 $W^{1,q}(I,\ \mathrm{Norm}(d))$，其中 $n\to\infty$。令λ，$\lambda_n\in W^{1,q}(I,\ \mathbb{C}^d)$ 分别为 A、A_n 的特征值参数化。

固定 S 的一个排列$_d$ 并令 $\tau(x)\in \mathrm{S}_d$ 如定义8.7所述。则

$$\big|\|\lambda'\|_2-\|\lambda_n'\|_2\big| = \big|\|\lambda'\|_2-\|\tau\lambda_n'\|_2\big| \le \|\lambda'-\tau\lambda_n'\|_2 \le \mathbf{s}_1([\lambda],[\lambda_n])$$

几乎处处于 I。由定理 10.1，这很容易推出推论 1.10。

由引理 9.2，推论 1.9 可由推论 1.10 和（10.1）推出。

11.

Eigenvalue stability for normal matrices: multiparameter case在本节中，我们证明定理 1.8、推论 1.12、定理 1.13和定理 1.14。

11.1. 定理 1.8的证明。令 $1\le q<\infty$。令 $U\subseteq\mathbb{R}^m$ 为开且有界。令 $\Delta:\ \mathcal{A}_d(\mathbb{C})\to\mathbb{R}^N$ 为一个Almgren 嵌入。令 $A_n\to A$ 属于$_{W^{1,q}}(U,$ 范数$(d))$，其中 $n\to\infty$。设 $\Lambda:=\mathcal{E}_u(A)$ $\Lambda_n:=\mathcal{E}_u(A_n):\ U\to\mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ 且$F:=\Delta\circ\Lambda$，$F_n:=\Delta\circ\Lambda_n:\ U\to\mathbb{R}^N$。我们需要证明

$$\|F-F_n\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^N)}\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

由（3.3），对于 $x\in U$,

$$\|F(x)-F_n(x)\|_2 \le \operatorname{Lip}(\Delta)\,\mathbf{d}_2(\Lambda(x),\Lambda_n(x)) \le \operatorname{Lip}(\Delta)\,\|A(x)-A_n(x)\|_2$$

使得

$$\|F-F_n\|_{L^q(U,\mathbb{R}^N)}\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

尚需证明

$$\|\partial_j F-\partial_j F_n\|_{L^q(U,\mathbb{R}^N)}\to 0 \quad \text{as } n\to\infty, \tag{11.1}$$

对所有 $1\le j\le m$ 都成立。只需证明存在一个具有此性质的子列 (n_k)。

首先假设 $U=I_1\times\cdots\times I_m$是一个边平行于坐标轴的开盒。令 $j=1$。与定理 6.1 的证明中一样，我们可以得出存在一个子列（n_k），使得

$$\int_{I_1}\|A(x_1,x')-A_{n_k}(x_1,x')\|_2^q\,dx_1\to 0$$

and

$$\int_{I_1} \|\partial_1 A(x_1, x') - \partial_1 A_{n_k}(x_1, x')\|_2^q \, dx_1 \to 0$$

对于几乎所有的 $x' \in U' = I_2 \times \cdots \times I_m$，当 $k \to \infty$ 时。根据推论 10.2，

$$G_{1,n_k}(x') := \int_{I_1} \|\partial_1 F(x_1, x') - \partial_1 F_{n_k}(x_1, x')\|_2^q \, dx_1 \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

对几乎所有的 $x' \in U'$。

使用命题9.1 代替命题3.5，可仿照定理的证明6.1看出，集合 $\{G_{1,n_k} : k \geq 1\} \subseteq L^1(U')$一致可积。因此，维塔利收敛定理2.2 和托内利定理推出，当 $j = 1$时，$U = I_1 \times \cdots \times I_m$的情形下，式（11.1）成立。对于 $2 \leq j \leq m$，论证类似。

现在令 U 为 $\mathbb{R}^m$的任意有界开子集。则式（11.1）由引理2.3 (应用于 $f_n := \|\partial_j F - \partial_j F_n\|_2^q$)推出，因为 $\{f_n\}$ 一致可积；这一点可仿照引理5.9的证明，利用命题9.1即可看出。定理1.8的证明至此完成。

11.2. **推论的证明 1.12**。 该推论由定理1.8 和莫雷不等式得出，

$$\|\Delta \circ \mathcal{E}(A) - \Delta \circ \mathcal{E}(A_n)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|\Delta \circ \mathcal{E}(A) - \Delta \circ \mathcal{E}(A_n)\|_{W^{1,q}(U,\mathbb{R}^N)},$$

其中 $\alpha = 1 - m/q$、 $q > m$ 和 $C = C(m, N, q, U)$。

11.3. **定理的证明 1.13**。 我们调整式（11.1）的证明，将 F, F_n 替换为 λ, λ_n。首先假设 $U = I_1 \times \cdots \times I_m$ 且 $j = 1$。由定理 10.7，我们可以得出存在（n_k）的一个子列，且该子列取自（n），使得

$$G_{1,n_k}(x') := \int_{I_1} \|\partial_1 \lambda(x_1, x') - \partial_1 \lambda_{n_k}(x_1, x')\|_2^q \, dx_1 \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

对几乎处处的 $x' \in U'$。容易验证（如前所述），$\{G_{1,n_k} : k \geq 1\}$ 是一致可积的。因此，该断言由维塔利收敛定理2.2 和托内利定理得出。一般 U 的情形则由引理 2.3得出。

11.4.**定理1.14的证明**。 由定理10.8 （逐坐标应用）可轻易得出。

12. An application for compact self-adjoint operators

设 H 是一个希尔伯特空间。有界算子 $A \in L(H)$ 若对每个有界序列 $(v_n) \subseteq H$，其像 (Av_n)都包含一个收敛子列，则称为紧算子。

所有紧算子 $A \in L(H)$构成的集合 $K(H)$ 是 $L(H)$ 的闭线性子空间，因此在赋予算子范数后是一个巴拿赫空间。

根据定义， A 的预解集是所有满足以下条件的 $z \in \mathbb{C}$ 的集合： $A - z$ 可逆，且预解式为 $R(z) := (A - z)^{-1} \in L(H)$。预解集 $P(A)$是 $\mathbb{C}$的一个开子集，其补集是 A 的谱。由于 A 是紧算子， A 的谱是一个趋于零的可数集，而零是其唯一的聚点。谱中的每个非零点都是 A的一个有限重数特征值。参见 [Kat76, III.6.26]。

设 $A \in K(H)$是一个自伴非负紧算子。设

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots$$

表示其按递减顺序排列的特征值。于是，根据 Courant–Fischer–Weyl 极小极大原理（例如参见 [GGK03，第 IV 章，定理 9。1] 或 [RS80，定理 XIII。1]），

$$\lambda_i = \min_{\substack{M \subseteq H \\ \dim M = i-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Ax, x \rangle. \tag{12.1}$$

由此可得 Weyl 定理的如下版本（例如参见 [GGK03，第 IV 章，第 4 节。9]）。

命题 12.1。设 $A, B \in K(H)$ 为自伴非负紧算子。则对所有 $i \geq 1$,

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \leq \|A - B\|_{\mathrm{op}}.$$

证明。设 $x \in H$ 满足 $\|x\| = 1$。则

$$|\langle Ax, x \rangle - \langle Bx, x \rangle| = |\langle (A-B)x, x \rangle| \leq \|A - B\|_{\mathrm{op}}$$

这意味着

$$\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle + \|A - B\|_{\mathrm{op}}$$

and

$$\langle Bx, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle + \|A - B\|_{\mathrm{op}}.$$

应用（12.1），我们得到

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B) + \|A - B\|_{\mathrm{op}} \quad \text{and} \quad \lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + \|A - B\|_{\mathrm{op}}$$

由此得出该结论。 □

设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为有界开集。考虑紧算子的 Lipschitz 族 $A \in C^{0,1}(U, K(H))$，其中对每个 $x \in U$，$A(x)$ 都是自伴的。固定 $x_0 \in U$。设 λ 是 $A(x_0)$ 的一个重数为 d 的特征值。设 Γ 是预解集 $P(A(x_0))$ 中的一条简单闭合 C^1 曲线，它在 $A(x_0)$ 的所有特征值中仅包围 λ。那么存在 x_0 的一个开邻域 V，使得对每个 $x \in V$，Γ 都属于 $P(A(x))$；并且对每个 $x \in V$，$A(x)$ 在 Γ 的内部恰有 d 个特征值（按重数计）；参见 Kat76，IV.2.16、IV.3.15、IV.3.16]。此外，对于任意 $z_0 \in P(A(x_0))$ 以及与之足够接近的 $x \in V$ 和 z，算子 $A(x) - z$ 可逆，其预解式为 $R(A(x) z) = (A(x) - z)^{-1} \in L(H)$。我们由此得出映射

$$(x, z) \mapsto R(A(x), z) = (A(x) - z)^{-1} \in L(H)$$

属于 $C^{0,1}$ 类，在 x 中且关于 z全纯，因为在 $L(H)$上求逆是解析的。因此，

$$\Pi : x \mapsto -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(A(x), z)\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (A(x) - z)^{-1}\, dz \in L(H)$$

定义了一个 Lipschitz 族 Π，其投影到对应于 Γ内部特征值的特征子空间的直和上。我们有 $A(x)$ 与 $\Pi(x)$ 对易，并且 $A(x)$ 在 Γ 内的谱与$A(x)\Pi(x) = \Pi(x)A(x)\Pi(x) \in L(\Pi(x)H)$的谱一致；参见 [Kat76, III.6.17]。

$x \mapsto \Pi(x)$ 的像描述了平凡丛 $U \times H \to U$ 的一个 d 维 Lipschitz 子丛。事实上，选取 v_1、……、$v_d \in H$，使得向量 $\Pi(x_0)v_i$

张成 $\Pi(x_0)H$。在 x_0 附近，这对 x 局部仍然成立。通过 Gram–Schmidt 正交化过程（该过程是实解析的），我们得到丛的一个局部正交 Lipschitz 标架。在此标架下， $\Pi(x)A(x)\Pi(x)$ 是一个由 x 以 Lipschitz 方式参数化的厄米$d \times d$ 矩阵。

为方便读者，我们重述定理1.21：

定理 12.2。设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个有界开集。设 H 是一个希尔伯特空间，且 A、$A_n \in C^{0,1}(U、\ K(H))$ 是关于 $n \geq 1$ 的紧自伴非负算子的利普希茨族。假设对于所有 $x \in U$ 和 $A_n \to A$ 属于 $C^{0,1}(U、\ K(H))$，当 $n \to \infty$ 时， $A(x)$ 是正定的。那么：

(1) 递减排列的特征值 $\lambda_i(A)$ 和 $\lambda_i(A_n)$，对于所有 i 以及足够大的 n，都属于 $C^{0,1}(U)$。(2) 对于所有 $1 \leq j \leq m$ 和几乎所有 $x \in U$，(3) 对于每个 $1 \leq q < \infty$，

$$\lim_{n\to\infty} \partial_j(\lambda_i(A_n))(x) = \partial_j(\lambda_i(A))(x), \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_i(A) - \lambda_i(A_n)\|_{W^{1,q}(U)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

证明。 (1) 由于对于所有 $x \in U$， $A(x)$ 都是正定的，因此对于所有 $x \in U$，所有特征值 $\lambda_i(A(x))$ 都是正的。根据命题 12.1，当 n 足够大时，这对 A_n 也成立。于是，命题 12.1 表明，对于足够大的 n，每个 $\lambda_i(A)$ 和 $\lambda_i(A_n)$ 都是利普希茨的，并且属于 $C^{0,1}(U)$。

(2) 固定 $x_0 \in U$ 和 $i \geq 1$。设 Γ 是 $P(A(x_0))$ 中的一条简单闭合 C^1 曲线，它仅包围 $A(x_0)$ 的所有特征值中属于 $\lambda_i(A(x_0))$ 的特征值。与上文一样，根据 [Kat76, IV.2.16, IV.3.15, IV.3.16], ，可知存在 x_0 和 $n_0 \geq 1$的一个开邻域 V，使得 Γ位于 $P(A(x))$ 和 $P(A_n(x))$ 中（对于 $x \in V$和 $n \geq n_0$），而 $A(x)$ 和 $A_n(x)$（对于 $x \in V$ 和 $n \geq n_0$）在 Γ的内部恰有 d 个特征值（按重数计）。根据命题 12.1，当 n_0 足够大时， $\lambda_i(A_n(x))$ 是这些特征值之一。

定理之前的讨论表明， $A(x)$ 的 d 个特征值以及 $A_n(x)$ 在 Γ 内部的d 个特征值，恰好分别是 $B(x)$ 的 d 个特征值：$=\Pi(x)A(x)\Pi(x)$ 和 $B_n(x)$：$= \Pi_n(x)A_n(x)\Pi_n(x)$；它们分别由一个厄米 $d \times d$ 矩阵的利普希茨族给出。此外， $B_n \to B$属于 C^0,1(V, Herm(d))，因为 $n \to \infty$，必要时稍微缩小 V 即可。因此，定理 1.7 蕴含：对于所有 $1 \leq j \leq m$ 以及几乎所有 $x \in J$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \partial_j(\lambda_i(A_n))(x) = \partial_j(\lambda_i(A))(x).$$

由于 U 可由可数个这样的开子集 V覆盖，因此这对几乎所有 $x \in U$都成立。

（3）根据命题 12.1，对于每个 $i \geq 1$ 和 $n \geq 1$，

$$|\lambda_i(A_n)|_{C^{0,1}(\overline{U})} \leq |A_n|_{C^{0,1}(\overline{U},K(H))} \leq L,$$

对于一个与 n 和 i无关的正常数 L。因此，对于每个 $1 \leq j \leq m$ 以及几乎处处的 $x \in U$，

$$|\partial_j(\lambda_i(A_n))(x)| \leq L.$$

因此，根据 (2)，控制收敛定理表明，对于每个 $1 \le j \le m$ 和任意 $1 \le q < \infty$,

$$\|\partial_j(\lambda_i(A)) - \partial_j(\lambda_i(A_n))\|_{L^q(U)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

根据命题 12.1，我们得到

$$\|\lambda_i(A) - \lambda_i(A_n)\|_{L^\infty(U)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

并且（3）得证。 □

致谢。 我们感谢 Antonio Lerario 提出了关于多项式解映射连续性的问题，这促使我们研究厄米矩阵和正规矩阵的特征映射的连续性。

本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）资助，数字对象标识符为 10.55776/PAT1381823。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何经作者接受的手稿版本采用知识共享署名许可（CC BY）公共版权许可。

References

[AKLM98] D. Alekseevsky、A. Kriegl、M. Losik 和 P. W. Michor, *Choosing roots of polynomials smoothly* **105** 1998 203 233 , 《以色列数学杂志》（），–。[Alm00] F. J. Almgren, Jr., *Almgren's big regularity paper*，世界科技数学专著丛书，第 1 卷，世界科技出版公司，新泽西州里弗埃奇，2000 年。[ADM90] L. Ambrosio 和 G. Dal Maso, *A general chain rule for distributional derivatives*，《美国数学会会刊》108 (1990)，第 3 期，691–702。[AGS08] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures* 2 ¨ 2008 e, , 第版，巴塞尔：Birkhauser, （英文）。[BDM83] R. Bhatia, C. Davis 和 A. McIntosh, *Perturbation of spectral subspaces and solution of linear operator equations* **52 53** 1983 45 67 , 《线性代数及其应用》/（），–。[Bha97] R. Bhatia, *Matrix analysis*，数学研究生教材，第 169 卷，施普林格出版社，纽约，1997 年。[BCR98] J. Bochnak、M. Coste、M.-F. Roy，实代数几何，*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]* 36 ，。施普林格出版社，柏林，1998 年。[Bog07] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I and II*，柏林：施普林格，2007 年（英文）。[Bro79] M. D. Bronshtein, *Smoothness of roots of polynomials depending on parameters*，《西伯利亚数学杂志》20 (1979)，第 3 期，493–501，690；英文译本见《西伯利亚数学杂志》20 (1980)，347–352。[Coh84] P. M. Cohn，重新审视普伊瑟定理， *J. Pure Appl. Algebra* **31** (1984) 1-4；更正： *J. Pure Appl. Algebra*，52，(1988)，197-198。[DLS11] C. De Lellis 和 E. N. Spadaro, *Q-valued functions revisited*，《美国数学会回忆录》211 (2011)，第 991 期，vi+79。[Ego11] D. Th. Egoroff, *Sur les suites de fonctions mesurables.*，《巴黎科学院院报》152 (1911)，244–246（法文）。[GGK03] I. Gohberg、S. Goldberg 和 M. A. Kaashoek, *Basic classes of linear operators*，巴塞尔 Birkh¨auser，2003 年。[HW53] A. J. Hoffman 和 H. W. Wielandt, *The variation of the spectrum of a normal matrix*，《杜克数学杂志》20 (1953)，37–39（英文）。[Huh01] M. Huhtanen, *A stratification of the set of normal matrices*，《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》23 (2001)，第 2 期，349–367。[Kat76] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*，第二版，《数学基础原理》丛书第 132 卷，施普林格出版社，柏林，1976 年。[KM03] A. Kriegl 和 P. W. Michor, *Differentiable perturbation of unbounded operators*，《数学年刊》327 (2003)，第 1 期，191–201。

[KMR11] A. Kriegl、P. W. Michor 和 A. Rainer,
Denjoy–Carleman differentiable perturbation，《积分方程与算子理论》（），第 3 期，407 416–。[KMR12]，
of polynomials and unbounded operators **71** 2011
Many parameter Hölder perturbation of unbounded operators，《数学年刊》353 (2012)，519–522。[L¨ow34] K. L¨owner，*Über monotone Matrixfunktionen*，《数学杂志》38 (1934)，第 1 期，177–216。[MSZ03] J. Mal´y、D. Swanson 和 W. P. Ziemer，*The co-area formula for Sobolev mappings*，《美国数学会汇刊》355 (2003)，第 2 期，477–492（电子版）。[MM72] M. Marcus 和 V. J. Mizel，
Absolute continuity on tracks and mappings of Sobolev
spaces **45** 1972 294 320 ，《理性力学与分析档案》（）[MM79]，
Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is con-
tinuous **33** 1979 2, 217 229 ，《泛函分析杂志》（），第–期。[Mus91] R. Musina，
On the continuity of the Nemitsky operator induced by a Lipschitz con-
tinuous map **111** 1991 4, 1029 1041 ，《美国数学会会刊》（），第–期。[PR15] A. Parusi´nski 和 A. Rainer，*A new proof of Bronshtein's theorem*，《双曲微分方程杂志》12 (2015)，第 4 期，671–688。[PR16]，*Regularity of roots of polynomials*，《比萨高等师范学院科学年刊》（5）16 (2016)，481–517。[PR18]，*Optimal Sobolev regularity of roots of polynomials*，《高等师范学院科学年刊》（4）51 (2018)，第 5 期，1343–1387，数字对象标识符：10.24033/asens.2376。[PR20a]，*Selections of bounded variation for roots of smooth polynomials*，《数学精选》新系列26 (2020)，第 13 期，数字对象标识符：10.1007/s00029-020-0538-z。[PR25]，
Perturbation theory of polynomials and linear operators，《奇点几何与拓扑手册》，第 VII 卷，第 121–202 页，施普林格，2025 年。[PR24a] ，
Continuity of the solution map for hyperbolic polynomials，https://arxiv.org/abs/2410.01321。[PR24b]，
On the continuity of the solution map for polynomials，https://arxiv.org/abs/2410.01326。[PR20] A. Parusi´nski 和 G. Rond，
Multiparameter perturbation theory of matrices and linear
operators **373** 2020 ，《美国数学会汇刊》（），第 4 期，2933 2948–。[Rai09] A. Rainer，
Perturbation of complex polynomials and normal operators，《数学通讯》282 (2009)，第 12 期，1623–1636。[Rai13]，*Perturbation theory for normal operators*，《美国数学会汇刊》365 (2013)，第 10 期，5545–5577。[Rai22]，*Roots of Gårding hyperbolic polynomials*，《美国数学会会刊》150 (2022)，第 6 期，2433–2446。[RS80] M. Reed 和 B. Simon，*Methods of modern mathematical physics. I*，第二版，Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers]，纽约，1980 年，泛函分析。MR 751959
[37] Rel F. Rellich，*Störungstheorie der Spektralzerlegung，I*，《数学年刊》113 (1937)，600–619。[Wey12] H. Weyl，
Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)，《数学年刊》71 (1912)，441–479（德文）。[Zur93] M.A. Zurro，重新审视 Abhyankar-Jung 定理，*J. Pure Appl. Algebra* **90**(1993)，275-282。

Adam Parusiński: Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD, UMR 7351, 06108 Nice, France
Email address: adam.parusinski@univ-cotedazur.fr

Armin Rainer: Faculty of Mathematics and Geoinformation, Institute for Statistics and Mathematical Methods in Economics, E105-04, TU Wien, Wiedner Hauptstrasse 8, 1040 Vienna, Austria
Email address: armin.rainer@tuwien.ac.at