arXiv:2603.23176v1 [math.AC] 24 Mar 2026

Macaulay2 中的奥尔洛夫函子

MICHAEL K. BROWN、SOUVIK DEY、GEOFFREY FATIN、GUANYU LI、MAHRUD SAYRAFI 和 TIM TRIBONE

Abstract. 给定一个交换分次戈伦斯坦环 R，以及与之关联的射影簇 X，奥尔洛夫定理给出了从 R的分次奇点范畴到 X的导出范畴，或反向嵌入的全忠实函子，具体取决于 X的典范丛的次数。我们介绍了用于计算这些嵌入的算法，并可在 Macaulay2 中实现。

1. Introduction

奥尔洛夫的一项里程碑定理 [Orl09, Theorem 2.5]确立了算术 Gorenstein 射影簇的导出范畴与其仿射锥的奇点范畴之间的密切关系。在准确陈述奥尔洛夫定理之前，我们先固定一些记号并回顾若干术语。设 $\mathbf{k}$ 为一个域，$S = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$，$I \subseteq S$为齐次理想，$R := S/I$，且$X := \operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathbb{P}^n$ 为与 R关联的射影簇。令 d 表示 R的 Krull 维数。我们假设 R 是戈伦斯坦的，也就是说，对于某个 $a \in \mathbb{Z}$，有 $\operatorname{Ext}^d_R(\mathbf{k}, R) = \mathbf{k}(a)$，并且对于所有 $i \neq d$，有 $\operatorname{Ext}^i_R(\mathbf{k}, R) = 0$（关于分次扭曲的约定，见记号 1.2）。整数 a称为 R的 Gorenstein 参数；X 的典范丛为 $\mathcal{O}_X(-a)$。例如，若 I由一列齐次形式 f_1、……、f_c构成的正则序列生成，则 R是戈伦斯坦的，且 $a = n + 1 - \sum_{i=1}^{c} \deg(f_i)$。

令 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ 分别表示有限生成分次 R-模和相干 $\mathcal{O}_X$-模的有界导出范畴。令 $\operatorname{Perf}_{\mathrm{gr}}(R) \subseteq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 表示由完美复形构成的全三角子范畴，即有限生成分次自由模组成的有界复形。商范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{gr}}(R)/\operatorname{Perf}_{\mathrm{gr}}(R)$ 称为的分次奇点范畴，记作 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$。下述定理归功于 Orlov（更精确的陈述见定理 2.1）：

定理1.1 ([Orl09] 定理 2.5)。若 $a \geq 0$（分别地，$a \leq 0$），则对每个 $t \in \mathbb{Z}$，存在一个全忠实函子 $\Phi_t : \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R) \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$（分别地，$\Psi_t \colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$）。若 $a = 0$，则函子 Φ_t和 Ψ_t 互为逆等价。

我们在第2节回顾函子 Φ_t 和 Ψ_t 的定义。定理1.1是一项强有力的结果，在代数几何、交换代数、表示论等领域都有应用：更多背景可参见 [BS15，第 1] 节和 [BS25，第 1] 节。我们的目标是说明如何在即将推出的 Macaulay2 [M2]软件包中实现函子 Φ_t 和 Ψ_t 。

本文是初步草稿；待随附的 Macaulay2 软件包完成后，我们将更新本文，加入代码运行示例。

论文概述。在第2节中，我们介绍奥尔洛夫定理（定理1.1）的相关背景。特别是，我们明确描述了全忠实嵌入 Φ_t 和 Ψ_t，并通过一些示例对其进行计算。我们将在第3节说明用于计算 Φ_t 和 Ψ_t 的算法。

记号 1.2。全文中，$\mathbf{k}$表示一个域。我们按上同调方式为复形编入指标。若 C是一个微分为 d_C的复形，且 $i \in \mathbb{Z}$，则 $C[i]$ 是满足 $C[i]^j = C^{i+j}$ 且微分为$(-1)^i d_C$的复形。给定一个 $\mathbb{Z}$-分次环 A上的分次模，我们将其 i^{th} 分次

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D03, 14F08.

分量记作 M_i。 M 的 j^{th} 扭转是分次模 $M(j)$，其分量为 $M(j)_i := M_{i+j}$。若 C 和 D 是分次 A-模的复形，则 $\mathrm{Hom}_A(C,D)$表示从 C 到 D 的内部次数和同调次数均为0的链映射集合，而 $\mathrm{Hom}_A(C,D)$是一个分次A-模复形，其 j^{th} 项是分次 A-模 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(C,D(i)[j])$，其微分将同调次数为 j 的映射 α 映为映射 $\partial_D\alpha - (-1)^j\alpha\partial_C$。我们将从 C到 D的导出 Hom 复形记作 $\mathrm{RHom}_A(C,D)$，并定义 $\mathrm{Ext}^j_A(C,D) := H^j\mathrm{RHom}_A(C,D)$。

2. Background

以下是 Orlov 的一个定理（一个特例[1] ）：

定理 2.1（[Orl09] 定理 2.5）。设 $q\colon D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{gr}}(R) \to D^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 为典范函子。对于所有 $j\in\mathbb{Z}$，对象 $\mathcal{O}_X(j) \in D^{\mathrm{b}}(X)$ 和 $q\mathbf{k}(j) \in D^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 都是例外对象，并且存在函子

$$\Phi_t\colon \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \quad \textit{and} \quad \Psi_t\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$$

对于所有满足以下条件的 $t\in\mathbb{Z}$：

(1) 若 $a>0$，则 Φ_t 是全忠实函子，并且存在一个半正交分解

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) = \langle \mathcal{O}_X(-t-a+1), \dots, \mathcal{O}_X(-t), \Phi_t\,\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)\rangle.$$

(2) 若 $a<0$，则 Ψ_t 是全忠实函子，并且存在一个半正交分解

$$\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R) = \langle q\mathbf{k}(-t), \dots, q\mathbf{k}(-t+a+1), \Psi_t\,\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)\rangle.$$

(3) 若 $a=0$，则 Φ_t 和 Ψ_t 互为逆等价。

函子 Ψ_t 将 $\mathcal{F}\in\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ 映到 $\bigoplus_{j\geq t-a}\mathrm{R}\Gamma(X,\mathcal{F}(j)) \in \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ [Orl09，注记 2.6]。在描述函子 Φ_t 之前，我们必须先确立一些记号和术语。首先，给定一个由分次自由 R-模组成的复形 P，令 $P_{\prec j}$ 表示由形如 $R(s)$ 且满足 $s > -j$ 的直和项所构成的子复形（即由次数为 $< j$ 的元素生成的直和项），并令 $P_{\succcurlyeq j} := P/P_{\prec j}$。给定 $C\in\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)$，$C$ 的极小自由分解是一个拟同构 $F \xrightarrow{\simeq} C$，使得 F 是一个极小自由复形，其中 $F_i = 0$ 对于 $i \ll 0$ 成立。这类复形的极小自由分解存在，且在同构意义下唯一 [Rob98，命题 4.4.1]。有了这些准备，函子 Φ_t 定义如下（参见 [BW25，第 2.2] 节，或 [BS15]）。给定 $C\in\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)$，令 F 为其极小自由分解，并令 G 为 $\mathrm{Hom}_R(F_{\succcurlyeq t},R)$ 的极小自由分解。函子 Φ_t 将 C 映到与分次 R-模的复形 $\mathrm{Hom}_R(G,R)_{\prec t}$ 相关联的层复形。

这些函子 Φ_t 和 Ψ_t 与分次扭曲不交换。不过，我们确实有：

引理 2.2. 设 $C\in\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$、$\mathcal{C}\in\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$以及 t、$j\in\mathbb{Z}$。

(1) $\Phi_t(C(j)) = \Phi_{t+j}(C)(j)$.

(2) $\Psi_t(\mathcal{C}(j)) = \Psi_{t+j}(\mathcal{C})(j)$.

证明。(1) 由公式 $F(j)_{\succcurlyeq t-j} = F_{\succcurlyeq t}(j)$ 和 $F(j)_{\prec t-j} = F_{\prec t}(j)$ 得出，而 (2) 显然成立。 □

例 2.3. 由于 Φ_t 定义在 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 上，它应将完美复形映为零；我们来确认这一点（参见 [BW25，例 2.4]）。设 F 是一个完美复形，即由有限生成的分次自由 R-模组成的有界复形。它等于自身的极小自由分解。复形 $\mathrm{Hom}_R(F_{\succcurlyeq t},R)$ 也是一个完美复形，因此在这种情况下 $G = \mathrm{Hom}_R(F_{\succcurlyeq t},R)$。因此我们有 $\mathrm{Hom}_R(G,R) = F_{\succcurlyeq t}$，于是 $\Phi_t(F) = (F_{\succcurlyeq t})_{\prec t} = 0$。

[1] 奥尔洛夫定理对 *noncommutative* Gorenstein 环也成立。原则上，在 M2 中实现这个更强版本的定理应该是可行的；但由于 M2 目前对非交换环上的自由分解的功能仍有些受限，我们选择只关注交换情形。

我们回顾一下，有限生成的分次 R-模 M 称为极大 ***Cohen-Macaulay***（***MCM***），当且仅当对 $i>0$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$。

例 2.4 ([BW25] 例 2.5)。假设 R 是超曲面，即对于某个齐次 $f\in S$，有 $R=S/(f)$。若 M 是由 0 次生成的极大 Cohen-Macaulay R-模，则 $\Phi_0(M)=M$。因此，由引理 2.2(1) 可知 $\Phi_t(M(-t))\cong M(-t)$。

例 2.5. 我们来证明，若 $a=0$，则 $\Phi_0(k)\cong\mathcal{O}_X[d-1]$。令 F 为 k 的极小自由分解。由于 $F=F_{\geqslant 0}$，我们有拟同构 $\mathrm{Hom}_R(F_{\geqslant 0},R)\simeq$ 导出 $\mathrm{Hom}_R(\mathsf{k},R)\simeq \mathsf{k}[-d]$，其中第二个拟同构由 Gorenstein 性质推出。因此，$G=F[-d]$，于是有 $\Phi_0(\mathsf{k})=(\mathrm{Hom}_R(F,R)_{\prec 0})[d]$，它是 $\mathrm{Hom}_R(F,R)[d]$ 在小于 $-d$ 的次数上的粗截断。再由 Gorenstein 性质可得一个拟同构 $\mathrm{Hom}_R(F,R)[d]\simeq\mathsf{k}$。恰当三角 $[\Phi_0(\mathsf{k})\to 0\to\mathcal{O}_X[d]\to]$ 随即给出所需的同构。因此，由引理 2.2(1) 可知，若 $a=0$，则对所有 $t\in\mathbb{Z}$，有 $\Phi_t(\mathsf{k}(-t))\cong\mathcal{O}_X(-t)[d-1]$。

例 2.6。令 $R=\mathbf{k}[x_0,\dots,x_4]/(x_0x_1,x_2x_3x_4)$ 和 $M=R/(x_0x_2)$；现在我们计算复形 $\Psi_3\Phi_3(M)$。M 的极小自由分解开头如下：

$$R\leftarrow R(-1)^2\leftarrow R(-2)^2\oplus R(-3)\leftarrow R(-3)^2\oplus R(-4)^2\leftarrow R(-4)^2\oplus R(-5)^2\oplus R(-6)\leftarrow\cdots.$$

因此我们有

$$F_{\geqslant 3}=\left[R(-3)\leftarrow R(-3)^2\oplus R(-4)^2\leftarrow R(-4)^2\oplus R(-5)^2\oplus R(-6)\leftarrow\cdots\right].$$

其中 $R(-3)$ 位于上同调次数 -2。我们注意到，$F_{\geqslant 3}$ 在次数 -2 和 -3上同调非零，而在其他次数上都是正合的。进行对偶化后，我们得到如下形式的复形

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(F_{\geqslant 3},R)=\left[R(3)\to R(3)^2\oplus R(4)^2\to R(4)^2\oplus R(5)^2\oplus R(6)\to\cdots\right],$$

其中 $R(3)$ 位于上同调次数 2。根据 Macaulay2，其极小自由分解 G 的形式为

$$R(2)^2\leftarrow R(1)^2\leftarrow R\leftarrow R(-3)\leftarrow R(-4)^2\leftarrow R(-5)^2\oplus R(-6)\leftarrow\cdots,$$

其中 $R(2)^2$ 位于上同调次数 3。函子 $(-)_{\prec 3}$ 对 $\mathrm{Hom}_R(G,R)$ 不起作用，因此 $\Phi_3(\underline{M})$ 是 $\mathrm{Hom}_R(G,R)$ 的层化：

$$\mathcal{O}_X(-2)^2\to\mathcal{O}_X(-1)^2\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X(3)\to\mathcal{O}_X(4)^2\to\mathcal{O}_X(5)^2\oplus\mathcal{O}_X(6)\to\cdots.$$

因此，$\Psi_3\Phi_3(M)$ 是对象

$$\bigoplus_{j\geq 3}\mathbf{R}\Gamma\left(X,\mathcal{O}_X(-2+j)^2\to\mathcal{O}_X(-1+j)^2\to\mathcal{O}_X(j)\to\mathcal{O}_X(3+j)\to\mathcal{O}_X(4+j)^2\to\cdots\right)\tag{2.7}$$

位于 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 中。直接计算可知，$\Phi_3(M)$ 中的每一项在正次数上都没有层上同调，因此 (2.7) 同构于复形

$$\bigoplus_{j\geq 3}\Gamma\left(X,\mathcal{O}_X(-2+j)^2\to\mathcal{O}_X(-1+j)^2\to\mathcal{O}_X(j)\to\mathcal{O}_X(3+j)\to\mathcal{O}_X(4+j)^2\to\cdots\right).$$

我们得出 $\Psi_3\Phi_3(M)=\left[R(-2)^2_{\geq 3}\to R(-1)^2_{\geq 3}\to R_{\geq 3}\to R(3)_{\geq 3}\to R(4)^2_{\geq 3}\to\cdots\right]$。由于 $X\subseteq\mathbb{P}^4$ 是卡拉比-丘完全交，因此存在一个同构 $\Psi_3\Phi_3(M)\cong M$，位于 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 中。我们的计算并不能明显看出这一点，这体现了奥尔洛夫定理的微妙之处。

3. Implementing Orlov's functors

固定 $t\in\mathbb{Z}$。现在我们说明如何在 Macaulay2 中实现定理 2.1 中的函子 $\Phi_t\colon\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)\to\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 和 $\Psi_t\colon\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)\to\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ 的算法。

3.1. 函子 Φ_t。 实现函子 Φ_t 的难点在于，其定义中涉及的极小自由分解几乎总是无限的。尽管如此，我们可以在流程的每一步选择有限模型。首先记录以下两个技术性陈述。

命题 3.1. 设 C 是一个由有限生成的分次 R-模组成的复形。若 $H^j(C)=0$ 除非$s\le j\le u$，则 $\operatorname{Ext}^j_R(C,R)=0$除非 $-u\le j\le d-s$，其中 $d=\dim(R)$。

证明。 取适当的智能截断后，不妨设我们有 $C^j=0$除非 $s\le j\le u$。令 $\mathfrak{m}$表示 R的齐次极大理想，并用 $H^*_{\mathfrak{m}}(C)$表示 C的局部上同调。收敛谱序列 $E^{p,q}_1=H^q_{\mathfrak{m}}(C^p)\Rightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{m}}(C)$蕴含 $H^j_{\mathfrak{m}}(C)=0$ 除非 $s\le j\le u+d$。由于 R 是 Gorenstein 的，局部对偶给出 $\operatorname{Ext}^j_R(C,R(-a))\cong H^{d-j}_{\mathfrak{m}}(C)$，其中 a 是 R的 Gorenstein 参数。结论立即得出。□

命题 3.2。 设 C 是一个分次 R-模的复形，使得 $H^j(C)=0$ 对 $s\le j\le u$成立。假设存在 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 $H^s(C)_m\neq 0$ 且 $H^s(C)_i=0$ 对 $i<m$成立。若 F 是 C的极小自由分解，则对任意 $i\in\mathbb{Z}$，以下结论成立：

(1) $H^j(F_{\succcurlyeq i})=0$ *unless* $\min\{s+m-i,s\}\le j\le u$.
(2) $H^j(\underline{\operatorname{Hom}}_R(F,R)_{\prec i})=0$ *unless* $-u\le j\le d-\min\{s+m+i-1,s\}$.

证明。 F 的所有直和项都由次数至少为 m的元素生成，因此若 $i\le m$，则有 $F_{\succcurlyeq i}=F$，此时 $H^j(F_{\succcurlyeq i})=0$ 对 $s\le j\le u$成立。假设 $i>m$。由于 F 是极小的，当 $j\ge 0$时，F^{s-j}的每个直和项都由次数至少为 $m+j$的元素生成。因此，当 $m+j\ge i$且$j\ge 0$时，$F^{s-j}_{\succcurlyeq i}=F^{s-j}$，于是 $F_{\succcurlyeq i}$ 如下所示：

$$0\leftarrow F^u_{\succcurlyeq i}\leftarrow\cdots\leftarrow F^s_{\succcurlyeq i}\leftarrow\cdots\leftarrow F^{s+m-i+1}_{\succcurlyeq i}\leftarrow F^{s+m-i}\leftarrow F^{s+m-i-1}\leftarrow\cdots.$$

由此我们得出，$H^j(F_{\succcurlyeq i})=0$除非 $s+m-i\le j\le u$。这就证明了 (1)。接下来我们注意到 $\operatorname{Hom}_R(F,R)_{\prec i}=\underline{\operatorname{Hom}}_R(F_{\succcurlyeq -i+1},R)$。根据 (1)，$H^j(F_{\succcurlyeq -i+1})=0$除非 $\min\{s+m+i-1,s\}\le j\le u$.命题 3.1 随即推出所需结果。□

现在我们说明如何计算函子 Φ_t的算法。$\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 中的对象是由有限生成的 R-模构成的有界复形；设 C 是这样一个复形。给定 $\ell\ge 0$，我们说明如何计算 ℓ 长度的 $\Phi_t(C)$逼近。

(1) 设 F 为 C的极小自由分解，并令 $s:=\inf\{i:\ H^i(C)\neq 0\}$。复形 C在 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}_{\mathrm{gr}}(R)$ 中同构于 F 在上同调次数 $\le s$上的粗截断 $F^{\le s}$，即 $H^s(C)[-s]$的极小自由分解。(2) 选取 m 使得 $H^s(C)_m\neq 0$，且 $H^s(C)_i=0$对 $i<m$成立。根据命题 3.2，$H^j(F_{\succcurlyeq t})=0$ 除非 $c\le j\le s$，其中 $c:=\min\{s+m-t,s\}$。命题 3.1 随即推出，$H^j\operatorname{Hom}_R(F_{\succcurlyeq t},R)=0$ 除非 $-s\le j\le d-c$。令 D 表示复形 $\operatorname{Hom}_R(F_{\succcurlyeq t},R)$，其微分为 ∂_D，我们得出智能截断

$$0\to D^{-s}\to D^{-s+1}\to\cdots\to D^{d-c-1}\to\ker(\partial_D^{d-c})\to 0 \tag{3.3}$$

与 D 拟同构。

(3) 设 G 是复形 (3.3) 的极小自由分解。记 $E:=\operatorname{Hom}_R(G,R)_{\prec t}$，则 $\Phi_t(C)$ 所需的长度为 ℓ 的近似是该复形的层化

$$0\to E^{c-d}\to\cdots\to E^{c-d+\ell}\to 0.$$

注记 3.4。 根据命题 3.1(2)，$H^j(E)=0$ 除非 $c-d\le j\le d-b$；其中，令 m' 为使 $H^{-s}(G)$ 非零的最小内次数，我们定义 b 为 $\min\{-s+m'+t-1,-s\}$。因此，$\Phi_t(C)$ 与 E的以下智能截断的层化拟同构：

$$0\to E^{c-d}\to\cdots\to E^{d-b-1}\to\ker(\partial_E^{d-b})\to 0.$$

3.2. 函子 Ψ_t。设 $\mathcal{C}$ 为相干 $\mathcal{O}_X$-模的有界复形。为了计算 $\Psi_t(\mathcal{C})$，我们将运用 [BDLS25 定理 2.15], ，该定理提供了一种有效方法，用于计算相干层有界复形之间的 Ext。为此，我们先固定一些记号。选取有限生成 R-模的有界复形 C，使得 $\widetilde{C} = \mathcal{C}$。令 $\inf(C) \coloneqq \inf\{i : C^i = 0\}$，并类似地定义 $\sup(C)$。我们用 $\dim(C)$ 表示 C的支撑的 Krull 维数。我们将 C 在 S 上的分次贝蒂数记为 $\beta_{i,j}(C) \coloneqq \dim_{\mathbf{k}} H^{-i}(C \otimes^{\mathbf{L}}_S \mathbf{k})_j$，并令$a_i(C) \coloneqq \sup\{j : \beta_{i,j}(C) \neq 0\}$.给定一个 S-模 M，令 $\operatorname{pd}_S(M)$ 表示其投射维数。根据 [BDLS25 定理 2.15]，如果 r 是满足以下不等式的整数

$$r \geq \max\{\overline{a}_i(C^j) : 0 \leq i \leq \operatorname{pd}_S(C^j),\ \inf(C) \leq j \leq \sup(C)\} - n, \tag{3.5}$$

那么存在典范拟同构 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(R_{\geq r}, C)_{\geq 0} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{j\geq 0} \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{C}(j)) = \Psi_a(\mathcal{C})$，其中 a是 R的 Gorenstein 参数。由此可得，当 r 满足不等式 (3.5) 时，

$$\Psi_t(\mathcal{C}) = (\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_R(R_{\geq r}, C(t-a))_{\geq 0})\,(a-t) = \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_R(R_{\geq r}, C)_{\geq t-a} \tag{3.6}$$

第一个等号由引理 2.2(2) 得出，第二个等号则可通过直接计算得到。如 [BDLS25], 所示，公式 (3.6) 很容易在 Macaulay2 中实现。

References

[BDLS25] Michael K. Brown、Souvik Dey、Guanyu Li 和 Mahrud Sayrafi, *Computing global Ext for complexes*, arXiv 预印本 arXiv:2509.25103 (2025)。[BS15] Jesse Burke 和 Greg Stevenson, *The derived category of a graded Gorenstein ring*, 《交换代数与非交换代数几何》第二卷，数学科学研究所出版物，第 68 卷，剑桥大学出版社，纽约，2015 年，第 93–123 页。[BS25] Michael K. Brown 和 Prashanth Sridhar, *Orlov's theorem for dg-algebras*, 《数学进展》**460** (2025)，论文编号 110035。[BW25] Michael K. Brown 和 Mark E. Walker, *Ranks of matrix factorizations and sheaf cohomology*, 《美国数学会会刊》**153** (2025)，第 8 期，3291–3301 页。[M2] *Macaulay2 – a system for computation in algebraic geometry and commutative algebra programmed by D. .[Grayson and M. Stillman*

Orl09] Dmitri Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, 《代数、算术与几何：纪念 Yu. I. Manin》第二卷，数学进展丛书，第 270 卷，Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，2009 年，第 503–531 页。[Rob98] Paul C. Roberts, *Multiplicities and Chern classes in local algebra*，剑桥数学专著丛书，第 133 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998 年。

Department of Mathematics and Statistics, Auburn University
E-mail address: mkb0096@auburn.edu

Department of Mathematical Sciences, University of Arkansas
E-mail address: souvikd@uark.edu

Departments of Mathematics and Physics, Cornell University
E-mail addresses: glf55@cornell.edu, gl479@cornell.edu

Department of Mathematics & Statistics, McMaster University
E-mail address: sayrafi.m@gmail.com

Department of Mathematics, University of Utah
E-mail address: tim.tribone@utah.edu