arXiv:2603.23164v1 [math.AC] 24 Mar 2026

分离诺特数 有限阿贝尔群

Jing Huang*

数学与信息科学学院, 广州大学，中国广州510006

摘要

对于有限阿贝尔群 G，令 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 表示其分离诺特数。我们精确确定了每个满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$. 的有限阿贝尔群 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 的 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$。若 $r = 2s-1$，则

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) = n_s + n_{s+1} + \cdots + n_r,$$

而若 $r = 2s$，则

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) = \frac{n_s}{p_1} + n_{s+1} + \cdots + n_r,$$

其中 p_1 表示 n_1 的最小素因子。我们的证明具有加法组合性质，避免了以往研究中使用的 Davenport 等式假设 $\mathsf{D}(n_sG) = \mathsf{D}^*(n_sG)$。关键思路是通过一种新颖的测地线替代序列构造，对辅助序列进行几何约化，并对关系群采用一致提升过程。作为应用，我们证明，若 $r \geq 2$，则在满足 $|G_0| \leq r+1$ 的有限阿贝尔群 G_0 上，每个极值分离原子 A 都满足 $|\mathrm{supp}(A)| = |G_0| = r+1$。等价地，Schefler、Zhao 和 Zhong 所提出的支撑结论猜想，对所有秩至少为 2 的有限阿贝尔群均成立。相比之下，秩为 1 的情形则是例外：对于循环群，相应的猜想结论并不成立。

2020年数学主题分类： 13A50, 11B75, 20K01.

关键词： 分离不变量；分离诺特数；零和序列；达文波特常数；有限阿贝尔群。

1 引言

设 G 是一个有限群，它在线性空间 V 上作线性作用，其中 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间。该作用自然延拓到坐标环 $\mathbb{C}[V]$，后者可与多项式代数 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$ 视为相同，其中 $k = \dim_{\mathbb{C}} V$。诺特次数界[10] 保证不变量环 $\mathbb{C}[V]^G$ 可由次数小于或等于 $|G|$ 的齐次多项式有限生成。诺特数记为 $\beta(G)$，定义为满足以下条件的最小正整数 d：对于每个有限维 G-模 V，环 $\mathbb{C}[V]^G$ 都由次数至多为 d 的齐次不变量生成（见 [17]）。

在非阿贝尔情形中，诺特数的精确值仅对极少数群族已知（见 [1, 2, 3]）。对于有限阿贝尔群，Schmid [17]，建立了通往加法组合学的关键桥梁，他证明，对于每个有限阿贝尔群 G，诺特数都等于达文波特常数：$\beta(G) = \mathsf{D}(G)$。由此，对 $\beta(G)$ 的不变量理论研究与零和序列的算术密切联系起来；这一系列思想可追溯至 Olson 关于零和问题的奠基性工作 [11, 12]，并在现代零和文献中得到系统发展（例如见 [6, 7]）。

*E-邮件地址： *jhuangmath@gzhu.edu.cn (J. Hu ang).*

尽管这种强有力的组合翻译颇具成效，计算 $\beta(G)$（等价地，D(G)）的精确值仍以困难重重而著称。迄今为止，D(G) 的精确公式仅针对有限几类情形得到确立，主要包括秩至多为 2 的群、有限阿贝尔 p-群，以及少数专门的群族；关于哪些群族已知等式 D(G) =D*(G) 成立（从而 D(G) 有明确表达式），请参见 [15, 引理 2.1] 。对于秩为 3 或更高的一般有限阿贝尔群，诺特数的精确确定仍是一个重要的未解问题。

然而，要求一组不变量生成整个代数 $\mathbb{C}[V]^G$ ，是出了名的苛刻条件，往往会导致生成集的规模和复杂度令人难以承受。为克服这些障碍，一种较弱但通常更灵活的不变量理论概念便是分离集。若子集 $S \subseteq \mathbb{C}[V]^G$ 满足：对于所有 $v,\ w \in V$，只要 $Gv \neq Gw$，就存在$f \in S$使得 $f(v) \neq f(w)$，则称其为分离集。Derksen 和 Kemper [4]在计算不变量理论中推广了这一概念。类比诺特数，Kohls 和 Kraft [9] 引入了有限群 G的分离诺特数 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$，将其定义为满足以下条件的最小正整数 d：对于每个有限维 G-模 V，都存在一个分离集，其中的不变多项式次数至多为 d。根据定义， $\beta_{\mathrm{sep}}(G) \leq \beta(G)$，而确定 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$则是经典诺特数问题在轨道分离方面的对应问题。

对于有限阿贝尔群，Domokos [5] 将计算 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$的问题归结为关系群和小支撑上的一个有限加法组合问题。更准确地说，该计算由基数至多为 rank(G)+1 （即 G的 Helly 维数）的子集 $G_0 \subseteq G$ 所控制，因此可以将问题重新表述为零和序列幺半群中的分离原子问题。

过去几年里，人们已经为若干重要的有限阿贝尔群族得到了 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$的精确公式。Domokos解决了循环情形 [5]。Schefler处理了所有秩为 2 的群 [13] 以及由若干循环群 [14]构成的直和。最近，Schefler、Zhao 和 Zhong[15, 16] 通过分离原子发展出一种系统方法，为广泛的群类推导出精确公式，其中包括有限阿贝尔 p群以及秩为 3、4 和 5 的群。更一般地，在附加假设 D(n_sG) = D*(n_sG) 下，他们为 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$推导出了精确公式或紧确上界；其中 D* 表示达文波特常数的标准结构性下界，而 n_s 是 G的一个恰当选取的不变量。在若干重要情形下，例如秩至多为二的群和 p群，有 D(n_sG) = D*(n_sG)；但这一等式并非普遍成立。因此，无条件地去掉这一假设，是得到 β_{sep}(G)完整公式的核心挑战。

除了计算精确的全局公式外，一个基本目标是研究相应的逆问题：刻画长度达到最大值$\beta_{\mathrm{sep}}(G)$的极值分离原子的结构。由于 Domokos 的约化将考察范围限制在大小至多为 $r+1$ 的子集，因此一个自然的问题是：极值分离原子是否必须实际使用该界限所允许的全部支撑？Schefler、Zhao 和 Zhong [16]将此问题表述如下。

猜想 1.1 ([16, 猜想 5.4])。 设 $G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$。设 A 是 G_0 上的一个分离原子，且 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$，其中 $G_0 \subseteq G$ 是满足 $|G_0| \leq r+1$ 的子集。那么|支撑(A)| = |G_0| = $r+1$。

注记 1.2。 对于 $r = 1$，该群是循环群，记作 $G \cong C_n$，并且有 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) = n$。若取一个子集 $G_0 = \{g\}$，其中仅含有 G 的一个生成元 g，那么序列 $A = g^n$ 是 G_0 上长度达到最大值 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 的分离原子。然而，在这种情况下，

$$|\operatorname{supp}(A)| = |G_0| = 1 \neq r+1 = 2.$$

因此，该结论对 $r = 1$ 不成立，这使得条件 $r \geq 2$ 不可或缺。 e.

本文的主要目标是以闭式形式确定每个有限阿贝尔群的分离诺特数。我们的主要定理根据秩的奇偶性区分两种情况，从而实现了这一目标。

定理 1.3. 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$，并设 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 为 G的分离诺特数。

(1) 若 $r = 2s-1$，则

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) = n_s + n_{s+1} + \cdots + n_r.$$

(2) 若 $r = 2s$，则

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) = \frac{n_s}{p_1} + n_{s+1} + \cdots + n_r,$$

其中， p_1 是 n_1的最小素因子。

作为定理 1.3 及极大分离原子的结构刚性的应用，我们证明了 [16, 猜想 5.4]中对秩至少为 2 的所有有限阿贝尔群所猜测的结论。

推论 1.4. 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$ 和 $r \geq 2$。设 A 是定义在子集 $G_0 \subseteq G$ 上的一个分离原子，满足 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 以及 $|G_0| \leq r+1$。则

$$|\operatorname{supp}(A)| = |G_0| = r+1.$$

特别地，对于秩至少为2的所有有限阿贝尔群， *[16,* 猜想 *5.4]* 的结论均成立。

为证明这些结果，我们的方法在一个关键的技术环节上有别于以往文献：它不依赖 [15, 16] 中采用的达文波特等式假设。证明的核心根据秩的奇偶性分为两种情形。对于奇秩情形，我们证明相关的辅助零和自由序列是正测地线，因此其长度无条件地受 Klopsch 和 Lev 的正直径定理 [8] 所界定。为处理更微妙的偶秩情形，我们将辅助序列约化为测地替代物。随后，我们将这一几何约化与关系群的统一短生成引理相结合，从而无需诉诸达文波特等式即可提升可整除关系。这些要素共同给出了奇偶两种情形下的精确公式。

本文结构安排如下。第 2 节汇集加法组合学和不变量理论所需的结果。第 3 节给出主定理及推论的证明。

2 预备知识

在本文中， $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 表示一个具有 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$且 $r =$ 秩(G)的有限阿贝尔群。通常，令 $\mathbb{N}$ 表示正整数集 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$， $\mathbb{Z}$ 表示整数集。对于任意两个整数 a， $b \in \mathbb{Z}$，我们用 $[a,b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$表示它们之间的离散区间。

对于一个非空子集 $G_0 \subseteq G$，将项取自 G_0 的有限无序序列视为自由阿贝尔幺半群 $\mathcal{F}(G_0)$ 的一个元素，其基为 G_0，并采用乘法记号表示，以拼接作为幺半群运算。序列 $S \in \mathcal{F}(G_0)$ 可唯一表示为指数形式

$$S = g_1 \cdot \ldots \cdot g_\ell = \prod_{g \in G_0} g^{\mathsf{v}_g(S)},$$

其中，$\mathsf{v}_g(S) \in \mathbb{N}_0$ 表示 g 在 S 中的重数。序列的长度为 $|S| = \ell = \sum_{g\in G_0} \mathsf{v}_g(S)$。若 $T \in \mathcal{F}(G_0)$ 是 S 的子序列，则称之为 S 的子序列，当且仅当 T 在 $\mathcal{F}(G_0)$ 中整除 S（记作 $T \mid S$）；也就是说，对于所有 $g \in G_0$，$\mathsf{v}_g(T) \le \mathsf{v}_g(S)$。从 S 中删除 T 的项所得到的序列记作 $T^{-1}S$。

对于序列 $S = g_1 \cdot \ldots \cdot g_\ell$，其和定义为 $\sigma(S) = \sum_{i=1}^{\ell} g_i$。其非空子序列的所有可能和构成的集合记为

$$\Sigma(S) = \left\{ \sum_{i\in I} g_i \,\middle|\, \emptyset \neq I \subseteq [1, |S|] \right\}.$$

B根据这些算术性质，我们将自然数集 G_0 上的序列分类如下：

- S 称为 **零和自由序列**，如果 $0 \notin \Sigma(S)$。
- S 称为**零和序列**，如果 $\sigma(S) = 0$。所有此类序列构成 $\mathcal{F}(G_0)$ 的一个子幺半群，记为

$$\mathcal{B}(G_0) = \{S \in \mathcal{F}(G_0) \,|\, \sigma(S) = 0\}.$$

- S 称为**原子**（或极小零和序列），如果它是一个非平凡零和序列，且不包含真非平凡零和子序列。G_0 上所有原子的集合记为 $\mathcal{A}(G_0)$。

子集 G_0 的**达文波特常数**记为 $\mathsf{D}(G_0)$，其值等于 G_0 上原子的最大长度：

$$\mathsf{D}(G_0) = \max\{|S| \,|\, S \in \mathcal{A}(G_0)\}.$$

一个经典结果是，对于 $|G| \ge 2$，达文波特常数以下列结构不变量为下界：

$$\mathsf{D}(G) \ge \mathsf{D}^*(G) := 1 + \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1).$$

为了将零和序列的算术与有限群的不变量理论联系起来，我们考察零和幺半群的代数结构。对于 $d \in \mathbb{N}_0$，令

$$\mathcal{B}(G_0)_d = \{S \in \mathcal{B}(G_0) \,|\, |S| \le d\}$$

表示长度至多为 d 的零和序列所成的子集。令 $q(\mathcal{B}(G_0))$ 表示交换消去幺半群 $\mathcal{B}(G_0)$ 的商群（格罗滕迪克群）。我们用 $q(\mathcal{B}(G_0)_d)$ 表示由 $\mathcal{B}(G_0)_d$中的元素生成的 $q(\mathcal{B}(G_0))$ 的子群。

注 2.1。我们的记号与 [15], 的记号略有不同，在那里，$\mathcal{B}(G_0)_d$ 表示由长度至多为 d 的原子生成的子幺半群。在两种约定下，所得的 $q(\mathcal{B}(G_0))$ 的子群相同，因为每个长度至多为 d 的零和序列都能分解为长度至多为 d 的原子；反过来，每个这样的原子本身就是长度至多为 d 的零和序列。

在这一代数框架下，我们定义本文研究的核心组合对象。如果原子$A \in \mathcal{A}(G_0)$无法由商群中严格更短的零和序列生成，则称其为关于 G_0 的 **分离原子**： $A \notin q(\mathcal{B}(G_0)^{|A|-1})$。换言之，不存在原子$U_1$、.....、$U_k$、$V_1$、.....、$V_l \in \mathcal{A}(G_0)$，其长度为 $|U_i|$、$|V_j| \le |A| - 1$，使得

$$A \cdot U_1 \cdot \ldots \cdot U_k = V_1 \cdot \ldots \cdot V_l.$$

分离诺特数 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$的研究，从根本上归结为对这些分离原子的长度进行界定。以下由 Domokos [5], 提出的基础引理说明，我们只需检验较小的支撑集 G_0。

引理 2.2 ([15, 引理 2.3])。 设 G 为有限阿贝尔群。则 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 是 G_0上分离原子的最大长度，其中 $G_0 \subseteq G$ 遍历所有大小为 $|G_0| \le$ 秩$(G) + 1$的子集。

为了在不依赖达文波特等式 $\mathsf{D}(G) = \mathsf{D}^*(G)$ 的情况下有效地界定辅助零和自由序列的长度，我们采用几何视角。我们将子集 $A \subseteq G$ 上的序列解释为相应有向凯莱图中的正向游走。设 $A \subseteq G$ 为一个子集。对于 $j \in \mathbb{N}$，定义 j 重和集

$$jA = \{a_1 + \cdots + a_j \,|\, a_1, \ldots, a_j \in A\},$$

并令 $0A = \{0\}$。对于 $n \in \mathbb{N}_0$，我们将截至长度 n 的累积和集记为

$$[0, n]A = \bigcup_{j=0}^{n} jA.$$

对于元素 $g \in G$， g 关于 A 的正长度定义为使其和等于 g 所需的 A 中项数的最小值：

$$\ell_A^+(g) = \min\{\, n \in \mathbb{N}_0 \,|\, g \in [0, n]A \,\},$$

约定若 $g \notin \langle A \rangle$，则 $\ell_A^+(g) = \infty$。若 $\langle A \rangle = G$，则 G 关于 A 的正直径为

$$\mathrm{diam}_A^+(G) = \max\{\, \ell_A^+(g) \,|\, g \in G \,\}.$$

对所有可能的生成集取上确界， G 的绝对正直径定义为

$$\mathrm{diam}^+(G) = \max\{\, \mathrm{diam}_A^+(G) \,|\, A \subseteq G,\ \langle A \rangle = G \,\}.$$

如果 S 是一个项都属于 $A \subseteq G$ 的序列，我们称 S 相对于 A 是测地的，如果它的长度恰好等于到其和的最短路径长度，即，

$$|S| = \ell_A^+\big(\sigma(S)\big).$$

注记 2.3. 为完整起见，对于平凡群，我们采用标准约定：$\beta_{\mathrm{sep}}(\{0\}) = 1$，$\mathrm{diam}^+(\{0\}) = 0$，且 $\mathsf{D}^*(\{0\}) = 1$。

将这一几何直径与有限阿贝尔群的结构常数联系起来的基本结果是 Klopsch 和 Lev [8]，的以下定理，它为我们的测地序列提供了一个无条件上界。

引理 2.4. 对于每个生成集 $A \subseteq G$ 和每个 $g \in G$，都有

$$\ell_A^+(g) \le \mathrm{diam}_A^+(G) \le \mathrm{diam}^+(G) = \mathsf{D}^*(G) - 1.$$

特别地，如果 $H \le G$ 是一个子群且 $\langle A \rangle = H$，那么对于每个 $g \in H$，

$$\ell_A^+(g) \le \mathsf{D}^*(H) - 1 \le \mathsf{D}^*(G) - 1.$$

证明。 绝对正直径 $\mathrm{diam}^+(G) = \mathsf{D}^*(G) - 1$ 的精确值已在 [8, 定理 2.1] 中确定。其余不等式可由定义和子群结构直接得出。

□

有了控制辅助序列长度的几何工具，我们还需要一种代数机制，将这些序列提升回分离原子的不变量理论框架。下面的引理借鉴了 [15, 引理 3.1], 中的一项关键洞见，恰好提供了这一桥梁。它保证，任何重数都能被一个关键结构参数 n 整除的零和序列，都可以自动表示为商群中严格更短的零和序列的组合。

引理 2.5 ([15, 引理 3.1])。 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$ 和 $r \geq 2$. 。令 $s = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ 和 $n = n_s$. 。设 $G_0 \subseteq G$ 是一个非空子集，且 A 是关于G_0 的一个分离原子，其长度达到最大值 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$。若 $S \in \mathcal{B}(G_0)$ 是一个零和序列，满足对每个 $g \in G_0$都有 $n \mid \mathsf{v}_g(S)$，则 S 可由商群中长度严格更短的序列生成，即$S \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.

证明。 这等价于 [15, 引理 3.1], 其中调用了最大性 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$，并采用了注 2.1 中详述的子群生成约定。 □

最后，为了完成精确公式的铺垫，我们陈述分离诺特数已知的一般下界。在接下来的各节中，我们的主要任务是证明，分离原子的长度严格小于这些精确值。

引理 2.6 ([14, 引理 5.2 和 5.5]). 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$。 设$s = \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$，且设 p_1为 n_1的最小素因子。则分离诺特数满足

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) \geq \begin{cases} n_s + n_{s+1} + \cdots + n_r, & \text{if } r \text{ is odd}, \\ \frac{n_s}{p_1} + n_{s+1} + \cdots + n_r, & \text{if } r \text{ is even}. \end{cases}$$

3 定理 1.3 和推论 1.4 的证明

本节中，我们证明主要结果： $\beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 的精确公式，以及秩为 ≥ 2 的情形下关于结论的猜想，该猜想见于 [16, 猜想 5.4]。为了对极大分离原子 A的长度给出精确上界，我们将其各项的重数除以临界参数 $n = n_{\lfloor (r+1)/2 \rfloor}$，并据此分解该原子。这样便提取出一个取值于子群 nG上的“商序列” B 。下面的关键引理表明， B 是 nG中的一个测地序列，因此其长度天然受到该子群的达文波特常数的限制。

引理 3.1。 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$，其中 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$, $r \geq 2$, $s = \lfloor (r+1)/2 \rfloor$ 且 $n = n_s$。由引理 *2.2*，选取子集 $G_0 = \{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq G$，使得 $k \leq r+1$，并且 $A = \prod_{i=1}^{k} g_i^{m_i}$是 G_0 上的分离原子，满足 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$。记每个 i对应的 $m_i = nk_i + x_i$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, $x_i \in [0, n-1]$, 并令

$$h_i = ng_i \in nG, \qquad B = \prod_{i=1}^{k} h_i^{k_i}.$$

则相对于集合 $\{h_1, \ldots, h_k\}$， B在 nG 中是测地的: $|B| = \ell^{+}_{\{h_1,\ldots,h_k\}}\big(\sigma(B)\big)$. 因此，$|B| \leq \mathsf{D}^*(nG) - 1$.

证明。 首先注意，并非所有 x_i 都为零。事实上，若对所有 i都有 $x_i = 0$，则 A 是一个零和序列，且其中所有重数都能被 n 整除。由引理 2.5 可得 $A \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$， 这与

A 是分离的。因此， $A^{(1)} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{nk_i}$ 是原子 A 的真子序列，而 $A^{(1)}$ 在 G 中是零和自由的。我们断言， $B = \prod_{i=1}^{k} h_i^{k_i}$ 在 nG 中是零和自由的。事实上，若 $T = \prod_{i=1}^{k} h_i^{u_i}$ 是 B 的一个非平凡零和子序列，且对所有 i 都有 $0 \le u_i \le k_i$ ，则由 $\sum_{i=1}^{k} u_i h_i = 0$ 可推出 $\sum_{i=1}^{k} (nu_i) g_i = 0.$ 。由此可知， $\prod_{i=1}^{k} g_i^{nu_i}$ 将是 $A^{(1)}$ 的一个非平凡零和子序列，矛盾。因此， B 在 nG 中是零和自由的。反设 B 不是测地的。那么存在 u_1、……、 $u_k \in \mathbb{N}_0$ ，使得

$$\sum_{i=1}^{k} u_i h_i = \sum_{i=1}^{k} k_i h_i \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{k} u_i < \sum_{i=1}^{k} k_i.$$

定义 $\widetilde{A} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{nu_i + x_i}$. 由于

$$\sum_{i=1}^{k} (nu_i + x_i) g_i = \sum_{i=1}^{k} u_i h_i + \sum_{i=1}^{k} x_i g_i = \sum_{i=1}^{k} k_i h_i + \sum_{i=1}^{k} x_i g_i = \sum_{i=1}^{k} m_i g_i = 0,$$

~序列 A是零和序列。其长度为

$$|\widetilde{A}| = n \sum_{i=1}^{k} u_i + \sum_{i=1}^{k} x_i < n \sum_{i=1}^{k} k_i + \sum_{i=1}^{k} x_i = |A|,$$

~因此 $A \in \mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}$. 现在定义

$$p_i = (k_i - u_i)^+ = \max\{k_i - u_i, 0\}, \qquad q_i = (u_i - k_i)^+ = \max\{u_i - k_i, 0\},$$

并定义 n-可整除序列

$$P = \prod_{i=1}^{k} g_i^{np_i}, \qquad Q = \prod_{i=1}^{k} g_i^{nq_i}.$$

由于 $k_i + q_i = u_i + p_i$ 对所有 i, 均成立，我们有

$$\sum_{i=1}^{k} p_i h_i = \sum_{i=1}^{k} q_i h_i =: s \in nG.$$

设 $L = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle \le nG$。那么存在 $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_0$ ，使得 $\sum_{i=1}^{k} c_i h_i = -s.$ 令 $C = \prod_{i=1}^{k} g_i^{nc_i}.$ 。那么 PC 和 QC 都是定义在 G_0上的零和序列，并且它们所有的重数都能被 n整除。因此，由引理 2.5 可得 $PC,\ QC \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$. 最后，利用 $k_i + q_i = u_i + p_i$, ~ ，我们得到序列的精确恒等式 $A \cdot Q \cdot C = A \cdot P \cdot C.$ 因此，在商群 $q(\mathcal{B}(G_0))$ 中，

$$A = \widetilde{A} \cdot (PC) \cdot (QC)^{-1} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big),$$

~因为 $A \in \mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}$ 和 $PC,\ QC \in q(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1})$。这与 A 是一个分离原子的事实矛盾。因此， B 是测地的。将引理 2.4 应用于子群 $L = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle \le nG$可得

$$|B| = \ell^{+}_{\{h_1, \ldots, h_k\}}\big(\sigma(B)\big) \le \mathsf{D}^*(L) - 1 \le \mathsf{D}^*(nG) - 1.$$

□

为了提取关于极大分离原子 A的更深层结构约束，我们将其重数乘以任意整数 $l \in \mathbb{N}$，从而推广先前的分解。将缩放后的重数 lm_i 除以 n ，得到一组新的余数 $x_i^{(l)}$ 。为了平衡这些余数并构成零和，我们在子群 nG中构造一个最小补偿序列 $Y^{(l)}$ 。极小性条件内在地迫使 $Y^{(l)}$ 成为测地序列，从而确保其长度严格小于 $\mathsf{D}^*(nG) - 1$。

引理 3.2. 沿用引理 *3.1* 的记号。对于每个 $l \in \mathbb{N}$，记

$$lm_i = nk_i^{(l)} + x_i^{(l)}, \quad k_i^{(l)} \in \mathbb{N}_0, \quad x_i^{(l)} \in [0, n-1] \quad \textit{for } 1 \le i \le k.$$

选取 $(t_1^{(l)}, \dots, t_k^{(l)}) \in \mathbb{N}^k$，使其在满足 $\sum_{i=1}^k \big(t_i^{(l)} n - x_i^{(l)}\big) g_i = 0$ 的条件下取最小值，并定义 e

$$Y^{(l)} = \prod_{i=1}^k h_i^{t_i^{(l)}-1} = \prod_{i=1}^k (ng_i)^{t_i^{(l)}-1}.$$

那么 $Y_{(l)}$ 是相对于集合 nG 的测地 $\{h_1, \dots, h_k\}$。因此， $|Y_{(l)}| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1.$

证明。 由引理 2.6，得

$$|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G) > n_r.$$

事实上，如果 $r = 2s-1$ 是奇数，那么

$$|A| \ge n_s + n_{s+1} + \cdots + n_r \ge n_s + n_r > n_r,$$

而如果 $r = 2s$ 是偶数，那么

$$|A| \ge \frac{n_s}{p_1} + n_{s+1} + \cdots + n_r \ge 1 + n_r > n_r.$$

我们断言，对 $1 \le i \le k$， $m_i \le \mathsf{ord}(g_i) - 1$ 。事实上，若对某个 i 有 $m_i \ge \mathsf{ord}(g_i)$，则 $g^{\mathrm{ord}(g_i)}$ $_i$ 是 A 的一个非平凡零和子序列。由于 A 是一个原子，这就迫使 $A = g^{\mathrm{ord}(g_i)}{}_i$, , 因此 $|A| = \mathsf{ord}(g_i) \le n_r,$, 这与 $|A| > n_r$ 矛盾。因此，对所有 i，都有 $m_i \le \mathsf{ord}(g_i) - 1$ 。于是 $lm_i \le l\,\mathsf{ord}(g_i) - l,$, 且对 $1 \le i \le k.$, 有 $k_i^{(l)} \le l\,\mathsf{ord}(g_i) - 1$ 。因此，元组

$$\big(l\ \mathrm{ord}(g_i) - k_i^{(l)}\big)_{i=1}^k \in \mathbb{N}^k$$

定义良好且满足

$$\sum_{i=1}^k \Big(\big(l\ \mathrm{ord}(g_i) - k_i^{(l)}\big)n - x_i^{(l)}\Big) g_i = \sum_{i=1}^k \big(l\ \mathrm{ord}(g_i) n - lm_i\big) g_i = -l \sum_{i=1}^k m_i g_i = 0.$$

因此，可行集非空。设 $z^{(l)} = \sigma(Y_{(l)}) = \sum_{i=1}^k (t_i^{(l)} - 1) h_i \in nG.$ 假设存在$u_1, \dots, u_k \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$\sum_{i=1}^k u_i h_i = z^{(l)} \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^k u_i < \sum_{i=1}^k (t_i^{(l)} - 1).$$

Then

$$\sum_{i=1}^k \big((u_i+1)n - x_i^{(l)}\big) g_i = \sum_{i=1}^k u_i h_i + \sum_{i=1}^k (n - x_i^{(l)}) g_i = z^{(l)} + \sum_{i=1}^k (n - x_i^{(l)}) g_i = 0.$$

因此，$(u_i+1)_{i=1}^k$ 是定义 $(t_i^{(l)})$ 的最小化问题的另一个可行元组，但 $\sum_{i=1}^k (u_i+1) < \sum_{i=1}^k t_i^{(l)}$，这与最小性矛盾。因此，$Y_{(l)}$ 是测地的。将引理 2.4 应用于子群 $L = \langle h_1, \dots, h_k \rangle \le nG$ 可得

$$|Y^{(l)}| = \ell^+_{\{h_1,\dots,h_k\}}\big(\sigma(Y^{(l)})\big) \le \mathsf{D}^*(L) - 1 \le \mathsf{D}^*(nG) - 1.$$

□

定理 1.3 的下界已在引理 2.6 中给出。接下来只需证明相应的上界。我们根据秩的奇偶性将证明分为两部分。首先处理奇秩情形。

命题 3.3. 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$ 且 $r = 2s-1.$，则 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) = n_s + n_{s+1} + \cdots + n_r.$

证明. 若 $r = 1$，则 G 是循环的，且由定理 3.10可得 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) = |G| = n_1$ [5, 。因此结论成立。以下假设 $r \ge 3$。令 $n = n_s.$。若 $nG = \{0\}$，则根据约定，$\mathsf{D}^*(nG) = 1$。在这种情况下，必有 $n_{s+1} = \cdots = n_r = n$，因此

$$n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) = 0 = \Big(\sum_{j=s+1}^{r} n_j\Big) - (s-1)n.$$

若 $nG \neq \{0\}$，则 $nG \cong C_{n_{s+1}/n} \oplus \cdots \oplus C_{n_r/n}$，因此

$$n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) = \Big(\sum_{j=s+1}^{r} n_j\Big) - (s-1)n.$$

为简便起见，记 $M = n\big(\mathsf{D}^*(nG)-1\big) = \big(\sum_{j=s+1}^{r} n_j\big) - (s-1)n.$。由引理 2.2，选取某个 $G_0 = \{g_1, \dots, g_k\} \subseteq G$ 上的分离原子 $A = \prod_{i=1}^k g_i^{m_i}$，使得 $k \le r+1 = 2s$，且 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$。记 $m_i = nk_i + x_i$，其中 $0 \le x_i \le n-1$，并定义

$$h_i = ng_i, \qquad B = \prod_{i=1}^{k} h_i^{k_i}.$$

由引理 3.1，$|B| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1$，因此 $n|B| \le M.$。由于 $|A| = n|B| + \sum_{i=1}^k x_i$，我们得到

$$|A| \le M + \sum_{i=1}^{k} x_i. \tag{1}$$

令 $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{N}^k$ 按照引理 3.2 为 $l = 1$选取；也就是说，$\sum_{i=1}^k (t_i n - x_i) g_i = 0.$ 令

$$V = \prod_{i=1}^{k} g_i^{t_i n - x_i}, \qquad Y = \prod_{i=1}^{k} h_i^{t_i - 1}.$$

由引理 3.2，$|Y| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1$，得出 $n|Y| \le M.$ 接下来我们断言 $|V| \ge |A|.$ 事实上，序列 $AV = \prod_{i=1}^k g^{(k_i+t_i)_i}{}^{n}$ 是一个零和序列，其中所有重数都能被 n 整除。由于 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$，引理 2.5 给出 $AV \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$. 若 $|V| < |A|$，则 $V \in \mathcal{B}(G_0)^{|A|-1}$，并且

因此 $A=(AV)\cdot V^{-1}\in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$，这与 A 是分离的矛盾。因此 $|V|\ge|A|$。另一方面，

$$|V|=\sum_{i=1}^{k}(t_in-x_i)=n\sum_{i=1}^{k}(t_i-1)+kn-\sum_{i=1}^{k}x_i=n|Y|+kn-\sum_{i=1}^{k}x_i\le M+kn-\sum_{i=1}^{k}x_i.$$

由于 $k\le 2s$，我们得到

$$|A|\le|V|\le M+2sn-\sum_{i=1}^{k}x_i. \tag{2}$$

将 (1) 和 (2) 相加，得到

$$2|A|\le 2M+2sn=2\sum_{j=s+1}^{r}n_j-2(s-1)n+2sn=2\sum_{j=s+1}^{r}n_j+2n.$$

因此 $|A|\le n+\sum_{j=s+1}^{r}n_j=\sum_{j=s}^{r}n_j$. 由于 $|A|=\beta_{\mathrm{sep}}(G)$，这证明了 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)\le\sum_{j=s}^{r}n_j$。反向不等式 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)\ge\sum_{j=s}^{r}n_j$ 恰好是奇秩情形下的引理 2.6。因此$\beta_{\mathrm{sep}}(G)=n_s+n_{s+1}+\cdots+n_r$. □

现在我们转向更复杂的偶秩情形，此时 $r=2s$。与奇秩情形不同，偶秩的精确公式取决于 n_1 的最小素因子 p_1。为得到最终精确界，我们先建立一个稍弱的中间上界，其中涉及 $n_s/2$。这个“半界”施加了严格的结构约束，这将在最终推导中发挥重要作用。

命题 3.4. 设 $G\cong C_{n_1}\oplus\cdots\oplus C_{n_r}$ 满足 $1<n_1\mid\cdots\mid n_r$ 和 $r=2s.$，则 $\beta_{\mathrm{sep}}(G)\le\frac{n_s}{2}+n_{s+1}+\cdots+n_r.$

证明。设 $n=n_s$ 和 $T=\sum_{j=s+1}^{r}n_j.$。若 $nG=\{0\}$，则 $n_{s+1}=\cdots=n_r=n$，因此根据约定，$\mathsf{D}^*(nG)=1$ 且 $n\big(\mathsf{D}^*(nG)-1\big)=0=T-sn.$。若 $nG\ne\{0\}$，那么省略平凡因子后，

$$nG\cong C_{n_{s+1}/n}\oplus\cdots\oplus C_{n_r/n},$$

因此

$$n\big(\mathsf{D}^*(nG)-1\big)=n\sum_{j=s+1}^{r}\Big(\frac{n_j}{n}-1\Big)=T-sn.$$

令 $M=n\big(\mathsf{D}^*(nG)-1\big)=T-sn.$。由引理 2.2，选取一个子集

$$G_0=\{g_1,\dots,g_k\}\subseteq G,\qquad k\le r+1=2s+1,$$

以及一个分离原子 $A=\prod_{i=1}^{k}g_i^{m_i}$在 G_0 上，使得 $|A|=\beta_{\mathrm{sep}}(G)$。令 $m_i=nk_i+x_i$ 为 $0\le x_i\le n-1$，并设 $h_i=ng_i$ 和 $B=\prod_{i=1}^{k}h_i^{k_i}.$。由引理 3.1，$|B|\le\mathsf{D}^*(nG)-1$，因此

$$|A|=n|B|+\sum_{i=1}^{k}x_i\le M+\sum_{i=1}^{k}x_i. \tag{3}$$

现在，取 $(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{N}^k$，使其如引理 3.2 中针对 $l=1$ 所述选取；也就是说，$\sum_{i=1}^k (t_i n-x_i)g_i=0$，并且$\sum_{i=1}^k t_i$ 在具有此性质的所有 $\mathbb{N}^k$ 元组中取最小值。定义

$$V=\prod_{i=1}^k g_i^{t_i n-x_i},\qquad Y=\prod_{i=1}^k h_i^{t_i-1}.$$

与命题 3.3 的证明中一样，序列 $AV=\prod_{i=1}^k g^{(k_i+t_i)_i}{}^{n}$ 是G_0上的零和序列，且其所有重数都能被 n整除。因此，由引理 2.5 可得 $AV\in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.。若有 $|V|\le |A|-1$，则 $V\in\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\subseteq q(\mathcal{B}(G_0)^{|A|-1})$ 且 $A=(AV)\cdot V^{-1}\in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$,这与 A是分离原子矛盾。因此 $|V|\ge |A|$.。由引理 3.2，$|Y|\le \mathsf{D}^*(nG)-1$,从而

$$|V|=n|Y|+kn-\sum_{i=1}^k x_i\le M+kn-\sum_{i=1}^k x_i.$$

由于 $|V|\ge|A|$，我们得到

$$|A|\le M+kn-\sum_{i=1}^k x_i. \tag{4}$$

Addi由（3）和（4）得 $2|A|\le 2M+kn\le 2(T-sn)+(2s+1)n=2T+n$. 因此

$$|A|\le T+\frac{n}{2}=\frac{n_s}{2}+n_{s+1}+\cdots+n_r.$$

由于 $|A|=\beta_{\mathrm{sep}}(G)$，证明完成。 □

在证明涉及最小素因子 p_1 的精确公式之前，我们先建立一个关键的结构不等式，将子群 n_1G 的分离诺特数与 G的不变量联系起来。这个秩移位界将作为偶秩情形的最后一个要素。

引理 3.5. 设 $G\cong C_{n_1}\oplus\cdots\oplus C_{n_r}$满足 $1<n_1\mid\cdots\mid n_r$和 $r=2s$.。设 $a=$最大$\{j\in[1,r]\,|\,n_j=n_1\}$.。假设 n_1G非平凡，并记

$$n_1G\cong C_{m_1}\oplus\cdots\oplus C_{m_t},\qquad m_j=\frac{n_{a+j}}{n_1},\qquad t=r-a.$$

然后 $n_1\,\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G)\le\sum_{j=s+1}^r n_j$.

证明。令$T=\sum_{j=s+1}^r n_j$.。我们分别考虑两种情形。

情形 1：t 是奇数。设 $t=2u-1$。根据命题 3.3，$\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G)=m_u+\cdots+m_t$. 因此 $n_1\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G)=n_{a+u}+\cdots+n_r$. 由于 $t=r-a=2s-a$ 是奇数，整数 a 是奇数，因此

$$u=\frac{t+1}{2}=s-\frac{a-1}{2},\qquad a+u=s+\frac{a+1}{2}\ge s+1.$$

因此

$$n_1\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G)=n_{a+u}+\cdots+n_r\le n_{s+1}+\cdots+n_r=T.$$

情形 2：t是偶数。设为 $t=2u$。根据命题 3.4，$\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G)\le{}^{m_u}_{2}+m_{u+1}+\cdots+m_t$.两边乘以 n_1，得到 $n_1\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G)\le{}^{n_{a+u}}_{2}+n_{a+u+1}+\cdots+n_r$.由于 $t=2s-a$是偶数，整数 a也是偶数，因此 $a\ge 2$ 并且

$$u=\frac{t}{2}=s-\frac{a}{2},\qquad a+u=s+\frac{a}{2}\ge s+1.$$

Thus

$$\frac{n_{a+u}}{2} + n_{a+u+1} + \cdots + n_r \le n_{s+1} + \cdots + n_r = T.$$

因此再次得到 $n_1\beta_{\mathrm{sep}}(n_1G) \le T$. 证明至此完成。 □

为构造后续论证所需的辅助序列，我们先回顾并确定偶秩情形的核心记号。设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$，其中 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$ 且 $r = 2s$。记 $n = n_s$ 和 $T = \sum_{j=s+1}^{r} n_j$。设 $G_0 = \{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq G$，其中 $k \le 2s+1$；再设 $A = \prod_{i=1}^{k} g_i^{m_i} \in \mathcal{F}(G_0)$ 是 G_0 上的一个分离原子，满足 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$。对于每个正整数 $l \in \mathbb{N}$，用 n 作带余除法可得

$$lm_i = nk_i^{(l)} + x_i^{(l)}, \qquad k_i^{(l)} \in \mathbb{N}_0, \quad x_i^{(l)} \in [0, n-1] \qquad (1 \le i \le k).$$

我们定义 $h_i = ng_i \in nG$ 和商序列 $B^{(l)} = \prod_{i=1}^{k} h_i^{k_i^{(l)}} \in \mathcal{F}(nG)$。余数之和记为 $f(l) = \sum_{i=1}^{k} x_i^{(l)}$。

定义 3.6. 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，选取使总和 $\sum_{i=1}^{k} u_i^{(l)}$ 最小的系数 $u_1^{(l)}, \ldots, u_k^{(l)} \in \mathbb{N}_0$，并满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{k} u_i^{(l)} h_i = \sum_{i=1}^{k} k_i^{(l)} h_i.$$

这个最小和恰好等于正长度 $\ell^{+}_{\{h_1,\ldots,h_k\}}\big(\sigma(B^{(l)})\big)$。我们将测地线替代序列 $U^{(l)} \in \mathcal{F}(nG)$ 及其提升序列 $\widehat{W}^{(l)} \in \mathcal{F}(G_0)$ 定义为

$$U^{(l)} = \prod_{i=1}^{k} h_i^{u_i^{(l)}}, \qquad \widehat{W}^{(l)} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{nu_i^{(l)} + x_i^{(l)}}.$$

测地线替代序列的构造立即得出提升序列 $\widehat{W}^{(l)}$ 的两个基本性质。

引理 3.7. 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，以下结论成立。

(a) $\widehat{W}^{(l)}$ 是 G_0 上的零和序列。

(b)

$$|\widehat{W}^{(l)}| \le n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) + f(l) = T - sn + f(l).$$

证明. 由于 $\sum_{i=1}^{k} u_i^{(l)} h_i = \sum_{i=1}^{k} k_i^{(l)} h_i$，我们得到

$$\sigma\big(\widehat{W}^{(l)}\big) = \sum_{i=1}^{k} \big(nu_i^{(l)} + x_i^{(l)}\big) g_i = \sum_{i=1}^{k} k_i^{(l)} h_i + \sum_{i=1}^{k} x_i^{(l)} g_i = \sum_{i=1}^{k} lm_i g_i = l\,\sigma(A) = 0,$$

得到 $\widehat{W}^{(l)} \in \mathcal{B}(G_0)$。对于长度界，令 $L = \langle h_1、\ldots\ldots、h_k \rangle \le nG$. 根据引理 2.4,

$$|U^{(l)}| = \sum_{i=1}^{k} u_i^{(l)} = \ell^{+}_{\{h_1,\ldots,h_k\}}\Big(\sum_{i=1}^{k} k_i^{(l)} h_i\Big) \le \mathsf{D}^*(L) - 1 \le \mathsf{D}^*(nG) - 1.$$

因此 $|\widehat{W}^{(l)}| = n|U^{(l)}| + f(l) \le n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) + f(l)$。由于 $n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) = \sum_{j=s+1}^{r} n_j - sn = T - sn$，证明得以完成。 □

在根据 $f(l)$ 确定提升序列 $\widehat{W}_{(l)}$ 长度的可靠上界后，我们现在为序列 $V^{(l)}$ 确定一个互补的上界，以从相反方向补偿余数 $x_i^{(l)}$ 。

引理 3.8. 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，取 $(t_1^{(l)}, \dots, t_k^{(l)}) \in \mathbb{N}^k$，使得 $\sum_{i=1}^k (t_i^{(l)} n - x_i^{(l)}) g_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^k t_i^{(l)}$ 最小，并定义

$$V^{(l)} = \prod_{i=1}^k g_i^{t_i^{(l)} n - x_i^{(l)}}, \qquad Y^{(l)} = \prod_{i=1}^k h_i^{t_i^{(l)} - 1}.$$

于是 $|V^{(l)}| \le T + (k-s)n - f(l)$. 特别地，$|\widehat{W}_{(l)}| + |V_{(l)}| \le 2T + (k-2s)n \le 2T + n$.

证明。 由引理 3.2，$|Y_{(l)}| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1 = \frac{T}{n} - s$. 因此 $n \sum_{i=1}^k (t_i^{(l)} - 1) = |Y_{(l)}|\, n \le T - sn$,于是

$$|V^{(l)}| = \sum_{i=1}^k (t_i^{(l)} n - x_i^{(l)}) = n \sum_{i=1}^k (t_i^{(l)} - 1) + kn - f(l) \le T - sn + kn - f(l).$$

这就证明了第一个结论。将此式与引理 3.7(b) 相加，得到

$$|\widehat{W}^{(l)}| + |V^{(l)}| \le (T - sn + f(l)) + (T + (k-s)n - f(l)) = 2T + (k-2s)n \le 2T + n,$$

因为 $k \le 2s + 1$。 □

接下来我们证明，短提升序列会迫使 A 的某个幂属于 $q(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1})$。

引理 3.9. 固定 $l \in \mathbb{N}$。若 $\min\{\, |\widehat{W}^{(l)}|,\ |V_{(l)}| \,\} \le |A| - 1$，则 $A^l \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.

证明。令

$$p_i^{(l)} = \big(k_i^{(l)} - u_i^{(l)}\big)^+ = \max\{k_i^{(l)} - u_i^{(l)}, 0\}, \quad q_i^{(l)} = \big(u_i^{(l)} - k_i^{(l)}\big)^+ = \max\{u_i^{(l)} - k_i^{(l)}, 0\}.$$

于是 $k_i^{(l)} + q_i^{(l)} = u_i^{(l)} + p_i^{(l)}$ 对于 $1 \le i \le k$，且因为 $\sigma(U^{(l)}) = \sigma(B^{(l)})$,

$$\sum_{i=1}^k p_i^{(l)} h_i = \sum_{i=1}^k q_i^{(l)} h_i =: s^{(l)} \in \langle h_1, \dots, h_k \rangle.$$

由于 $-s^{(l)} \in \langle h_1, \dots, h_k \rangle,$，存在整数 $c_1^{(l)}, \dots, c_k^{(l)} \in \mathbb{N}_0$，使得 $\sum_{i=1}^k c_i^{(l)} h_i = -s^{(l)}$。定义 n-可整除序列

$$P^{(l)} = \prod_{i=1}^k g_i^{n p_i^{(l)}}, \qquad Q^{(l)} = \prod_{i=1}^k g_i^{n q_i^{(l)}}, \qquad C^{(l)} = \prod_{i=1}^k g_i^{n c_i^{(l)}}.$$

则 $P^{(l)} C^{(l)}$, $Q^{(l)} C^{(l)} \in \mathcal{B}(G_0)$，且它们的所有重数都能被 n 整除。于是我们有

$$P^{(l)} C^{(l)},\ Q^{(l)} C^{(l)} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big). \tag{5}$$

现在比较指数:

$$A^l Q^{(l)} C^{(l)} = \prod_{i=1}^k g_i^{n(k_i^{(l)} + q_i^{(l)} + c_i^{(l)}) + x_i^{(l)}} = \prod_{i=1}^k g_i^{n(u_i^{(l)} + p_i^{(l)} + c_i^{(l)}) + x_i^{(l)}} = \widehat{W}^{(l)} P^{(l)} C^{(l)}.$$

因此，在 $q(\mathcal{B}(G_0))$ 中，

$$A^l = \widehat{W}^{(l)}\big(P^{(l)}C^{(l)}\big)\big(Q^{(l)}C^{(l)}\big)^{-1}. \tag{6}$$

接下来注意到 $\widehat{W}^{(l)}V_{(l)} = \prod_{i=1}^{k} g^{\,n(u_i^{(l)}+t_i^{(l)})\,i}$ ·因此， $\widehat{W}^{(l)}V_{(l)}$ 中的每个重数都能被 n 整除。此外，根据 $V_{(l)}$ 的定义关系，有 $\sum_{i=1}^{k} t_i^{(l)} n g_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^{(l)} g_i$，而

$$\sum_{i=1}^{k} k_i^{(l)} h_i = \sum_{i=1}^{k} n k_i^{(l)} g_i = -\sum_{i=1}^{k} x_i^{(l)} g_i$$

因为

$$\sum_{i=1}^{k} \big(n k_i^{(l)} + x_i^{(l)}\big) g_i = \sum_{i=1}^{k} l m_i g_i = 0.$$

因此

$$\sigma\big(\widehat{W}^{(l)}V^{(l)}\big) = \sum_{i=1}^{k} n(u_i^{(l)} + t_i^{(l)}) g_i = \sum_{i=1}^{k} k_i^{(l)} h_i + \sum_{i=1}^{k} t_i^{(l)} n g_i = 0.$$

注意到 $\widehat{W}^{(l)}V_{(l)}$ 是一个 n-可整除的零和序列，因此再次得到

$$\widehat{W}^{(l)}V^{(l)} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big). \tag{7}$$

若 $|\widehat{W}^{(l)}| \le |A| - 1$ $\widehat{W}^{\,l} \in \mathcal{B}\,G_{0\,|A|-1}$. 5 6 $A^l \in$，则 $_{()}$ ( ) 再结合 ( ) 和 ( )，可得 ( ) $q(\mathcal{B}\,G_{0\,|A|-1})$.

若 $|V_{(l)}| \le |A| - 1$，则 $V_{(l)} \in \mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}$. 因此，由 (6) 和 (7) 可得

$$A^l = \big(\widehat{W}^{(l)}V^{(l)}\big)\,\big(V^{(l)}\big)^{-1}\,\big(P^{(l)}C^{(l)}\big)\,\big(Q^{(l)}C^{(l)}\big)^{-1} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big).$$

这就证明了该引理。 □

下面的引理提炼并改写了 [16]中的断言 A4。

引理 3.10. 固定 $l \in \mathbb{N}$，满足 $\gcd(l, n) = 1$。那么 $|V_{(l)}| \ge |A|$.

证明。取 $l' \in [1, n-1]$ 和 $h \in \mathbb{N}_0$，使得 $ll' = 1 + hn$. 序列 A^{hn} 是零和序列，且其所有重数都能被 n整除，因此由引理 2.5， $A^{hn} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.此外， $A^l V^{(l)} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{\,n(k_i^{(l)}+t_i^{(l)})}$ 是一个 n-可除零和序列，因此再次有 $A^l V_{(l)} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.若 $|V_{(l)}| \le |A| - 1$，则 $V_{(l)} \in \mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}$，因此

$$A = (A^{hn})^{-1}(V^{(l)})^{-l'}(A^l V^{(l)})^{l'} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big),$$

这与 A 是一个分离原子相矛盾。因此 $|V^{(l)}| \ge |A|$。 □

下面的命题表明，如果 $|A|$ 严格超过目标界，则 A 的某个互素幂必然属于商群。

命题 3.11. 假设 $T + \frac{n}{p_1} < |A| \le T + \frac{n}{2}$，其中 p_1 是 n_1 的最小素因子。那么存在一个整数 $m \in \mathbb{N}$，使得

$$\gcd(m, n_1) = 1 \qquad and \qquad A^m \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big).$$

证明. 由于对于每个 $j \in \{s+1, \dots, r\}$, $n = n_s$ 都整除 n_j，因此我们有 $n \mid T$.。设 $|A| = T + \delta$，其中 $\frac{n}{p_1} < \delta \le \frac{n}{2}$.。令

$$d = \gcd(|A|, n) = \gcd(\delta, n), \qquad \delta = bd$$

其中 $b \in \mathbb{N}$ 且 $\gcd\big(b, \ \frac{n}{d}\big) = 1$。

情形 1： $b \ge 2$。根据 [14, 引理 4.2],，存在 $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 使得

$$\gcd(l, n) = 1 \qquad \text{and} \qquad lb \equiv 1 \pmod{n/d}.$$

这就得到

$$l\delta = lbd \equiv d \pmod{n}. \tag{8}$$

由于 $\gcd(l, \ n) = 1$，由引理 3.10 可得 $|V_{(l)}| \ge |A| = T + \delta$.。将其与引理 3.8 结合，得到 $T + \delta \le |V_{(l)}| \le T + (k-s)n - f(l)$，因此

$$f(l) \le (k-s)n - \delta \le (s+1)n - \delta. \tag{9}$$

此外，由于对每个 i, $x_i^{(l)} \equiv lm_i$(模 n)，且 $n \mid T$，由 (8) 可得 $f(l) = \sum_{i=1}^k x_i^{(l)} \equiv \sum_{i=1}^k lm_i = l|A| = l(T + \delta) \equiv l\delta \equiv d$ (模 n)。设 $f(l) = d + qn$，其中 $q \in \mathbb{N}_0$.。于是 (9) 蕴含 $d + qn \le (s+1)n - \delta$.。由于 $d + \delta > 0$，我们必有 $q \le s$。因此 $f(l) \le sn + d$.。现在由引理 3.7 可得 $|\widehat{W}(l)| \le T - sn + f(l) \le T + d$.。由于 $b \ge 2$, $T + d < T + bd = T + \delta = |A|$.。因此 $|\widehat{W}^{(l)}| \le |A| - 1$.。由引理 3.9, $A^l \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.。最后，$\gcd(l, n) = 1$ 意味着 $\gcd(l, n_1) = 1$，因为 $n_1 \mid n$。因此我们可以取 $m = l$。

情形 2： $b = 1$。在这种情形下，我们有

$$\delta = d, \qquad |A| = T + d, \qquad \frac{n}{p_1} < d \le \frac{n}{2}.$$

令 $m = \frac{n}{d}$, 于是 $m < p_1$ 且 $\gcd(m, n_1) = 1$. 由于对每个 i, $x_i^{(m)} \equiv mm_i \pmod{n}$，并且由于 $n \mid T$，我们有

$$f(m) \equiv m|A| = m(T + \delta) \equiv m\delta = md = n \equiv 0 \pmod{n}.$$

因此, $f(m)$ 能被 n 整除。由引理 3.8,

$$|\widehat{W}^{(m)}| + |V^{(m)}| \le 2T + n. \tag{10}$$

现在, $|\widehat{W}(m)|$ 和 $|V(m)|$ 都能被 n 整除：前者是因为 $|\widehat{W}(m)| = n|U(m)| + f(m)$，后者是因为 $|V(m)| = n\sum_{i=1}^k t_i^{(m)} - f(m)$。如果二者都严格大于 T，那么由于 $n \mid T$ 且两个长度都能被 n 整除，它们都至少为 $T + n$，这与 (10) 矛盾。因此，$\min\{\, |\widehat{W}(m)|, \ |V(m)| \,\} \le T$. 由于 $T < T + d = |A|$, 我们得到 $\min\{\, |\widehat{W}^{(m)}|, \ |V(m)| \,\} \le |A| - 1$. 引理 3.9 于是给出 $A^m \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$. 证明至此完成。□

在命题 3.11 得到证明后，我们已经证明，原子 A 的某个互素幂必然属于 $q(\mathcal{B}(G_0)^{|A|-1})$。为了将这一隶属关系转化为明确的序列分解，我们必须分析底层零和关系的代数结构。现在引入必要的记号以及一致短生成引理，以完成这最后一步。对于有限阿贝尔群 H 以及由 H 中元素组成的序列 $a_1, \dots, a_k$（元素不必互异），记作

$$\mathcal{G}_H(a_1, \dots, a_k) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{Z}^k \;\middle|\; \sum_{i=1}^k u_i a_i = 0 \text{ in } H \right\}.$$

也记 $\mathcal{B}_H(a_1,\dots,a_k) = \mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_k) \cap \mathbb{N}_0^k$. 对于 $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_k) \in \mathbb{N}_0^k$，定义

$$|\mathbf{u}| = u_1 + \cdots + u_k \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}(\mathbf{u}) = \{\, i \in [1,k] \,|\, u_i \neq 0 \,\}.$$

Let $\kappa(H)$ 表示 H 的 Helly 维数；根据 [5, §2，有 $\kappa(H) = \operatorname{rank}(H) + 1$].

引理 3.12。设 H 为有限阿贝尔群，并令 $d = \beta_{\mathrm{sep}}(H)$。那么，对于每个正整数$k$以及任意序列 $a_1,\dots,a_k \in H$ （不必互不相同），阿贝尔群 $\mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_k)$ 由子集 $\{\, \mathbf{u} \in \mathcal{B}_H(a_1,\dots,a_k) \,|\, |\mathbf{u}| \le d \,\}$ 生成

证明。如果 $H = \{0\}$，那么每个 $a_i = 0$，因此 $\mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_k) = \mathbb{Z}^k$. 该群由标准基向量 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ 生成，并且每个 $\mathbf{e}_i$ 都属于 $\mathcal{B}_H(a_1,\dots,a_k)$，其中 $|\mathbf{e}_i| = 1 = \beta_{\mathrm{sep}}(H)$。因此断言成立。现在假设 $H \neq \{0\}$，并令

$$d = \beta_{\mathrm{sep}}(H), \qquad M = \{\, \mathbf{u} \in \mathcal{B}_H(a_1,\dots,a_k) \,|\, |\mathbf{u}| \le d \,\}.$$

对于每个子集 $J \subseteq [1,k]$，令 $M_J = \{\mathbf{u} \in M \,|\, \operatorname{supp}(\mathbf{u}) \subseteq J\}$. 我们首先断言，对于每个$J \subseteq [1,k]$满足 $|J| \le \kappa(H)$ 的情形，群 $\mathcal{G}_H\big((a_j)_{j\in J}\big)$ 由 M_J生成。重新编号后，不妨设 $J = [1,s]$ 满足 $s \le \kappa(H)$。我们用 s 归纳法证明此断言。若 $a_1,\dots,a_s$ 两两不同，则该断言恰好就是 [5, 推论 2.6], ，因为 $d = \beta_{\mathrm{sep}}(H)$。

现在假设序列 $a_1,\dots,a_s$ 中有重复项。对指标作一次置换后，不妨设 $a_1 = a_2$. 令 $q = \operatorname{ord}(a_1)$。将 [5, 推论 2.6] 应用于由单项组成的互异序列 (a_1)，可知群 $\mathcal{G}_H(a_1) = q\mathbb{Z}$ 由长度至多为 d 的非负关系生成。由于其最小正生成元为 q，因此必有 $q \le d$. 现在定义

$$\mathbf{n} = (1, q-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^s.$$

由于 $a_1 = a_2$，我们有 $a_1 + (q-1)a_2 = qa_1 = 0$，因此 $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_H(a_1,\dots,a_s)$ 且 $|\mathbf{n}| = q \le d$. 于是 $\mathbf{n} \in M_{[1,s]}$. 任取 $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_s) \in \mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_s)$。令 $\tilde{}\mathbf{u} = \mathbf{u} - u_1\mathbf{n}$。则 $\tilde{}\mathbf{u}$ 的第一个坐标为零，并且 $\sum_{i=1}^s \widetilde{u}_i a_i = \sum_{i=1}^s u_i a_i - u_1 q a_1 = 0$. 因此 $\tilde{}\mathbf{u} \in \mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_s)$，且其第一个坐标为零，所以它是 $\mathcal{G}_H(a_2,\dots,a_s)$ 中某个元素的零延拓。由归纳假设，该 $\mathcal{G}_H(a_2,\dots,a_s)$ 中的元素属于由 $\mathcal{B}_H(a_2,\dots,a_s)$ 中长度至多为 d 的向量生成的子群。补上一个零作为第一个坐标后，这些生成元就成为 $M_{[2,s]} \subseteq M_{[1,s]}$. 的元素。因此 $\tilde{}\mathbf{u}$ 属于由 $M_{[2,s]}$ 生成的子群。由于 $\mathbf{n} \in M_{[1,s]}$，可知 $\mathbf{u} = \tilde{}\mathbf{u} + u_1\mathbf{n}$ 属于由 $M_{[1,s]}$ 生成的子群。命题得证。

现在固定一个同构

$$\iota : H \xrightarrow{\sim} \widehat{H} = \operatorname{Hom}(H, \mathbb{C}^\times),$$

并令 $\chi_i = \iota(a_i)$ 表示 $1 \le i \le k$. 那么，对每个 $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_k) \in \mathbb{Z}^k$，都有

$$\mathbf{u} \in \mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_k) \iff \sum_{i=1}^k u_i a_i = 0 \text{ in } H \iff \prod_{i=1}^k \chi_i^{u_i} = 1.$$

因此，在此同一识下，

$$\mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_k) = G(\chi_1,\dots,\chi_k)$$

沿用 [5] 中的记号。考虑权序列为 $\chi_1,\dots,\chi_k$. 的对角 H-模 V。由上面的断言，对于每个满足 $|J| \le \kappa(H)$ 的子集 $J \subseteq [1,k]$，群 $G\big((\chi_j)_{j\in J}\big)$ 由 M_J 生成。因此 [5, 定理 2.1] 蕴含单项式 $\{\, \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \,|\, \mathbf{u} \in M \,\}$ 构成 $\mathcal{O}(V)^H$ 中的一个分离集。应用 [5, 命题 2.4], ，我们得出完整的关系群 $\mathcal{G}_H(a_1,\dots,a_k) = G(\chi_1,\dots,\chi_k)$ 由 M 生成。 □

因此，我们得到以下推论。

推论 3.13。 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$，设 $G_0 = \{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq G$，并设 A 是 G_0 上满足 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$ 的分离原子。设 $d \in \mathbb{N}$，并假设 $d\,\beta_{\mathrm{sep}}(dG) \le |A| - 1$。若对于某些 $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}_0$，有 $S = \prod_{i=1}^{k} g_i^{ds_i} \in \mathcal{B}(G_0)$，则 $S \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.

证明。 令 $a_i = dg_i \in dG$ for $1 \le i \le k$, 并令 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k$. 由于 S 在 G 中是零和的,

$$\sum_{i=1}^{k} s_i a_i = \sum_{i=1}^{k} d s_i g_i = \sigma(S) = 0,$$

因此 $\mathbf{s} \in \mathcal{B}_{dG}(a_1, \ldots, a_k) \subseteq \mathcal{G}_{dG}(a_1, \ldots, a_k)$. 由引理 3.12，群 $\mathcal{G}_{dG}(a_1, \ldots, a_k)$ 由元素 $\mathbf{u} \in \mathcal{B}_{dG}(a_1, \ldots, a_k)$ 生成，其中 $|\mathbf{u}| \le \beta_{\mathrm{sep}}(dG)$. 因此，存在

$$\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(p)},\ \mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(q)} \in \mathcal{B}_{dG}(a_1, \ldots, a_k)$$

使得对所有 $1 \le \alpha \le p, 1 \le \beta \le q$，均有 $|\mathbf{u}^{(\alpha)}|,\ |\mathbf{v}^{(\beta)}| \le \beta_{\mathrm{sep}}(dG)$，并且

$$\mathbf{s} + \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \mathbf{u}^{(p)} = \mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \mathbf{v}^{(q)} \quad \text{in } \mathbb{Z}^k. \tag{11}$$

事实上，由于 $\mathbf{s}$ 属于由这些短非负关系生成的 $\mathbb{Z}^k$ 的子群，我们可以写成 $\mathbf{s} = \sum_j \alpha_j \mathbf{w}^{(j)}$，其中 $\alpha_j \in \mathbb{Z}$，$\mathbf{w}^{(j)} \in \mathcal{B}_{dG}(a_1, \ldots, a_k)$ 且 $|\mathbf{w}^{(j)}| \le \beta_{\mathrm{sep}}(dG)$；将系数拆分为正部和负部，即可得到（11）。对于每个 α 和 β，定义取值于G_0 上的序列如下:

$$U^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{d\,u_i^{(\alpha)}}, \qquad V^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{d\,v_i^{(\beta)}}.$$

由于 $\sum_{i=1}^{k} u_i^{(\alpha)} a_i = 0$ 和 $\sum_{i=1}^{k} v_i^{(\beta)} a_i = 0$ 属于 dG，因此 $U^{(\alpha)}$ 和 $V^{(\beta)}$ 都属于 $\mathcal{B}(G_0)$。此外,

$$|U^{(\alpha)}| = d\,|\mathbf{u}^{(\alpha)}| \le d\,\beta_{\mathrm{sep}}(dG) \le |A| - 1,$$

类似地，$|V^{(\beta)}| \le |A| - 1$. 因此 $U^{(\alpha)},\ V^{(\beta)} \in \mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}$. 最后，(11) 蕴含序列恒等式 $S \cdot U^{(1)} \cdots U^{(p)} = V^{(1)} \cdots V^{(q)}$。因此，在商群 $q(\mathcal{B}(G_0))$ 中,

$$S = V^{(1)} \cdots V^{(q)} \cdot \big(U^{(1)} \cdots U^{(p)}\big)^{-1} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big).$$

这就证明了该推论。 □

将推论 3.13 特化到 $d = n_1$，我们立即得到分离原子的 n_1 次幂满足的以下关键隶属关系。

推论 3.14. 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$，设 $G_0 = \{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq G$，并设 $A = \prod_{i=1}^{k} g_i^{m_i}$ 是定义在 G_0 上的分离原子，满足 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$。若 $n_1\,\beta_{\mathrm{sep}}(n_1 G) \le |A| - 1$，则 $A^{n_1} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$.

证明。 应用推论 3.13，其中 $d = n_1$ 和 $S = A^{n_1}$. 。事实上，$A^{n_1} = \prod_{i=1}^{k} g_i^{n_1 m_i} \in \mathcal{B}(G_0)$，并且 A^{n_1} 中的每个重数都能被 n_1整除。 □

现在，我们将本节中建立的工具汇集起来，以确定偶秩情形下精确的分离诺特数。

命题 3.15. 设 $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$ 满足 $1 < n_1 \mid \cdots \mid n_r$ 和 $r = 2s.$，令 p_1 为 n_1 的最小素因子。那么 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) = \frac{n_s}{p_1} + n_{s+1} + \cdots + n_r.$ —

证明。令 $n = n_s$ 和 $T = \sum_{j=s+1}^{r} n_j.$。由引理 2.6,

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) \geq T + \frac{n}{p_1}. \tag{12}$$

另一方面，命题 3.4 表明,

$$\beta_{\mathrm{sep}}(G) \leq T + \frac{n}{2}. \tag{13}$$

若 $p_1 = 2$，则 (12) 和 (13) 相同，因此结论成立。以下假设 $p_1 > 2.$。反设 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) > T + \frac{n}{p_1}.$。由引理 2.2，选取一个分离原子 A，它在某个子集 $G_0 \Subset G$ 上满足 $|G_0| \leq r+1$ 且 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$。于是

$$T + \frac{n}{p_1} < |A| \leq T + \frac{n}{2}. \tag{14}$$

由命题 3.11，存在一个整数 $m \in \mathbb{N}$，使得

$$\gcd(m, n_1) = 1 \qquad \text{and} \qquad A^m \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big). \tag{15}$$

若 $n_1 G \neq \{0\}$，则由引理 3.5 得到 $n_1\, \beta_{\mathrm{sep}}(n_1 G) \leq T.$。若 $n_1 G = \{0\}$，则根据约定$\beta_{\mathrm{sep}}(n_1 G) = 1$，且由于必有 $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = n$，我们有 $T = sn \geq n_1 = n_1\, \beta_{\mathrm{sep}}(n_1 G)$。因此，无论哪种情况，$n_1\, \beta_{\mathrm{sep}}(n_1 G) \leq T.$。由于 $T < |A|$，由 (14) 且两者都是整数可知$T \leq |A| - 1.$。因此 $n_1\, \beta_{\mathrm{sep}}(n_1 G) \leq |A| - 1.$。于是由推论 3.14 得到

$$A^{n_1} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big). \tag{16}$$

由于 $\gcd(m, n_1) = 1$，存在整数 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 m = 1.$ 方程（15）和（16）推出 $A = (A^{n_1})^{\lambda_1} (A^m)^{\lambda_2} \in q\big(\mathcal{B}(G_0)_{|A|-1}\big)$，这与 A 是一个分离原子的事实矛盾。因此，我们的假设不成立，且 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) \leq T + \frac{n}{p_1}.$ 结合（12），可得 $\beta_{\mathrm{sep}}(G) = T + \frac{n}{p_1} = \frac{n_s}{p_1} + n_{s+1} + \cdots + n_r.$ □

结合命题 3.3 和命题 3.15，定理 1.3 的证明现已完成。作为显式公式和极大分离原子的结构性质的一项应用，我们现在证明，对于秩至少为 2 的所有群，猜想 5.4] 中所猜想的结论成立。现在证明推论 1.4。

推论 *1.4* 的证明。令 $G_1 = \mathrm{supp}(A)$ 且 $k = |G_1|.$。根据定义，A 中的项恰好由 G_1 中的元素组成，因此我们可以写成 $G_1 = \{g_1, \ldots, g_k\}$ 和 $A = \prod_{i=1}^{k} g_i^{m_i}$，其中 $m_i \geq 1$ 对于 $1 \leq i \leq k.$。我们看到，A 也是 G_1 上的一个分离原子。现在我们分别处理奇秩和偶秩的情形。

情形 1: r 为奇数。令

$$r = 2s - 1, \qquad n = n_s, \qquad T = n_{s+1} + \cdots + n_r.$$

对于每个 $i \in [1, k]$，写作

$$m_i = nk_i + x_i, \qquad k_i \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq x_i \leq n - 1.$$

Set

$$h_i = ng_i \in nG, \qquad B = \prod_{i=1}^{k} h_i^{k_i}.$$

由于 A 在 G_1 上是分离的，且 $|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G)$，由引理 3.1 得到 $|B| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1$. 因为 $n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) = T - (s-1)n$，我们得到

$$|A| = n|B| + \sum_{i=1}^{k} x_i \le T - (s-1)n + \sum_{i=1}^{k} x_i. \tag{17}$$

接下来选择 $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{N}^k$，使得 $\sum_{i=1}^{k} t_i$ 在满足 $\sum_{i=1}^{k}(t_i n - x_i)g_i = 0$，的条件下取最小值，并定义

$$V = \prod_{i=1}^{k} g_i^{t_i n - x_i}, \qquad Y = \prod_{i=1}^{k} h_i^{t_i - 1}.$$

那么 $AV = \prod_{i=1}^{k} g^{(k_i + t_i)_i}{}^{n}$ 是一个零和序列，其中所有重数均可被 n 整除。由引理 2.5，$AV \in \mathsf{q}\big(\mathcal{B}(G_1)_{|A|-1}\big)$. 若 $|V| \le |A| - 1$，则 $V \in \mathcal{B}(G_1)_{|A|-1} \subseteq \mathsf{q}\big(\mathcal{B}(G_1)_{|A|-1}\big)$，因此 $A = (AV) \cdot V^{-1} \in \mathsf{q}\big(\mathcal{B}(G_1)_{|A|-1}\big)$，这与 A 在 G_1 上是分离的相矛盾。因此 $|V| \ge |A|$. 由引理 3.2（取 $l = 1$），$|Y| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1$. 因此

$$|V| = n|Y| + kn - \sum_{i=1}^{k} x_i \le T - (s-1)n + kn - \sum_{i=1}^{k} x_i. \tag{18}$$

结合 (17)、(18) 以及事实 $|V| \ge |A|$，我们得到 $2|A| \le 2T + (k - 2s + 2)n$. 根据命题 3.3，$|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G) = T + n$，从而得到 $k \ge 2s = r + 1$. 另一方面，$k = |\mathsf{supp}(A)| \le |G_0| \le r + 1$.因此 $|\mathsf{supp}(A)| = |G_0| = r + 1$.

情形 2：r 是偶数。令

$$r = 2s, \qquad n = n_s, \qquad T = n_{s+1} + \cdots + n_r.$$

对于每个 $i \in [1, k]$，记

$$m_i = nk_i + x_i, \qquad k_i \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \le x_i \le n - 1,$$

并设

$$h_i = ng_i \in nG, \qquad B = \prod_{i=1}^{k} h_i^{k_i}.$$

引理 3.1 得出 $|B| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1$. 由于 $n\big(\mathsf{D}^*(nG) - 1\big) = T - sn$，我们得到

Ag t

$$|A| = n|B| + \sum_{i=1}^{k} x_i \le T - sn + \sum_{i=1}^{k} x_i. \tag{19}$$

接下来选择 $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{N}^k$ 满足 $\sum_{i=1}^{k}(t_i n - x_i)g_i = 0$的最小 $\sum_{i=1}^{k} t_i$，并定义

$$V = \prod_{i=1}^{k} g_i^{t_i n - x_i}, \qquad Y = \prod_{i=1}^{k} h_i^{t_i - 1}.$$

与奇数情形一样， $AV = \prod_{i=1}^{k} g^{(k_i+t_i)_i}$ ^{n} 是 n-可除的且为零和，因此由引理 2.5 可得 $AV \in q\big(\mathcal{B}(G_1)_{|A|-1}\big)$. 若 $|V| \le |A|-1$，则 $A = (AV)\cdot V^{-1} \in q\big(\mathcal{B}(G_1)_{|A|-1}\big)$, 这就产生矛盾。因此$|V| \ge |A|$. 由引理 3.2（取 $l=1$），$|Y| \le \mathsf{D}^*(nG) - 1$, 从而

$$|V| = n|Y| + kn - \sum_{i=1}^{k} x_i \le T - sn + kn - \sum_{i=1}^{k} x_i. \tag{20}$$

结合 (19)、(20) 以及事实 $|V| \ge |A|$，我们得到 $2|A| \le 2T + (k-2s)n$. 令 p_1 为 n_1 的最小素因子。由命题 3.15，$|A| = \beta_{\mathrm{sep}}(G) = T + \frac{n}{p_1}$. 我们得到 $2\left(T + \frac{n}{p_1}\right) \le 2T + (k-2s)n$，化简后得到 $\frac{2}{p_1} \le k - 2s$. 由于 $k-2s$ 是整数且 $\frac{2}{p_1} > 0$，因此 $k - 2s \ge 1$,于是 $k \ge 2s+1 = r+1$. 由于 $k = |\mathrm{supp}(A)| \le |G_0| \le r+1$，我们有 $|\mathrm{supp}(A)| = |G_0| = r+1$.证明完毕。 □

参考资料

[1] K. Cziszter， p群的诺特数，J. Algebra Appl. 18 (2019) 1950066。[2] K. Cziszter 和 M. Domokos，具有指数为二的循环子群的群的诺特数，J. Algebra 399 (2014) 546–560。[3] K. Cziszter、M. Domokos 和 I. Sz¨oll˝osi，阶小于 32 的群的诺特数与达文波特常数，J. Algebra 510 (2018) 513–541。[4] H. Derksen 和 G. Kemper，《计算不变量理论》，《数学科学百科全书》第 130 卷，Springer，柏林，2002。[5] M. Domokos，阿贝尔群分离不变量的次数界，美国数学会会刊 145 (2017)，3695–3708。[6] W. Gao 和 A. Geroldinger，有限阿贝尔群中的零和问题：综述，Expo. Math. 24 (2006)，337–369。[7] A. Geroldinger 和 F. Halter-Koch，《非唯一分解：代数、组合与解析理论》，纯粹与应用数学第 278 卷，Chapman & Hall/CRC，2006。[8] B. Klopsch 和 V. F. Lev，仅用加法生成阿贝尔群，Forum Math. 21 (2009)，23–41。[9] M. Kohls 和 H. Kraft，分离不变量的次数界，Math. Res. Lett. 17 (2010)，1171–1182。[10] E. Noether，有限群不变量的有限性定理，Math. Ann. 77 (1916)，89–92。[11] J. E. Olson，有限阿贝尔群上的一个组合问题 I，J. Number Theory 1 (1969)，8–10。[12] J. E. Olson，有限阿贝尔群上的一个组合问题 II，J. Number Theory 1 (1969)，195–199。[13] B. Schefler，秩二阿贝尔群的分离诺特数，J. Combin. Theory Ser. A 209 (2025) 105951。

[14] B. Schefler，循环群多个副本的直和的分离诺特数，美国数学会会刊 153 (2025)，69–79。[15] B. Schefler、K. Zhao 和 Q. Zhong，有限阿贝尔群的分离诺特数，欧洲组合学杂志 133 (2026)，104302。[16] B. Schefler、K. Zhao 和 Q. Zhong，关于有限阿贝尔群作用的多项式不变量分离集，arXiv:2509.16097，2025。[17] B. Schmid，有限群与不变量理论，载于：《不变量理论专题》，《数学讲义》，Springer，第 1478 卷（1991），35–66。