arXiv:2603.23218v1 [math.DG] 24 Mar 2026

自旋子 I　自旋流形上磁场的不等式

JURGEN JULIO-BATALLA

Abstract. 本文研究正标量曲率闭自旋流形（M^n, g, σ）上的零模方程 $D_g\varphi = iA \cdot \varphi$ 。这里， A 是 M上的一个实一形式。我们证明，若（φ, A）是零模方程的一个非平凡解，则

$$\| dA \|_{n/2} > Y(M^n, [g])/(4v_n^{1/2}),$$

其中， Y（$M^n, [g]$）是（M^n, g）的 Yamabe 常数，且 $v_n = \left[\frac{n}{2}\right]$。对于圆球面（$\mathbb{S}^n, g_{can}, \sigma_{can}$），这一结果证实， [4] 中得到的不等式并非锐利。

1. Introduction

在闭自旋流形 **(**M^n， g， σ**)** 上，我们关注零模方程

$$D_g\varphi = iA \cdot_g \varphi, \tag{1.1}$$

其中， A 是一个实一形式， $\varphi \in \Gamma(SM)$，而 D_g 是关于度量g的狄拉克算子。1-形式 A 的作用“$\cdot_g$”通过克利福德乘法实现。

对这一方程的研究源于数理物理的多个领域。它主要与 $\mathbb{R}^3$ 中关于欧几里得度量 dx^2的零模方程有关。例如，在研究原子与磁场相互作用时会出现这类方程，其存在可能预示着不稳定性。具体而言，在磁场中类氢原子的非相对论描述中，哈密顿量包含一个自旋-磁场相互作用项。将磁场能量加入系统后，Fr¨ohlich-Lieb-Loss 在 [6] 得到了一个变分问题；如果核电荷 Z 超过某个临界值，其下确界便可能任意趋于负无穷（这表明系统不稳定）。这种不稳定性与存在一个具有有限能量磁场的非平凡零模方程解密切相关。关于这一物理问题的更多细节，请参阅 [6]。

Loss-Yau 在 [8]构造了第一个零模的显式例子。此后，人们投入了大量精力来理解方程 **(1.1)** 的结构。关于零模方程的最新进展综述，请读者参阅 [4]及其中的参考文献。

在 [4] 中，Frank-Loss 定量地探讨了零模不存在的问题，并建立了磁场 dA 存在非平凡零模 **(**φ， A**)** 的必要条件。更确切地说，如果 **(**φ， A**)** 是 $\mathbb{R}^3$ 中相对于欧几里得度量 dx^2 的一个零模，他们证明了

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |dA|^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2S_3, \tag{1.2}$$

其中， S_3 是 $\mathbb{R}^3$中的索об列夫常数。

由于没有达到等号的显式例子，Frank-Loss 在 [4] 中提出估计 **(1.2)** 是否为尖锐的问题。他们猜想尖锐常数可能是 $4S_3$。

本文的主要目标是证明不等式 **(1.2)** 并非最优。我们的结果如下

定理 1.1. 设(M^n, g, σ) 是一个具有正标量曲率 ^{s_g} 的闭自旋流形。若(φ, A) 是一个非平凡零模，则

$$\| dA \|_{n/2} > Y(M^n, [g])/(4v_n^{1/2}),$$

其中 $Y(M^n, [g])$ 是 $M^n, g)$ 的 ***Yamabe*** 常数，并且，当 n 为奇数时， $v_n = (n-1)/2$；当 n 为偶数时，$v_n = n/2$。

注 1.2. 由于零模方程 (1.1)是共形不变的，估计式 (1.2) 对圆球面 $(\mathbb{S}^3, g_{can}, \sigma_{can})$上的零模也成立。注意，$(4v_3^{1/2})^{-1} Y(\mathbb{S}^3, [g_{can}]) = \frac{3}{2} vol(\mathbb{S}^3, g_{can})^{2/3} = 2S_3$。

–

注 1.3. 在 [2] 维中，*Dunne-Min* 将 *Loss-Yau* 构造的零模 (φ, A) 推广到了更高的奇数维。*Frank-Loss* [5] 随后证明，这些零模是该尖锐不等式的优化解

$$\| A \|_n^2 \geq \frac{n}{(n-2)} S_n.$$

值得研究它们是否也能优化 $\| dA \|_{n/2}$ 的尖锐不等式。

关于正则性，由于 [4, 5, 9] 中关于零模的正则性结果（φ， A），我们始终假设 $|A| \in L^n(M^n)$，且旋量场 φ属于某个 $L^p(M^n)$，其中 $p > n/(n-1)$。

在 [4] 中，证明（1.2）的关键要素是针对零模的抗磁不等式 $|\nabla |\varphi||^2 \leq \frac{2}{3} |(-i\nabla - A)\varphi|^2$ 的改进版本。我们的证明采用了不同的方法。我们的关键要素是一个新的共形加权不变量

$$\lambda_1 \left(4i \frac{\langle dA \cdot_g \varphi, \varphi \rangle_g}{|\varphi|_g^2}, g \right),$$

定义为加权线性问题的第一特征值

$$L_g(u) = \mu \; 4i \frac{\langle dA \cdot_g \varphi, \varphi \rangle_g}{|\varphi|_g^2} u,$$

其中 L_g 是关于度量 g 的共形拉普拉斯算子。关于该不变量的更多细节见第 3 节。

最近，具有不同权重选择的共形加权不变量已被用于刻画一些尖锐旋量不等式中的等号成立情形。例如， [7] 中的作者定义了关于权重 $|\varphi|_g^{4/(n-1)}$ 的共形加权不变量。当 φ 是旋量 Ya mabe 方程的一个解时

$$D_g \varphi = |\varphi|^{2/(n-1)} \varphi,$$

作者刻画了尖锐不等式取等时的情形

$$\lambda_{min}^+(M^n, [g], \sigma)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} Y(M^n, [g]).$$

这里 λ_{min}^+ 是 B¨ar-Hijazi-Lott 不变量。

最近，Wang-Zhang 在 [9] 考虑了关于权重 $|A|_g^2$ 的共形加权不变量。当 (φ, A) 是一个零模时，他们刻画了等号成立的情形

$$\| A \|_n^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} Y(M^n, [g]).$$

本文的结构安排如下。第2节回顾自旋流形和磁狄拉克算子的相关背景，并讨论方程 (1.1) 的不变性。在第 3 节中，我们引入共形加权不变量 $\lambda_1 \left(4i \frac{\langle dA \cdot_g \varphi, \varphi \rangle_g}{|\varphi|_g^2}, g \right)$，并给出定理 1.1 的证明。

2. Preliminaries

2.1. 自旋流形

我们回顾自旋流形的一些基本事实。更多细节参见 [3]。

在一个闭合定向黎曼流形 (M^n, g) 上，我们可以定义一个 $SO(n)$-主丛 $P_{SO}M$，它覆盖 M 上各点 $x \in M$ 处的定向 $g-$ 正交标架。对于 $n \geq 3$，存在万有覆盖$\sigma: spin(n) \to SO(n)$，其中 $spin(n)$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 实克利福德代数 Cl_n 中偶数个单位长度向量生成的群（该结合 $\mathbb{R}-$ 代数由关系 $VW + WV = -2(V, W)$ 生成，其中 $(,)$ 是欧几里得度量）。若存在一个位于 M 上的 $spin(n)-$主丛$P_{spin}M$，使得它是 $P_{SO}M$ 的双覆盖，且其在每个纤维上的限制都是双覆盖 $\sigma: spin(n) \to SO(n)$，则称流形 M 为自旋流形。从 $P_{spin}M$ 到 $P_{SO}M$, σ 的这种双覆盖称为自旋结构。

与自旋流形 (M^n, g, σ) 相关联的特殊结构有四种:

(1) 复向量丛 $SM := P_{spin}(M) \times_\rho \Sigma_n$，其中 $\rho: spin(n) \to Aut(\Sigma_n)$ 是复克利福德代数 $\mathbb{C}l_n \simeq Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 的不可约表示 $\rho: \mathbb{C}l_n \to End(\Sigma_n)$ 在 $spin(n)$ 上的限制，$\Sigma_n \simeq \mathbb{C}^N$ 并且 $N = 2^{[n/2]}$。(2) 克利福德乘法 m 在 SM 上定义为

$$\begin{aligned} m : TM \times SM &\to SM \\ X \otimes \varphi &\mapsto X \cdot_g \varphi := \rho(X)\varphi. \end{aligned}$$

(3) SM 的截面上的厄米内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。

(4) SM 上的列维-奇维塔联络 ∇。

这些结构具有以下相容性:

$$\begin{aligned} \langle X \cdot \varphi, \psi \rangle &= -\langle \varphi, X \cdot \psi \rangle, \\ X(\langle \varphi, \psi \rangle) &= \langle \nabla_X \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \nabla_X \psi \rangle, \\ \nabla_X (Y \cdot \varphi) &= \nabla_X Y \cdot \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi, \end{aligned}$$

对所有 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 以及 $\varphi, \psi \in \Gamma(SM)$ 均成立。给定列维-奇维塔联络 $\nabla: \Gamma(SM) \to \Gamma(Hom(TM, SM))$，并将 $\Gamma(Hom(TM, SM))$ 与 $\Gamma(TM \otimes SM)$ 等同，我们可以将狄拉克算子 D_g 定义为 ∇ 与克利福德乘法 m 的复合，即 $D_g := m \circ \nabla$。对于局部标准正交标架 $\{E_j\}$，有

$$D_g \varphi = \sum_{j=1}^{n} E_j \cdot_g \nabla_{E_j} \varphi.$$

为便于后文讨论，我们简要回顾该算子的若干性质与恒等式。对于狄拉克算子的平方，有 Schr¨odinger-Lichnerowicz 公式

$$D_g^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} sc_g Id_{\Gamma(SM)},$$

其中 $\nabla^*: \Gamma(Hom(TM, SM)) \to \Gamma(SM)$ 是列维-奇维塔联络 ∇ 的伴随算子。

对于该算子的不同变体 D_g，也有 Schr¨odinger-Lichnerowicz 公式。设A 是 M^n上的光滑实一形式。磁势为 A 的磁狄拉克算子定义为

$$D_g - iA \cdot_g : \Gamma(SM) \to \Gamma(SM)$$

旋量磁联络拉普拉斯算子定义为

$$\nabla^{A*} \nabla^A : \Gamma(SM) \to \Gamma(SM),$$

其中 $\nabla^A := \nabla - iA: \Gamma(SM) \to \Gamma(TM^* \otimes SM)$，且 A 在 φ 上的作用由 $A \otimes \varphi$ 给出 .

联络 ∇^A 是度量联络，因此特别有

$$\frac{1}{2}\Delta|\varphi|^2 = |\nabla^A\varphi|^2 - \langle\nabla^{A*}\nabla^A\varphi,\varphi\rangle$$

成立。

最后，磁狄拉克算子的平方满足（例如参见 [1] ）

$$(D_g - iA\cdot_g)^*(D_g - iA\cdot_g) = \nabla^{A*}\nabla^A + \frac{s_g}{4} - idA\cdot_g, \tag{2.1}$$

其中 $dA\cdot_g$ 的作用局部定义为

$$dA\cdot_g\varphi = \sum_{j<k} dA(E_j,E_k)E_j\cdot_g E_k\cdot_g\varphi.$$

2.2. 不变性

本节回顾狄拉克算子和零模方程（1.1）的一些共形变换。

考虑共形度量 g，它可表示为 $g = h^{4/(n-2)}g_0$ ，其中 h 是光滑正函数。存在典范同构 F，它将 $S(M, g_0, \sigma)$ 映射到 $S(M, g, \sigma)$，且该同构是纤维等距映射并保持克利福德乘法。特别地，对于任意 1-形式 A ，作用 $A\cdot_{g_0}\varphi$ 在局部由 $A\cdot_{g_0}\varphi = \sum_j A(E_j)E_j\cdot_{g_0}\varphi$ 给出，其中 g_0- 是局部标准正交标架。于是有

$$F(A\cdot_{g_0}\varphi) = \sum_j A(E_j)F(E_j\cdot_{g_0}\varphi) = \sum_j A(E_j)(h^{\frac{-2}{n-2}}E_j)\cdot_g F(\varphi).$$

Thus

$$F(A\cdot_{g_0}\varphi) = h^{\frac{2}{n-2}}A\cdot_g F(\varphi).$$

在同构 F 下，对应于 g_0 和 g 的狄拉克算子满足如下公式

$$D_g(F(h^{-\frac{(n-1)}{n-2}}\varphi)) = F(h^{-\frac{n+1}{n-2}}D_{g_0}\varphi).$$

由此公式可验证，零模方程是共形不变的。假设 (φ, A) 是关于度量 g_0 的方程的一个解。令 $\psi := h^{-(n-1)/(n-2)}F(\varphi)$。那么，数对 (ψ, A) 是关于度量 g 的方程的一个解。事实上，

$$\begin{aligned} D_g\psi &= F(h^{-\frac{n+1}{n-2}}D_{g_0}\varphi) \\ &= ih^{-\frac{n+1}{n-2}}F(A\cdot_{g_0}\varphi) = ih^{-\frac{n+1}{n-2}}\left(h^{\frac{2}{n-2}}A\cdot_g F(\varphi)\right) = iA\cdot_g\psi. \end{aligned}$$

此外，2-形式 dA 的 $n/2$-范数对于度量 g 和 g_0而言相同。事实上，

$$\int_M |dA|_g^{n/2}dv_g = \int_M \left(h^{\frac{-4}{n-2}}|dA|_{g_0}\right)^{n/2}dv_g = \int_M |dA|_{g_0}^{n/2}(h^{\frac{-2n}{n-2}}dv_g) = \int_M |dA|_{g_0}^{n/2}dv_{g_0}.$$

方程的另一项重要不变性来自规范变换。如果（φ, A）是一个解，那么对于任意函数 f，（$e^{if}\varphi, A + df$）也是一个解。因此，不失一般性，我们可以假设 div（A）$= 0$。

我们将前面的讨论总结如下:

引理 2.1. *(1)* 零模方程以及相应磁势的外微分的 $n/2-$范数是共形不变的。*(2)* 零模方程是规范不变的。特别地，我们可以假设磁势的散度为零。

3. Proof of the inequality

本节中我们证明主要不等式。首先，我们建立证明定理 1.1 所需的一些技术事实。

我们先给出以下积分恒等式

引理 3.1. 对于任意非平凡零模 (φ, A) ，有

$$0=\int_M |\varphi|_g^2\left\{\frac{s_g}{4}-i\frac{\langle dA\cdot_g\varphi,\varphi\rangle_g}{|\varphi|_g^2}\right\}dv_g+\int_M|\nabla^A\varphi|_g dv_g. \tag{3.1}$$

证明. 由于 $\nabla^A=\nabla-iA$ 是度量联络，我们有

$$0=\int_M -\Delta|\varphi|^2/2+\int_M|\nabla^A\varphi|^2u-\int_M\langle\nabla^{A*}\nabla^A\varphi,\varphi\rangle.$$

根据 Lichnerowicz 公式 (2.1)

$$(D-iA\cdot)^*(D-iA\cdot)=\nabla^{A*}\nabla^A+s_g/4-idA\cdot$$

由零模方程可知

$$-\nabla^{A*}\nabla^A\varphi=\frac{s_g}{4}\varphi-idA\cdot\varphi.$$

因此，引理得证。 □

现在我们考虑加权线性问题

$$-a_n\Delta u+s_gu=4i\frac{\langle dA\cdot_g\varphi,\varphi\rangle_g}{|\varphi|_g^2}u.$$

这里 $a_n=4(n-1)/(n-2)$。

根据前面的积分恒等式，实函数 $i^{\langle dA\cdot\varphi,\ \frac{\varphi}{|\varphi|^2}\rangle}$ 在一个正测度集上为正。

因此，加权线性问题的第一正特征值存在。我们将该特征值记为 $\lambda_1\left(4i^{\frac{\langle dA\cdot_g\varphi,\varphi\rangle_g}{|\varphi|_g^2}},g\right)$。

引理 3.2。该量

$$\lambda_1\left(4i\frac{\langle dA\cdot_{g_0}\varphi,\varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2},g_0\right)$$

是共形不变的。

证明。 设 $g=h^{4/(n-2)}g_0$，并令 F 为从 $S(M,g_0,\sigma)$ 到 $S(m,g,\sigma)$ 的典范同构，见第2节。我们将证明，关于度量 g_0 的 λ_1 等于关于度量 g 的 λ_1。

假设 (φ,A) 是度量 g_0 对应的零模方程的一个非平凡解。与第2节一样，定义为 $\psi=h^{-(n-1)/(n-2)}F(\varphi)$ 的有序对 (ψ,A) 是关于度量 g 的方程的一个解。

我们定义泛函

$$I_{(g,\psi,A)}(u)=\frac{\int_M(a_n|\nabla u|_g^2+s_gu^2)dv_g}{4i\int_M\frac{\langle dA\cdot_g\psi,\psi\rangle_g}{|\psi|_g^2}u^2dv_g}.$$

首先注意，根据共形拉普拉斯算子的共形变换

$$\int_M(a_n|\nabla u|_g^2+s_gu^2)dv_g=\int_M L_g(u)u\,dv_g=\int_M h^{-(n+2)/(n-2)}L_{g_0}(hu)u\,dv_g.$$

因此

$$\int_M (a_n|\nabla u|_g^2 + s_g u^2)dv_g = \int_M L_{g_0}(hu)hu\, dv_{g_0}$$

其次,

$$|\psi|_g^2 = h^{-2(n-1)/(n-2)}|\varphi|_{g_0}^2.$$

对于局部的 g_0–标准正交标架 $\{E_j\}$，我们考虑相应的局部 g–标准正交标架$\{\bar{E_j} := h^{-2/(n-2)}E_j\}$.

Thus

$$dA \cdot_g \psi = \sum_{j<k} dA(\bar{E}_j, \bar{E}_k)\bar{E}_j \cdot_g \bar{E}_k \cdot_g \psi.$$

由于

$$\langle \bar{E}_j \cdot_g \bar{E}_k \cdot_g F(\varphi), F(\varphi)\rangle_g = \langle E_j \cdot_{g_0} E_k \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}$$

我们得到

$$\langle dA \cdot_g \psi, \psi\rangle_g = h^{-2(n-1)/(n-2)} \sum_{j<k} dA(\bar{E}_j, \bar{E}_k)\langle E_j \cdot_{g_0} E_k \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}.$$

Then

$$\langle dA \cdot_g \psi, \psi\rangle_g = h^{\frac{-4-2(n-1)}{n-2}} \langle dA \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}.$$

由此，我们得到

$$\int_M \frac{\langle dA \cdot_g \psi, \psi\rangle_g}{|\psi|_g^2} u^2 dv_g = \int_M h^{-4/(n-2)} \frac{\langle dA \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2} u dv_g = \int_M \frac{\langle dA \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2} (hu)^2 dv_{g_0}$$

因此

$$I_{(g,\psi,A)}(u) = I_{(g_0,\varphi,A)}(hu).$$

对前一个等式取下确界，即得该引理。 □

断言 1。

$$\lambda_1\left(4i\frac{\langle dA \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2}, g_0\right) \leq 1.$$

证明。 设 u_1 为与 $\lambda_1\left(4i\frac{\langle dA\cdot_{g_0}\varphi,\varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2}, g_0\right)$相对应的第一个特征函数。

为简化记号，设 $\lambda_1 := \lambda_1\left(4i\frac{\langle dA\cdot_{g_0}\varphi,\varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2}, g_0\right)$。

计算度量 $g = u_1^{4/(n-2)}g_0$ 的标量曲率，得到

$$s_g u_1^{4/(n-2)} = u_1^{-1}(-a_n\Delta u_1 + s_{g_0}u_1) = \lambda_1 \cdot \left(4i\frac{\langle dA \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2}\right).$$

So

$$s_g = \lambda_1 \cdot \left(u_1^{-4/(n-2)} 4i\frac{\langle dA \cdot_{g_0} \varphi, \varphi\rangle_{g_0}}{|\varphi|_{g_0}^2}\right) = \lambda_1 \cdot \left(4i\frac{\langle dA \cdot_g \psi, \psi\rangle_g}{|\psi|_g^2}\right),$$

其中 $\psi = u_1^{-(n-1)/(n-2)}F(\varphi)$。

将积分恒等式 (3.1) 应用于度量 g 下的配对 $(\psi,\ A)$，得到

$$0 = (\lambda_1 - 1)\int_M 4i\langle dA \cdot_g \psi, \psi\rangle_g + \int_M 4|\nabla^A\psi|^2. \tag{3.2}$$

若 $\lambda_1 - 1 > 0$，则 ψ 是平凡的（因此 $\varphi = 0$）。 □

这一预备部分所需的最后一个事实是逐点估计：

$$i\langle dA\cdot\varphi,\varphi\rangle \le \left[\frac{n}{2}\right]^{1/2}|dA|\,|\varphi|^2.$$

事实上，

$$|i\langle dA\cdot\varphi,\varphi\rangle| \le \sum_{j<k}|dA(E_j,E_k)|\;\;|\langle E_j\cdot E_k\cdot\varphi,\varphi\rangle|.$$

一方面，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$|\langle E_j\cdot E_k\cdot\varphi,\varphi\rangle| \le |\varphi|^2.$$

另一方面，在点 $(dA(E_j,\ E_k))$ 处是一个反对称矩阵。因此，我们可以选取标准正交标架 $\{E_j\}$，使该矩阵为由 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个 2×2 阶块组成的分块对角矩阵。. 每个 2×2 阶块的特征值均为纯虚数。因此

$$\sum_{j<k}|dA(E_j,E_k)| \le \left[\frac{n}{2}\right]^{1/2}\left(\sum_{j<k}|dA(E_j,E_k)|^2\right)^{1/2} = \left[\frac{n}{2}\right]^{1/2}|dA|.$$

现在我们可以证明这个不等式了

定理 *1.1* 的证明。该估计

$$i\langle dA\cdot\varphi,\varphi\rangle \le \left[\frac{n}{2}\right]^{1/2}|dA|\,|\varphi|^2$$

结合断言 1 可得

$$1\ge\lambda_1\left(4i\frac{\langle dA\cdot\varphi,\varphi\rangle}{|\varphi|^2},g\right)\ge \inf_{u\in H^1(M)}\frac{\int_M a_n|\nabla u|^2+s_g u^2)dv_g}{\int_M 4\left[\frac{n}{2}\right]^{1/2}|dA|u^2dv_g}.$$

令 $v_n=\left[\frac{n}{2}\right]$.

对项 $\int_M|dA|u^2dv_g$ 应用 H¨older 不等式，我们得到

$$\left(\int_M|dA|^{n/2}dv_g\right)^{2/n}\ge\frac{1}{4v_n^{1/2}}\inf_{u\in H^1(M)}\frac{\int_M a_n|\nabla u|^2+s_g u^2)dv_g}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)}dv_g\right)^{(n-2)/n}}=\frac{1}{4v_n^{1/2}}Y(M^n,[g]).$$

因此

$$\left(\int_M|dA|^{n/2}dv_g\right)^{2/n}\ge\frac{1}{4v_n^{1/2}}Y(M^n,[g]).$$

最后，我们证明等号不可能成立。

根据方程的规范不变性，我们假设 $div(A)=0$。等号

$$\left(\int_M|dA|^{n/2}dv_g\right)^{2/n}=\frac{1}{4v_n^{1/2}}Y(M^n,[g])$$

意味着

$$\lambda_1\left(4i\frac{\langle dA\cdot\varphi,\varphi\rangle}{|\varphi|^2},g\right)=1.$$

由积分恒等式 (3.2)

$$|\nabla^A\varphi|=0$$

因此 $\nabla\varphi=iA\otimes\varphi$。

计算磁拉普拉斯算子 $\nabla^{A*}\nabla^{A}\varphi$ ，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^{A*}\nabla^{A}\varphi \\ &= \nabla^{*}\nabla\varphi + 2i\nabla_{A}\varphi + idiv(A)\varphi + |A|^{2}\varphi \\ &= \nabla^{*}\nabla\varphi - |A|^{2}\varphi. \end{aligned}$$

Thus

$$|A|^{2}\varphi = \nabla^{*}\nabla\varphi = D^{2}\varphi - (s_g/4)\varphi.$$

因此

$$\int_M |A|^2|\varphi|^2 = \int_M |D\varphi|^2 - \int_M \frac{s_g}{4}|\varphi|^2 = \int_M |A|^2|\varphi|^2 - \int_M \frac{s_g}{4}|\varphi|^2.$$

这迫使 φ变为平凡。 □

References

[1] N. Charalambous, N. Grosse, *A note on the spectrum of magnetic Dirac operators*,《SIGMA：对称性、可积性与几何：方法与应用》19 (2023), 102. [2] G. Dunne, H. Min. *Abelian zero modes in odd dimensions*。《物理评论D》, 78(6):067701, 4, 2008. [3] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu, *A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry* 2015 。EMS数学专著（）。[4] R. Frank, M. Loss, *Which magnetic fields support a zero mode?*。《纯粹与应用数学杂志》788 (2022) [5] R. Frank,M. Loss, *A sharp criterion for zero modes of the Dirac equation*。《欧洲数学学会杂志》(2024) [6] J. Fr¨ohlich, E. Lieb, M. Loss. *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. I. The one-electron atom.*《数学物理通讯》, 104(2):251–270, 1986. [7] J. Julio-Batalla, *Spinorial Yamabe-type equations and the Bär-Hijazi-Lott invariant*,《几何分析杂志》35 (2025), 第8期, 227. [8] M. Loss, H.-T. Yau, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. III. Zero energy bound states of the Pauli operator* 104 2 283 290, 1986 。《数学物理通讯》, ( ): – 。[9] G. Wang, M. Zhang, *Conformal properties of the zero mode equation*, arXiv预印本 arXiv:2512.17854v2(2026)

Universidad Industrial de Santander, Carrera 27 calle 9, 680002, Bucaramanga, Santander, Colom-bia*Email address*: jajuliob@uis.edu.co