arXiv:2603.23111v1 [math.QA] 24 Mar 2026

全局 Koszul 对偶：微分分次余交换余代数与曲李代数

ALEXANDER MALLON 和 YOU WANG

摘要。我们为不一定余幂零的微分分次（dg）余交换余代数范畴赋予一种组合模型结构，并为代数闭域（特征为 0）上的曲弯李代数范畴赋予一种 ∞-范畴结构。此外，我们将 dg 余交换余幂零余代数与 dg 李代数之间的 Harrison 函子和 Chevally-Eilenberg 函子扩展到这些范畴，并证明它们构成 ∞-范畴之间的等价。

目录

1. 引言 1
1.1. 记号与约定。 3
1.2. 论文概述 3
1.3. 致谢。 3
2. 扩展的 Chevalley-Eilenberg 函子 3
2.1. 交换伪紧代数 3
2.2. Maurer-Cartan 元与可表示性 6
2.3. 曲李代数及相应的扩展 Chevalley-Eilenberg 函子 7
3. 余交换余代数上的模型结构 10
3.1. 余交换余代数上的模型范畴结构 10
4. 余交换余代数与曲李代数之间的 Koszul 对偶 13
参考文献 18

1. 引言

微分分次（dg）余交换余代数与微分分次李代数之间的 Koszul 对偶有多种体现，揭示了它们各自范畴上的同伦理论等价。Quillen 首先证明了这种等价 [16]，；除了引入模型范畴及其间的 Quillen 等价概念，他还证明了李代数与余交换余代数之间存在 Quillen 等价。然而，这一结果受到严格的分次限制。后来，Hinich [10] 推广了这一结果，消除了分次限制。为此，他在余交换余代数范畴中引入了更精细的弱等价概念，即滤过拟同构。

Positselski [14] 构造了微分分次余结合余代数与微分分次结合代数之间多种形式的 Koszul 对偶，其中所考虑的（余）代数并非（余）增广的。去除等价关系一侧的增广，代价是另一侧需要加入曲率。弯曲代数与微分分次代数一样，具有相应的 1 次导子 d，

关键词与短语：Koszul 对偶、伪紧代数、模型范畴、Maurer-Cartan 元、曲李代数。

但不要求满足条件 $d^2 = 0$。相反，存在一个 2 次元素 $h \in A^2$，使得 $d^2(a) = [h, a] = ha - ah$ 且 $d(h) = 0$。弯曲余代数可通过对偶方式定义，其中曲率定义为满足对偶条件的 2 次映射 $h : C \to k$。弯曲代数之间的态射 $(f, b) : A \to B$ 配备了一个曲率变化 $b \in B$。弯曲代数之间的弯曲态射必须与微分在曲率变化意义下相容，即 $f d(a) = d f(a) + [b, f(a)]$。这一理念也应用于余交换余代数与李代数的 Koszul 对偶的进一步推广中：在余交换余代数一侧的范畴中去除余增广，会导致李代数一侧的范畴出现曲率。

在上述情形中，所考虑的余代数始终是余幂零的；在某些情况下，可以解除这一限制，但需要替换曲弯李代数范畴。Chuang、Lazarev 和 Mannan [5] 考虑了代数闭域上的所有余代数（不一定是余幂零的），并证明由此得到的范畴与由带有严格态射的曲李代数构成的形式余积范畴 Quillen 等价。这一结果利用了如下事实：代数闭域上的任意余代数都可分解为余幂零余代数的余积；或者，对偶地，伪紧代数范畴与局部代数形式积范畴等价。Maunder[13] 构造了另一种推广，其中考虑带标记的曲弯李代数范畴。此类代数是带有一个非空的、由次数为 1 的元素组成的特定集合（称为标记点）的曲李代数；其曲弯李代数态射保留标记点。可通过标记点 x 将曲李代数扭曲，方法是将微分改为 $d^x(a) := d(a) + [a,x]$。扭曲后的曲李代数通常仍然是曲的。当标记点是 Maurer–Cartan（MC）元时，所得结构将是微分分次李代数（即曲率$h = 0$）。这类元素的次数为 1，并满足 $dx + \frac{1}{2}[x, x] = h$。在这种情况下，可以考虑拟同构。Booth 和 Lazarev [4] 针对弯曲结合代数和不一定余幂零的弯曲余结合余代数范畴证明了一个类似结果，其中通过扩展 bar-cobar 伴随给出了 Quillen 等价。

我们考虑由曲弯态射构成的曲李代数范畴。如果对于所有 MC 元素，由此得到的微分分次李代数之间的扭曲映射都是拟同构，那么两个曲李代数之间的映射就是弱等价。与带标记的曲弯李代数范畴不同，该范畴也包含没有 MC 元素的李代数。例如，由一个次数为 2 的元素 $L\langle h\rangle$ 生成的一维李代数，其中 h 同时作为曲率。这是具有严格态射的曲李代数范畴中的始对象。在这种方法中，曲李代数中的 MC 元素就像具有多个路径连通分支的拓扑空间中的基点。对于曲李代数 (X,d,h)，MC 元素 $x \in X$恰好对应于从终端曲弯李代数出发的曲弯态射 $(0, x) : (0, 0, 0) \to (X, d, h)$。将 (X, d,h) 通过 x 扭曲，得到微分分次李代数 $(X, d^x, 0)$，这对应于在拓扑空间中选择一个路径连通分支。

与上述情形不同，我们将证明，微分分次交换余代数范畴与曲李代数范畴在 ∞-范畴层面上等价。按照 [2],的定义，这些范畴及其各自的弱等价类都对应一个 ∞-范畴，其中相对范畴为 ∞-范畴提供了一种模型。这个 ∞-范畴等价由 Harrison 函子 Harr $\dashv$ CE 与扩张的 Chevalley–Eilenberg 函子之间的伴随所诱导。此外，由于余交换余代数的 ∞-范畴结构来自一个组合模型范畴，我们发现，曲李代数范畴作为一个∞-范畴，与一个组合模型范畴等价。

1.1. **记号与约定**。 本文在代数闭域k上进行。所有向量空间均定义在k 上，并假设微分分次（dg）向量空间具有上同调 $\mathbb{Z}$-分次。我们用上标表示上同调分次。给定一个分次向量空间V，其悬置（或移位） ΣV 是一个分次向量空间，满足$(\Sigma V)^i = V^{i-1}$。我们也将移位 ΣV 记作$V[1]$，并将 [1] 的逆函子记作 $[-1]$。

我们用 **DGLA** 表示微分分次李代数范畴，用 **CuLA**表示带曲弯态射的曲李代数范畴。此外，带有附加始对象的曲李代数范畴 $\emptyset$ 记作 $\mathbf{CuLA}_\emptyset$。除非另有说明，所有余代数均假定为微分分次的。余增广余交换余代数范畴和余幂零余交换余代数范畴分别记为 DGCCog^{coaug} 和 $\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 。余交换余代数范畴（不一定是余增广或余幂零的）记为 **DGCCog**。关于余代数的结果和术语，请读者参阅 Positselski 最近的综述 [14]。

1.2. **论文概要**。 在第 2 节中，我们回顾 Harrison 函子和 Chevally-Eilenberg 函子的定义，它们构成余增广余交换余代数范畴与微分分次李代数范畴之间的一个伴随对。随后，我们将这一伴随推广到（不一定余幂零的）余交换余代数范畴与曲李代数范畴之间。在这两种情形下，我们通过证明 Harrison 复形和 Chevally-Eilenberg 复形是 Maurer-Cartan 元素函子的表示对象，来证明它们构成伴随关系。接着，我们证明这一新的伴随可切分为微分分次李代数与余增广余交换余代数之间的一个伴随。

在第 3 节中，我们在**DGCCog**上引入一种模型范畴结构。该模型结构由$\mathbf{DGCCog}^{conil}$上的组合模型结构以及等价$\mathbf{DGCCog} \cong \mathbf{CoProd}(\mathbf{DGCCog}^{\mathbf{conil}})$诱导得到。我们证明，组合模型范畴的形式余积范畴上所诱导的模型结构本身也是组合的。

在第 4 节中，我们在$\mathbf{CuLA}_\emptyset$ 上引入弱等价，使其成为一个 ∞-ˇ 范畴。随后，我们证明 Harr 和 CE 互为 ∞-范畴等价，将范畴$\mathbf{CuLA}_\emptyset$ 和**DGCCog** 联系起来；证明方法是验证该伴随的单位和余单位的各个分量在各自的范畴中都是弱等价。由此可得，相应的同伦范畴等价。

1.3. **致谢**。我们感谢 Andrey Lazarev 在撰写本文期间进行了许多有益且富有成果的讨论，也感谢他对早期稿件所作的更正和提出的意见。

2. 扩展的 Chevalley-Eilenberg 函子

经典的 Harrison 函子和 Chevalley-Eilenberg 函子给出了 [10, 16]中（余增广）余幂零余交换余代数范畴与微分分次李代数范畴之间的一个伴随。本节将介绍这一伴随的非余幂零版本，然后再将其扩展到弯曲李代数。Harrison 函子保持不变，但 Chevalley-Eilenberg 函子ˇ CE 被扩展的 Chevalley-Eilenberg 函子 CE 取代。构造 CE 时的主要区别在于，我们必须用余自由余交换余代数（一个大得多的余代数）取代余自由余幂零余交换余代数。

2.1. **交换伪紧代数**。设 $\{V_i\}$ 是由有限维k-向量空间构成的余滤系统。逆极限 $\lim\longleftarrow V_i$ 可赋予逆极限拓扑，i其中每个有限维向量空间都赋予离散拓扑。一个拓扑

向量空间 V 称为伪紧的，如果V 同构于 $\lim\leftarrow\!\!\!

˘特别地，当 M 也是 SV 时，我们有

$$\mathrm{Der}(\check{S}V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{pcVect}}(V, \check{S}V).$$

证明。 (1) 若V 是有限维的，则V 是离散的，并且

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{dgvect}}(V, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(SV, A),$$

˘ 等于 $\mathrm{Hom}^{\mathbf{pcDGCAlg}}(SV, A)$；这是因为伪紧完备化是遗忘函子的左伴随，该函子会遗忘拓扑。更一般地，记 $V = \lim\longleftarrow V_i$ 以及 $A = \lim\longleftarrow A_{ij}$

其中，对所有i 和j，V_i和A_j 分别是有限维的，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{pcDGCAlg}}(\check{S}V, A) &\cong \varprojlim_j \mathrm{Hom}_{\mathbf{pcDGCAlg}}(\check{S}V, A_j) \\
&\cong \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(\check{S}V_i, A_j) \\
&\cong \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(V_i, A_j) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{pcVect}}(V, A).
\end{aligned}$$

这里，第二个双射成立，是因为有限维交换代数在**pcDGCAlg**中是紧的，也就是说，函子 $\mathrm{Hom}^{\mathbf{pcDGCAlg}}(-, A)$ 与滤过余极限可交换。

(2) 给定一个伪紧微分分次交换代数A 和一个$A-A$–双模M，考虑伪紧微分分次交换代数$A \oplus M$，其乘法如下:

$$(a, m) \cdot (b, n) = (ab, an + mb), \quad \forall a, b \in A, m, n \in M.$$

令 $p : A \oplus M \to A$ 为自然投影。于是存在一个双射：$\mathrm{Der}(A,M) \cong \check{}\{f \in \mathrm{Hom}^{\mathbf{pcDGCAlg}}(A, A \oplus M) | p \circ f = \mathrm{Id}_A\}$。令 $A = SV$并使用 (1)，得到

$$\mathrm{Der}(\check{S}V, M) \cong \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{pcDGCAlg}}(\check{S}V, \check{S}V \oplus M) | p \circ f = \mathrm{Id}_A\} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{pcVect}}(V, M).$$

□

˘**注 2.3.** 交换伪紧张量代数 SV 是离散向量空间 V^* 上的 *Sweedler* 余自由余交换余代数的 k–线性对偶。

定义 2.4. 我们定义如下这对函子:

$$\mathrm{Harr} : \mathbf{DGCCog}^{\mathbf{coaug}} \rightleftarrows \mathbf{DGLA} : \check{\mathrm{CE}}.$$

Harrison 函子 Harr 将余增余交换余代数 (C, Δ_C, δ_C) 映为微分分次李代数

$$\mathrm{Harr}(C) := \left(\mathcal{L}(\Sigma^{-1}\bar{C}),\ [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_{\mathrm{Harr}}\right),$$

其中 $\mathcal{L}(\Sigma^{-1}\bar{C})$ 是由张量代数 $T(\Sigma^{-1}\bar{C})$ 的本原元素张成的自由李代数，其中 $\bar{C}$ 是余增广的余核。李括号 $[\cdot,\cdot]$ 于是定义为 $T(\Sigma^{-1}\bar{C})$上连接积的交换子。微分 $\mathrm{d}_{\mathrm{Harr}}$ 在 $\mathrm{Harr}(C)$ 上是 $d_1 + d_2$ 按分次莱布尼茨法则作出的唯一延拓，其中 $\mathrm{d}_1 : \Sigma^{-1}\bar{C} \to \Sigma^{-1}\bar{C}$ 和 $\mathrm{d}_2 : \Sigma^{-1}\bar{C} \to \Sigma^{-1}\bar{C} \otimes \Sigma^{-1}\bar{C}$ 分别由微分 δ_C 和余乘法 Δ_C 诱导。

扩展 *Chevalley-Eilenberg* 函子 $\check{\mathrm{CE}}$ 将微分分次李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ 映射到˘余增余交换余代数$\mathrm{CE}(\mathfrak{g})$，它是以下对象的拓扑对偶

微分分次交换伪紧代数 $\left(\check{S}(\Sigma^{-1}g^*), \hat{\odot}, d^*\check{C}E\right)$。这里，$\check{S}(\Sigma^{-1}g^*)$ 是 $S(\Sigma^{-1}g^*)$ 的伪紧完备化，而乘法 $\hat{\odot}$ 是 $S(\Sigma^{-1}g^*)$ 上分次交换乘法 $\odot$ 的完备化。我们如下定义 $\check{S}(\Sigma^{-1}g^*)$ 上的微分。令$\delta_1 : \Sigma^{-1}g^* \to \Sigma^{-1}g^*$ 和 $\delta_2 : \Sigma^{-1}g^* \to \Sigma^{-1}g^* \otimes \Sigma^{-1}g^*$ 分别由微分 $d_{\mathfrak{g}}$ 和李括号 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 诱导。对于伪紧向量空间 V，考虑半完备的 $\hat{}$ 交换张量代数 $S'(V) = \oplus_{n\geqslant 1} V^{\hat{\odot} n}$，它的拓扑既非伪紧也非离散，并且对任意交换伪紧代数 B，都有性质 $Hom(S'(V), B) \cong Hom(V, B)$。更多细节见引理 4.5]。由命题 2.2，$\check{S}(\Sigma^{-1}g^*)$ 上的恒等映射诱导出映射 $i : S'(\Sigma^{-1}g^*) \to \check{S}(\Sigma^{-1}g^*)$，于是我们得到映射：

$$i \circ (\delta_1 + \delta_2) : \Sigma^{-1}\mathfrak{g}^* \to S'(\Sigma^{-1}\mathfrak{g}^*) \to \check{S}(\Sigma^{-1}\mathfrak{g}^*),$$

根据分次莱布尼茨法则，可将其延拓为微分$\mathrm{d}^*\check{}_{\mathrm{CE}}$ 在$\check{S}(\Sigma^{-1}\mathfrak{g}^*)$ 上的微分。取该代数的$\check{}$拓扑对偶，得到余交换余代数$(CE(\mathfrak{g}), \Delta, \mathrm{d}\check{}_{\mathrm{CE}})$。

2.2. **Maurer-Cartan 元素与可表示性**。现在我们证明，上文定义的函子构成一个 Harr ⊣ CE 伴随。这通过证明这两个函子都表示 Maurer-Cartan 元素函子来完成。现在回顾 Maurer-Cartan（MC）元素的定义。

定义 2.5。设$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d})$ 为一个微分分次李代数。$\mathfrak{g}$ 中的一个**Maurer-Cartan 元**是一个次数为1 的元素 $x \in \mathfrak{g}$，满足$\mathrm{d}x + \frac{1}{2}[x, x] = 0$。$\mathfrak{g}$ 中所有 *Maurer-Cartan* 元素构成的集合记为$\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$。显然，微分分次代数态射保持 *MC* 元素不变。因此，*MC* 元素定义了一个函子MC：**微分分次李代数 → 集合**。

现在回顾一下，微分分次李代数与余交换余代数之间的线性映射所构成的分次向量空间本身也可以赋予微分分次李代数结构。

命题 2.6. 设(C, Δ_C, δ_C) 是一个余交换余代数，$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ 是一个微分分次李代数。那么 $(\mathrm{Hom}(C, \mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]_*, \partial)$ 是一个微分分次李代数，其中 $[\cdot,\cdot]_*$ 是由下式给出的卷积积

$$[f, g]_*(x) = (-1)^{|g||x_{(1)}|}[f(x_{(1)}), g(x_{(2)})]_{\mathfrak{g}},$$

其中，$\forall x \in C$，余积 $\Delta_C(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ 采用斯威德勒记号表示，求和符号省略不写。微分 ∂ 定义如下

$$\partial(f) = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} f - (-1)^{|f|} f\delta_C.$$

证明。$(\mathrm{Hom}(C, \mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]_*)$ 是一个分次李代数，因为 (C, Δ_C, δ_C) 是一个余交换余代数，且 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ 是一个微分分次李代数。此外，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\partial([f, g]_*) &= \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}[f, g]_* - (-1)^{|f+g|}[f, g]_*\delta_C \\
&= [\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} f, g]_* + (-1)^{|f|}[f, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} g]_* - (-1)^{|f|}[f\delta_C, g]_* - (-1)^{|f+g|}[f, g\delta_C]_* \\
&= [\partial f, g]_* + (-1)^{|f|}[f, \partial g]_*,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\partial^2([f, g]_*) &= \partial([\partial f, g]_* + (-1)^{|f|}[f, \partial g]_*) \\
&= [\partial^2 f, g]_* + (-1)^{|f|+1}[\partial f, \partial g] + (-1)^{|f|}[\partial f, \partial g] + [f, \partial^2 g] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，∂ 是一个次数为 1 的平方为零线性映射，满足分次莱布尼茨法则。因此，我们已经证明 $(\mathrm{Hom}(C, \mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]_*, \partial)$ 是一个微分分次李代数。□

定义 2.7。 对于任意余交换余代数(C, Δ_C, δ_C)以及任意微分分次李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, \mathrm{d}_\mathfrak{g})$，我们定义$\mathrm{MC}(C,\mathfrak{g}) := \mathrm{MC}(\mathrm{Hom}(C,\mathfrak{g}))$。这定义了一个双函子

$$\mathrm{MC} : \mathbf{DGCCog}^{op} \times \mathbf{DGLA} \to \mathbf{Set}.$$

˘ 我们现在证明 Harr 和CE构成一个伴随。为此，我们证明 Harr(C) 和 ˘CE(g) 分别是函子 MC(¯C, –) 和 MC(–, g) 的表示对象。

命题 2.8. 余增广余交换余代数范畴与微分分次李代数范畴之间存在一个由˘余代数和微分分次李代数给出的伴随Harr ⊣ CE。

证明. 设C为余增广余交换余代数，g 为微分分次李代数。只需证明存在自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DGLA}}(\mathrm{Harr}(C), \mathfrak{g}) \cong \mathrm{MC}(\bar{C}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DGCCog}^{coaug}}(C, \check{\mathrm{C}}\mathrm{E}(\mathfrak{g})).$$

遗忘微分后，任意余增广余交换余代数态射 f : C →˘CE(g) 都与增广交换伪紧代数态射 f* : ˘ S (Σ^{-1}g*) →C* 对偶；根据命题 2.2，这等价于一个线性映射 Σ^{-1}g* → ¯C*。线性映射 Σ^{-1}g* → ¯C* 也与映射 C → Σ g 对偶，后者可视为 Hom(C, g) 中的一个 1 次元素。现在考虑微分分次李代数态射 Ψ : Harr(C) → g；根据自由李代数 $\mathcal{L}$(Σ^{-1} ¯C) 的泛性质，它与线性映射 $\bar{\psi}$: Σ^{-1} ¯C → g 一一对应。¯它也等价于 $\psi \in$ Hom(C, g) 中的一个 1 次元素。此外，若 Ψ : Harr(C) → g 与微分相容，即 d$_\mathfrak{g}$ ∘ Ψ = Ψ ∘ (d$_1$ +d$_2$)，则对所有 x ∈ C，均有

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}_\mathfrak{g} \circ \Psi(s^{-1}x) - \Psi \circ (\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2)(s^{-1}x) \\
= \;& \mathrm{d}_\mathfrak{g}\bar{\psi}(s^{-1}x) - \bar{\psi}(\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2)(s^{-1}x) \\
= \;& \mathrm{d}_\mathfrak{g}\psi(x) + \psi\delta_C(x) + \frac{1}{2}[\psi(x_{(1)}), \psi(x_{(2)})]_\mathfrak{g} \\
= \;& (\partial\psi + \frac{1}{2}[\psi,\psi]_*)(x) \\
= \;& 0,
\end{aligned}$$

¯这说明 $\psi \in$ MC(C, g)。双射 Hom $_{\mathbf{DGLA}}$(Harr(C), g) ≅ MC(C, g) 也可类似地得到。 □

2.3. **曲李代数及相应的扩展 Chevalley-Eilenberg 函子**。本小节首先回顾曲李代数的定义。更多细节见 [5, 13]。

定义 2.9。 一个**曲李代数** $(\mathfrak{g}, \mathrm{d}_\mathfrak{g}, \omega_\mathfrak{g})$ 是一个分次李代数g，配备一个次数1 导子d$_\mathfrak{g}$ 和一个次数2 元素 $\omega_\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}^2$，满足d$_\mathfrak{g}(\omega_\mathfrak{g}) = 0$ 以及$\mathrm{d}_\mathfrak{g}^2(x) = [\omega_\mathfrak{g}, x]_\mathfrak{g}$，对所有 $x \in \mathfrak{g}$。 $\omega_\mathfrak{g}$ 称为**曲率**，属于g。注意，微分分次李代数恰好是曲率为零的曲李代数。

定义 2.10。 曲李代数之间的**弯曲态射** 是一对

$$(f, a) : (\mathfrak{g}, \mathrm{d}_\mathfrak{g}, \omega_\mathfrak{g}) \to (\mathfrak{h}, \mathrm{d}_\mathfrak{h}, \omega_\mathfrak{h}),$$

其中 f : g → h 是分次李代数态射，而 $a \in \mathfrak{h}^1$，是一个次数为1 的元素，称为**曲率变化**，满足以下条件：

- $f(\mathrm{d}_\mathfrak{g}x) = \mathrm{d}_\mathfrak{h}(fx) + [a, fx]_\mathfrak{g}$;
- $f(\omega_\mathfrak{g}) = \omega_\mathfrak{h} + \mathrm{d}_\mathfrak{h}a + \frac{1}{2}[a, a]_\mathfrak{h}$.

我们可以通过设定（g，b）∘（f，a）=（gf，$b+g(a)$）来复合弯曲态射。此外，态射（Id,0）在复合运算下充当单位。因此，我们可以定义由弯曲态射构成的曲李代数范畴**CuLA** 。

如果一个态射（f，a）满足 $a=0$，则称其为非曲弯（或严格）态射。任意弯曲态射（f，a）都可分解为复合态射 $(\mathrm{Id},a)\circ(f,0)$，即一个非曲弯态射与一个曲弯同构的复合。微分分次李代数之间的严格态射恰好对应于 **DGLA** 中的态射。由于两个微分分次李代数之间可能存在许多弯曲态射，范畴 **DGLA** 并不完全嵌入**CuLA**。

注 2.11。 也可以考虑带有严格态射的弯曲李代数范畴。然而，本文中的**CuLA**始终指带有弯曲态射的弯曲李代数。

现在我们给出相应的弯曲李代数中 Maurer-Cartan 元素的定义 as.

定义 2.12。 弯曲李代数 $(\mathfrak{g},\ \mathrm{d}_{\mathfrak{g}},\ \omega_{\mathfrak{g}})$ 的 *Maurer-Cartan* 元素是元素 $a\in\mathfrak{g}$，满足 $\omega_{\mathfrak{g}}+\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}x+\frac{1}{2}[x,\ x]_{\mathfrak{g}}=0$。

由定义 2.10 和 2.12 可知，曲李代数（$\mathfrak{g}$，d，ω的 MC 元素与将零李代数包含到 $\mathfrak{g}$中的曲率变化相同。也就是说，存在自然双射 $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{CuLA}}((0,\ 0,\ 0)),\ (\mathfrak{g},\ \mathrm{d},\ \omega))$。注意，$(0,\ 0,\ 0)$ 是 **曲李代数**CuLA 的终对象，因此，MC 元素的作用类似于曲李代数的点。

给定曲李代数 $(\mathrm{g},\mathrm{d},\omega)$ 的一个 MC 元素 x，我们可以定义扭曲李代数 $(\mathrm{g}^x,\mathrm{d}^x)$，其底层李代数为 g，其微分定义为 $\mathrm{d}^x(\mathrm{y})=\mathrm{dy}+[\mathrm{x},\mathrm{y}]$。直接计算可知，$(\mathrm{d}^x)^2=0$ 和 d^x 是分次导子，因此 $(\mathrm{g}^x,\mathrm{d}^x)$ 是微分分次李代数。此外，$(\mathrm{Id},\mathrm{x}):(\mathrm{g}^x,\mathrm{d}^x,0)\to(\mathrm{g},\mathrm{d},\omega)$ 是一个曲弯同构。因此，如果曲李代数 $(\mathrm{g},\mathrm{d},\omega)$ 存在 Maurer-Cartan 元素 x，那么它与由 x 扭曲的微分分次李代数 g^x 曲同构。类似地，如果两个曲李代数 $(\mathrm{g},\mathrm{d}_{\mathfrak{g}},\omega_{\mathfrak{g}})$ 和 $(\mathrm{h},\mathrm{d}_{\mathfrak{h}},\omega_{\mathfrak{h}})$ 分别存在 Maurer-Cartan 元素，那么对于任意弯曲态射 $(\mathrm{f},\alpha):(\mathrm{g},\mathrm{d}_{\mathfrak{g}},\omega_{\mathfrak{g}})\to(\mathrm{h},\mathrm{d}_{\mathfrak{h}},\omega_{\mathfrak{h}})$，对于所有 $\mathrm{x}\in\mathrm{MC(g)}$ 以及 $\mathrm{y}\in\mathrm{MC(h)}$，我们可以得到微分分次李代数态射 $(\mathrm{Id},\mathrm{y})(\mathrm{f},\alpha)(\mathrm{Id},\mathrm{x}):(\mathrm{g}^x,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}^x)\to(\mathrm{h}^y,\mathrm{d}^y\mathrm{h})$。

曲李代数之间的弯曲态射会在它们的 Maurer-Cartan 元素集合之间诱导映射。

命题 2.13. 设 $(f,a):(g,d_{\mathfrak{g}},\omega_{\mathfrak{g}})\to(h,d_{\mathfrak{h}},\omega_{\mathfrak{h}})$ 是一个弯曲态射。那么 (f,a) 诱导出$\tilde{}a:MC(g)\to MC(h)$，它将 $x\in MC(g)$ 映射为 $f(x)+a\in MC(h)$。

证明。 我们只需证明 $f(x)+a\in\mathrm{MC(h)}$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&\omega_{\mathfrak{h}}+\mathrm{d}_{\mathfrak{h}}(f(x)+a)+\frac{1}{2}[f(x)+a,f(x)+a]_{\mathfrak{h}}\\
=\ & f(\omega_{\mathfrak{g}})-\frac{1}{2}[a,a]_{\mathfrak{h}}-\mathrm{d}_{\mathfrak{h}}a+f(\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}x)-[a,f(x)]_{\mathfrak{h}}+\mathrm{d}_{\mathfrak{h}}a+\frac{1}{2}[f(x),f(x)]_{\mathfrak{h}}+\frac{1}{2}[a,a]_{\mathfrak{h}}+[a,f(x)]_{\mathfrak{h}}\\
=\ & f(\omega_{\mathfrak{g}}+\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}x+\frac{1}{2}[x,x]_{\mathfrak{g}})\\
=\ & 0,
\end{aligned}$$

因此，$f(x)+a\in\mathrm{MC(h)}$，如所要求的。 □

评注 **注 2.14.** 这一结果也可直接由 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CuLA}}(0,-)$ 的函子性推出 .

˘ 现在，我们将伴随函子 (Harr, CE) 扩展到 **CDGCog** 范畴，即（非余幂零）˘ 余交换余代数与弯曲李代数的范畴。随后我们证明 (Harr, CE) 仍构成一个伴随。

定义 2.15。 我们定义一对函子如下：

$$\mathrm{Harr} : \mathbf{DGCCog} \rightleftarrows \mathbf{CuLA} : \check{\mathrm{CE}}.$$

Harrison 函子将余交换余代数 (C, Δ_C, δ_C) 映射为曲李代数

$$\mathrm{Harr}(C) := \Big(\mathcal{L}(\Sigma^{-1}\bar{C}),\ [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_{\mathrm{Harr}}, \omega_{\mathrm{Harr}}\Big).$$

与前者相比，差异在于微分 $\mathrm{d}_{\mathrm{Harr}}$ 和曲率 ω_{Harr}。由于 $\bar{C}$ 没有余增广，我们可以选择一个伪余增广 $\varepsilon : k \to C$，那么作为向量空间，我们有 $C \cong k \oplus \bar{C}$，且 $\bar{C} := \mathrm{coker}\varepsilon$。微分 $\mathrm{d}_{\mathrm{Harr}}$ 由限制映射 $\bar{\Delta}_C : \bar{C} \to \bar{C} \otimes \bar{C}$ 和 $\delta_{\bar{C}} : \bar{C} \to \bar{C}$ 诱导而来，与非弯曲情形类似。曲率 ω_{Harr} 则由限制映射 $\Delta_k : k \to C \otimes C$ 和 $\delta_k : k \to C$ 诱导而来。这意味着，对于所有 $c \in \bar{C}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\mathrm{Harr}}(s^{-1}c) &= (-1)^{|c_{(1)}|+1} s^{-1}c_{(1)} \otimes s^{-1}c_{(2)} - s^{-1}\delta_{\bar{C}}(c); \\ \omega_{\mathrm{Harr}} &= (-1)^{|\Delta_{(1)}|+1} s^{-1}\Delta_{(1)} \otimes s^{-1}\Delta_{(2)} - s^{-1}\delta_k(1_k), \end{aligned}$$

其中 $\bar{\Delta}C(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}, \Delta_k(1_k) = \Delta_{(1)} \otimes \Delta_{(2)}$。然后我们可以验证，对于所有 $s^{-1}x \in \Sigma^{-1}\bar{C}$，都有 $d_{\mathrm{Harr}}(\omega_{\mathrm{Harr}}) = 0$，且 $d^2 Harr(s^{-1}x) = [\omega_{\mathrm{Harr}}, s^{-1}x],$。注意， ω_{Harr} 是双代数 $(T(\Sigma^{-1}\bar{C}), \otimes, \Delta^{\cosh})$ 的本原元，即 $\Delta^{\cosh}(\omega_{\mathrm{Harr}}) = \omega_{\mathrm{Harr}} \otimes 1_k + 1_k \otimes \omega_{\mathrm{Harr}}$。因此， $\omega_{\mathrm{Harr}} \in \mathcal{L}(\Sigma^{-1}\bar{C}) = PrimeT(\Sigma^{-1}\bar{C})$。所以，$(\mathcal{L}(\Sigma^{-1}\bar{C}), d_{\mathrm{Harr}}, \omega_{\mathrm{Harr}})$ 是一个曲李代数。

扩展 Chevalley–Eilenberg 函子 $\check{\mathrm{CE}}$ 将曲李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, d_{\mathfrak{g}})$ 映为一个余交换微分分次余代数 $CE(g)$，它是下列交换伪紧微分分次代数 $\Big(\hat{S}(\Sigma^{-1}g^*), \hat{\odot}, i \circ (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\Big)$ 的拓扑对偶。与前者相比，唯一的区别在于微分增加了一个由 $\omega_{\mathfrak{g}}^* : (g^*)^{-2} \to k$ 诱导的映射 $\delta_3 : \Sigma^{-1}g^* \to k$。我们只需证明 $(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 = 0$。实际上，由于 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 的分次 *Jacobi* 恒等式，等式 $(\delta_2)^2 = 0$ 成立；而等式 $[\delta_1, \delta_2] = 0$ 表明 $d_{\mathfrak{g}}$ 是一个导子。等式 $[\delta_1, \delta_3] = 0$ 等价于条件 $d_{\mathfrak{g}}(\omega_{\mathfrak{g}}) = 0$，而等式 $(\delta_1)^2 + [\delta_2, \delta_3] = 0$ 等价于条件 $(d_{\mathfrak{g}})^2 = [\omega_{\mathfrak{g}}, \cdot]_{\mathfrak{g}}$。因此，$(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 = 0$，这意味着 $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ 是一个微分。接着，我们可以将其扩展为 $\hat{S}(\Sigma^{-1}g^*)$ 上的导子 $i \circ (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$。

注 2.16。 由于任意余交换余代数都可视为余幂零余交换余代数的余积，即 $C \cong \coprod_\alpha C_\alpha$，因此我们可以得到 **DGCCog** 等价于$_\alpha$

余幂零余交换余代数的形式余积范畴**CoProd**(**DGCCog**$^{\mathbf{conil}}$)。于是我们可以定义 (Harr, $\check{\mathrm{CE}}$) 在 **CoProd**(**DGCCog**$^{\mathbf{conil}}$) 与 **cuLA** 之间的伴随函子如下：

$$\mathrm{Harr}\left(\coprod_\alpha C_\alpha\right) = \coprod_\alpha \mathrm{Harr}(C_\alpha); \tag{1}$$

$$\check{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}) = \prod_{x \in \mathfrak{g}^{-1}} \mathrm{CE}(\mathfrak{g}^x). \tag{2}$$

$\check{}$ 与非弯曲情形类似，我们也可以证明，函子 Harr 和 CE 在交换余代数与弯曲李代数之间仍构成一个伴随对。

命题 2.17。 余交换余代数$\check{}$与曲李代数的范畴之间存在一个伴随，由 Harr $\dashv$ CE给出。

回忆一下，若 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，$c \in \mathcal{C}$ 是一个对象，那么下范畴 $\mathcal{C}_{c/}$ 是这样一个范畴：其对象是映射 $c \to x$，态射是交换三角形。

引理 2.18. 存在范畴等价 **微分分次李代数** $\cong$ **曲李代数**$_{0/}$。

证明。 每个微分分次李代数 $\mathfrak{g}$ 都存在一个微分分次李代数态射 $0 \to \mathfrak{g}$，它同时也是曲李代数态射，因此自然包含 **微分分次李代数** $\to$ **曲李代数** 的像包含于 **曲李代数**$_{0/}$。令 i : **微分分次李代数** $\to$ **曲李代数**$_{0/}$ 为自然包含。我们证明 i 是范畴等价。曲李代数的映射 $0 \to \mathfrak{g}$ 是由一个 Maurer-Cartan 元 $x \in \mathfrak{g}$ 给出的数据。在这种情况下，$\mathfrak{g}$ 与微分分次李代数 $\mathfrak{g}^x$曲同构，这意味着 i 是本质满的。为证明它是完全忠实的，取两个李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$。此时，微分分次李代数态射 $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 对应于 **曲李代数**$_{0/}$ 中的映射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，该映射由一对 $(f, 0)$ 给出，这是一种曲李代数态射。因此 i 是完全忠实且本质满的，这意味着 **微分分次李代数** 和**曲李代数**$_{0/}$ 范畴等价。 □

设 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$是一个伴随。取 $d \in \mathcal{D}$，并令 $c := Rd$。若余单位$d \to Lc$在 $\mathcal{D}$中是同构，则上述伴随可以切片为下范畴之间的伴随 $L\colon \mathcal{C}_{c/} \rightleftarrows \mathcal{D}_{d/} : R$。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$分别是 **DGCCog** 和**曲李代数**，且 $d = 0$，则上述余单位条件成立，因此我们可以得到一个切片伴随

$$\mathrm{Harr} : \mathbf{DGCCog}_{k/} \rightleftarrows \mathbf{CuLA}_{0/} : \check{\mathrm{C}}\mathrm{E}.$$

命题 2.19. *Harrison* 扩张的 *Chevalley-Eilenberg* 伴随

$$\mathrm{Harr} : \mathbf{DGCCog} \rightleftarrows \mathbf{CuLA} : \check{\mathrm{C}}\mathrm{E}$$

切片为一个伴随

$$\mathrm{Harr} : \mathbf{DGCCog}^{\mathbf{coaug}} \rightleftarrows \mathbf{DGLA} : \check{\mathrm{C}}\mathrm{E}.$$

证明. 这直接由引理2.18 以及以下事实得出：$\mathbf{DGCCog}_{k/} \cong \mathbf{DGCCog}^{\mathbf{coaug}}$。 □

3. 余交换余代数上的模型结构

3.1. 余交换余代数上的模型范畴结构。 首先，我们回顾余幂零余交换余代数范畴上的模型结构。然后我们证明这个范畴实际上是组合的。

定义 3.1。 ([10]) 余幂零余交换余代数的态射 $f\colon C \to D$ 在$\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 中称为

- 弱等价，当且仅当 $\mathrm{Harr}(f) : \mathrm{Harr}(C) \to \mathrm{Harr}(D)$ 是微分分次李代数之间的拟同构。
- 余纤维化，当且仅当它是单射。
- 纤维化，当且仅当它对无圈余纤维化具有右提升性质。

注记 3.2. 余幂零余交换余代数之间的弱等价 $f\colon C \to D$ 实际上是一个滤过拟同构。此外，余幂零余交换余代数范畴与局部伪紧交换微分分次余代数范畴对偶。更多详情请参见 [8, 第 5 节。2]

引理 3.3. 范畴 $\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 余幂零余交换余代数范畴具有一个组合模型范畴，其生成余纤维化是有限维余幂零余交换余代数的单射，记为 $\mathbf{I}_{\mathbf{DGCCog}^{conil}}$。

证明。 为了证明组合模型范畴的存在性，我们应用 Jeff Smith 定理[1, 3]。由于所有有限维余幂零余交换余代数都是小的，范畴$\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 是局部可呈现的，并且我们知道范畴 $\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 是模型范畴。因此，只需检验以下三个条件：

- $\mathcal{W}_{\mathbf{DGCCog}^{\text{余幂零}}}$是箭范畴的一个可达且可达嵌入的子范畴。为说明这一点，首先注意到 $\mathcal{W}_{\mathbf{DGCCog}^{\text{余幂零}}} = \mathrm{Harr}^{-1}(\mathcal{W}_{\text{微分分次李代数}})$。由于 $\mathcal{W}_{\text{微分分次李代数}}$ 是组合模型范畴中的弱等价类，根据 [1, 第 2 节5] 运用 Smith 定理，它是可达的，并且是可达嵌入的。此外，Harr 显然是一个可达函子，并且保持余极限，因此根据 [3, 命题 118]，结论成立。
- $\mathrm{rlp}(\mathrm{I}_{\mathbf{Cog}^{conil}}) \subseteq \mathcal{W}_{\mathbf{DGCCog}^{conil}}$。由于 $\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 是一个模型范畴，$\mathrm{rlp}(\mathrm{Cof}(\mathrm{I}_{\mathbf{Cog}^{conil}}))$ 中的映射恰好是无圈纤维化，依据 [6, 命题 3.13]。因此，我们有 $\mathrm{rlp}(\mathrm{I}_{\mathbf{Cog}^{conil}}) \subseteq \mathrm{rlp}(\mathrm{Cof}(\mathrm{I}_{\mathbf{Cog}^{conil}})) \subseteq \mathcal{W}_{\mathbf{DGCCog}^{conil}}$。
- 类 $\mathrm{Cof}(\mathrm{I}_{\mathbf{Cog}^{conil}}) \cap \mathcal{W}_{\mathbf{DGCCog}^{conil}}$ 在推出和超限复合下封闭。由于$\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 是一个模型范畴，无圈余纤维化依据[6, 命题 3.14]在推出下封闭。根据模型范畴的定义，无圈余纤维化在超限复合下也封闭。

因此，$\mathbf{DGCCog}^{conil}$ 具有组合模型范畴的结构 . □

现在我们证明范畴$\mathbf{DGCCog}$ 具有组合模型范畴结构。为此，我们证明组合生成模型范畴的形式余积范畴本身也是组合生成的。然后注意到，任意余代数都是由该余代数的类群元所索引的幂零余代数的余积，这给出$\mathbf{DGCCog} \cong \mathbf{CoProd}(\mathbf{DGCCog}^{\mathbf{conil}})$。$\mathbf{DGCCog}$上的所得模型结构如下。

定义 3。 **4.** 余交换余代数的一个态射 $f : C \to D$ 在 $\mathbf{DGCCog}$ 中称为

- 弱等价，当且仅当类群元集合之间存在一个双射$\alpha : \mathrm{Gp}(C) \to \mathrm{Gp}(D)$，使得对于所有 $x \in \mathrm{Gp}(C)$，总存在一个幂零部分之间的滤过拟同构$\mathrm{conil}_x(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{conil}_{\alpha(x)}(D)$。
- 余纤维化，当且仅当它是单射。
- 纤维化，当且仅当它对无圈余纤维化具有右提升性质。

定理 3.5。 设 $\mathcal{C}$ 是一个由生成余纤维化$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$组合生成的模型范畴。那么，形式余积范畴 $\mathbf{CoProd}(\mathbf{C})$ 由生成余纤维化$\mathbf{I}_{\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})}$组合生成，其中$\mathbf{I}_{\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})}$ 表示$\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})$ 中那些由包含函子 $\mathcal{C} \to \mathbf{CoProd}(\mathcal{C})$将$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ 中的映射映得的映射。

证明。 这是对 [12, 命题 A.2.68], 的应用，其中组合模型结构的存在性在满足以下条件时成立：

(1) 范畴 $\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})$ 是局部可呈现的。(2) 类 $\mathcal{W}$ 在滤过余极限下稳定。(3) 存在包含于 $\mathcal{W}$ 中的小集合 $\mathcal{W}_0$，使得 $\mathcal{W}$ 中的所有态射都是 $\mathcal{W}_0$ 中元素的滤过余极限。(4) 类 $\mathcal{W}$ 在沿着 $\mathbf{I}_{\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})}$ 中态射的推出进行推出时保持稳定。(5) 对 $\mathbf{I}_{\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})}$ 中所有态射都具有右提升性质的任意态射都属于 $\mathcal{W}$。

对于 (1)，回忆一下，如果一个范畴是余完备且可达的，那么它就是有限呈示的（特别地，也是局部可呈现的）。当 $\mathcal{C}$ 具有所有余极限时，$\mathbf{CoProd}(\mathcal{C})$ 也具有所有余极限；由 [17,推论 5.36] 可知，可达范畴的余积范畴本身也是可达的。

条件 (2) 和 (3) 恰好表示 $\mathcal{W} \subset \mathbf{CoProd}(\mathcal{C})^{[1]}$ 是一个有限可达子范畴。这里，$[\mathbf{1}]$ 表示一个有 2 个对象和 1 个非恒等态射的范畴。

对于 (2)，首先注意，形式积范畴中的极限已在 [5, 引理 4.3]中引入。形式余积范畴中的余极限描述可由对偶方式给出。具体而言，

¯设给定一个图表 $D:\ \mathcal{A} \to \mathrm{Coprod}(\mathcal{C})$。由此诱导出一个集合图表 $D:\ \mathcal{A} \to$集合，其中将每个 $A \in \mathcal{A}$ 映射到$D(A) \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{C})$ 的指标集。记C 为该图表的余极限，其定义为

$$C := \varinjlim \bar{D} \cong \coprod_{A \in \mathcal{A}} \bar{D}(A)/\sim$$

¯其中关系 $\sim$由每个态射 $f$in $\mathcal{A}$所对应的 $i \sim D(f)(i)$ 生成。每个元素 $c \in C$都可以视为一个范畴，其对象是等价类 c 的代表元；给定 i、$j \in c$，对于 $\mathcal{A}$ 中见证关系 $i \sim j$ 的每个态射，都有一个态射 $i \to j$。于是，对于每个 $c \in C$，都有一个图表 $D_c : c \to \mathcal{C}$，它将 c 的每个对象和态射映射到 $\mathcal{C}$ 中对应的对象和态射。由此，我们得到原始图表的余极限

$$\varinjlim D \cong \coprod_{c \in C} \varinjlim D_c.$$

假设两个滤过图表之间有态射 $\mathrm{f}_\alpha : \mathrm{C}_\alpha \to \mathrm{C}'_\alpha$ in $\mathrm{CoProd}(\mathcal{C})$，因此 $\mathrm{C}_\alpha = \coprod_{\mathrm{I}_\alpha} \mathrm{C}_i$ 和 $\mathrm{C}'_\alpha = \coprod_{\mathrm{J}_\alpha} \mathrm{C}'_j$。进一步假设，对每个 α 都有 $\mathrm{f}_\alpha \in \mathcal{W}$。由 $\mathrm{CoProd}(\mathcal{C})$ 中余极限的定义可知，诱导映射 $\mathrm{f} : \varinjlim \mathrm{C}_\alpha \to \varinjlim \mathrm{C}'_\alpha$（滤过余极限之间的映射）在指标集上的映射 $\mathrm{I} \to \mathrm{J}$ 将是双射。此外，对于映射 f 的 α αi $\in$ I，分量 f_i 是 $\mathcal{C}$ 中弱等价的滤过余极限；由于 $\mathcal{C}$ 上的模型结构是组合的，因此这些分量也是弱等价。因此，我们有 $\mathrm{f} \in \mathcal{W}$。

对于 (3)，注意到，由于 $\mathcal{C}$ 是组合的，存在一个小集合 $\mathcal{W}'_0$，使得 $\mathcal{C}$ 中的所有弱等价都是 $\mathcal{W}'_0$ 中弱等价的滤过余极限。我们将 $\mathcal{W}_0$ 定义为这样一个弱等价集合：其指标集有限，且每个分量都是 $\mathcal{W}'_0$ 中的态射。由于 $\mathcal{W}'_0$ 是一个小集合，$\mathcal{W}_0$ 也是一个小集合。于是，$\mathcal{W}$ 中的每个弱等价都是其指标集的所有有限子集上的滤过余极限。此外，每个分量作为 $\mathcal{C}$ 中的弱等价，也都是 $\mathcal{W}'_0$ 中弱等价的滤过余极限。

对于 (4)，我们考虑如下推出图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} C_i & \xrightarrow{f=\prod_i f_i} & \coprod_{i \in I} C'_i \\ \uparrow & & \uparrow \\ D & \xrightarrow{i} & D' \end{array}$$

其中 $i : D \to D'$ 属于 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$。注意，此处 $\coprod C_i$ 和 $\coprod C'_i$ 具有相同的指标集 I，因为$i \in I$ $i \in I$，按照指标集也有一个推出

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & I \\ \uparrow & & \uparrow \\ * & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & * \end{array}$$

Th那么，我们可以根据以i为指标的分量得到以下图表

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \\ \uparrow & & \uparrow \\ D & \xrightarrow{i} & D' \end{array}$$

由于 $\mathcal{C}$ 是一个组合模型范畴， $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ 在沿着$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$中态射的推出进行推出时保持不变，这意味着对于每个$i \in I$，f_i 都是 $\mathcal{C}$ 中的弱等价。因此，$f = \prod f_i \in \mathcal{W},_i$
这意味着 $\mathcal{W}$ 在沿着 I 中态射的推出所作的推出下保持稳定。

对于 (5)，我们首先注意到，形式余积的一个因子等价于从始对象 $\emptyset$ of $\mathcal{C}$出发的一个映射，因此，对于一个对所有 I 中映射都具有右提升性质的映射 f，我们得到如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{i} & \coprod_{i\in I} C_i \\ {\scriptstyle fi}\downarrow & \overset{\exists h}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \coprod_{j\in J} D_j & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \coprod_{j\in J} D_j \end{array}$$

该图存在一个提升 h。上方三角形给出 $hfi = i$，也就是说，$hf = \mathrm{Id}_C$ 在指标集上成立。下方三角形给出 $fh = \mathrm{Id}_{\mathrm{D}}$，特别地，$fh = \mathrm{Id}_J$，因此 f在指标集上诱导一个双射。考虑如下图表，其中 $t : A \to B$属于 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$，因此 A 和 B均以单元素集为指标集。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \coprod_{i} C_i \\ {\scriptstyle t}\downarrow & \overset{\exists h}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle f=\prod_i f_i} \\ B & \longrightarrow & \coprod_{i} D_i \end{array}$$

A 和 B 将分别映射到 C 和 D 中恰好一个分量，因此我们得到如下图表，可以将其视为 $\mathcal{C}$。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C_i \\ {\scriptstyle t}\downarrow & \overset{\exists h_i}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ B & \longrightarrow & D_i \end{array}$$

由于对 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ 中的所有生成余纤维化都存在这样的交换方块，且 $\mathcal{C}$ 由 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$组合生成，因此 $f_i \in \mathrm{rlp}(\mathrm{I}_{\mathcal{C}})$。由此可知，对于所有$i \in A$，$f_i$ 必定是$\mathcal{C}$ 中的弱等价，因此$f \in \mathcal{W}$，如所需。□

推论 3.6。 范畴 **DGCCog**具有一个组合生成的余纤维化模型结构，该结构由定义 *3.4*给出。

4. 余交换余代数与弯曲李代数之间的 Koszul 对偶

最后，在本节中，我们为 ∞-范畴结构引入 **曲李代数**$_\emptyset$，并证明伴随 Harr $\dashv \check{}CE$ 诱导出 ∞-范畴等价**曲李代数**$_\emptyset$ 与**DGCCog**之间的范畴等价。我们使用相对范畴作为 ∞-范畴的模型。首先回顾相对范畴及其同伦等价的定义，这些定义可见于 [2]。

定义 4.1。 *A***相对范畴** 是一个范畴 $\mathcal{C}$，它带有一个子范畴 $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$，称为弱等价，其中包含 $\mathcal{C}$ 的所有对象。**相对函子**是保持弱等价的函子。

两个相对函子 f、$g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 之间的**同伦** 是一个自然变换 $h : f \Longrightarrow g$，且 h 的所有分量都是弱等价。等价地，同伦是一个相对函子 $h\colon \mathcal{C} \times \mathbf{1} \to \mathcal{D}$，满足 $h(0,C) = f(C)$ 且 $h(1,C) = g(C)$。这里，$\mathbf{1}$ 是一个有两个对象的范畴 $\{0 \to 1\}$，其唯一的非恒等态射是弱等价。

相对函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是**同伦等价**，如果存在一个相对函子 $f'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，使得 $f'f$ 与 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 同伦，且 ff' 与 $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ 同伦。

带有其弱等价的模型范畴构成一个相对范畴。这就是我们将在**DGCCog**上考虑的相对范畴结构。**曲李代数**$_\emptyset$ 上的弱等价如下。

定义 4.2. 曲李代数之间的弯曲态射 $(f, a)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 称为弱等价，若满足以下条件：

- 诱导映射 $\mathrm{MC}(f)\colon \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}(\mathfrak{h})$ 是一个双射，
- 对于每个 $x \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$，微分分次李代数之间诱导的扭曲态射 $f\colon \mathfrak{g}_x \to \mathfrak{h}_{f(x)+a}$ 是拟同构。

˘ 我们证明，伴随中的两个函子 Harr $\dashv$ *CE* 相对于上述定义的弱等价是相对函子。

˘**命题 4.3.** 函子 Harr 和CE 保弱等价。

证明。设 $f\colon C = \coprod C_x \to C' = \coprod C'_x$ 是余交换余代数之间的一个弱等价，这些余代数表示为余幂零余代数的余积，即存在一个滤过拟同构 $C_x \xrightarrow{\sim} C'_x$，它连接由类群元素 x 索引的余幂零因子。根据 [10,命题 4.4.4]，，应用 *Harrison* 函子后，对每个 x 都得到微分分次李代数之间的拟同构 $Harr(Cx) \longrightarrow Harr(C'_x)$。现在需要证明 $(Harr(f), 0) : \coprod Harr(Cx) \to x\coprod Harr(C'_x)$ 是曲李代数之间的弱等价。由于对所有 x，$Harr(Cx)$ 都是余纤维微分分次李代数，因此它只有一个 *MC* 元素，即 *0*。在曲李代数范畴中取每个 $Harr(Cx)$ 的余积后，这些 *MC* 元素将彼此不同。我们分别将它们记为 ξ_x。我们可以定义一个双射，将 *Maurer-Cartan* 元素集合中的 ξ_x 映至 ξ'_x。因为 $(\coprod Harr(Cx))^{\xi_x}$ 与 $Harr(Cx)$ 之间存在拟同构。对于 C'_x 也同样如此。因此，$x\,(\coprod Harr(Cx))^{\xi_x}$ 与 $(\coprod Harr(C'_x))^{\xi'_x}$ 准同构。由此，*Harr* 保弱等价。$x\ x$

另一方面，若 $(f, a) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是弯曲李代数之间的弱等价，则存在 Maurer-Cartan 元素之间的双射 $\tilde{a} : \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}(\mathfrak{h})$，以及微分分次李代数之间的拟同构 $\mathfrak{g}^x \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{f(x)+a}$，对所有 $x \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ 均成立。然后我们分别考虑 ˘CE(g) 和 ˘CE(h)。

$$\begin{aligned}
\check{\mathrm{C}}\mathrm{E}(\mathfrak{g}) &= \Big(\coprod_{x\in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})} \mathrm{CE}(\mathfrak{g}^x)\Big) \coprod \Big(\coprod_{x\notin \mathrm{MC}(\mathfrak{g})} \mathrm{CE}(\mathfrak{g}^x)\Big);\\
\check{\mathrm{C}}\mathrm{E}(\mathfrak{h}) &= \Big(\coprod_{f(x)+a\in \mathrm{MC}(\mathfrak{h})} \mathrm{CE}(\mathfrak{h}^{f(x)+a})\Big) \coprod \Big(\coprod_{y\notin \mathrm{MC}(\mathfrak{h})} \mathrm{CE}(\mathfrak{h}^{y})\Big).
\end{aligned}$$

˘ 由于通过伴随 Harr $\dashv$ ˘ ˘ ˘ CE，MC(g) 与 Gp(CE(g)) 之间存在一一对应关系，$\tilde{a}$ 在 Gp(CE(g)) 与 Gp(CE(h)) 之间诱导出一个双射。此外，根据 [10, Proposition 4.4.3],，对 $\mathfrak{g}^x \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{f(x)+a}$ 应用 Chevalley-Eilenberg 函子，可得到余幂零余交换余代数 $\mathrm{CE}(\mathfrak{g}^x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CE}(\mathfrak{h}_{f(x)+a})$ 之间的一个拟同构。因此，˘CE 保持弱等价。□

ˇ 接下来，我们要证明 Harr 和 CE 是相对范畴之间互为同伦等价的函子。这等价于证明单位 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{DGCCog}} \Rightarrow \mathrm{CE} \circ \mathrm{Harr}$ 和余单位 $\varepsilon : \mathrm{Harr} \circ \mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{Id}^{\mathbf{CuLA}_{\mathfrak{0}}}$ 诱导出同伦。在证明这一点之前，我们需要以下关于曲李代数 MC 元素的结果。

我们首先介绍曲李代数范畴中余积的概念。

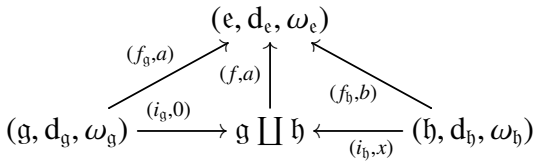
定义 *4.4*。曲李代数范畴中的余积在二元情形下最容易描述。设 $(g, d_{\mathfrak{g}}, \omega_{\mathfrak{g}})$ 和 $(h, d_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ 是两个曲李代数。余积 $g \coprod h$ 的底层分次李代数是由 g、h 中的元素以及一个次数为 1 的形式元 x 自由生成的李代数，记为 $(g * (h\langle x\rangle)^{-x}, d, \omega_{\mathfrak{g}})$。微分由以下规则给出：$\tilde{d}|_{\mathfrak{g}} = d_{\mathfrak{g}}$, $\tilde{d}|_{\mathfrak{h}} = d_{\mathfrak{h}} - [x, \cdot]$ 以及 $\tilde{d}(x) = \omega_{\mathfrak{h}} - \omega_{\mathfrak{g}} - \frac{1}{2}[x, x]$。$g \coprod h$ 的 *Maurer–Cartan* 元素集包含集合 $\{y_i\}_{i\in I} \cup \{z_j + x\}_{j\in J}$ 的并，其中 $\{y_i\}_{i\in I}$ 属于 $MC(g)$，而 $\{z_j\}_{j\in J}$ 属于 $MC(h)$。余积的曲率等于 $\omega_{\mathfrak{g}}$。两个包含弯曲态射定义为

$$
\begin{aligned}
(i_{\mathfrak{g}}, 0) &: (\mathfrak{g}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}, \omega_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{g} * (\mathfrak{h}\langle x\rangle)^{-x}, \tilde{\mathrm{d}}, \omega_{\mathfrak{g}});\\
(i_{\mathfrak{h}}, x) &: (\mathfrak{h}, \mathrm{d}_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}) \to (\mathfrak{g} * (\mathfrak{h}\langle x\rangle)^{-x}, \tilde{\mathrm{d}}, \omega_{\mathfrak{g}}).
\end{aligned}
$$

对于任意曲李代数 $(e, d_{\mathfrak{e}}, \omega_{\mathfrak{e}})$ 以及曲弯态射 $(f_{\mathfrak{g}}, a) : (g, d_{\mathfrak{g}}, \omega_{\mathfrak{g}}) \to (e, d_{\mathfrak{e}}, \omega_{\mathfrak{e}})$、$(f_{\mathfrak{h}}, b) : (h, d_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}) \to (e, d_{\mathfrak{e}}, \omega_{\mathfrak{e}})$，存在唯一的曲弯态射

$$
(f, a) : (\mathfrak{g}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}, \omega_{\mathfrak{g}}) \coprod (\mathfrak{h}, \mathrm{d}_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}) \to (\mathfrak{e}, \mathrm{d}_{\mathfrak{e}}, \omega_{\mathfrak{e}})
$$

定义如下：$f|_{\mathfrak{g}} = f_{\mathfrak{g}}$，$f|_{\mathfrak{h}} = f_{\mathfrak{h}}$ 以及 $f(x) = b - a$，使得下图交换 .



很容易验证这一构造的唯一性。

曲结合代数范畴中的余积也可类似地定义，参见 [15, 9。2]。我们回顾余纤维化微分分次结合代数的定义，这将有助于描述某些曲李代数的余积的 MC 元素。

定义 4.5。 若微分分次结合代数 (A, d) **是余纤维化的，** 即它在 [15, 9。1] 中给出的模型结构下是余纤维化的，则称之为余纤维化微分分次结合代数。也就是说，A 是由生成元 $x_{n,\alpha}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$ 生成的自由代数的收缩，并且 $d(x_{n,\alpha})$ 属于由 $x_{m,\beta}$ $(m < n)$ 生成的子代数。

引理 4.6。 设 A 是一个余纤维化微分分次结合代数，则 $A \coprod 0 := A\langle x\rangle^{-x}$ 只有两个 *Maurer-Cartan* 元：x 和0。

n 证明。由于 A 是余纤维化的，我们可以将 $\mathrm{A}\langle \mathrm{x}\rangle^{-x}$ 的一个 MC 元写成 $\xi = \sum \xi_i$，其中 ξ_i 是 $\mathrm{i}_{=0}$ 个含有 i 个 x 的词的线性组合。接着考虑 Maurer-Cartan 方程 n n n $\mathrm{d}_A(\sum \xi_i) + (\sum \xi_i)^2 = 0$。由于 $\mathrm{d}_A(\sum \xi_i)$ 中含 x 个数最多的项有 $\mathrm{i}_{=0}\mathrm{i}_{=0}\mathrm{n}\ \mathrm{n}+1$ 个 x，而 $(\sum \xi_i)^2$ 中 x 的最高出现次数为 2n，因此至多只有两项。即 ξ_0 和 ξ_1。于是我们可以假设 $\xi_1 = \lambda\mathrm{x} + \mathrm{ax} + \mathrm{xb} + \sum \mathrm{c}_i\mathrm{xe}_i$，其中 $\lambda \in \mathrm{k}\,\mathrm{i}$，且 a、b、$\mathrm{c}_i$、$\mathrm{e}_i \in \mathrm{A}$。直接计算可验证，$\xi_0 + \xi_1$ 是 $\mathrm{A}\langle \mathrm{x}\rangle^{-x}$ 的 Maurer-Cartan 元，当且仅当 $\xi_0 = 0$ 或 $\xi_1 = \mathrm{x}$。因此，$\mathrm{A}\langle \mathrm{x}\rangle^{-x}$ 只有两个 Maurer-Cartan 元：0 和 x。□

如果 g 是余纤维化微分分次李代数，那么其泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 是余纤维化微分分次结合代数。因此，$\mathfrak{g}\langle x\rangle \subseteq U(\mathfrak{g})\langle x\rangle$ 只有两个 Maurer-Cartan 元素：0 和 x。

引理 4.7。 设 A 是一个自由微分分次结合代数，B 是一个余纤维化微分分次结合代数，则 $\mathrm{MC}(A*B) = \mathrm{MC}(A)$，这意味着向 A 添加胞腔不会改变 *Maurer-Cartan* 元素。此外，如果 A 也是余纤维化的，则有 $\mathrm{MC}(B \coprod A) = \mathrm{MC}(B*(A\langle x\rangle)^{-x}) = \mathrm{MC}(A\langle x\rangle^{-x}) = \{0, x\}$。

证明。 由于 B 是一个余纤维化微分分次结合代数，我们可以选择 B 的一个基，记为 $\{y_i\}_{i\in I}$。我们还有以下包含关系

$$A \xrightarrow{i_0} A\langle y_0\rangle \xrightarrow{i_1} A\langle y_0\rangle\langle y_1\rangle \xrightarrow{i_2} \cdots \longrightarrow A * B$$

其微分满足 $\mathrm{dy}_0 \in \mathrm{A}$，$\mathrm{dy}_1 \in \mathrm{A}\langle \mathrm{y}_0\rangle$ .....。接下来我们要证明 $\mathrm{MC}(\mathrm{A}\langle \mathrm{y}_0\rangle) = \mathrm{nMC(A)}$。设 $\sum \xi_i$ 是 $\mathrm{A}\langle \mathrm{y}_0\rangle$ 的一个 Maurer-Cartan 元，其中 ξ_i 是含有 i 个 y_0 的项的线性组合。然后我们考虑 Maurer-Cartan 方程 $\mathrm{d}(\sum \xi_i) + \mathrm{i}_{=0}\mathrm{n}\ \mathrm{n}\ (\sum \xi_i)^2 = 0$。由于 $\mathrm{d}_A(\sum \xi_i)$ 中含有最多 y_0 的项有 n 次，而同样地 $(\sum \xi_i)^2$，中有 i $_{=0}$ $\mathrm{i}_{=0}\mathrm{n}$ 次，因此我们必须有 $\mathrm{n} = 0$。于是 $\xi = \xi_0 \in \mathrm{A}$，这意味着在 A 上添加一个胞腔 $\mathrm{y}_{=0_0}$ 不会改变 A 的 Maurer-Cartan 元素。使用相同的方法，通过将由 B 的基 $\{\mathrm{y}_i\}_{i\in I}$ 组成的胞腔添加到 A 上，我们可以得到 $\mathrm{MC}(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \mathrm{MC(A)}$。此外，根据引理 4.6，如果 A 是余纤维化的，则有 $\mathrm{MC}(\mathrm{A}\langle \mathrm{x}\rangle^{-x}) = \{0,\mathrm{x}\}$。因此我们推出 $\mathrm{MC}(\mathrm{B} \coprod \mathrm{A}) = \mathrm{MC}(\mathrm{B} * (\mathrm{A}\langle \mathrm{x}\rangle)^{-x}) = \mathrm{MC}(\mathrm{A}\langle \mathrm{x}\rangle^{-x}) = \{0, \mathrm{x}\}$。 □

引理 4.8。 $H^\bullet(U\mathfrak{g}) = U(H^\bullet\mathfrak{g})$。

证明。 参见 [14,附录 B：命题 2。1] 了解更多详情。 □

由此引理可知，若要证明微分分次李代数 g 和 h 准同构，只需证明它们的包络代数准同构。

引理 4.9。 设 A 是一个增广自由微分分次结合代数。那么 $H^\bullet(A\langle x\rangle^{-x}) = k$，这意味着 $(A\langle x\rangle^{-x}, \mathrm{d}^x)$ 是无环的。

证明。 我们直接构造一个链同伦 $s : A\langle x\rangle^{-x} \to A\langle x\rangle^{-x}$，它介于恒等映射 Id 和投影映射 p之间，使得

$$s : a \mapsto 0, \quad xb \mapsto b, \quad axb \mapsto 0, \quad \forall a \in A, b \in A\langle x\rangle.$$

我们可以验证 $\mathrm{d}^x s + s\mathrm{d}^x = \mathrm{Id} - p$，这意味着 $(A\langle x\rangle^{-x}, \mathrm{d}^x)$ 是无环的。 □

推论 4.10. 设 A 是余纤维化微分分次结合代数，B 是增广自由微分分次结合代数。那么 $H^\bullet(A \amalg B) = H^\bullet(A)$。

证明。 根据引理4.9，可得

$$H^\bullet(A \amalg B) = H^\bullet(A * (B\langle x\rangle)^{-x}) = H^\bullet(A) * H^\bullet(B\langle x\rangle^{-x}) = H^\bullet(A)$$

□

Prop ˇ**命题 4.11.** 对于任意曲李代数$\mathfrak{g}$，HarrCE($\mathfrak{g}$) 都与$\mathfrak{g}$弱等价。

˘证明. 若 g 没有 Maurer-Cartan 元素，则 HarrCE(g) 也没有 Maurer-Cartan 元素，因为 MC 是从曲李代数范畴到集合范畴的函子，并且 ˘˘˘ $\mathrm{HarrCE}_{\mathfrak{g}} : \mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 是余单位的分支。因此 HarrCE(g) 与 g 自然地弱等价。若 g 有 Maurer-Cartan 元素，我们考虑 HarrCE(g) 的泛包络代数，可得

$$U(\check{\mathrm{HarrCE}}(\mathfrak{g})) = U\Big(\mathrm{Harr}\Big(\coprod_{x\in\mathfrak{g}^{-1}} \mathrm{CE}(\mathfrak{g}^x)\Big)\Big) = \Big(\coprod_{x_i\in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})} U(\mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}^{x_i}))\Big) \coprod \Big(\coprod_{x\notin \mathrm{MC}(\mathfrak{g})} U(\mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}^x))\Big).$$

对于任意 $x \notin \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$，$U(\mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}^x))$ 是一个余纤维曲结合代数，它没有 Maurer-Cartan 元素。此外，对于任意 $x_i \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$，$U(\mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}^{x_i}))$ 是一个余纤维微分分次结合代数，且只有一个 Maurer-Cartan 元素 0。于是通过归纳法和引理4.7，我们可以得到 $\Big(\coprod_{x_i\in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})} U(\mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}^{x_i}))\Big)$ 与 $U(\mathfrak{g})$ 的 Maurer-˘ Cartan 元素数量相同，这意味着 HarrCE(g) 和 g 的 Maurer-Cartan 元素数量相同。

此外，我们将 $U(\mathrm{HarrCE}(\mathfrak{g}^{x_i}))$ 的 Maurer-Cartan 元记为 0_{x_i}，对所有 $x_i \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ 均如此。˘ 随后定义一个双射 $\tilde{}a$ 从 $\mathrm{MC}(U(\mathrm{HarrCE}\mathfrak{g}))$ 到 $\mathrm{MC}(U\mathfrak{g})$，将 0_{x_i} 映射为 x_i。然后根据引理 4.10，我们有

$$H^\bullet\Big(\big(U(\check{\mathrm{HarrCE}}(\mathfrak{g}^{x_i})) \coprod \Big(\coprod_{x\neq x_i} U\check{\mathrm{HarrCE}}(\mathfrak{g}^x)\Big)\big)^{0_{x_i}}\Big) = H^\bullet\Big(U(\check{\mathrm{HarrCE}}(\mathfrak{g}^{x_i}))\Big) = H^\bullet(U\mathfrak{g}^{x_i}).$$

由引理 4.8，我们有 $H^\bullet(\mathrm{Harr}\,\check{}\mathrm{CE}\mathfrak{g})^{0_{x_i}} = H^\bullet(\mathfrak{g}^{x_i})$，对所有 $0_{x_i} \in \mathrm{MC}(\mathrm{Harr}\,\check{}\mathrm{CE}\mathfrak{g})$。因此，˘ HarrCE(g) 弱等价于g。□

˘**命题 4.12**。对于任意余交换余代数 C，C 弱等价于 CEHarr(C)。

证明。对于任意余交换余代数C，我们有

$$\mathrm{Harr}(C) = \coprod_{x\in \mathrm{Gp}(C)} \mathrm{Harr}(C_x)$$

˘ 接着，应用扩展 Chevalley-Eilenberg 函子 CE 后，我们有

$$\check{\mathrm{CE}}\mathrm{Harr}(C) = \coprod_{0_x\in \mathrm{MC}(\mathrm{Harr}C)} \mathrm{CE}\Big(\coprod_{x\in \mathrm{Gp}(C)} \mathrm{Harr}(C_x)^{0_x}\Big)$$

其中，对于所有 $x \in \mathrm{Gp}(C)$，$\mathrm{Harr}(C_x)$ 是一个余纤维李代数，它只有一个 Maurer–Cartan 元素 0_x。注意到 $\mathrm{MC}(\mathrm{Harr}C)$ 与 $\mathrm{Gp}(\mathrm{CEHarr}(C))$ 之间存在一一对应，˘˘ 因为 (Harr, CE) 是一个伴随。我们将 $\alpha(x) \in \mathrm{Gp}(\mathrm{CEHarr}(C))$ 记作 $0_x \in\check{} \mathrm{MC}(\mathrm{Harr}C)$ 的转置。因此，α 是 $\mathrm{Gp}(C)$ 与 $\mathrm{Gp}(\mathrm{CEHarr}(C))$ 之间的一个双射。

此外，由于 $\big(\coprod_{x\in \mathrm{Gp}(C)} \mathrm{Harr}(C_x)\big)^{0_x}$ 与 $\mathrm{Harr}(C_x)$ 作为$x\in \mathrm{Gp}(C)$微分分次李代数之间存在拟同构。于是，利用 Chevalley-Eilenberg 函子 CE，$\mathrm{CE}\big(\coprod_{x\in \mathrm{Gp}(C)} \mathrm{Harr}(C_x)\big)^{0_x}$ 是滤过的$x\in \mathrm{Gp}(C)$

准同构于 $\mathrm{CE}(\mathrm{Harr}C_x)$，作为余幂零余交换余代数。后者也与$C_x$ 作为余幂零余代数弱等价。因此，C 与 CEHarr(C) 弱等价。□

˘**定理 4.13**。伴随 Harr $\dashv$ CE确定了 ∞-范畴**曲李代数**$_\emptyset$ 与**DGCCog**之间的等价。

证明。根据命题 4.11 和 4.12，伴随 Harr $\dashv$ CE 中单位与余单位的各分量，在各自的范畴中都是弱等价。因此，它们定义了

ˇˇ 相对函子 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{DGCCog}} \Rightarrow \mathrm{CE} \circ \mathrm{Harr}$ 与 $\varepsilon : \mathrm{Harr} \circ \mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{CuLA}_\emptyset}$ 之间的同伦。ˇ 这正是 CE 和 Harr 定义相对范畴之间同伦等价所需的条件，因此它们也定义了 ∞-范畴之间的等价。

□

参考文献

[1] C. Barwick, 《关于左、右模型范畴以及左、右 Bousfield 局部化》。Homology Homotopy Appl. 12（2010），第 2 期，245-320。10, 11[2] C. Barwick 和 D.M. Kan, 《相对范畴：同伦理论的一种新模型》。Indagationes Mathematicae 23（2012）42-68。2, 13[3] T. Beke, 《可层化同伦模型范畴》。Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 129（2000），447-475。10, 11[4] M. Booth 和 A. Lazarev, 《全局 Koszul 对偶》。arXiv 预印本 arXiv:2304.08409（2024）。2[5] J. Chuang、A. Lazarev 和 W.H. Mannan, 《余交换余代数：同伦理论与 Koszul 对偶》。Homology Homotopy Appl. 18（2016），第 6 期，303-336。2, 7, 11[6] W.G. Dwyer 和 J. Spali´nski, 《同伦理论与模型范畴》。代数拓扑手册。North-Holland，阿姆斯特丹，1995年，73-126。11[7] A. Guan, 《完备 L_∞-代数的规范等价》。Homology Homotopy Appl. 23（2021），第 2 期，283-297。6[8] A. Guan、A. Lazarev、Y. Sheng 和 R. Tang, 《变形理论综述 II：一种同伦方法》。Adv. Math. (China) 49（2020），第 3 期，278-298。10[9] D.K. Harrison, 《交换代数与上同调》。Trans. Amer. Math. Soc. 104（1962），191-204。[10] V. Hinich, 《作为形式栈的微分分次余代数》。J. Pure Appl. Algebra 162（2001），209-250。1, 3, 10, 14[11] M. Hovey, 《模型范畴》，Mathematical Surveys and Monographs 第 63 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（1999）。[12] J. Lurie, 《高阶拓扑斯理论》。Annals of Mathematics Studies。170（2011年）。11[13] J. Maunder, 《Koszul 对偶与弯曲李代数的同伦理论》。Homology Homotopy Appl. 19（2017），第 1 期，319-340。2, 7[14] L. Positselski, 《微分分次 Koszul 对偶：入门综述》。Bull. Lond. Math. Soc. 55（2023），第 4 期，1551-1640。1, 3, 16[15] L. Positselski, 《两类导出范畴、Koszul 对偶与余模-反模对应》。Mem. Amer. Math. Soc. 212（2011年），第 996 号。15[16] D. Quillen, 《有理同伦论》。Ann. of Math. 90（1969），205-295。1, 3[17] M. Makkai 和 R. Par´e, 《可达范畴：范畴模型论基础》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（1989）。11

数学与统计学系，兰卡斯特大学，兰卡斯特 LA1 4YF，英国电子邮箱: a.mallon@lancaster.ac.uk

吉林大学数学系，中国吉林省长春市 130012电子邮箱: wangyou888@jlu.edu.cn