arXiv:2603.23120v1 [math.QA] 24 Mar 2026

准粒子与 Kanade–Russell 及¨KURS¸UNGOZ 公式：Capparelli恒等式

ˇ ´Marijana Butorac、Slaven Kozic 和 Mirko Primc

Abstract. 我们在主实现中构造了类型为 $A_2^{(2)}$ 的扭仿射李代数的最高权为 $3\Lambda_0$ 的可积最高权模的准粒子基。具体而言，我们引入多色准粒子的概念，并找出准粒子之间的关系，从而构造标准模的张成集。最后，利用 Kanade–Russell 和 Kur¸sung¨oz 的 Capparelli恒等式的 Andrews–Gordon 型级数，证明了其线性无关性。

Contents

引言 1
1. 顶点算子构造预备知识 3
2. 李代数的准粒子 $A_2^{(2)}$ 6
3. $A_2^{(2)}$ -模的准粒子基 $L(3\Lambda_0)$ 7
4. 准粒子之间的关系 9
5. 定理 3.1 的证明 12
5.1. 初始条件 13
5.2. 张成集 13
5.3. 线性无关性 14
致谢 15
参考文献 15

Introduction

J. Lepowsky 和 S. Milne [LM78] 以及 J. Lepowsky 和 R. L. Wil- son [LW84]的研究开启了一项深入的研究计划：运用顶点算子代数理论，显式实现标准仿射李代数模的广义 Rogers–Ramanujan 恒等式（尤其参见 [Capp92, Capp93, Capp96, CMP25, KP18, MP87, N, PˇS16, PT25, TX95, T25]）。作为该计划的一部分，S. Capparelli 通过在主实现中构造由满足差二条件的分拆参数化的三级标准 $A_2^{(2)}$ 模的扭顶点算子基，发现了两个新的 Rogers–Ramanujan 型组合分拆恒等式（参见 [Capp93,Capp96]），这两个恒等式最初由文献 [A92] 证明（另见 [TX95]）。其中第一个恒等式可表述如下。

(M. Butorac) Faculty of Mathematics, University of Rijeka, Radmile Matejčić 2, 51000Rijeka, Croatia(S. Koˇzi´c 和 M. Primc) Department of Mathematics, Faculty of Science, University ofZagreb, Bijenička cesta 30, 10 000 Zagreb, Croatia电子邮箱地址：mbutorac@math.uniri.hr、kslaven@math.hr、primc@math.hr。2010 数学主题分类17B67（主要），17B69（次要）。关键词和短语组合基、准粒子、标准模。

与 n 互异且不与（模6）同余的部件构成的正整数分拆数，等于由 n 不小于二的部件构成、相邻部件之差至少为二且除非相邻部件之和是三的倍数，否则差至少为四的分拆数。

第一个 Capparelli 恒等式的解析形式为

$$\frac{1}{(q,q^5;q^6)(q^2,q^3,q^9,q^{10};q^{12})}=\frac{1}{(q,q^5;q^6)}\cdot\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{q^{2n_1^2+6n_1n_2+6n_2^2}x^{n_1+2n_2}}{(q;q)_{n_1}(q^3;q^3)_{n_2}}\Bigg|_{x=1},$$

其中，左侧（即对分拆部分施加同余限制的生成函数）由 Weyl–Kac 特征公式的主特化得到（参见 [L80], [K]）；而右侧，即具有部分差值限制的分拆的 Andrews–Gordon 型（正）生成函数，则由 S. Kanade 和 M. C. Russell 在 [KR19] 中，以及 K. Kur¸sung¨oz 在 [K18],中分别独立发现（另见 [K19]）。

运用 Capparelli 的方法，D. Nandi 在 [N] 中通过研究四级标准 $A_2^{(2)}$ -模，猜想了三个新的 Rogers–Ramanujan 型恒等式；这些恒等式由 M. Takigiku 和 S. Tsuchioka 在 [TT24]中证明。最近，S. Capparelli、A. Meurman 和 M. Primc 在 [CMP25] 中研究了最高权为 $A_2^{(2)}$ -模$5\Lambda_0$。

在本文中，我们研究主实现中的标准 $A_2^{(2)}$ 模，其最高权为 $3\Lambda_0$ 。受 A.Meurman 和 M.Primc 的工作 [MP87], 以及 S. Ko˘zi´c 和 M. Primc 的工作 [KP18], 启发，我们将单色准粒子的概念（另见 B. L. Feigin 和 A. V. Stoyanovsky 的工作 [FS94],以及 G. Georgiev 的工作 [G96]）推广到多色准粒子。特别地，对于正根 $\alpha=\alpha_1$ 和 $\beta=\alpha_1+\alpha_2$，我们将电荷二且能量为 n 的准粒子 $X(\alpha,\ \beta;\ n)$ 定义为

$$X^{(2)}(n)=\mathrm{Res}_\zeta\left(\zeta^{-n-1}X\left(\alpha,\beta;\zeta\right)\right),$$

其中

$$X\left(\alpha,\beta;\zeta\right)=\lim_{\zeta_1,\zeta_2\to\zeta}\left(\left(1+\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)\left(1-\omega^2\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^2\left(1-\omega\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)X\left(\alpha;\zeta_1\right)X\left(\beta;\zeta_2\right)\right),$$

并且 $X(\alpha;\ \zeta_1)\ =\sum X^{(1)}(j)\zeta_1^j$和 $X(\beta;\zeta_2)$ 分别是与 α和 β相关联的扭曲顶点算子。我们的主要结果表明，向量

$$\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)\,X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t)\,v_{3\Lambda_0},$$

其中 $i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_r<0$、 $i_p\equiv\pm1$ 模 6、 $j_1\leq j_2\leq\ldots\leq j_s<0$，以及 $k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_t<0$、 $k_p\equiv0$ 模 3，满足差分条件

$$j_p\leq j_{p+1}-4,\quad k_p\leq k_{p+1}-12,$$

以及初始条件

$$j_s\leq-2-6t,\quad k_t\leq-6$$

构成 $A_2^{(2)}$ -模 $L(3\Lambda_0)$的一组基。为了找出差分条件并证明给定的向量张成 $L(3\Lambda_0$，我们推导并研究了三级扭曲顶点算子之间的关系。最后，利用 Kanade–Russell–Kur¸sung¨oz 关于 Capparelli 第一恒等式的公式，证明了张成集的线性无关性。此外，Kanade–Russell–Kur¸sung¨oz 的 Andrews–Gordon 型双变量生成函数（5.5）对准粒子基中出现的电荷为 1 的准粒子与 n_1 电荷为 2 的准粒子 n_2 的乘积进行计数。

需要指出的是， $X(\alpha,\ \beta;\ \zeta)$ 出现在 [Capp93，定理 13] 中，并且在构造 $A_2^{(2)}$ -模 $L(3\Lambda_0)$ 的组合基时发挥关键作用。

1. Preliminaries on vertex operator construction

本节介绍 1 级标准 $A_2^{(2)}$ -模的顶点算子构造预备知识，遵循 [L85], [F87]。 [Capp92]和 [N], ，并采用或多或少标准的记号。

设 $L=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\mathbb{Z}\alpha_2$ 是一个 A_2 型格，配有非奇异对称归一化 $\mathbb{Z}$-双线性型 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，其生成元集合为

$$\Phi=\{\alpha\in L:\langle\alpha,\alpha\rangle=2\},$$

并具有一组基 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2\}$。遵循 [F87]，我们用 ν 表示一个阶为 6 的扭曲 Coxeter 自同构，使得 $\nu(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2,\ \ \nu(\alpha_2)=-\alpha_1$。这个无不动点等距变换 L满足

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}_6}\nu^p=0.$$

我们将 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和 ν 线性延拓至 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}L$。令 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{6}}$ 表示本原六次单位根。设

$$\mathfrak{h}=\coprod_{p\in\mathbb{Z}_6}\mathfrak{h}_{(p)},$$

其中 $\mathfrak{h}_{(p)}=\{x\in\mathfrak{h}:\nu x=\omega^p x\}$。注意，除非 $\mathfrak{h}_{(n)}=\{0\}$ （模 6），否则 $n\equiv\pm1$。对于 $\alpha\in\mathfrak{h}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，记 $\alpha_{(n)}$ 为 α 在 $\mathfrak{h}_{(n)}$上的投影。于是，除非 $\alpha_{(n)}=0$（模 6），否则$n\equiv\pm1$。

考虑与 $\mathfrak{h}$ （视为阿贝尔李代数）相关联的 ν-扭仿射李代数

$$\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu]=\coprod_{n\in\frac{1}{6}\mathbb{Z}}\mathfrak{h}_{(6n)}\otimes t^n\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d,$$

带括号的

$$[\alpha\otimes t^{\frac{n_1}{6}},\beta\otimes t^{\frac{n_2}{6}}]=\frac{n_1}{6}\langle\alpha,\beta\rangle\,\delta_{n_1+n_2,0}c,$$

$$[d,\alpha\otimes t^{\frac{n_1}{6}}]=\frac{n_1}{6}\alpha\otimes t^{\frac{n_1}{6}},$$

对于 $\alpha\in\mathfrak{h}_{(n_1)}$、$\beta\in\mathfrak{h}_{(n_2)}$、 $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$（其中我们将 $\mathfrak{h}_{(n_1)}=\mathfrak{h}_{(n_1 \bmod 6)}$ 视为同一对象），以及

$$[c,\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu]]=0.$$

考虑 $\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu]$ 的以下子代数：

$$\widehat{\mathfrak{h}}[\nu]_{\pm}=\coprod_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ \pm n>0}}\mathfrak{h}_{(n)}\otimes t^{\frac{n}{6}},$$

$$\mathfrak{b}[\nu]=\widehat{\mathfrak{h}}[\nu]_+\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d,$$

and

$$\widehat{\mathfrak{h}}[\nu]=\widehat{\mathfrak{h}}[\nu]_+\oplus\widehat{\mathfrak{h}}[\nu]_-\oplus\mathbb{C}c,$$

它是 $\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu]$ 的海森堡子代数。

构造诱导的 $\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu]$-模

$$V=U(\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu])\otimes_{U(\mathfrak{b}[\nu])}\mathbb{C},$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $\mathfrak{h}[\nu]_+\oplus\mathbb{C}d$ 的作用平凡，而 c 的作用为 1；这是一个不可约的 $\mathfrak{h}[\nu]$-模，且与对称代数 $S(\mathfrak{h}[\nu]_-)$ 线性同构。 d 的作用在 V 上定义了一个 $\mathbb{Q}$-分次。

$$V=\coprod_{n\in-\frac{1}{6}\mathbb{Z}}V_{(n)},$$

其中 $V_{(n)}$ 是 d的 n-特征子空间。

我们将形式变量 ζ,ζ_j称为形式变量 $z^{-1/6},z_j^{-1/6}$，它们取自[Capp92] 和 [自然数集]。对于 $\alpha\in\mathfrak{h},n\in\mathbb{Z}$，记 $\alpha(n)$为作用在 V 上的算子，其对应于$\alpha_{(n)}\otimes t^{\frac{n}{6}}\in\widetilde{\mathfrak{h}}[\nu]$，并令

$$\alpha(\zeta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha(n)\zeta^n\in\mathrm{End}(V)\{\zeta\}.$$

对于 $\alpha\in\mathfrak{h}$ 和 $p\in\mathbb{Z}_6$，我们考虑形式洛朗级数

$$E^{\pm}(\nu^p\alpha;\zeta)=\exp\left(6\sum_{\pm n>0}\alpha(n)\frac{(\omega^p\zeta)^n}{n}\right)=\sum_{\pm n\geq 0}E^{\pm}(\alpha;n)\omega^{pn}\zeta^n,$$

并且对于 $\alpha,\beta\in\mathfrak{h}$，交换关系为

$$E^+(\alpha;\zeta_1)E^-(\beta;\zeta_2)=\prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\langle\nu^p\alpha,\beta\rangle}E^-(\beta;\zeta_2)E^+(\alpha;\zeta_1).$$

对于 $\alpha\in\mathfrak{h}$，令

$$X(\alpha;\zeta)=c_\alpha E^-(-\alpha;\zeta)E^+(-\alpha;\zeta),\tag{1.1}$$

其中 $c_\alpha=\frac{1+\omega}{36}$，（参见 [KKLW81], [L85]）。对于 $n\in\mathbb{Z}$，通过展开定义分量算子 $X(\alpha,n)$

$$X(\alpha;\zeta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}X(\alpha;n)\zeta^n.\tag{1.2}$$

于是我们有

$$X(\nu^p\alpha;n)=X(\alpha;n)\omega^{pn},\tag{1.3}$$

对所有的 $p\in\mathbb{Z}_6$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，并且

$$DX(\alpha;\zeta)=-\left[d,X(\alpha;\zeta)\right],$$

其中 $D=D_\zeta=\zeta\frac{d}{d\zeta}$。

设 $\alpha,\beta\in\Phi$。令 $I(n)=\{p\in\mathbb{Z}_6\colon\langle\nu^p\alpha,\beta\rangle=n\}$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。交换关系如下所示

$$[\alpha(\zeta_1),X(\alpha;\zeta_2)]=\sum_{n\equiv\pm1\ \mathrm{mod}\ 6}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^n X(\alpha;\zeta_2),\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}[X(\alpha;\zeta_1),X(\beta;\zeta_2)]=&\frac{1}{6}\sum_{p\in I(-1)}\epsilon(\nu^p\alpha,\beta)\,X(\nu^p\alpha+\beta;\zeta_2)\,\delta(\omega^{-p}\zeta_1/\zeta_2)\\&+\frac{\epsilon(\beta,-\beta)}{6^2}\sum_{p\in I(-2)}\left(c\,D\delta(\omega^{-p}\zeta_1/\zeta_2)-6\beta(\zeta_2)\,\zeta_2^{-6}\,\delta(\omega^{-p}\zeta_1/\zeta_2)\right),\end{aligned}\tag{1.5}$$

其中 $\epsilon\colon\ L\times L\to\mathbb{C}^*$ 定义为

$$\epsilon(\alpha,\beta)=(-1)^{\langle\nu^{-1}\alpha+\nu^{-2}\alpha,\beta\rangle}\omega^{\langle\nu^{-1}\alpha+2\nu^{-2}\alpha,\beta\rangle}.$$

我们还将使用以下关系

$$E^+(\alpha;\zeta_1)X(\beta;\zeta_2) = \prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\langle\nu^p\alpha,\beta\rangle} X(\beta;\zeta_2)E^+(\alpha;\zeta_1), \tag{1.6}$$

$$X(\alpha;\zeta_1)E^-(\beta;\zeta_2) = \prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\langle\nu^p\alpha,\beta\rangle} E^-(\beta;\zeta_2)X(\alpha;\zeta_1). \tag{1.7}$$

特别地，对于 $x=\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$，我们有

$$\prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}x\right)^{\langle\nu^p\alpha,\alpha\rangle} = \frac{(1-x)^2(1-\omega^{-1}x)(1-\omega^{-5}x)}{(1-\omega^{-2}x)(1-\omega^{-3}x)^2(1-\omega^{-4}x)},$$

$$\prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}x\right)^{\langle\nu^p\alpha,\nu\alpha\rangle} = \frac{(1-x)(1-\omega^{-1}x)^2(1-\omega^{-2}x)}{(1-\omega^{-3}x)(1-\omega^{-4}x)^2(1-\omega^{-5}x)}.$$

定义李代数 $\mathfrak{g}$ 如下：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathbb{C}x_\alpha$$

其括号运算为

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] &= 0,\\
[h,x_\alpha] &= \langle h,\alpha\rangle\, x_\alpha,\\
[x_\alpha,x_\beta] &= \begin{cases}\epsilon(\alpha,-\alpha)\alpha & \text{if}\quad \alpha+\beta=0\\ \epsilon(\alpha,\beta)x_{\alpha+\beta} & \text{if}\quad \langle\alpha,\beta\rangle=-1\\ 0 & \text{if}\quad \langle\alpha,\beta\rangle\geq 0,\end{cases}
\end{aligned}$$

对于 $h\in\mathfrak{h}$ 和 $\alpha,\ \beta\in\Phi$。将形式 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 延拓到 $\mathfrak{g}$，定义为

$$\begin{aligned}
\langle h,x_\alpha\rangle &= 0,\\
\langle x_\alpha,x_\beta\rangle &= \begin{cases}\epsilon(\alpha,-\alpha) & \text{if}\quad \alpha+\beta=0\\ 0 & \text{if}\quad \alpha+\beta\neq 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

我们将继续用同一符号 ν 表示从 $\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的自同构的延拓，其定义为

$$\nu x_\alpha = x_{\nu\alpha}.$$

对于 $n\in\mathbb{Z}$，将 ν 在 $\mathfrak{g}$中的 ω^n-特征子空间记为

$$\mathfrak{g}_{(n)}=\{x\in\mathfrak{g}\mid \nu(x)=\omega^n x\},$$

并令 π_n 为 $\mathfrak{g}_{(n)}$上的 $\mathfrak{g}$ 投影。构造与 $\mathfrak{g}$和 ν相关联的 ν-扭仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]$：

$$\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]=\coprod_{n\in\frac{1}{6}\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{(6n)}\otimes t^n\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}D.$$

对于 $x\in\mathfrak{g}_{(n)}$ 和 $n\in\frac{1}{6}\mathbb{Z}$，令 $x(n)=x\otimes t^n$，则 $\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]$ 中的交换关系为

$$[x(n_1),y(n_2)]=[x,y](n_1+n_2)+\langle x,y\rangle\, n_1\delta_{n_1+n_2,0}c,\ [c,\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]]=0,\ [D,x(n)]=nx(n).$$

李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]$ 是类型为 $A_2^{(2)}$ 的仿射李代数主实现的一个副本（参见 [F87], [K], [N]）。令 $\{h_i,e_i,f_i\colon i=0,1\}$ 为 $\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]$的典范生成元。我们有 $c=h_0+2h_1$。令 $\Lambda_i\,(i=0,1)$ 为基本权，使得对于所有 $j=0,1$，$\Lambda_i(h_j)=\delta_{ij}$。令 $L(\Lambda_i)$ 为对应的标准 $A_2^{(2)}$ 模，其层级为 $\Lambda_i(c)=$

$\sim\Lambda_i(h_0)+2\Lambda_i(h_1)$。根据 [L85] 在 $\mathfrak{h}[\nu]$ 上的表示 V 可唯一扩张为 $\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu]$ 在 V 上的忠实不可约李代数表示，使得

$$x_\alpha(n)\mapsto X(\alpha;n)$$

对于所有的 $n\in\mathbb{Z}$ 和 $\alpha\in\Phi$。

2. Quasi-particles for the Lie algebra $A_2^{(2)}$

我们考虑扭仿射李代数 $A_2^{(2)}$ 在其标准模 $L(\Lambda)$ 上的作用。特别地，使用 [F87], 中的记号，形式幂级数 (1.2) 的作用满足

$$X(\alpha;\zeta)\in \mathrm{Hom}(L(\Lambda),L(\Lambda)((\zeta))). \tag{2.1}$$

固定 $r\in\mathbb{N}$ 和 $\delta_1,\dots,\delta_r\in\Phi$，使得 $\langle\delta_i,\delta_j\rangle\geq 0$，对于每个 $1\leq i,j\leq r$，令

$$P_{\delta_1,\dots,\delta_r}(\zeta_1,\dots,\zeta_r)=\prod_{1\leq i<j\leq r}P_{\delta_i,\delta_j}\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right), \tag{2.2}$$

其中

$$P_{\delta_i,\delta_j}\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)=\prod_{\substack{p\in\mathbb{Z}_m\\ \langle\nu^p\delta_i,\delta_j\rangle<0}}\left(1-\omega^{-p}\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)^{-\langle\nu^p\delta_i,\delta_j\rangle}. \tag{2.3}$$

例 1. 对于 $r=4$ 和 $\beta=\nu(\alpha)$，有

$$P_{\alpha,\beta,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)=P_{\alpha,\beta}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)P_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_3}\right)P_{\alpha,\beta}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_4}\right)P_{\beta,\alpha}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_3}\right)P_{\beta,\beta}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_4}\right)P_{\alpha,\beta}\left(\frac{\zeta_3}{\zeta_4}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}P_{\alpha,\beta}\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)=\overline{P_{\beta,\alpha}}\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right) &= \left(1+\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)\left(1-\omega^2\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)^2\left(1-\omega\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right),\\ P_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)=P_{\beta,\beta}\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right) &= \left(1+\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)^2\left(1+\omega\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right)\left(1-\omega^2\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\right).\end{aligned}$$

注意，$P_{\alpha,\alpha}(1)\neq 0$ 以及 $P_{\alpha,\beta}(1)\neq 0$。

交换关系 (1.5) 表明，对于任意正整数 r 和一个置换 $\sigma\in\mathcal{S}_r$，我们有

$$P_{\delta_1,\dots,\delta_r}(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\,X(\delta_1;\zeta_1)\cdots X(\delta_r;\zeta_r)=P_{\delta_1,\dots,\delta_r}(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\,X(\delta_{\sigma_1};\zeta_{\sigma_1})\cdots X(\delta_{\sigma_r};\zeta_{\sigma_r}),$$

因此，上述等式两边都属于 $\mathrm{Hom}(L(\Lambda),L(\Lambda)((\zeta_{\sigma_1}))\dots((\zeta_{\sigma_r})))$。由于 σ 是任意的，我们得出 $P_{\delta_1,\dots,\delta_r}(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\,X(\delta_1;\zeta_1)\cdots X(\delta_r;\zeta_r)$ 是交集中的一个元素

$$\bigcap_{\sigma\in\mathcal{S}_r}\mathrm{Hom}(L(\Lambda),L(\Lambda)((\zeta_{\sigma_1}))\dots((\zeta_{\sigma_r})))=\mathrm{Hom}(L(\Lambda),L(\Lambda)((\zeta_1,\dots,\zeta_r))).$$

因此，极限

$$X(\delta_1,\dots,\delta_r;\zeta)=\lim_{\zeta_i\to\zeta}P_{\delta_1,\dots,\delta_r}(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\,X(\delta_1;\zeta_1)\cdots X(\delta_r;\zeta_r) \tag{2.4}$$

存在。沿用 S. Kožić 和 M. Primc 在 [KP18], 中的方法，我们称 $X(\delta_1,\dots,\delta_r;n)$ 为一个系数

$$X(\delta_1,\dots,\delta_r;\zeta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}X(\delta_1,\dots,\delta_r;n)\,\zeta^n, \tag{2.5}$$

该电荷为 r、能量为 n (另见 [FS94], [G96]) 的准粒子。由 [Capp92，命题 3.3] (另见 [MP87]) 可知，电荷为 r、能量为 n 的准粒子等于可求和族 $\sum_{n_1+\cdots+n_r=n} f(n_1,\ldots,n_r)$ 的无穷和

$$\{f(n_1,\ldots,n_r) : n_1+\ldots+n_r=n\}$$

其定义为

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r\in\mathbb{Z}} f(n_1,\ldots,n_r)\zeta_1^{n_1}\ldots\zeta_r^{n_r} = P_{\delta_1,\ldots,\delta_r}(\zeta_1,\ldots,\zeta_r)\,X(\delta_1;\zeta_1)\cdots X(\delta_r;\zeta_r).$$

我们将使用以下引理，它可由关系式（1.4）、（1.6）和（1.7）推出。

引理 2.1. 对于固定的 α、$\delta\in\Phi$ 和 $\beta=\nu(\alpha)$，有

a) $[\alpha(\zeta_1), X(\alpha,\beta;\zeta_2)] = \sum_{n\equiv\pm1 \mod 6}(1+\omega^{-n})\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^n X(\alpha,\beta;\zeta_2)$,

b) $X(\alpha,\beta;\zeta_1)E^-(\delta;\zeta_2) = \prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\langle\nu^p(\alpha+\beta),\delta\rangle} E^-(\delta;\zeta_2)X(\alpha,\beta;\zeta_1)$,

c) $E^+(\delta;\zeta_1)X(\alpha,\beta;\zeta_2) = \prod_{p\in\mathbb{Z}_6}\left(1-\omega^{-p}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\langle\nu^p\delta,\alpha+\beta\rangle} X(\alpha,\beta;\zeta_2)E^+(\delta;\zeta_1)$.

3. Quasi-particle basis of the $A_2^{(2)}$-module $L(3\Lambda_0)$

与上一节一样，我们考虑扭仿射李代数$A_2^{(2)}$ 在其标准模 $L(3\Lambda_0)$ 上的作用。我们的目标是在下文给出主要结果——定理 3.1，并介绍一些相关术语，这些术语将在第 4 节和第 5节的证明中用到。记 $v_{3\Lambda_0}$ 为 $L(3\Lambda_0)$ 的最高权向量。

回顾 $\mathfrak{h}[\nu]$在 $L(3\Lambda_0)$ 上的滤过（参见 [LW84]）：

$$\{0\} = L(3\Lambda_0)_{(-1)} \subset L(3\Lambda_0)_{(0)} \subset L(3\Lambda_0)_{(1)} \subset \ldots \subset L(3\Lambda_0), \tag{3.1}$$

$$L(3\Lambda_0) = \bigcup_{j\geq 0} L(3\Lambda_0)_{(j)},$$

其中， $j\in\mathbb{Z}$

$$L(3\Lambda_0)_{(j)} = U_{(j)}v_{3\Lambda_0} \subset L(3\Lambda_0), \tag{3.2}$$

$U=U(\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu])$， $U_{(j)}=\{0\}$ 对于 $j<0$、 $U_{(0)}=U(\mathfrak{h}[\nu])$ 以及对于 $j>0$

$$U_{(j)} = \operatorname{span}\left\{x_1\cdots x_n\in U : x_i\in\widetilde{\mathfrak{g}}[\nu] \text{ and at most } j \text{ of } x_i \text{ lie outside } \widehat{\mathfrak{h}}[\nu]\right\}. \tag{3.3}$$

定义 3.1. 将算子 $X(\alpha;\zeta)$，由 (1.2) 给出，其中 $\alpha=\alpha_1$，记作

$$X^{(1)}(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X^{(1)}(n)\,\zeta^n,$$

和 $X(\alpha,\ \beta;\ \zeta)$，由（2.4）对 $r=2,\ \delta_1=\alpha=\alpha_1,\ \delta_2=\beta=\alpha_1+\alpha_2$，定义为

$$X^{(2)}(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X^{(2)}(n)\,\zeta^n.$$

沿用第2节的术语，我们将系数 $X^{(1)}(n)$（分别将$X^{(2)}(n)$ 称为电荷1（分别为电荷2）、能量为 n的准粒子。

By u式（1.4）和（1.5），对于任意排列 $\sigma\in\mathcal{S}_n$和 m_1，……，$m_n\in\mathbb{Z}$，我们有 ve

$$X^{(1)}(m_{\sigma(1)})\cdots X^{(1)}(m_{\sigma(n)})v_{3\Lambda_0} - X^{(1)}(m_1)\cdots X^{(1)}(m_n)v_{3\Lambda_0} \in L(3\Lambda_0)_{(n-1)}. \tag{3.4}$$

由（3.4）可知，对于任意排列 $\sigma\in\mathcal{S}_n$，都有

$$X^{(2)}(m_{\sigma(1)})\cdots X^{(2)}(m_{\sigma(n)})v_{3\Lambda_0} - X^{(2)}(m_1)\cdots X^{(2)}(m_n)v_{3\Lambda_0} \in L(3\Lambda_0)_{(2n-1)}. \tag{3.5}$$

根据泛包络代数 $U = U(\tilde{\mathfrak{g}}[\nu])$ 的庞加莱–比尔霍夫–维特定理， $L(3\Lambda_0)$ 的张成集可描述为由单项式向量组成的集合

$$\{\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)\,X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_v)\,v_{3\Lambda_0}\}$$

使得对于每个 $1 \le p \le r$， $i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_r < 0$ 和 $i_p \equiv \pm 1$ 模 6，并且使得 $j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_v < 0$。

如 [KP18] （另见 [G96]）中所述，对于形如 b 的准粒子单项式

$$b = X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t), \tag{3.6}$$

我们将其颜色类型定义为（s, t）；（总）电荷定义为 $s+2t$；次数类型定义为（$j_1, \cdots, j_s$； $k_1, \cdots, k_t$），而（总）次数定义为 $j_1 + \cdots + j_s + k_1 + \cdots + k_t$。

在准粒子单项式（3.6）的集合上，我们定义如下线性序“≤”。对于准粒子单项式 b, b' 如（3.6）中所示，若满足以下条件之一，则记作 $b \le b'$：

- b 的总荷大于 b的总荷；

  b 和 b' 的总荷相同，且相对于逆字典序， b 的颜色类型小于 b' 的颜色类型；

  b 和 b' 的颜色类型相同，且相对于逆字典序， b 的次数类型小于 b' 的次数类型。

最后，我们将线性序扩展到所有单项式构成的集合上

$$a\,b = \underbrace{\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)}_{a}\;\underbrace{X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t)}_{b}. \tag{3.7}$$

首先，定义次数类型为 $a = \alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)$ 为 $(i_1, \ldots, i_r)$。然后，对于如 (ab和 $a'b'$) 中的单项式3.7，我们写作

$$a\,b \le a'\,b' \tag{3.8}$$

如果 $b \le b'$ 或 $b = b'$ 且 a 的次数类型小于 a' 的次数类型（相对于逆字典序）。此外，我们将（总）荷的概念推广到所有形如 (3.7) 的单项式 ab，将其定义为 b的（总）荷，即 $s+2t$。因此，海森堡子代数的生成元不会影响总荷。

下一个定理是本文的主要结果。

定理 3.1。 单项式向量

$$\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)\,X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t)\,v_{3\Lambda_0} \tag{3.9}$$

使得

$$i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_r < 0, \quad i_p \equiv \pm 1 \mod 6, \tag{3.10}$$
$$j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_s < 0, \tag{3.11}$$
$$k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_t < 0, \quad k_p \equiv 0 \mod 3, \tag{3.12}$$
$$j_p \le j_{p+1} - 4, \quad k_p \le k_{p+1} - 12, \tag{3.13}$$
$$j_s \le -2 - 6t, \quad k_t \le -6 \tag{3.14}$$

构成标准模 $L(3\Lambda_0)$的一组基。

注意，由（3.13）可知，相邻的电荷一准粒子的次数至少相差 4（相邻的电荷二准粒子的次数至少相差 12）。我们常将（3.13）称为差分条件。至于（3.14），它意味着所有电荷一准粒子（相应地，电荷二准粒子）的次数均小于或等于 -2 （相应地，-6）。我们将（3.14）称为初始条件。

4. Relations for quasi-particles

本节中，我们研究算子 $X^{(1)}(\zeta)$ 和 $X^{(2)}(\zeta)$ 在$L(3\Lambda_0)$上满足的关系，并得到一些中间结果，用于证明定理 3.1。在本文余下部分中，令

$$\alpha=\alpha_1,\quad \beta=\alpha_1+\alpha_2=\nu(\alpha)\quad\text{and}\quad \gamma=\alpha_2=\nu^2(\alpha). \tag{4.1}$$

由（2.4）的特殊情形可得

$$X(\alpha,\alpha;\zeta)=\lim_{\zeta_i\to\zeta}P_{\alpha,\alpha}(\zeta_1,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X^{(1)}(\zeta_2). \tag{4.2}$$

结合显式公式（1.1）和嵌入

$$L(3\Lambda_0)\hookrightarrow L(\Lambda_0)\otimes L(\Lambda_0)\otimes L(\Lambda_0), \tag{4.3}$$

（4.2）中的表达式可写为

$$\lim_{\zeta_i\to\zeta}P_{\alpha,\alpha}(\zeta_1,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X^{(1)}(\zeta_2)=\kappa\,E^-(-\alpha;\zeta)\,X(-\alpha;\zeta)\,E^+(-\alpha;\zeta)$$

对于某个非零 $\kappa\in\mathbb{C}$（参见 [MP87，定理 6.6]）。由于 $\nu^3(\alpha)=-\alpha$，我们可以利用（1.3）将上述等式写为

$$\lim_{\zeta_i\to\zeta}P_{\alpha,\alpha}(\zeta_1,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X^{(1)}(\zeta_2)=\kappa\,E^-(-\alpha;\zeta)\,X^{(1)}(-\zeta)\,E^+(-\alpha;\zeta). \tag{4.4}$$

接下来，考虑（2.4）的以下特例：

$$\lim_{\zeta_i\to\zeta}P_{\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X(\beta;\zeta_2)=X^{(2)}(\zeta).$$

由于 $\nu(\alpha)=\beta$，再次运用（1.3），可以将上述恒等式写成 s

$$\lim_{\zeta_i\to\zeta}P_{\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X^{(1)}(\omega\zeta_2)=X^{(2)}(\zeta). \tag{4.5}$$

引理 4.1. 对于任意的 i、$j\in\mathbb{Z}$ 和 $v\in L(3\Lambda_0)$，向量

$$X^{(1)}(i)X^{(1)}(j)v\quad \textit{such that}\quad |i-j|<4 \tag{4.6}$$

可以用以下向量表示

$$\alpha(i+j)\,v,\ X^{(1)}(i+j)\,v,\ X^{(2)}(i+j)\,v, \tag{4.7}$$

$$X^{(1)}(a)X^{(1)}(b)v\ \textit{such that}\ |a-b|\geq 4\ \textit{and}\ a+b=i+j, \tag{4.8}$$

$$E^-(-\alpha;-a)X^{(1)}(b)v\ \textit{such that}\ -a+b=i+j\ \textit{and}\ a>0, \tag{4.9}$$

$$X^{(1)}(b)E^+(-\alpha;a)v\ \textit{such that}\ a+b=i+j\ \textit{and}\ a>0, \tag{4.10}$$

$$E^-(-\alpha;\ -a_1)X^{(1)}(b)E^+(-\alpha;\ a_2)v\ \text{使得}\ a_2-a_1+b=i+j\ \text{且}\ a_1,\ a_2>0. \tag{4.11}$$

证明。该引理由准粒子关系（4.4）和（4.5）得出。更具体地说，提取它们左端（分别是右端）中 ζ^{i+j} 的系数，可得到向量（4.6）和（4.8）（分别是（4.7）和（4.9）–（4.11））的线性组合。因此，将向量（4.8）移至等式右端，可将向量（4.6）的两个线性组合表示为（4.7）–（4.11）的线性组合。由（1.5），这可视为一个关于两个未知数的二元线性方程组，

$$X^{(1)}(i)X^{(1)}(j)v\quad\text{such that}\quad |i-j|<4\quad\text{and}\quad i\leq j.$$

通过直接计算可知，该系统的矩阵是正则的，这就证明了引理。□

回顾一下，根 α， β 和 γ 由（4.1）给出。利用（1.1）以及嵌入（4.3），我们得到

$$E^-(\alpha;\zeta)X(\alpha,\beta;\zeta) = X(-\alpha,\gamma;\zeta)E^+(-\alpha;\zeta)$$

关于 $L(3\Lambda_0)$（参见 [Capp93，定理 13]）。由 $\nu^2(\beta) = -\alpha$， $\nu^2(\alpha) = \gamma$ 以及（1.3），可得

$$R(\zeta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n)\,\zeta^n := E^-(\alpha;\zeta)X^{(2)}(\zeta) - X^{(2)}(\omega^2\zeta)E^+(-\alpha;\zeta) = 0. \tag{4.12}$$

引理 4.2。 对于任意满足 $n \neq 0$ 模 3 且 $v \in L(3\Lambda_0)$的 $n \in \mathbb{Z}$，向量 $X^{(2)}(n)v$可以表示为以下向量的线性组合

$$E^-(\alpha;-i)X^{(2)}(n+i)v \quad and \quad X^{(2)}(n-i)E^+(\alpha;i)v \quad with \quad i>0.$$

证明。 该引理由（4.12）可直接推出。事实上，将这一关系作用于向量 $v \in L(3\Lambda_0)$，然后提取 ζ^n的系数，得到

$$\left(1-\omega^{2n}\right)X^{(2)}(n)v + \sum_{i>0} E^-(\alpha;-i)X^{(2)}(n+i)v - \sum_{i>0}\omega^{2(n-i)}X^{(2)}(n-i)E^+(\alpha;i)v = 0$$

因为对所有 n，都有 $R(n)v = 0$。将等式两边除以 $1-\omega^{2n}$（当 $n \not\equiv 0$模 3 时它非零），便得到所需的 $X^{(2)}(n)v$ 分解。□

由交换关系（1.5），我们有

$$P_{\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2)\,[X(\alpha;\zeta_1),X(\beta;\zeta_2)] = 0 \quad \text{for any } \alpha,\beta\in\Phi,$$

由于多项式 $P_{\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2)$ 会消去（1.5）右侧出现的 δ 函数。设 n 和 m 为非负整数。类似地，将 $D^n_{\zeta_1}D^m_{\zeta_2}$ 应用于（1.5），再将所得恒等式乘以 $P_{\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2)^{n+m+1}$，即可得到

$$P_{\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2)^{n+m+1}\left[D^n_{\zeta_1}X(\alpha;\zeta_1), D^m_{\zeta_2}X(\beta;\zeta_2)\right] = 0 \quad \text{for any } \alpha,\beta\in\Phi,\ n,m\geq 0. \tag{4.13}$$

引理 4.3。 取正整数 r 和 s 以及根 γ_i、 $\delta_j \in \{\alpha,\beta\}$，其中 $i = 1$、…、 r 和 $j = 1$、…、 s。对于任意非负整数 n_1、…、 n_r，存在一个多项式$P(\zeta_1$、…、 ζ_r、 ξ_1、…、 $\xi_s)$，使得 $P(1$、…、$1) \neq 0$，并且存在一个极限

$$\lim_{\zeta_i,\xi_j\to\chi} P(\zeta_1,\dots,\zeta_r,\xi_1,\dots,\xi_s)\left(\prod_{i=1}^r D^{n_i}_{\zeta_i}X(\gamma_i;\zeta_i)\right)\left(\prod_{k=1}^s X(\delta_k;\xi_k)\right). \tag{4.14}$$

证明。 由（4.13）显然可知，对于4.14）中的极限存在

$$\begin{aligned} &P(\zeta_1,\dots,\zeta_r,\xi_1,\dots,\xi_s)\\ &= \prod_{1\leq i<j\leq r} P_{\gamma_i,\gamma_j}(\zeta_i,\zeta_j)^{n_i+n_j+1}\prod_{i=1}^r\prod_{k=1}^s P_{\gamma_i,\delta_k}(\zeta_i,\xi_k)^{n_i+1}\prod_{1\leq k<l\leq s} P_{\delta_k,\delta_l}(\xi_k,\xi_l). \end{aligned}$$

最后，断言 $P(1,\dots,1) \neq 0$ 可直接由 (2.2)、(2.3) 以及引理的假设得出：所有 γ_i 和 δ_j 都属于 $\{\alpha,\beta\}$。□

根据交换关系 (1.5), 存在一个正整数 N 使得对所有i_1， i_2， j_1， $j_2 \geq 0$ 满足 $i_1+i_2+j_1+j_2 \leq 3$的情形，极限

$$\lim_{\zeta_1,\zeta_2\to\zeta} D^{i_1}_{\zeta_1}D^{j_1}_{\zeta_2}\left(P_{\alpha,\beta,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)^N\right)D^{i_2}_{\zeta_1}\left(X^{(2)}(\zeta_1)\right)D^{j_2}_{\zeta_2}\left(X^{(2)}(\zeta_2)\right) \tag{4.15}$$

存在。注意

$$X(\alpha,\beta,\alpha,\beta;\zeta) = \kappa\lim_{\zeta_1,\zeta_2\to\zeta} P_{\alpha,\beta,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)^N X^{(2)}(\zeta_1)X^{(2)}(\zeta_2) \tag{4.16}$$

对于某个非零 $\kappa \in \mathbb{C}$。应用 D_ζ^m与 $m = 0$，1、2、3 到 (4.16) 可得四个准粒子关系，

$$\begin{aligned} &D_\zeta^m X(\alpha,\beta,\alpha,\beta;\zeta) \\ &= \kappa \lim_{\zeta_1,\zeta_2\to\zeta} (D_{\zeta_1}+D_{\zeta_2})^m \left(P_{\alpha,\beta,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)^N X^{(2)}(\zeta_1)X^{(2)}(\zeta_2)\right),\ m=0,1,2,3. \quad (4.17) \end{aligned}$$

在下面的引理中，我们需要用到第 3 节引入的（总）电荷概念。更具体地说，对于任意 $v \in L(3\Lambda_0)$，我们称 abv 的（总）电荷（严格）小于 的总电荷 $a'b'v$，其中 ab 和 $a'b'$ 如（3.7）中所定义，当且仅当 ab 的总荷（严格）小于 $a'b'$的（总）电荷。

引理 4.4. 对于任意 n、 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in L(3\Lambda_0)$，向量

$$X^{(2)}(j)X^{(2)}(n-j)v,\ X^{(2)}(j+1)X^{(2)}(n-j-1)v,$$
$$X^{(2)}(j+2)X^{(2)}(n-j-2)v,\ X^{(2)}(j+3)X^{(2)}(n-j-3)v$$

可以表示为以下向量的线性组合

$$X^{(2)}(i)X^{(2)}(n-i)v \quad with\ i \in \mathbb{Z}\setminus\{j,j+1,j+2,j+3\}$$

以及总荷严格较小的向量。

证明。该引理可通过一种与[KP18，引理 4。5] 的证明非常相似的论证加以验证，并且依赖于准粒子关系（4.17）。具体而言，该论证利用了如下观察：式（4.17）右侧可以写成所有满足 4.15）的元素的线性组合，其中 $i_1+i_2+j_3+j_4 = m$。 □

引理 4.5. 设 i 为整数，且 $v \in L(3\Lambda_0)$。

a) 向量

$$X^{(2)}(3i-3)X^{(2)}(3i+3)v,\ X^{(2)}(3i)X^{(2)}(3i)v,\ X^{(2)}(3i+3)X^{(2)}(3i-3)v$$

可以表示为向量的线性组合

$$X^{(2)}(s)X^{(2)}(6i-s)v \quad with\ s \in \mathbb{Z}\setminus\{3i-3,3i,3i+3\}$$

以及总荷严格较小的向量的线性组合。

b) 向量

$$X^{(2)}(3i-6)X^{(2)}(3i+3)v,\ X^{(2)}(3i-3)X^{(2)}(3i)v,$$
$$X^{(2)}(3i)X^{(2)}(3i-3)v,\ X^{(2)}(3i+3)X^{(2)}(3i-6)v$$

可以表示为向量的线性组合

$$X^{(2)}(s)X^{(2)}(6i-3-s)v \quad with\ s \in \mathbb{Z}\setminus\{3i-6,3i-3,3i,3i+3\}$$

以及总荷严格较小的向量。

证明。 引理中的 a) 和 b) 两个结论均可通过结合引理 4.2和引理 4.4 得证。在结论 a) 的情形下，注意，在一个由 12 个单项式向量组成的序列中，

$$X^{(2)}(3i-6)X^{(2)}(3i+6)v,\ X^{(2)}(3i-5)X^{(2)}(3i+5)v,\ \ldots$$
$$\ldots\ X^{(2)}(3i)X^{(2)}(3i)v,\ \ldots\ X^{(2)}(3i+5)X^{(2)}(3i-5)v,$$

根据引理 4.2所有形如以下形式的单项式向量

$$bv = X^{(2)}(3i-j)X^{(2)}(3i+j)v,\quad j \equiv \pm 1 \bmod 3$$

可以表示为如下形式的单项式向量的线性组合： $b'v$，其中 b' 的总次数类型高于 b。现在，对于单项式向量集合 $\{X^{(2)}(3i-3)X^{(2)}(3i+3)v,\ \ X^{(2)}(3i)X^{(2)}(3i)v,\ \ X^{(2)}(3i+3)X^{(2)}(3i-3)v\}$ 我们应用引理 4.4。

b）的证明以类似的方式进行。 □

回顾一下，由于（1.3），我们有 $X(\beta;\zeta) = X^{(1)}(\omega\zeta)$。考虑恒等式 s

$$X(\alpha,\alpha,\beta;\zeta) = \kappa_1' \lim_{\zeta_i\to\zeta} P_{\alpha,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X^{(2)}(\zeta_2), \tag{4.18}$$

$$X(\beta,\alpha,\beta;\zeta) = \kappa_2' \lim_{\zeta_i\to\zeta} P_{\beta,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)X^{(1)}(\omega\zeta_1)X^{(2)}(\zeta_2), \tag{4.19}$$

对于某个非零的 κ_1', $\kappa_2' \in \mathbb{C}$，这些恒等式成立。另一方面，利用一级实现的显式公式（1.1）和嵌入（4.3），我们得到

$$X(\alpha,\alpha,\beta;\zeta) = \kappa_1'' E^-(-\alpha;\zeta)X(\gamma;\zeta)E^+(-\alpha;\zeta), \tag{4.20}$$

$$X(\beta,\alpha,\beta;\zeta) = \kappa_2'' E^-(-\beta;\zeta)X(-\gamma;\zeta)E^+(-\beta;\zeta) \tag{4.21}$$

for 某个非零的 κ_1'', $\kappa_2'' \in \mathbb{C}$。最后，结合等式（4.18）–（4.21），并 d

$$X(\gamma;\zeta) = X^{(1)}(\omega^2\zeta) \quad \text{and} \quad X(-\gamma;\zeta) = X^{(1)}(\omega^5\zeta)$$

（由（1.3）可得），我们得到以下关系

$$\lim_{\zeta_i\to\zeta} P_{\alpha,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)X^{(1)}(\zeta_1)X^{(2)}(\zeta_2) = \kappa_1\, E^-(-\alpha;\zeta)X^{(1)}(\omega^2\zeta)E^+(-\alpha;\zeta), \tag{4.22}$$

$$\lim_{\zeta_i\to\zeta} P_{\beta,\alpha,\beta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2)X^{(1)}(\omega\zeta_1)X^{(2)}(\zeta_2) = \kappa_2\, E^-(-\beta;\zeta)X^{(1)}(\omega^5\zeta)E^+(-\beta;\zeta) \tag{4.23}$$

对于某个非零的 κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{C}$。

引理 4.6。 对于任意 i、$j \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in L(3\Lambda_0)$，向量

$$X^{(1)}(i)X^{(2)}(3j-3)v \quad \textit{and} \quad X^{(1)}(i-3)X^{(2)}(3j)v \tag{4.24}$$

可以表示为这些向量的

$$X^{(1)}(r)X^{(2)}(i+3j-3-r)v \quad \textit{with } r \in \mathbb{Z}\setminus\{i-3,i\} \tag{4.25}$$

以及总荷严格较小的向量的线性组合。

证明。 通过调整引理证明中的论证即可验证本引理4.1。更具体地说，利用准粒子关系（4.22）和（4.23）以及交换关系（1.5），可以将两个向量线性组合（4.24）表示为向量（4.25）以及长度严格较小的向量的线性组合。最后，直接验证其 2×2 矩阵是正则矩阵，其中各项为这些线性组合的系数，即可得出本引理。 □

5. Proof of Theorem 3.1

本节中，我们证明主要定理。显然，所有形如（3.9）的向量所构成的集合，

$$\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)\,X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t)\,v_{3\Lambda_0},$$

使得 $i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s,k_1,\dots,k_t < 0$（即不一定满足条件 (3.10)–(3.14)）张成标准模 $L(3\Lambda_0)$。在第 5.1 小节中，我们证明只需考虑满足初始条件 (3.14) 的单项式向量。接着，在第 5.2 小节中，我们进一步证明满足所有条件 (3.10)–(3.14) 的向量 (3.9) 张成 $L(3\Lambda_0)$。最后，在第 5.3 小节中，我们利用 Kanade–Russell–Kur¸sung¨oz 公式证明这些向量线性无关。

5.1. **初始条件**。 利用（1.1）可得

$$X^{(1)}(-1)v_{3\Lambda_0} \in L(3\Lambda_0)_{(0)}. \tag{5.1}$$

注 5.1. 利用这一关系以及交换关系（1.6）和（1.7），每个形如 $\cdots X^{(1)}(m)X^{(1)}(-1)v_{3\Lambda_0}$ 的单项式向量都可以表示为形如 $\cdots X^{(1)}(m')v_{3\Lambda_0}$ 的单项式向量的线性组合，其中 $m' > m$。最后，形如 $\cdots X^{(1)}(m')v_{3\Lambda_0}$ 的单项式向量的总荷小于 $\cdots X^{(1)}(m)X^{(1)}(-1)v_{3\Lambda_0}$。

利用（3.4）可得

$$X^{(2)}(-3)v_{3\Lambda_0} \equiv \sum_{\substack{m_1+m_2=-3,\\ m_1,m_2\leq -1}} \kappa_{m_1,m_2} X^{(1)}(m_1)X^{(1)}(m_2)v_{3\Lambda_0} \mod L(3\Lambda_0)_{(1)},$$

其中 $\kappa_{m_1,\ m_2} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$。现在，关系（5.1）意味着

$$X^{(2)}(-3)v_{3\Lambda_0} \in L(3\Lambda_0)_{(1)}. \tag{5.2}$$

注 5.2. 关系（5.2）结合引理4.2和引理 2.1中的交换关系，意味着每个形如 $\cdots X^{(2)}(m)v_{3\Lambda_0}$ 且满足 $m > -6$的单项式向量，都可以表示为总荷更小的单项式向量的线性组合，因此按照线性序（3.8），这些向量更大。

5.2. **张成集**。 我们将证明，单项式向量（3.9），

$$\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r)\,X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t)\,v_{3\Lambda_0}, \tag{5.3}$$

它们满足所有条件（3.10）–（3.14）张成 $L(3\Lambda_0)$。证明对总次数 $D = I + J + K$进行归纳，其中 $I = |i_1| + \cdots + |i_r|$，$J = |j_1| + \cdots + |j_s|$以及 $K = |k_1| + \cdots + |k_t|$，并对线性序（3.8）进行归纳。利用交换关系（1.4）和（1.5），我们可以将任意单项式向量 $bv_{3\Lambda_0}$ 写成如下形式的单项式向量的线性组合，如（5.3）所示；这些向量满足（3.10）、（3.11）以及$k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_t < 0$。根据注记 5.1 和 5.2，我们还可以假设

$$j_p \leq -2 \text{ for every } 1 \leq p \leq s \qquad \text{and} \qquad k_p \leq -6 \text{ for every } 1 \leq p \leq t.$$

条件 $k_p \equiv 0$ 对所有 $1 \leq p \leq t$ （3.12）中的模 3 关系是引理 4.2的推论。将其与引理 2.1结合，单项式向量 $bv_{3\Lambda_0}$ 中含有因子$X^{(2)}(k_p)$，且满足 $k_p \neq 0$ 模 3 的条件，可以替换为单项式向量 $b'v_{3\Lambda_0}$ 的线性组合，这些向量的总次数和颜色类型与 b相同，但 b' 至少含有一个因子 $X^{(2)}(k'_p)$，且满足 $k'_p > k_p$。不湮灭 b' 的单项式只有有限多个 $v_{3\Lambda_0}$。

若准粒子单项式 b 含有因子 $X^{(2)}(k_p)$，其次数为 k_p 且满足 $k_p > k_{p+1} - 12$，其中 $1 \leq p \leq t$，则引理 4.5 表明，$bv_{3\Lambda_0}$ 可以表示为准粒子单项式向量 $b'v_{3\Lambda_0}$的线性组合，其中 b' 与 b 具有相同的颜色类型和总次数，但 $b' > b$ 相对于线性序，并且作为单项式向量 $b'v_{3\Lambda_0}$ 的线性组合，其中单项式 b' 的颜色类型高于 b（按照逆字典序）。

如果准粒子单项式 b 含有因子 $X^{(1)}(j_p)$，其次数 j_p 满足 $j_p > -2 - 6t$，其中 $1 \leq p \leq s$，那么根据引理 4.6，可知 $bv_{3\Lambda_0}$ 可以表示为准粒子单项式向量 $b'v_{3\Lambda_0}$ 的线性组合，其中 b' 和 b 具有相同的总次数和荷类型，而 b' 至少含有一个因子 $X^{(1)}(j'_p)$，且$j'_p > j_p$ 其中 $1 \leq p \leq s$；也可以表示为单项式向量 $b'v_{3\Lambda_0}$ 的线性组合，其中单项式 b' 的总荷小于 b。

最后，如果准粒子单项式 b含有因子 $X^{(1)}(j_p)$，其次数 j_p 满足$j_p > j_{p+1} - 4$，其中 $1 \le p \le s$，那么根据引理 4.1 ，我们可以将 $bv_{3\Lambda_0}$ 表示为若干更大的单项式向量的线性组合；再由归纳法，可将其从张成集中省去。

F由上述分析可得定理3中集合的张成性质 .1.

5.3. **线性无关性**。为了完成定理 3.1的证明，还需证明相应的张成集线性无关。为此，将证明张成集中次数为 n 的向量个数等于 n，即 [K18 的定理 10] 右侧公式（7）中的第 [KR19] 个系数（另见 [KR 中的公式（88）） 。

$$\frac{1}{(q,q^5;q^6)(q^2,q^3,q^9,q^{10};q^{12})} = F\cdot \sum_{n_1,n_2\ge 0} \frac{q^{2n_1^2+6n_1n_2+6n_2^2}x^{n_1+2n_2}}{(q;q)_{n_1}(q^3;q^3)_{n_2}}\Bigg|_{x=1}, \tag{5.4}$$

其中 $F = (q,\ q^5;\ q^6)^{-1}$。式（5.4）的乘积侧是标准模 $L(3\Lambda_0)$ 的主特化特征公式（参见 [Capp92、Capp93，Capp96]）。下面说明张成集中的单项式向量与式（5.4）求和侧系数之间的对应关系。

将单项式 $\alpha(-i_1)\cdots\alpha(-i_r)$ 与分拆 $i_1+\cdots+i_r$ 对应起来，可得单项式的个数

$$\alpha(i_1)\cdots\alpha(i_r),\quad i_1+\cdots+i_r = n,$$

满足

$$r\ge 0,\quad i_1\le i_2\le\ldots\le i_r<0,\quad i_p\equiv\pm 1 \mod 6$$

等于.....中的第 n个系数

$$\begin{aligned} F=(q,q^5;q^6)^{-1} &= \prod_{i\equiv\pm1 \mod 6}(1-q^i)^{-1}\\ &= \prod_{i\ge1}(1+q^{6i-5}+q^{2(6i-5)}+\cdots)(1+q^{6i-1}+q^{2(6i-1)}+\cdots). \end{aligned}$$

对于固定的颜色类型（$n_1,\ n_2$），我们将张成集的差分条件（3.13）改写为

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n_1}(2+4(p-1)+6n_2) &= 2n_1^2+6n_1n_2,\\ \sum_{p=1}^{n_2}(6+12(p-1)) &= 6n_2^2. \end{aligned}$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，令 $(q^a;\ q^a)_n=(1-q^a)\cdots(1-q^{na})$，其中 $a=1$ 或 $a=3$。我们有

$$(q^a;q^a)_n^{-1} = \sum_{i\ge0} p_n(i)q^{ai}.$$

这里 $p_n(i)$ 表示 ia 中至多有 n 个部分的分拆数（参见 [A76]）。由此可得，对于准粒子单项式

$$X^{(1)}(j_1)\cdots X^{(1)}(j_s)\,X^{(2)}(k_1)\cdots X^{(2)}(k_t)$$

颜色类型为 $(n_1,n_2)\ =\ (s,t)$ 的项

$$\frac{q^{2n_1^2+6n_1n_2+6n_2^2}x^{n_1+2n_2}}{(q;q)_{n_1}(q^3;q^3)_{n_2}} \tag{5.5}$$

统计满足条件 n_1 的电荷为 1 的准粒子乘积和 n_2 电荷为 2 的准粒子乘积，条件为（3.11）–（3.14）。因此，定理3.1 中的张成集线性无关性得证。

Acknowledgment

本研究部分得到了克罗地亚科学基金会项目 IP-2025-02-4720 的支持，以及项目“作为量子与复杂系统及李代数表示卓越科学中心的一部分，实施前沿研究并推动其应用”的支持，资助编号为 PK.1.1.10.0004。该项目由欧盟通过欧洲区域发展基金——2021—2027年竞争力与凝聚力计划共同资助。本研究还得到了欧盟通过下一代欧盟，在2021—2026年国家复苏与韧性计划框架下向萨格勒布大学理学院提供的机构资助（IK IA 1.1.3. Impact4Math）的支持。

References

[A76] G. E. Andrews, 《分拆理论》, 《数学及其应用百科全书》第2卷, Addison-Wesley, 1976年。[A92] G. E. Andrews, 《舒尔定理、Capparelli 猜想与 q-三项式系数》, 《Contemp. Math.》166（1994）, 141–154。[Capp92] S. Capparelli, 《标准模湮灭理想的元素》, 《J. Algebra》145（1992）, 32–54。[Capp93] S. Capparelli, 《关于扭仿射李代数的某些表示与组合恒等式》, 《J. Algebra》154（1993）, 335–355。[Capp96] S. Capparelli, 《仿射李代数 $A_2^{(2)}$ 的3级模的一种构造及一个新的罗杰斯–拉马努金型组合恒等式》, 《Trans. Amer. Math. Soc.》348（1996）, 481–501。[CMP25] S. Capparelli、A. Meurman、M. Primc, 《扭仿射李代数 $A_2^{(2)}$ 上5级模关系的首项》, arXiv:2511.12284。[FS94] A. V. Stoyanovsky、B. L. Feigin, 《流形代数表示的函数模型与半无限舒伯特胞腔》, 《Funktsional Anal. i Prilozhen.》28（1）（1994）, 68–90, 96（俄文）; 译文见《Funct. Anal. Appl.》28（1）（1994）, 55–72; 预印本: B. L. Feigin、A. V. Stoyanovsky, 《李代数表示的准粒子模型与旗流形几何》, arXiv:hep-th/9308079。[F87] L. Figueiredo, 《主扭曲顶点算子的微积分》, 《Mem. Amer. Math. Soc.》371（1987）。[G96] G. Georgiev, 《无限维李代数模的组合构造。I. 主子空间》, 《J. Pure Appl. Algebra》112（1996）, 247–286; arXiv:hep-th/9412054。[K] V. G. Kac, 《无限维李代数》, 第3版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990年。[KKLW81] V. G. Kac、D. A. Kazhdan、J. Lepowsky、R. L. Wilson, 《欧几里得李代数基本表示的实现》, 《Adv. Math.》42（1981）, 83–112。[K19] S. Kanade, 《探寻模伴侣》, （2019）, 预印本; arXiv:1902.05199。[KR19] S. Kanade、M. C. Russell, 《通往许多新的Rogers–Ramanujan型整数分拆恒等式解析求和侧的阶梯》, 《Electron. J. Combin.》26（1）（2019）P1.6; arXiv:1803.02515。[KP18] S. Koˇzi´c、M. Primc, 《sl_2 主图景中的准粒子与Rogers–Ramanujan型恒等式》, 《Commun. Contemp. Math.》20（2018）, 1750073; arXiv:1406.1924。[K18] K. Kur¸sung¨oz, 《Capparelli 猜想与G¨ollnitz-Gordon恒等式的Andrews–Gordon型级数》, 《J. Combin. Theory Ser. A》165（2019）, 117–138; arXiv:1807.11189。[L80] J. Lepowsky, 《分子公式在 k行平面分拆中的应用》, 《Adv. Math.》35（1980）, 179–194。[L85] J. Lepowsky, 《扭曲顶点算子的微积分》, 《Proc. Natl. Acad. Sci. USA.》82（1985）, 8295–8299。[LM78] J. Lepowsky、S. Milne, 《经典分拆恒等式的李代数方法》, 《Adv. Math.》29, （1978）, 15–59。[LW84] J. Lepowsky、R. L. Wilson, 《标准模的结构, I: 泛代数与罗杰斯–拉马努金恒等式》, 《Invent. Math.》77（1984）, 199–290。

[MP87] A. Meurman、M. Primc, 《 $sl(2,\mathbb{C})$标准模的湮灭理想与组合恒等式》, 《Adv. Math.》64（1987）, 177–240。[N] D. Nandi, 《4级 $A_2^{(2)}$ 标准模所产生的分拆恒等式》, 博士论文, 罗格斯大学, 2014年。[PˇS16] M. Primc、T. ˇSiki´c, 《仿射李代数 $C_n^{(1)}$基本模的组合基》, 《J. Math. Phys.》57（2016）, 091701（19页）; arXiv:1603.04399。[PT25] M. Primc、G. Trupˇcevi´c, 《利用 $C_l^{(1)}$ $C_{2l}^{(1)}$ 证明线性无关性》, 《J. Algebra》661（2025）, 341–356; arXiv:2403.06881。[TT24] M. Takigiku、S. Tsuchioka, 《对Nandi猜想的分拆恒等式的证明》, 《Amer. J. Math.》146（2024）, 405–433; arXiv:1910.12461。[TX95] M. Tamba、C. Xie, 《 $A_2^{(2)}$ 的三级标准模与组合恒等式》, 《J. Pure Appl. Algebra》105（1995）, 53–92。[T25] S. Tsuchioka, 《 A_2 3级罗杰斯–拉马努金双分拆恒等式的一个例子》, 《J. Lond. Math. Soc.》111（2025）, e70152; arXiv:2205.04811。