arXiv:2603.23233v1 [q-bio.NC] 24 Mar 2026

经典概率框架下的析取效应建模：

一种新的决策过程模型及其与类量子模型的比较

Ryo Nasu* Yoshihiro Maruyama

名古屋大学信息学研究生院复杂系统科学系，日本爱知县名古屋市千种区风吕町，邮编 464-8601

摘要

人类决策中的析取效应通常被视为经典全概率定律遭到违反的证据，并由此推动了类量子模型的发展。我们重新审视这一主张，并聚焦于囚徒困境中的析取效应。按照对手选择事件的心理事件解读，传统的经典决策过程模型隐含地纳入了仅确定性前提：其标准划分假设不容许模糊性，迫使每位参与者确信对手会背叛或合作。我们通过引入一种新的经典模型来放宽这一要求。在该模型中，每位参与者都有一个连续期望参数，表示其对对手背叛可能性的预期；参与者群体则按期望水平划分。由此得到的模糊集恰好是所有内部期望区间的并集。相比之下，在类量子事件语义下，模糊纯态十分普遍（它们在单位球面上稠密，且具有满酉不变测度），因此“确定性状态”在数学上属于例外。我们证明，我们的经典模型可以取某个实例，实现三种信息条件下经验观测到的任意三个背叛率，包括强析取效应模式，同时严格遵守经典全概率定律。我们进一步证明，对于同一实验中由标准类量子模型产生的任意此类三元组，都存在一个能够精确复现该三元组的经典实例。从这个意义上说，经典与类量子方法具有相同的可观测率表达能力；二者实质上的差异在于如何表示模糊性，以及各自采用的事件语义，而非经典概率遭到破坏。

*通讯作者。电子邮箱：yd.06y.2997@s.thers.ac.jp

关键词：
析取效应；决策过程模型；全概率定律；类量子模型；囚徒困境

1 引言

Tversky 和 Shafir [1], 提出的析取效应，指的是对确定性原则的违背。确定性原则是理性决策的一项基本公理。根据确定性原则，如果某人在某个事件发生和未发生时都偏好某个选项，那么当该事件是否发生尚属未知时，此人也应偏好同一个选项 [2]。在他们的实验 [1], 中，参与者被告知自己刚刚参加了一场赌博，获胜的概率为 50%，可赢得 200 美元；失败的概率也为 50%，会损失 100 美元。第一场赌博已经进行完毕，研究人员询问参与者，在三种不同情况下，他们是否愿意再玩一次同样的游戏。在一种情况下，参与者被告知自己刚刚赢了第一场游戏；在另一种情况下，他们被告知自己输了。第三种情况下，参与者没有被告知第一场游戏的结果。实验结果有违直觉。参与者在知道自己第一场游戏无论输赢时，都倾向于选择再赌一场；但在结果未知时，他们更可能拒绝再赌。作者将这种行为解释为对确定性原则的违背，并称之为析取效应 [1]。

在随后的一项研究中，Shafir 和 Tversky [3] 证明，析取效应也会出现在囚徒困境（PD）博弈中。在这项研究中，参与者与一名虚拟对手对弈。（他们被告知自己是在与另一名参与者对弈，但事实并非如此。）每位玩家都可以选择背叛或合作。如果双方都合作，他们各自获得适中的奖励。如果双方都背叛，他们各自获得较低的收益。然而，如果一方背叛而另一方合作，背叛者将获得最高奖励，而合作的一方则会遭受最糟糕的结果。每位参与者在三种不同条件下各进行了一轮囚徒困境博弈。在一种条件下，他们被告知对手选择了背叛；在另一种条件下，他们被告知对手选择了合作；而在第三种条件下，他们没有被告知对手的选择。结果如下：知道对手已背叛时，97% 的参与者选择背叛；知道对手已合作时，84% 的参与者选择背叛；而未获知对手选择时，只有 63% 的参与者选择背叛。这一结果也被视为析取效应的一个实例[3]。

这些发现引发了广泛讨论。尤其是，析取效应常被解读为对经典概率论中全概率定律（LTP）的挑战。更早的相关量子类研究已经将认知干涉现象与经典全概率公式的修正，以及心理状态的希尔伯特空间表示联系起来 [4]。在随后有关析取效应的文献中，希尔伯特空间模型被明确发展为经典模型的替代方案

（例如， [5, 6]）。[1]

另一方面，已有数位作者在坚持经典框架的同时，对析取效应进行了分析。聚焦于囚徒困境实验，Xin 等人 [11]以及 Moreira 和 Wichert [12] 表明，通过适当地丰富经典模型——采用更现实的马尔可夫动力学，或引入潜变量的经典贝叶斯网络——可以重现所观察到的模式，而无需放弃经典柯尔莫哥洛夫概率。Gelastopoulos 和 Le Mens [13]则从另一方向指出，将析取效应通常解读为违反经典全概率定理本身就存在问题。这些研究表明，析取效应与经典概率之间表面上的张力，可能同决策过程和事件的建模方式有关，程度不亚于其与概率框架本身的关系。本文也属于这一经典框架再审视的总体思路，但采取了不同做法：重新思考在囚徒困境析取效应分析中应如何解释和表征对手的选择。

本文的出发点是，在对囚徒困境析取效应实验进行建模时，描述对手选择的事件有两种解读，而二者之间的重要区别往往未被明确说明。在客观的（世界事件）解读下，这些事件描述的是对手在任务中的实际行动；在主观的（心理事件）解读下，它们描述的是参与者对对手行动的内在预期。因此，我们的分析聚焦于心理事件解读；当目标是对决策过程本身进行建模时，这种解读是很自然的。在这种解读下，将三种信息条件通常分别同相应的条件概率对应起来，会导致把“预期对手背叛/合作”视为“知道对手已经背叛/合作”。在这一解释下，关于对手选择事件的标准划分假设——即这些事件彼此互斥且穷尽所有可能性——意味着，在作出选择之前，每位参与者已经处于两种确定性状态之一：确信对手将背叛，或确信对手将合作。这一隐含的仅确定性 前提一旦被纳入经典全概率定理，就会迫使其与囚徒困境数据产生表面上的冲突。现有文献似乎尚未明确阐述这一前提的力度及其后果；第2节将对此作出详细说明。

本文将这一隐含的建模选择明确化，并以一种更灵活的心理事件描述取而代之。我们提出一种新的经典（非动力学）决策过程模型（DPM），其中每位参与者都具有一个连续期望参数 $\mathbb{P} \in [0, 1]$ ，表示其对对手背叛可能性的预期；参与者群体则按 $\mathbb{P}$ 的水平划分。在对这些预期水平作出自然划分假设后，该模型得出整体背叛率的经典全概率定理分解（10），且与囚徒困境研究结果相容。定理 5.1 证明，该模型的一个实例能够实现任意实测的三个背叛率，包括强析取效应模式，同时严格遵循经典全概率定理。

与此同时，我们也从相同的决策过程视角处理囚徒困境析取效应的标准类量子表述。采用统一的符号体系后，类量子模型得出带有干涉项的量子LTP，以及相同的三种可观测违约率

[1]关于量子认知的更广泛讨论，另请参见 [7–10]。

。我们证明（定理 5.2），对于类量子模型生成的任意此类三元组，都存在一个经典 DPM 实例能够精确复现它。将两种模型并列比较可以看出，经典框架和类量子框架都允许在模糊预期下作出决策，但实现这一能力的方式存在系统性差异，反映了人们熟知的经典（基于集合）与量子（希尔伯特空间）对事件与概率的不同解释。

贡献 本文的主要贡献如下：

1. 研究表明，在将对手选择事件解读为心理事件，并通常将信息条件等同于条件概率的情况下，传统经典 DPM 通过标准划分假设，隐含地采用了强仅确定性前提；与经典全概率定律本身相比，这一隐藏假设更可能是其与囚徒困境析取效应数据表面冲突的根源。

2. 本文提出一种非动态经典 DPM，并引入连续期望参数 $\mathbb{P}$。该模型保留全概率定律分解 (10)，与囚徒困境研究结果一致，且将传统决策过程模型包含为一个边界情形。主要存在性结果（定理 5.1）表明，该模型的一个实例可以实现任意一组三个实证背叛率，包括强析取效应模式，同时严格遵循经典全概率定律。不同于现有基于丰富化动力学或潜在过程 [11, 12], 的经典囚徒困境模型，这一模型通过细化心理事件划分，在经典事件结构内实现上述结果，而无需对显式时间演化进行建模。

3. 歧义的语义作用得到明确阐释，并在事件语义层面对三种 DPM 进行比较。我们定义模糊集 $A := [\![\top]\!] \setminus \big([\![D_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![C_{\mathrm{op}}]\!]\big)$，定理 6.1 表明：(a) 在传统经典 DPM 中，$A = \varnothing$（按构造排除了模糊性）；(b) 在所提出的经典 DPM 中，A 恰好是内部期望区间的并集（模糊性由参与者之间的异质性来表示）；(c) 在类量子决策过程模型中，模糊纯态构成一个稠密集，并且在单位球面上具有完整的酉不变测度（确定性状态则属于例外）。

4. 针对囚徒困境中的析取效应，本文以统一的符号体系表述了所提出的经典 DPM 和标准类量子 DPM，并对二者进行了语义比较。定理 5.2 证明，就三个可观测背叛率而言，类量子模型产生的任何模式，都可以由经典模型的一个实例加以匹配。这凸显了二者在处理模糊预期方面的共同能力，也阐明了二者的差异源于各自对事件与概率的解释，以及对模糊性的定位不同（参与者之间的异质性，还是认知状态内部的叠加），而非概率表达能力本身。

据我们所知，量子认知文献中尚无定理 5.1、定理 5.2 或定理 6.1 这类数学结果。

组织结构 第2节回顾了囚徒困境析取效应的标准基于全概率定律的表述，介绍了对手选择事件的两种解读，并明确给出了心理事件解读下的传统经典决策过程模型，包括其隐含的仅适用于确定性的前提。随后，第3节通过放宽这一前提，提出期望参数 $\mathbb{P}$，并推导相应的全概率定律分解式（10），进而构建修订后的经典决策过程模型。第 4 节回顾类量子形式体系，阐述全概率定律的量子类比，用统一的记法表述相应的类量子决策过程模型，并据此与所提出的经典模型进行并列比较。第5节给出相关的数学结果，包括关于析取效应三元组存在经典实现的定理，以及该定理对量子析取概率的推论。第 6 节通过对比传统经典决策过程模型、所提出的经典决策过程模型和类量子决策过程模型所依据的事件语义，对第 4 节作补充，从而证明前述定理 6.1。

2 所提出的决策过程模型的背景与设定

2.1 关于违反经典全概率定律的论据回顾

本节回顾支持以下观点的关键论据：析取效应构成对经典全概率定律的违反（例如，参见 [14]以了解综述）。本文始终聚焦于囚徒困境实验；不过，我们预计，本文提出的基本诊断也适用于其他析取效应范式，但具体细节可能需要根据不同情况重新表述。

我们用 $\mathrm{D_{pa}}$ 表示参与者选择背叛这一事件。$\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 分别表示虚拟对手选择背叛和合作的事件；这些事件的确切含义将在第2.2节讨论。我们用 $\Pr(E \mid F)$表示在事件 F条件下事件 E 发生的概率。描述参与者选择的经典全概率定律为

$$\Pr(\mathrm{D_{pa}}) = \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}) \cdot \Pr(\mathrm{D_{op}}) + \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}) \cdot \Pr(\mathrm{C_{op}}), \tag{1}$$

在以下假设下

$$\mathrm{D_{op}} \wedge \mathrm{C_{op}} \equiv \varnothing, \tag{2}$$

$$\mathrm{D_{op}} \vee \mathrm{C_{op}} \equiv \top \tag{3}$$

成立。这里，$\varnothing$ 和 $\top$ 分别表示空事件和必然事件，而 $\equiv$表示逻辑等价。假设 (2) 表明，两个事件 $\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 互不相容，

也就是说，它们不能同时成立。假设 (3) 表明，$\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 的析取等于必然事件，这意味着在每一种可能情形下，它们中至少有一个必须成立。总之，$\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 构成事件空间的完备划分：其中一个必然发生。特别是，这些假设意味着

$$\Pr(\mathrm{D_{op}}) + \Pr(\mathrm{C_{op}}) = 1. \tag{4}$$

因此，方程（1）被认为意味着 $\Pr(\mathrm{D_{pa}})$ 应介于 $\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}})$ 和 $\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}})$ 之间。

为了将这些方程与实验数据联系起来，文献通常将三种不同条件——“未知”、“被告知对手背叛”和“被告知对手合作”——下观察到的背叛率，分别对应于以下理论量：

$$\Pr(\mathrm{D_{pa}})\ (\text{“unknown”}), \quad \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}})\ (\text{“told defect”}), \quad \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}})\ (\text{“told cooperate”}). \tag{5}$$

然而，按照这种对应方式，实验结果显示 $\Pr(\mathrm{D_{pa}})$ 小于 $\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}})$ 和 $\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}})$，正如第1节所述，这与方程（1）相矛盾。这被引为证据，表明实验中的经典全概率定理遭到了违反。

2.2 对手选择事件的两种解读

许多作者反复采用这套推理，声称析取效应实验违反了经典全概率定理。然而，对手选择事件——即 $\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$——的确切含义往往未作明示。仔细考察后可以发现，文献中存在两种不同的解读。本节将阐明这些事件意在表示什么；这项考察针对本文的具体问题，也是迈向第3节所提出的新决策过程模型的第一步。

对事件 $\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 的解读分为以下两种：

(i) 客观(现实事件) 解读。$\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 被视为与任务（假设）世界中虚拟对手的实际行动有关的客观事件：对手背叛或合作（例如，[12]）。

(ii) 主观(心理事件) 解读。$\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 被视为参与者在做出决策之前预期对手将背叛或合作的内在事件（例如，[5, 15, 16]）。

然而，对于客观解读（i），Gelastopoulos 和 Le Mens [13]认为，方程（1）并不与实验结果相矛盾。（尽管他们的论文是针对经典全概率定律被违反这一说法所作的一般性反驳，但其核心论点似乎预设了解释（i）。）此外，Khrennikov [15]此前也曾从一个密切相关的视角指出，经典全概率定律表面上的违反并不令人意外。Gelastopoulos 和 Le Mens [13] 的关键观点是，实验操控涉及的是信息，而非世界事件：以 $\mathrm{D_{op}}$ 或 $\mathrm{C_{op}}$为条件，涉及的是（虚拟）对手是否实际选择了背叛或合作；而“被告知对手背叛／合作”条件涉及的则是参与者被告知了什么。

因此，在解读（i）下，式（5）中的认定并不恰当，因为它混淆了以世界事件为条件和以信息条件为条件。当对手的选择未被告知时，通常假定 D_{pa} 与 D_{op} 和 C_{op}相互独立，由此得到

$$\Pr(D_{pa} \mid D_{op}) = \Pr(D_{pa}), \qquad \Pr(D_{pa} \mid C_{op}) = \Pr(D_{pa}). \tag{6}$$

此外，由于对手的选择要么是背叛，要么是合作，采用假设（2）和（3）是自然且合理的；尤其是，（4）由此得出。因此，无论实验结果如何，方程（1）都必然成立。

这样一来，如果将 D_{op} 和 C_{op} 解释为有关对手行动的客观事件，方程（1）就不会与实验结果相矛盾；然而，在这种解释下，方程（1）会化简为一个平凡的恒等式，无法作为对与该实验相关的决策过程具有数学信息价值的约束。因此，以下不再进一步探讨解释（i），而将重点放在解释（ii）上。

2.3 传统决策过程模型

本节将考察解读（ii），在这种解读下，D_{op} 和 C_{op} 被解释为参与者的心理事件。回顾一下，在这种解读中，参与者会在选择自己的行动之前，对对手的行动形成预期：预期对手背叛对应于 D_{op}，预期对手合作对应于 C_{op} [16]。采用假设（2）和（3），并在这种解读下用（1）对参与者的选择建模，意味着接受关于决策过程的一项特定前提。这里的目标是明确这一隐含的决策过程模型（DPM），阐明其假设，并为第3节提出的新决策过程模型做好铺垫。

假设采用（5）中的认定，D_{op} 和C_{op} 的预期含义就会更加明确。在这一认定下，“参与者预期对手会背叛”这一条件等同于“参与者被告知（因而知道）对手背叛了”这一条件，合作的情形也同理。换言之，预期被视为知识。在这种解读中，“预期”并非对可能发生之事的微弱倾向，而是确信相应结果必将发生的确定性 。

有了这种解读，（2）和（3）的含义就可以清楚地表述出来。假设（2）意味着，参与者不可能同时确信对手会背叛，又确信对手会合作。假设（3）意味着，在做出选择之前，每位参与者都确信这两种可能性——背叛或合作——中恰有一种会发生。特别是，这排除了那些对对手的行动抱有模糊 或混合预期 而采取行动的参与者。

为具体说明，图1（a）展示了在解读（ii）下的传统决策过程模型，以及式（5）中的对应关系。上层显示参与者群体。中间层将其划分为两个子群体——确信对手会背叛的参与者，以及确信对手会合作的参与者，这反映了式（2）和式（3）的含义。底层将

每个子群体映射到两种行动——通过 $\Pr(D_{pa} \mid D_{op})$ 和 $\Pr(D_{pa} \mid C_{op})$ 表示背叛，通过 $\Pr(C_{pa} \mid D_{op})$ 和 $\Pr(C_{pa} \mid C_{op})$ 表示合作（其中 C_{pa} 表示合作）。在这些假设下，该流程具体体现了式（1）中的经典全概率定理。

第3节将重点讨论假设（2）和（3）。基本思路是将“每位参与者都必须对对手的行动抱有确定预期”这一要求，替换为更贴近现实的前提：参与者可能持有模糊预期，对两种可能性的预期程度各不相同。基于这一前提，第3节提出了一种新的决策过程模型（DPM），它仍处于经典框架之内，同时也不与观察到的析取效应模式相冲突。

相关研究：对析取效应的经典解释 本文的方法与近期尝试在经典框架内解释囚徒困境析取效应的研究有关，但又有所不同。

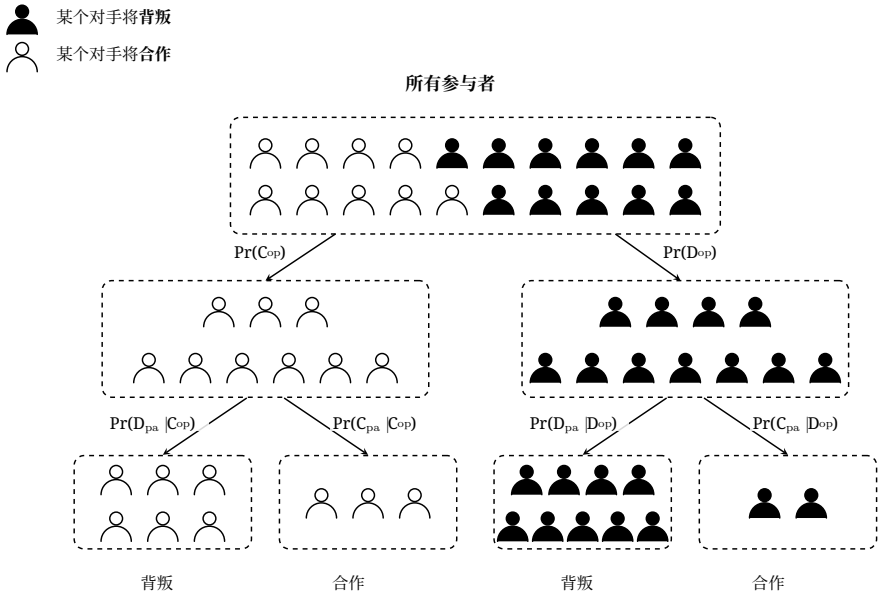
Xin 等人 [11] 针对囚徒困境实验提出了一种更贴近现实的马尔可夫信念—行动模型，明确着眼于决策过程中不切实际的假设，并通过基于香农熵的主观不确定性度（DSN）强调主观不确定性。他们保留了标准的四种信念—行动事件和通常的划分假设（分别对应（2）和（3）），并在马尔可夫过程的动态中通过 DSN 纳入不确定性。

Moreira 和 Wichert [12] 探讨了在经典贝叶斯网络中引入潜在类型变量，是否足以再现囚徒困境数据中观察到的析取效应概率；他们表明，可以在柯尔莫哥洛夫框架内构造含有潜变量的经典贝叶斯网络来匹配这种模式，但代价是潜在结构日益复杂，而且无法用一个简单模型同时涵盖已知和未知条件，这促使他们转向量子式网络。他们的分析采用世界事件解读，并保留（2）和（3）。

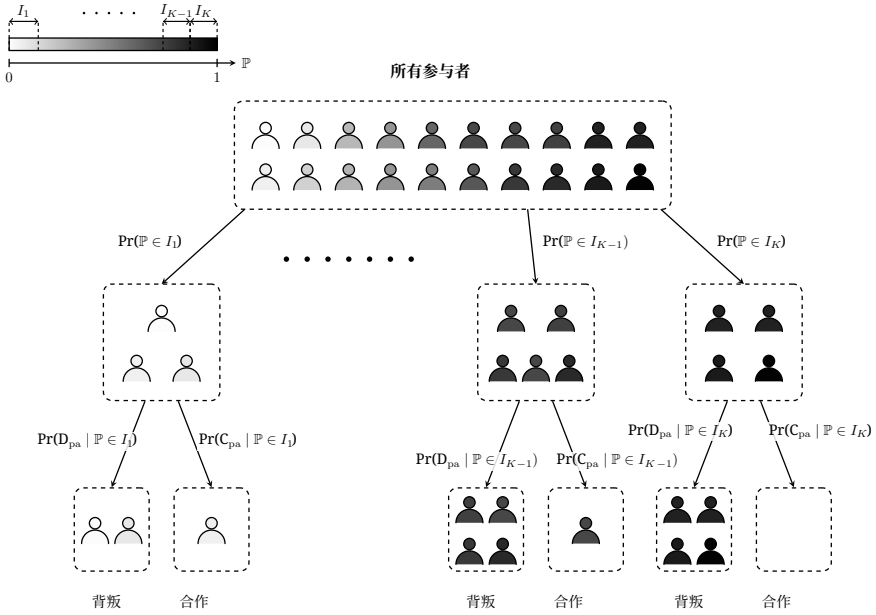
相比之下，本文仍采用非动态方法，也不引入额外的潜变量；它仍处于经典概率框架之内，但改变了对心理事件本身的建模方式。本文通过放宽对手选择预期的仅确定性划分，而非丰富动态过程或添加隐藏结构，表明可以用一种相对简单的方式，使囚徒困境中的析取效应模式与经典全概率定理相协调。

3 Pr提出一种新的经典决策过程模式 l

现在，我们引入一种完全符合经典理论、却能解释析取效应模式的决策过程模型。在第2.3节和图1（a）中，我们解释过，传统决策过程模型隐含地假设，每位参与者在决定自己的行动之前，都会对对手的选择形成先验确定性——要么确定对手会背叛，要么确定对手会合作。与此相反，我们允许参与者对对手的行动抱有模糊预期。



(a)传统决策过程模型



(b)所提出的决策过程模型

图1：经典决策过程模型。(a) 传统模型。根据方程（2）、（3）的含义，参与者被分为两种确定性状态：“对手背叛”（$\Pr(D_{op})$）或“对手合作”（$\Pr(C_{op})$），随后选择满足方程（1）。(b) 所提出的模型。参与者按期望参数 $\mathbb{P} \in [0,1]$ 分入区间 I_k，并赋予权重 $\Pr(\mathbb{P} \in I_k)$；行动遵循 $\Pr(D_{pa} \mid \mathbb{P} \in I_k)$，在方程（7）、（8）的条件下得出方程（10）。详情请参阅第 2.3 节和第 3 节。

我们引入连续参数 $\mathbb{P} \in [0,1]$ ，用于表示参与者预期对手会背叛的程度。每位参与者都有自己的 $\mathbb{P}$ 值；值越接近 1，表示越相信对手会背叛，值越接近 0，则表示越相信对手会合作。

形式上，选择一个划分 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_K = 1$ 并写作 $I_k = [a_{k-1}, a_k)$。我们的基本假设是，事件 $\{\mathbb{P} \in I_k\}_{k=1}^{K}$ 构成一个划分，即

$$\forall\, k \neq \ell: \quad [\mathbb{P} \in I_k] \ \wedge\ [\mathbb{P} \in I_\ell] \equiv \varnothing, \tag{7}$$

$$\bigvee_{k=1}^{K} [\mathbb{P} \in I_k] \equiv \top. \tag{8}$$

这些分别对应传统决策过程模型中的假设 (2) 和 (3)。根据 (7) 和 (8)，我们得到

$$\sum_{k=1}^{K} \Pr(\mathbb{P} \in I_k) = 1, \tag{9}$$

$$\Pr(\mathrm{D_{pa}}) \ = \ \sum_{k=1}^{K} \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)\ \Pr(\mathbb{P} \in I_k). \tag{10}$$

方程 (10) 给出了该模型的全概率定律。

图1 (b) 展示了所提出的决策过程模型：参与者群体被划分为若干区间 I_k ，其权重为 $\Pr(\mathbb{P} \in I_k)$；每个区间箱对应两种行动——通过 $\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)$ 表示背叛，通过 $\Pr(\mathrm{C_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)$ 表示合作。根据 (7) 和 (8)，这一构造得出 (10) 中的分解。

接下来，我们将新的决策过程模型与传统决策过程模型进行比较。传统决策过程模型可以视为当前模型的一个特例。由于在当前参数化表示中，事件 $\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 分别对应确定会背叛和确定会合作的参与者，因此它们与极端值 $\mathbb{P} \approx 1$ 和 $\mathbb{P} \approx 0$相对应。由此，当所有概率质量都集中在极端值上时，就可还原出传统决策过程模型:

$$\Pr(\mathbb{P} \in I_k) = 0 \quad (k \neq 1, K). \tag{11}$$

换言之，传统模型排除了预期严格处于两个极端值之间的参与者。从这个意义上说，我们的模型通过放宽“仅确定性”限制，扩展了现有方法。

所提出的决策过程模型颇具启发性，因为它展示了如何在经典概率框架内处理析取效应模式。我们的模型并不与囚徒困境研究结果相矛盾：现有析取效应实验报告了三种信息条件下（未知／被告知对手背叛／被告知对手合作）的总体选择率，但没有测量中间期望水平（$k \neq 1, K$）下的 $\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)$。因此，观测到的数据与我们的表述相符。许多论文认为，经典概率的限制过多，无法解释实验中观察到的析取效应（例如， [16–18]）。相比之下，我们的模型表明，只要允许存在模糊预期，析取效应就能在经典

框架内得到解释。此外，假设 (7) 和 (8) 并非牵强；可以说，它们比假设 (2) 和 (3) 更为自然，因为人们常常在对手行动的预期模糊或混合时做出决定。

4 类量子决策过程模型及其与所提出的经典模型的关系

从经典概率的角度看，析取效应常被视为一种悖论，这促使研究者提出基于希尔伯特空间事件语义和全概率定律的量子类比的类量子模型（例如，参见 [5, 6]；综述另见 [14, 19] ）。本文已经表明，允许存在模糊预期的经典决策过程模型能够解释观察到的模式（第3节）。本节将介绍量子表述，将其解释为一种决策过程模型，并将其与我们提出的经典模型并列比较，从而阐明二者在模糊性条件下对决策进行建模这一共同目标，以及由各自的语义和数学基础所导致的实质性差异。本文重点讨论一种广泛用于析取效应实验（尤其是囚徒困境实验）的希尔伯特空间模型，同时指出，也有人提出了其他能够解释析取效应数据的类量子模型。概述请参见 Moreira 和 Wichert [20]。

4.1 数学预备知识与全概率定律的量子类比

我们首先回顾全概率定律的量子类比的推导。在量子框架中，系统的状态由希尔伯特空间 $\mathscr{H}$中的单位向量 ψ 表示。事件 E 由闭子空间 $\mathscr{H}_E \subset \mathscr{H}$表示；量子情境中的“事件”概念不同于经典情境中的概念，我们将在第4.2节回到这一概念问题。ˆ 对于任意闭子空间 $\mathscr{H}_E$，都存在唯一一个投影到该子空间上的正交投影算子 $\mathcal{P}_E$ 。根据玻恩规则，处于状态 ψ 时， E 的概率为

$$\Pr(E) \;=\; \big\|\hat{\mathcal{P}}_E\,\psi\big\|^2. \tag{12}$$

根据吕德斯规则，给定 F 时 E 的条件概率为:

$$\Pr(E \mid F) \;=\; \frac{\big\|\hat{\mathcal{P}}_E\,\hat{\mathcal{P}}_F\,\psi\big\|^2}{\big\|\hat{\mathcal{P}}_F\,\psi\big\|^2} \qquad \text{whenever } \Pr(F) > 0. \tag{13}$$

现在，我们用闭子空间 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$, $\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \subset \mathscr{H}$ 来表示对手选择事件 $\mathbf{D}_{\mathrm{op}}$ 和 $\mathbf{C}_{\mathrm{op}}$ 的量子对应项。简言之， $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 是量子模型中表示“对手背叛”事件的子空间， $\mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ 则表示“对手合作”；这些量子事件与其经典对应项之间的关系将在第4.2节讨论。

通过假设这些子空间彼此正交且共同张成 $\mathscr{H}$，我们施加了与 (2) 和 (3) 类似的假设：

$$\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \perp \mathscr{H}_{\mathrm{C}}, \tag{14}$$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{C}} \;=\; \mathscr{H}. \tag{15}$$

ˆˆ设 $\mathcal{P}_{\mathrm{D}}$ 和 $\mathcal{P}_{\mathrm{C}}$ 为投影到这些子空间上的正交投影算子。那么，(14)、(15) 等价于

$$\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}}\,\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}} \;=\; \hat{0}, \tag{16}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}} \;+\; \hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}} \;=\; \hat{1}. \tag{17}$$

ˆ设 $\mathcal{Q}$ 表示投影到选择事件 D_{pa} 上的投影算子。由 (12) 可得，

$$\Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}}) \;=\; \left\|\hat{\mathcal{Q}}\,\psi\right\|^2. \tag{18}$$

利用假设 (16) 和 (17)，我们得到

$$\left\|\hat{\mathcal{Q}}\,\psi\right\|^2 \;=\; \left\|\hat{\mathcal{Q}}\,(\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}}+\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}})\,\psi\right\|^2 \;=\; \left\|\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}}\psi+\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}}\psi\right\|^2 \;=\; \left\|\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}}\psi\right\|^2+\left\|\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}}\psi\right\|^2+\Delta, \tag{19}$$

其中，Δ 定义为

$$\Delta \;=\; \left\langle \psi,\; \hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}}\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}} \;+\; \hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}}\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}}\;\psi\right\rangle. \tag{20}$$

利用 (12) 和 (13)，我们得到

$$\Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}}) \;=\; \Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathrm{D}_{\mathrm{op}})\;\Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{op}}) \;+\; \Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathrm{C}_{\mathrm{op}})\;\Pr(\mathrm{C}_{\mathrm{op}}) \;+\; \Delta. \tag{21}$$

这就是全概率定律的量子类比。与 (1) 的区别在于存在干涉项 Δ，它使得 (5) 中确定的三个观测比率（“未知”“被告知对手背叛”“被告知对手合作”）能够同时得到解释。

作为假设（16）和（17）的一个重要推论，我们得到以下关于对手选择事件的归一化恒等式：

$$\Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{op}}) + \Pr(\mathrm{C}_{\mathrm{op}}) = \|\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}}\psi\|^2 + \|\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}}\psi\|^2 = \left\langle \psi, (\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{D}} + \hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{C}})\psi \right\rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1. \tag{22}$$

这一恒等式颇具启发性：在量子模型中，对于任意状态 ψ，赋予两个对手选择事件的概率之和始终为一。在下一小节中，我们将利用（22）来对比量子模型对事件的解读与所提出的经典 DPM。

4.2 对类量子决策过程模型的解读

在第4.1节中，我们回顾了类量子方法的数学层面。现在，我们将这一形式体系解读为一种决策过程模型，并阐明类量子决策过程模型与所提出的经典 DPM 之间的关联及差异。

我们首先概述事件和概率的概念在经典框架与量子框架中的差异。在经典情境中，事件是关于世界的事实，其真值独立于任何测量行为；概率则量化这些事实的可能性程度

。相比之下，在量子情境中，事件本质上与测量操作紧密相连，并被理解为特定测量的结果（即 Birkhoff 和 von Neumann 意义上的“实验命题” [21]）；相关概率是执行相应测量时获得这些结果的机会。在认知应用中，测量通常通过向参与者提出的问题来实现，而事件则是该问题的结果（例如，参见 [22]）。鉴于此，所提出的经典 DPM 对决策过程进行建模时，并不取决于是否提出这样的问题；而类量子决策过程模型则对提出问题时所发生的情况进行建模。

有鉴于此，我们将对手选择事件 $\mathrm{D_{op}}$ 和 $\mathrm{C_{op}}$ 解读为对“你认为对手会背叛吗？”这一问题的两种可能回答——回答“背叛”对应 $\mathrm{D_{op}}$，回答“合作”对应 $\mathrm{C_{op}}$。如第4.1节所示，方程（22）对任意状态 ψ均成立。该方程描述了这个问题的二元性质：进行测量时，两种回答中必有一种成立。尽管这一恒等式在形式上与传统经典 DPM 中的方程（4）相同，但在量子情境下，其解读有所不同，因为它以测量结果而非与测量无关的事实为基础。

至关重要的是，类量子决策过程模型并不假设参与者在被询问之前，对对手已经持有固定而确定的预测。在实验中，参与者实际上并未被要求陈述对手行动的预期；因此，将他们的决策前认知状态建模为相对于“背叛/合作”分解的叠加 $\psi = \psi_{\mathrm{D}} + \psi_{\mathrm{C}}$ 是很自然的。这个叠加状态编码了一种模糊预期，只有在进行相应测量时才会消解。

4.3 Co比较类量子决策过程模型与所提出的经典 DPM s

现在，我们可以比较类量子决策过程模型与所提出的经典 DPM，突出二者的共同点与差异。两个框架都允许参与者在其对对手行动的预期仍然模糊不清时作出决策。换言之，决策前状态不必坍缩为确定的“背叛”或“合作”预期。这正是它与传统经典 DPM 的关键区别。

核心差异在于两个框架如何定义事件并为其分配概率，具体如第4.2节所述。在所提出的经典 DPM 中，事件被视为与测量无关的事实，而归一化恒等式（9）表示参与者群体在不同预期水平之间的划分。在类量子决策过程模型中，事件是特定测量的结果，而归一化恒等式（22）反映了这样一个事实：提出二元问题时，恰好会得到两个结果中的一个。值得注意的是，归一化恒等式在数学层面明确呈现了两者在何谓事件以及如何理解概率方面的概念差异。

在明确这些解释后，这些模型在如何形式化模糊性方面也有所不同。所提出的经典 DPM 通过对连续期望参数 $\mathbb{P} \in [0, 1]$ 进行分布建模，捕捉参与者之间的异质性。这一策略明确纳入了期望参数严格介于 0 和 1 之间的参与者，从而对中间期望进行建模。相比之下，类量子决策过程模型将模糊性表示为单一认知状态在两个期望子空间（“背叛”与“合作”）上的叠加，并在

该状态中纳入了式（21）中的干涉项。原则上，这使模型无需诉诸参与者之间的异质性 [17] ，便可拟合总体析取效应模式（尽管文献中也有人提出重新引入此类异质性的混合态扩展 [15, 18]）。

简而言之，这两个框架不仅使用不同的数学方法；它们还对事件和概率采取了不同的理解，而这导致了它们对模糊性的不同处理方式。有关并列对照的简要总结，请参见表1。

一些研究从形式事件表示的角度比较了传统经典 DPM 与类量子决策过程模型 [23, 24], ，这一视角也有助于比较纳入我们所提出模型的情形。第 6 节基于形式事件语义（集合论语义与希尔伯特空间语义），对这三个模型作了补充性的数学比较。

表1：三种决策过程模型（DPM）的比较：传统经典 DPM、所提出的经典 DPM 和类量子决策过程模型。

	传统经典 DPM	**所提出的经典 DPM**	**类量子 DPM**
假设	$\mathsf{D}_{\mathrm{op}} \wedge \mathsf{C}_{\mathrm{op}} = \varnothing$ $\mathsf{D}_{\mathrm{op}} \vee \mathsf{C}_{\mathrm{op}} = \top$ (2)、(3)	$[\mathbb{P} \in I_k] \wedge [\mathbb{P} \in I_\ell] = \varnothing$ （针对 $k \neq \ell$） $\bigvee_{k=1}^{K} [\mathbb{P} \in I_k] = \top$ (7), (8)	$\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \perp \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{C}} = \mathscr{H}$ (14)、(15)
处理参与者的预期	仅确定性 （背叛或合作）	允许混合预期 通过 $\mathbb{P} \in [0, 1]$	允许混合预期 通过叠加
全概率定律	$\Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{pa}}) = \Pr(\mathsf{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathsf{D}^{\mathrm{op}}) \Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{op}}) + \Pr(\mathsf{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathsf{C}^{\mathrm{op}}) \Pr(\mathsf{C}^{\mathrm{op}})$ (1)	$\Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{pa}}) = \sum_{k=1}^{K} \Pr(\mathsf{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k) \cdot \Pr(\mathbb{P} \in I_k)$ (10)	$\Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{pa}}) = \Pr(\mathsf{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathsf{D}^{\mathrm{op}}) \Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{op}}) + \Pr(\mathsf{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathsf{C}^{\mathrm{op}}) \Pr(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}) + \Delta$ (21)
相容性与结果 **囚徒困境实验的实验**	否（冲突）	是（内部项 $\Pr(\mathsf{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)$ 未固定 由数据确定）	是（干涉项 可解释观察到的 模式）
归一化	$\Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{op}}) + \Pr(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}) = 1$ (4)	$\sum_{k=1}^{K} \Pr(\mathbb{P} \in I_k) = 1$ (9)	$\Pr(\mathsf{D}^{\mathrm{op}}) + \Pr(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}) = 1$ (22)

5 数学结果

这里我们证明两个数学结果，以支持上述论点。第一个结果是以下定理 5.1，它在完全符合柯尔莫哥洛夫框架的条件下，精确阐明了上述主张：所提出的经典决策过程模型能够再现囚徒困境中的经验性析取效应模式，同时严格遵守经典全概率定律。请注意，给定一个划分 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_K = 1$ 和$I_k = [a_{k-1}, a_k)$ 后，我们将每个区间 I_k 称为一个区间箱（预期水平的区间箱）。

定理 5.1（强析取三元组的经典实现）。 Le t

$$d_U, d_D, d_C \in (0,1),$$

分别解释为囚徒困境实验中“未知”“被告知对手背叛”和“被告知对手合作”条件下观察到的背叛率。则存在第*3*节经典决策过程模型的一个三分箱实例，其期望参数为 $\mathbb{P} \in [0,1]$，划分为 $\{I_1, I_2, I_3\}$ 个区间箱，分箱权重为 $[0,1]$，

$$\alpha_k := \Pr(\mathbb{P} \in I_k) \quad (k = 1,2,3),$$

以及各区间背叛概率

$$q_k := \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k) \quad (k = 1,2,3),$$

使得：

1. 对所有 k 和 $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0$；

2. 极端分箱对应“被告知合作”和“被告知对手背叛”这两种条件，

$$q_1 = d_C = \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}), \qquad q_3 = d_D = \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}),$$

其中我们将 $\mathrm{C_{op}} := [\mathbb{P} \in I_1]$ 和 $\mathrm{D_{op}} := [\mathbb{P} \in I_3]$对应起来；

3. “未知”条件满足三分箱形式的经典全概率定律

$$\Pr(\mathrm{D_{pa}}) \;=\; \sum_{k=1}^{3} \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)\, \Pr(\mathbb{P} \in I_k) \;=\; \sum_{k=1}^{3} q_k \alpha_k \;=\; d_U.$$

尤其是，即使 $d_U < \min\{d_D, d_C\}$，这样的模型仍然存在，也就是说，在析取效应显著的情况下也是如此。

证明。 固定 d_U， d_D， $d_C \in (0,\ 1)$。取 $K = 3$，并任取一个划分

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 = 1, \qquad I_k = [a_{k-1}, a_k) \quad (k = 1,2,3).$$

我们将 I_1 和 I_3 分别解释为高合作预期区域和高背叛预期区域，并将 I_2 解释为中间区域，如图1(b)所示。

步骤 *1*：分箱概率。选取 $t > 0$ 使得

$$0 < t < \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{d_U}{2}, \frac{1-d_U}{2}\Big\}.$$

定义

$$\alpha_1 := t, \qquad \alpha_3 := t, \qquad \alpha_2 := 1 - 2t.$$

那么，对于所有 k 和 $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k = 1$，都有 $\alpha_k > 0$。

步骤 *2*：极端分箱与已知条件相匹配。设定

$$q_1 := d_C, \qquad q_3 := d_D.$$

若我们令 $\mathsf{C}_{\mathrm{op}} := [\mathbb{P} \in I_1]$，$\mathsf{D}_{\mathrm{op}} := [\mathbb{P} \in I_3]$，那么

$$\Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathrm{C}_{\mathrm{op}}) = q_1 = d_C, \qquad \Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}} \mid \mathrm{D}_{\mathrm{op}}) = q_3 = d_D,$$

这样，三分箱模型就能精确匹配“被告知合作”和“被告知对手背叛”的比率。

步骤 *3*：求解内部区间。现在选择 q_2，使“未知”条件下的无条件背叛率等于 d_U。根据 $K = 3$ 的式 (10)，我们要求

$$d_U = \Pr(\mathrm{D}_{\mathrm{pa}}) = \sum_{k=1}^{3} q_k \alpha_k = t\, d_C + (1 - 2t)\, q_2 + t\, d_D.$$

解出 q_2 得

$$q_2 = \frac{d_U - t(d_C + d_D)}{1 - 2t}. \tag{23}$$

The 分母严格为正，因为 $t < 1/2$。我们声称 $0 < q_2 <$ 1.

对于下界，使用 $d_C,\ d_D \le 1$ 可得

$$t(d_C + d_D) \le 2t \quad \Rightarrow \quad d_U - t(d_C + d_D) \ge d_U - 2t > 0,$$

其中最后一个不等式为 $t < d_U/2$。除以 $1 - 2t > 0$ 得到 $q_2 > 0$。

对于上界，$d_C,\ d_D \ge 0$ 意味着

$$d_U - t(d_C + d_D) \le d_U.$$

由于 $t <$ (1 − d_U)/2，我们有 $d_U < 1 - 2t$，因此

$$d_U - t(d_C + d_D) < 1 - 2t,$$

因此，$q_2 < 1$ 除以 $1 - 2t$后，得到 $q_2 \in$ (0，1)。

步骤 *4*：显式概率空间。定义[2]

$$\Omega := \{1,2,3\} \times \{\mathrm{D},\mathrm{C}\},$$

并在单点集上定义概率测度 Pr

$$\Pr\big((k,\mathrm{D})\big) := \alpha_k q_k, \qquad \Pr\big((k,\mathrm{C})\big) := \alpha_k(1-q_k), \quad k=1,2,3,$$

将其延拓 到 Ω 的所有子集上，并满足有限可加性。这是一个概率测度，因为 ce

$$\sum_{k=1}^{3}\Big[\Pr\big((k,\mathrm{D})\big)+\Pr\big((k,\mathrm{C})\big)\Big] = \sum_{k=1}^{3}\alpha_k q_k + \alpha_k(1-q_k) = \sum_{k=1}^{3}\alpha_k = 1.$$

通过设定 $\mathbb{P}\colon \Omega \to [0,1]$，定义期望参数 $\mathbb{P}(\omega) \in I_k$，只要 ω 的第一个坐标等于 k。于是 $[\mathbb{P} \in I_k] = \{k\} \times \{\mathsf{D},\mathsf{C}\}$ 并且

$$\Pr(\mathbb{P} \in I_k) = \alpha_k, \qquad \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k) = q_k, \quad k=1,2,3.$$

Let

$$\mathrm{D_{pa}} := \{(k,\mathrm{D}) : k=1,2,3\}, \qquad \mathrm{C_{op}} := [\mathbb{P} \in I_1], \qquad \mathrm{D_{op}} := [\mathbb{P} \in I_3].$$

那么，根据构造，

$$\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}) = q_1 = d_C, \qquad \Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}) = q_3 = d_D,$$

并且，使用三箱形式的 (10)，

$$\Pr(\mathrm{D_{pa}}) = \sum_{k=1}^{3}\Pr(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)\ \Pr(\mathbb{P} \in I_k) = \sum_{k=1}^{3} q_k \alpha_k = d_U.$$

因此，三元组 $(d_U,\ d_D,\ d_C)$ 可由一个满足经典全概率定律 (10) 的所提出的经典 DPM 三分箱实例实现，包括强析取效应情形 $d_U < \min\{d_D, d_C\}$。

□

因此，该定理表明，强不等式 $d_U < \min\{d_D, d_C\}$ 与经典柯尔莫哥洛夫概率或全概率定律并不冲突。存在问题的只是限制过严的“仅确定性”经典 DPM：它将所有参与者归并为两种极端心理状态，从而排除了任何中间预期水平。该定理表明，一旦明确对模糊预期建模（通过潜在预期参数 $\mathbb{P}$ 以及至少一个内部区间），就总能找到一个符合全概率定律、且与数据完全吻合的经典模型。

从概念上说，该定理对更广泛的讨论有两个重要影响：

1. 它削弱了从囚徒困境数据推断经典全概率定律遭到违反这一常见推论：冲突源于一种建模选择（仅确定性前提），而非经典概率本身。

[2]请注意，第一个坐标是期望区间，第二个是玩家的行动 .

2. 它表明，一个极低复杂度的经典模型（仅包含一个潜在的连续期望参数和三个区间箱）就已经具备足够的表达能力，能够捕捉所观察到的模式，而无需诉诸复杂的潜变量网络或马尔可夫动力学。

下面的定理 5.2 将定理 5.1 推广为对经典决策过程模型与类量子决策过程模型的直接比较。

定理 5.2（量子析取概率的经典实现）。考虑第 *4* 节所述囚徒困境析取效应实验的类量子决策过程模型，其希尔伯特空间为 $\mathscr{H}$，单位态矢量为 $\psi \in \mathscr{H}$，对手选择ˆ ˆ子空间为 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$、$\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \subseteq \mathscr{H}$，相应的正交投影算子为 $\mathcal{P}_{\mathrm{D}}$、$\mathcal{P}_{\mathrm{C}}$，以及表示选择事件 $\mathrm{D_{pa}}$的投影算子ˆ $\mathcal{Q}$。

令$\mathrm{Pr_{qm}}$ 表示由 ψ 通过玻恩规则和吕德斯条件化根据（12）和（13）定义的概率分配，并定义三个背叛率

$$d_U := \Pr_{\mathrm{qm}}(\mathrm{D_{pa}}), \qquad d_D := \Pr_{\mathrm{qm}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}), \qquad d_C := \Pr_{\mathrm{qm}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}),$$

其中$\mathrm{D_{op}}$ 和$\mathrm{C_{op}}$ 分别是由$\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 和 $\mathscr{H}_{\mathrm{C}}$表示的对手背叛事件和对手合作事件。假设$\mathrm{Pr_{qm}}$（$\mathrm{D_{op}}$）> 0、$\mathrm{Pr_{qm}}$（$\mathrm{C_{op}}$）> 0，从而条件概率有定义，并且

$$d_U, d_D, d_C \in (0, 1).$$

那么，第*3*节经典决策过程模型中存在一个三分箱实例，其期望参数为 $\mathbb{P} \in [0, 1]$，分箱权重的划分为 $\{I_1, I_2, I_3\}$，

$$\alpha_k := \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathbb{P} \in I_k) \quad (k = 1, 2, 3),$$

且各区间背叛概率为

$$q_k := \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k) \quad (k = 1, 2, 3),$$

对于某个经典概率测度$\mathrm{Pr_{cl}}$，在作出如下对应后，

$$\mathrm{C_{op}} := [\mathbb{P} \in I_1], \qquad \mathrm{D_{op}} := [\mathbb{P} \in I_3],$$

三个经典背叛率与量子背叛率相同：

$$\Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}}) = d_U, \qquad \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}) = d_D, \qquad \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}) = d_C.$$

特别是，类量子模型产生的任何强析取效应模式 $d_U < \min\{d_D, d_C\}$，经典决策过程模型的一个三分箱实例也能实现。

证明。根据构造，类量子模型通过以下方式赋予定义良好的数值 d_U， d_D， $d_C \in (0, 1)$：

$$d_U = \Pr_{\mathrm{qm}}(\mathrm{D_{pa}}), \qquad d_D = \Pr_{\mathrm{qm}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}), \qquad d_C = \Pr_{\mathrm{qm}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}),$$

使用式 (12) 和 (13) 中的玻恩规则和吕德斯条件化。

将定理 5.1 应用于三元组 (d_U, d_D, d_C)。该定理得出第3节经典决策过程模型的一个三分箱实例，其中划分 $\{I_1, I_2, I_3\}$ 的分箱权重 $\alpha_k := \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathbb{P} \in I_k) > 0$ 满足 $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k = 1$，且各区间背叛概率 $q_k := \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k) \in (0, 1)$，使得

$$q_1 = d_C, \qquad q_3 = d_D, \qquad \sum_{k=1}^{3} q_k \alpha_k = d_U,$$

并且我们将.....对应起来

$$\mathrm{C_{op}} := [\mathbb{P} \in I_1], \qquad \mathrm{D_{op}} := [\mathbb{P} \in I_3].$$

根据 q_1 和 q_3 的定义，我们有

$$\Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{C_{op}}) = \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_1) = q_1 = d_C,$$

类似地

$$\Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathrm{D_{op}}) = \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_3) = q_3 = d_D.$$

此外，经典模型中的三分箱全概率定律 (10) 给出

$$\Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}}) = \sum_{k=1}^{3} \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D_{pa}} \mid \mathbb{P} \in I_k)\ \Pr_{\mathrm{cl}}(\mathbb{P} \in I_k) = \sum_{k=1}^{3} q_k \alpha_k = d_U.$$

因此，定理 5.1 所保证的经典模型会精确复现类量子模型的三个背叛率。此外，如果量子三元组满足强析取效应不等式 $d_U < \min\{d_D, d_C\}$，那么经典模型中相应的概率也满足同一不等式，因为这两个三元组完全相同。这就证明了该主张。

□

换言之，就三个可观测背叛率而言，类量子模型的经验表征能力并不强于三箱经典模型：量子模型在其假设下能够产生的任何三元组，都有一个遵循普通全概率定律的经典模型能够产生完全相同的三元组。特别是，类量子模型产生的任何强析取效应模式，也都能由适当的经典模型产生。

这有两个主要含义：

1. 量子全概率定律 (21) 中的干涉项 Δ 并非囚徒困境数据本身所必然要求的；同样的总体模式也可以用预期水平上的经典混合来解释。因此，仅仅为了拟合三个观测比率，并不需要量子结构。

2. 所提出的经典 DPM 与类量子决策过程模型之间真正的区别，在于它们的事件语义以及模糊性的表征位置：经典模型中通过 $\mathbb{P}$ 的分布体现参与者之间的异质性，而量子模型中则体现为单一认知状态内的叠加。上述定理通过表明，一旦剥离这些语义选择、只考察 (d_U， d_D， d_C)，两种模型的能力便不相上下。

综上，定理 5.1 和定理 5.2 进一步凸显了本文的核心观点：囚徒困境中的析取效应模式本身并不能反驳经典概率，而类量子形式体系之所以成功，至少在同等程度上是因为它们如何表征模糊预期，而不只是因为其具有某种固有的非经典概率结构。

6 事件语义以及模糊性如何进入三个模型

本节通过比较传统经典 DPM、所提出的经典 DPM 和类量子 DPM 所采用的事件语义，对第 4 节的论证作补充。我们旨在阐明，为什么后两种模型允许参与者对对手的选择抱有模糊的决策前预期，而传统模型则排除了这种模糊性。为便于比较，我们采用标准解释括号 $[\![\cdot]\!]$，并用 $[\![E]\!]$ 表示事件 E 的语义指称。在经典解读中，$[\![E]\!]$ 是样本空间 Ω 的一个子集。在类量子解读中，$[\![E]\!]$ 是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的一个闭子空间。合取（∧）在两种情境中都解释为交集。析取（∨）在经典情境中解释为集合论并集，而在量子情境中解释为闭线性张成（包含两个事件子空间的最小闭子空间）。否定（¬）在经典情境中解释为集合补集，$[\![\neg E]\!] = \Omega \setminus [\![E]\!]$；在量子情境中则解释为正交补，$[\![\neg E]\!] = [\![E]\!]^{\perp}$（在 $\mathscr{H}$ 中）。

这种希尔伯特空间语义可追溯至 Birkhoff 和 von Neumann 对量子逻辑的标准表述 [21], ，并已作为一种非经典事件语义引入认知建模（例如参见 [17, 19]），最近 Widdows 等人[23, 24]以几何方式对其进行了阐释，并将其应用于析取效应等决策现象。

传统决策过程模型（经典、布尔语义）对手选择事件被解释为样本空间 Ω 的子集（其中 $[\![\top]\!] = \Omega$）： $[\![\mathrm{D_{op}}]\!] = \Omega_{\mathrm{D}}$， $[\![\mathrm{C_{op}}]\!] = \Omega_{\mathrm{C}}$，其中 Ω_{D}，$\Omega_{\mathrm{C}} \subset \Omega$。假设 (2) 和 (3) 被解释为

$$[\![\mathrm{D_{op}}]\!] \cap [\![\mathrm{C_{op}}]\!] = \varnothing, \qquad [\![\mathrm{D_{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C_{op}}]\!] = [\![\top]\!]. \tag{24}$$

因此， $\omega \in \Omega$ 中的每个元素都恰好属于这两个事件之一。在事件语义层面，这就没有给那些对对手的行动持模糊或混合预期的参与者留下任何余地（参见第2.3节）。

拟议的决策过程模型（经典的、具有细化划分的布尔语义）我们保留经典的集合论事件语义，但通过引入连续期望参数 $\mathbb{P} \in [0,1]$，细化对决策前预期的描述。令 $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ 为 $[0,1]$ 的一个划分；这通过事件 $[\![\mathbb{P} \in I_k]\!]$ 诱导出样本空间的一个划分，即

$$[\![\mathbb{P} \in I_k]\!] \cap [\![\mathbb{P} \in I_\ell]\!] \;=\; \varnothing \quad (k \neq \ell), \qquad \bigcup_{k=1}^{K} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!] \;=\; [\![\top]\!], \tag{25}$$

它们是假设 (7) 和 (8) 在语义上的对应物。这两个确定预期事件由两个极端表示，

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] := [\![\mathbb{P} \in I_K]\!], \qquad [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] := [\![\mathbb{P} \in I_1]\!]. \tag{26}$$

由于允许存在内部区间，我们有

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] \;=\; [\![\mathbb{P} \in I_1]\!] \cup [\![\mathbb{P} \in I_K]\!] \;\subsetneq\; \bigcup_{k=1}^{K} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!] \;=\; [\![\top]\!]. \tag{27}$$

因此，对手行动的模糊性对应于那些位于两个确定性集合之外的样本点，

$$[\![\top]\!] \setminus \big([\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!]\big), \tag{28}$$

也就是说，参与者的期望参数落在内部层级，而非两个极端值上。

类量子决策过程模型（希尔伯特空间语义）在经典布尔逻辑中，传统决策过程模型所用的两个假设 (2) 和 (3) 等价于以下单一句法恒等式

$$\mathrm{D}_{\mathrm{op}} \equiv \neg \mathrm{C}_{\mathrm{op}}. \tag{29}$$

类量子模型采用完全相同的句法。变化的是语义。在希尔伯特空间语义中，事件由 $\mathscr{H}$ 的闭子空间表示：$[\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}}]\!] = \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \subset \mathscr{H}$，$[\![\mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!] = \mathscr{H}_{\mathrm{C}} \subset \mathscr{H}$，其中 $[\![\top]\!] = \mathscr{H}$。按照这种解读，上述恒等式被解释为

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \;=\; [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!]^{\perp}, \tag{30}$$

这等价于一对子空间条件

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \perp [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!], \qquad [\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \oplus [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] \;=\; [\![\top]\!]. \tag{31}$$

这些恰好就是 (14) 和 (15)；第二个条件是句法析取 $\mathsf{D}_{\mathrm{op}} \vee \mathsf{C}_{\mathrm{op}} \equiv \top$ 在希尔伯特空间语义上的对应物，因此提供了穷尽性的量子类比。然而，这两个子空间的集合论并集通常是，

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] = \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cup \mathscr{H}_{\mathrm{C}} \subsetneq \mathscr{H} = [\![\top]\!]. \tag{32}$$

形如 $\psi = \psi_{\mathrm{D}} + \psi_{\mathrm{C}}$（其中 $\psi_{\mathrm{D}} \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 和 $\psi_{\mathrm{C}} \in \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$）的向量，当两个分量都非零时，属于闭包张成 $\overline{\mathscr{H}_{\mathrm{D}} + \mathscr{H}_{\mathrm{C}}}$，但既不属于 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$，也不属于 $\mathscr{H}_{\mathrm{C}}$。

这展示了 Widdows 等人以几何术语讨论的量子逻辑中典型的"中间"状态 [23],，他们后来用这种状态来分析析取效应背后的量子析取（Widdows 等人 [24]）。

这样一来，模糊性便体现在单一状态中：$\psi \notin [\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!]$ 尽管 $\psi \in [\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}} \vee \mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!] = [\![\top]\!]$。

共同偏离及不同原因 所提出的经典 DPM 和类量子决策过程模型都偏离了传统的覆盖条件

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] \;=\; [\![\top]\!] \tag{33}$$

以便纳入模糊性：

$$\begin{aligned} \text{Proposed classical DPM:}\quad & [\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] \subsetneq [\![\top]\!] \quad \text{via interior expectation bins,} \\ \text{Quantum-like DPM:}\quad & [\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] \subsetneq [\![\top]\!] \quad \text{via superposition states.} \end{aligned}$$

它们呈现出相同的不等式，但背后的语义原因不同：所提出的模型保留经典集合语义，并丰富事件词汇（加入内在期望事件）；而类量子模型则将析取的语义概念从并集改为闭包张成，从而允许某些状态既不属于一个明确选项，也不属于另一个明确选项。图 2 展示了这些差异，并明确指出，在这两个模型中，覆盖条件失效分别源于不同的机制。

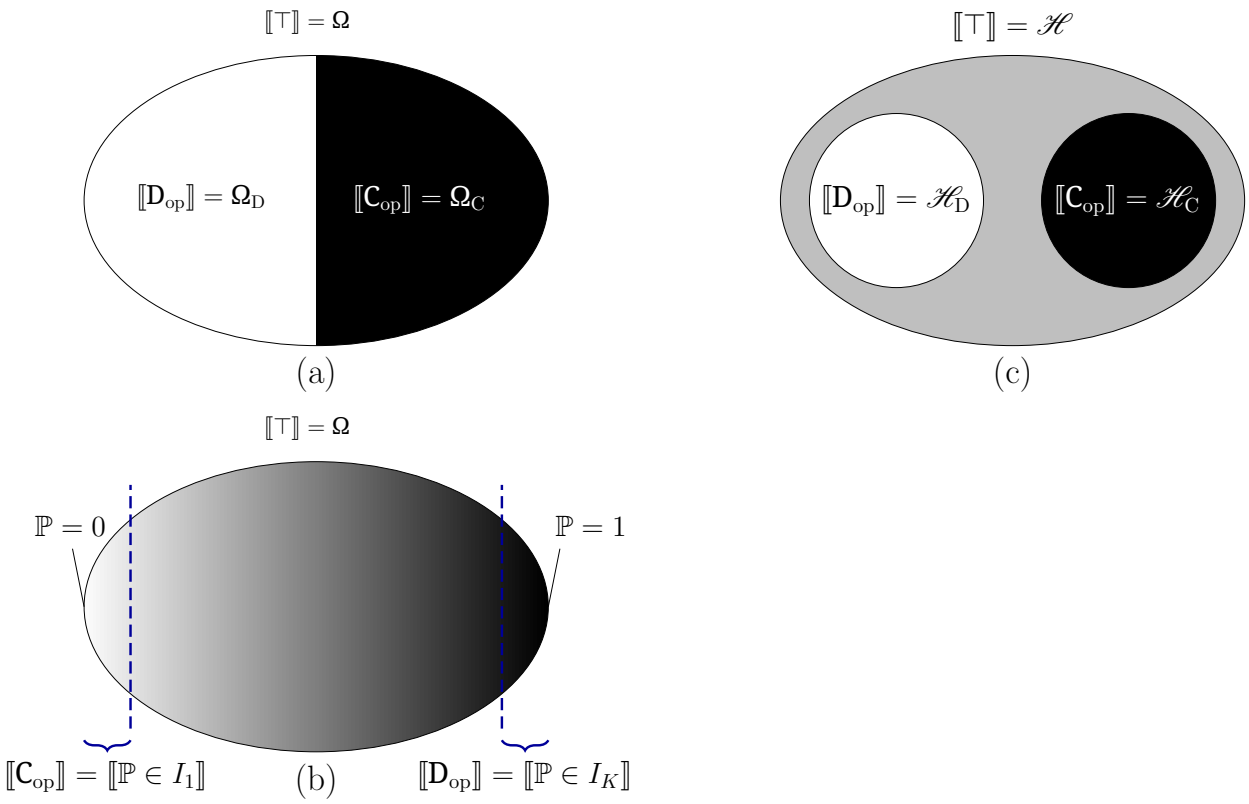


图 2：三种决策过程模型中的事件语义。(a) 传统的经典（布尔）解读：确定性事件穷尽整个空间，$[\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!] = [\![\top]\!] = \Omega$，因此模糊性在语义上无处容身。(b) 提出的经典解读：我们保留集合语义，但引入期望参数 $\mathbb{P} \in [0,1]$；确定性事件位于两端，分别为 $[\![\mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!] = [\![\mathbb{P} \in I_1]\!]$ 和 $[\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}}]\!] = [\![\mathbb{P} \in I_K]\!]$，而内部层级则对应于$[\![\top]\!] \setminus ([\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!])$。(c) 类量子解读：事件是闭子空间 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$，$\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \subset \mathscr{H}$且 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{C}} = [\![\top]\!] = \mathscr{H}$；叠加态位于 $\mathscr{H}$中，却不属于任何一个子空间，因此$[\![\mathsf{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathsf{C}_{\mathrm{op}}]\!] \subsetneq [\![\top]\!]$。

最后，我们证明以下定理，以支持上述论证。

定理 6.1（三个决策过程模型中的模糊集）。 给定对手选择事件 D_{op} 和 C_{op} 以及必然事件 $\top$，将相关的模糊集 定义为

$$A \;:=\; [\![\top]\!] \setminus \big([\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!]\big).$$

(i) 传统决策过程模型。 在传统模型中，假设对手选择事件满足

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cap [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] = \varnothing, \qquad [\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] = [\![\top]\!]. \tag{34}$$

然后 $A = \varnothing$。

(ii) 提出的带有期望参数的决策过程模型。在所提出的模型中，令 $\mathbb{P} \in [0,1]$为期望参数，$\{I_k\}_{k=1}^{K}$ 为 $[0,1]$的一个划分。由此产生的事件$[\![\mathbb{P} \in I_k]\!]$ 满足

$$[\![\mathbb{P} \in I_k]\!] \cap [\![\mathbb{P} \in I_\ell]\!] = \varnothing \quad (k \neq \ell), \qquad \bigcup_{k=1}^{K} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!] = [\![\top]\!]. \tag{35}$$

这两个确定预期事件由极端情况表示

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] := [\![\mathbb{P} \in I_K]\!], \qquad [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] := [\![\mathbb{P} \in I_1]\!]. \tag{36}$$

Then

$$A = \bigcup_{k=2}^{K-1} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!]. \tag{37}$$

特别地， $A = \varnothing$ 只要 $K \leq 2$，对于 $K \geq 3$ ，便有

$$A \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \{2, \ldots, K-1\} \ \textit{such that} \ [\![\mathbb{P} \in I_k]\!] \neq \varnothing.$$

此外，对于Ω上的任意概率测度Pr ，

$$\Pr(A) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \{2, \ldots, K-1\} \ \textit{such that} \ \ \Pr\big(\mathbb{P} \in I_k\big) > 0.$$

(iii) 类量子决策过程模型。 在类量子模型中，设 $\mathscr{H}$是一个有限维复希尔伯特空间，且$\dim \mathscr{H} = n \geq 2$，并设

$$[\![\mathrm{D}_{\mathrm{op}}]\!] =: \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \subset \mathscr{H}, \qquad [\![\mathrm{C}_{\mathrm{op}}]\!] =: \mathscr{H}_{\mathrm{C}} \subset \mathscr{H}$$

是非零闭子空间，且

$$\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \perp \mathscr{H}_{\mathrm{C}}, \qquad \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{C}} = \mathscr{H}. \tag{38}$$

Let

$$S(\mathscr{H}) \ := \ \{\psi \in \mathscr{H} : \|\psi\| = 1\}$$

为单位球面，并令 μ 表示 $S(\mathscr{H})$上的（唯一）酉不变概率测度。定义状态级歧义集

$$A_S \ := \ S(\mathscr{H}) \setminus \big((\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})) \cup (\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H}))\big).$$

那么：

(a) 每个 $\psi \in S(\mathscr{H})$ 都具有唯一分解 $\psi = \psi_D + \psi_C$ ，其中包含 $\psi_D \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 和$\psi_C \in \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$，并且

$$\psi \in A_S \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_D \neq 0 \ \textit{and} \ \psi_C \neq 0;$$

(b) A_S 在 S（$\mathscr{H}$）中稠密；

(c) $\mu(A_S) = 1$, *i.e.* $\mu\big((\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})) \cup (\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H}))\big) = 0$.

证明：根据定义，

$$A \;=\; [\![\top]\!] \setminus \big([\![\mathrm{D_{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C_{op}}]\!]\big).$$

（*i*）传统经典 *DPM*。根据（34），我们有 $[\![\mathrm{D_{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C_{op}}]\!] = [\![\top]\!]$，因此

$$A = [\![\top]\!] \setminus \big([\![\mathrm{D_{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C_{op}}]\!]\big) = [\![\top]\!] \setminus [\![\top]\!] = \varnothing.$$

（*ii*）带 期望参数的经典 *DPM*。由（35）和（36），我们有 e

$$[\![\top]\!] = \bigcup_{k=1}^{K} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!], \qquad [\![\mathrm{D_{op}}]\!] \cup [\![\mathrm{C_{op}}]\!] = [\![\mathbb{P} \in I_K]\!] \cup [\![\mathbb{P} \in I_1]\!].$$

因此

$$\begin{aligned} A &= \left(\bigcup_{k=1}^{K} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!]\right) \setminus \big([\![\mathbb{P} \in I_1]\!] \cup [\![\mathbb{P} \in I_K]\!]\big) \\ &= \bigcup_{k=2}^{K-1} [\![\mathbb{P} \in I_k]\!], \end{aligned}$$

其中，最后一步利用了（35）中的两两不相交性：从不交并中减去两个不相交成员的并集，恰好会移除这两个成员。

如果 $K \le 2$，指标集 $\{2, \dots, K-1\}$ 为空，因此并集为空，所以 $A = \varnothing$。如果 $K \ge 3$，则（37）意味着

$$A \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \{2, \dots, K-1\} \text{ with } [\![\mathbb{P} \in I_k]\!] \neq \varnothing,$$

因为有限个集合的并集为空，当且仅当其中每个集合都为空 .

现在，设 Pr 是 Ω 上任意一个概率测度。由于集合 $[\![\mathbb{P} \in I_k]\!]$ 两两不相交，根据有限可加性可得

$$\Pr(A) = \sum_{k=2}^{K-1} \Pr\big([\![\mathbb{P} \in I_k]\!]\big) = \sum_{k=2}^{K-1} \Pr(\mathbb{P} \in I_k).$$

因此，$\Pr(A) > 0$ 当且仅当至少有一个满足 $2 \le k \le K-1$ 的加项 $\Pr(\mathbb{P} \in I_k)$ 严格大于零。

(iii) 类量子决策过程模型。假设 (38)。由于 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$，每个 $\psi \in \mathscr{H}$ 都有唯一分解

$$\psi = \psi_D + \psi_C, \qquad \psi_D \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}},\ \psi_C \in \mathscr{H}_{\mathrm{C}}.$$

对于 $\psi \in S(\mathscr{H})$，当且仅当 $\psi_C = 0$ 时，$\psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 成立；当且仅当 $\psi_D = 0$ 时，$\psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ 成立。因此，

$$\psi \in A_S \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \notin \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H}) \text{ and } \psi \notin \mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H}) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_D \neq 0 \text{ and } \psi_C \neq 0,$$

从而证明了 (iii)(a)。

.....的稠密性 A_S。我们证明 $(\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})) \cup (\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H}))$ 在 $S(\mathscr{H})$（配备子空间拓扑）中空内部，这意味着其补集 A_S 是稠密的。

集合 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})$ 在 $S(\mathscr{H})$ 中是闭集，因为 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 在 $\mathscr{H}$ 中是闭集；同理，$\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H})$ 也是闭集。我们断言 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})$ 的内部为空。取 $\psi_0 \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})$，并令 U 是 $S(\mathscr{H})$ 中 ψ_0 的任意一个邻域。那么存在 $\delta > 0$，使得

$$B_{S(\mathscr{H})}(\psi_0, \delta) := \{\psi \in S(\mathscr{H}) : \|\psi - \psi_0\| < \delta\} \subseteq U.$$

由于 $\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \neq \{0\}$，取满足 $\|u\| = 1$ 的 $u \in \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$。对于 $\varepsilon > 0$，定义

$$\psi_\varepsilon := \frac{\psi_0 + \varepsilon u}{\|\psi_0 + \varepsilon u\|} \in S(\mathscr{H}).$$

由于 $\psi_0 \perp u$，我们有 $\|\psi_0 + \varepsilon u\| = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$，因此

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_0\| = \left\| \frac{\psi_0 + \varepsilon u}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} - \psi_0 \right\| = \left\| \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} - 1 \Big) \psi_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} u \right\| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

因此，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有 $\psi_\varepsilon \in U$。此外，$\psi_\varepsilon \notin \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$，因为它沿着 $u \in \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ 有一个非零分量；而 $\psi_\varepsilon \notin \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$，因为它沿着 $\psi_0 \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 有一个非零分量。因此 $\psi_\varepsilon \in A_S \cap U$，这说明没有任何 ψ_0 的邻域包含于 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})$。于是 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})$ 的内部为空；由对称性，$\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H})$ 也同样如此。因此，它们的并集内部为空，且 A_S 在 $S(\mathscr{H})$ 中稠密，从而证明了 (iii)(b)。

全测度的 A_S。为证明 (iii)(c)，只需证明 $\mu(\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})) = \mu(\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H})) = 0$。设 X 是一个取值于 $\mathscr{H}$、其分布连续且在酉变换下不变的随机向量；例如，取 $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, I)$（标准复高斯分布）。那么 $\Pr(X = 0) = 0$，所以 $X/\|X\|$ 几乎必然有定义，而 $X/\|X\|$ 的分布恰好是μ。

由于 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 是 $\mathscr{H}$的真线性子空间，存在一个非零线性泛函ℓ：$\mathscr{H} \to \mathbb{C}$，使得 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \subseteq \ker \ell$。复随机变量 $\ell(X)$ 非退化，且在 $\mathbb{C}$上具有连续分布，因此 $\Pr(\ell(X) = 0) = 0$，于是

$$\Pr(X \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}) \leq \Pr(\ell(X) = 0) = 0.$$

因为 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 是一个锥，$X/\|X\| \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 当且仅当 $X \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}$，所以

$$\mu(\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})) = \Pr(X/\|X\| \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}) = \Pr(X \in \mathscr{H}_{\mathrm{D}}) = 0.$$

类似地，$\mu(\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H})) = 0$，因此根据次可加性，

$$\mu\big((\mathscr{H}_{\mathrm{D}} \cap S(\mathscr{H})) \cup (\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap S(\mathscr{H}))\big) = 0, \qquad \mu(A_S) = 1.$$

证明至此完成。 □

7 结论

本文重新审视了析取效应，特别聚焦于囚徒困境（PD）实验。一种常见的解读认为，囚徒困境研究结果与经典全概率定律（LTP）不相容（1）。我们指出，这一结论依赖于一个隐含的仅确定性前提：在将对手选择事件作心理事件解读时，该前提被纳入传统的经典决策过程模型（DPM）。当三个信息条件被视为相应的条件概率（5）时，通常的划分假设（2）—（3）实际上要求每位参与者在作出选择之前，就已确定对手会背叛或合作。一旦明确这一强前提，表面上对全概率定律的违背便可归因于这种建模选择，而非经典逻辑或概率本身存在缺陷。

为放宽这一限制，我们提出了一种新的经典 DPM，明确表示模糊的 决策前预期。每位参与者都由一个连续期望参数 $\mathbb{P} \in [0,1]$ 表示，该参数编码了其对对手背叛可能性的预期，而参与者群体则按照预期水平划分为区间 $\{I_k\}$ 。随后，总体背叛率以公式（10）的形式遵循经典全概率定理，表现为对各预期区间的混合。传统决策过程模型可作为 $\mathbb{P}$ 的两个极端处集中全部概率质量这一边界情形得到恢复。定理 5.1 表明，这并非仅是概念上的可能性：对于任意三个实证背叛率（d_U、 d_D、 d_C）$\in$（0，1）^{3},，包括强析取效应情形 $d_U < \min\{d_D, d_C\}$，都存在一个所提出的经典 DPM 的简单三分箱实例，能够精确匹配该三元组，同时完全遵循经典全概率定理。

随后，我们用共同的符号体系，将这一经典解释与针对囚徒困境实验构建的标准类量子 DPM 并列考察。类量子模型将对手选择事件表示为希尔伯特空间的子空间，并导出全概率定律的量子类比（21）；其中，同样的三个背叛率由一个干涉项联系起来。若将这一框架解读为决策过程模型，它也能处理模糊预期下的决策，但它将这种模糊性定位于单一认知状态之中，将其视为期望子空间上的叠加，并将事件与测量（提问）结果联系起来。定理 5.2 随后证明，就三个可观测背叛率而言，类量子模型与经典模型具有相同的表征能力：对于类量子 DPM 产生的任意三元组 (d_U， d_D， d_C)，都存在一个符合所提形式的三区间箱经典 DPM，能够复现相同的概率。从这个意义上说，囚徒困境实验中的析取效应模式本身并不迫使我们偏离经典概率；两种方法的区别不在于它们能够实现哪些三元组，而在于它们如何表示事件与模糊性。据我们所知，量子认知文献中此前尚无类似定理 5.1 或定理 5.2 的数学结果。

本　　项分析具有若干启示，并为未来研究指明了方向　　：

- **重新诠释析取效应**。囚徒困境析取效应并不一定意味着经典概率失效。定理 5.1 表明，即使是强

析取效应模式，只要将模糊预期纳入决策过程，就与经典全概率定理相容。失效的是仅确定性前提与信息条件的标准识别方式之间的结合，而非柯尔莫哥洛夫概率本身。

- **澄清类量子模型的作用**。定理 5.2 表明，对于囚徒困境析取效应实验，类量子模型并不会仅仅因为放弃经典全概率定理而获得更强的经验解释力：它们生成的任何一组三个背叛率，都可以通过对不同期望水平进行经典混合来匹配。它们的独特贡献不在于此，而在于其事件语义，以及通过叠加和干涉在态内表征模糊性；在更丰富的实验情境中（例如序贯提问、顺序效应或联合任务），这些特点可能至关重要，因为此时经典混合与量子动力学会施加真正不同的约束。

- **经典与类量子方法是互补的工具**。通过构建一个平行的经典 DPM，并明确其底层事件语义（见第 6 节），本框架为评估认知建模何时实质上需要类量子结构提供了一个中立基准。在某些任务中，包含异质预期的精细化经典模型或许就足够了；在另一些任务中，量子形式体系则可能提供更自然或约束更严格的描述。未来研究可以利用这种并列表述来设计实验，探究 $\mathbb{P}$的分布，检验特定的量子预测是否优于经典混合，并将分析范围从囚徒困境扩展到其他析取效应范式及相关现象。

总而言之，囚徒困境析取效应实验与其说是反对经典概率的直接证据，不如说是对决策前模糊性建模方式的挑战。因此，选择经典形式体系还是类量子形式体系，应依据对当前任务中的事件、测量和不确定性所作的明确假设，而不应基于全概率定律被违反这一预设。

参考文献

[1] 阿莫斯·特沃斯基和埃尔达·沙菲尔。不确定情境下选择中的析取效应。《心理科学》，3(5):305–309，1992年。https://doi.org/10.1111/j.1467-9280. 1992.tb00678.x.[2] 伦纳德·J·萨维奇。《统计学基础》。约翰·威利父子出版公司，纽约，1954年。第2版修订版，多佛出版社，纽约，1972年。[3] 埃尔达·沙菲尔和阿莫斯·特沃斯基。《在不确定性中思考》：非后果性推理与选择。《认知心理学》，24(4):449–474，1992年。https://doi.org/10. 1016/0010-0285(92)90015-T.[4] Andrei Khrennikov。《类量子大脑》：“心灵的干涉”。《生物系统》，84(3): 225–241，2006年。https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2005.11.005。

[5] Jerome R. Busemeyer、Zheng Wang和James T. Townsend。人类决策的量子动力学。数学心理学杂志，50(3):220–241，2006年。https://doi.org/10.1016/j.jmp.2006.01.003.[6] Emmanuel M. Pothos和Jerome R. Busemeyer。对违反“理性”决策理论现象的量子概率解释。英国皇家学会会刊*B*辑：生物科学，276(1665):2171–2178，2009年。https://doi.org/10.1098/rspb.2009.0121.[7] Jerome R. Busemeyer和Peter D. Bruza。认知与决策的量子模型。剑桥大学出版社，2012年。ISBN 9781107011991。https://doi.org/10.1017/ CBO9780511997716.[8] Andrei Y. Khrennikov。生物学、认知与社会科学中的开放量子系统。施普林格，尚，第一版，2023年。ISBN 9783031290237。https://doi.org/10.1007/978-3-031-29024-4.[9] Yoshihiro Maruyama。量子语境性与认知语境性：违反贝尔型不等式的意义。《生物系统》，208:104472，2021年。https: // doi.org/10.1016/j.biosystems.2021.104472.[10] Yoshihiro Maruyama。范畴论与生命科学基础：关于认知的结构主义视角。《生物系统》，203:104376，2021年。https://doi.org/10.1016/ j.biosystems.2021.104376.[11]Xiaoyang Xin、Mengdan Sun、Bo Liu、Ying Li和Xiaoqing Gao。用于解释一次性囚徒困境博弈中析取效应的更现实的马尔可夫过程模型。数学，10(5):834，2022年。https://doi.org/10.3390/ math10050834.[12] Catarina Moreira和Andreas Wichert。类量子贝叶斯网络是否比经典贝叶斯网络更强大？数学心理学杂志，82: 73–83，2018年。https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.11.003.[13] Alexandros Gelastopoulos和Gael Le Mens。析取效应并不违反全概率定律。*PsyArXiv*，2024年。https://doi.org/10.31234/osf.io/2xzf4.[14]Emmanuel M. Pothos和Jerome R. Busemeyer。量子认知。《心理学年度评论》，73(1):749–778，2022年。https://doi.org/10.1146/ annurev-psych-033020-123501.[15] Andrei Khrennikov。认知决策与信息处理的类量子模型。《生物系统》，95(3):179–187，2009年。https://doi.org/10.1016/j. biosystems.2008.10.004。

[16] Jakub Tesar。社会规范以及对他人的预期如何影响个体行为？战略决策中自我/他人视角交互的量子模型。科学基础，25(1):135–150，2020。https://doi.org/10.1007/s10699-019-09582-y.[17] Zheng Wang、Jerome R. Busemeyer、Harald Atmanspacher 和 Emmanuel M. Pothos。运用量子理论构建认知模型的潜力。认知科学论题，5(4):672–688，2013。https://doi.org/10.1111/tops.12043.[18] Reinhard Blutner 和 Peter Beim Graben。量子认知与有限理性。*Synthese*，193(10):3239–3291，2016。https://doi.org/10.1007/s11229-015-0928-5.[19] Andrei Khrennikov。认知的类量子建模。物理学前沿，3:77，2015。https://doi.org/10.3389/fphy.2015.00077.[20] Catarina Moreira 和 Andreas Wichert。量子概率模型再探：认知中的析取效应案例。物理学前沿，4:26，2016。https://doi. org/10.3389/fphy.2016.00026.[21] Garrett Birkhoff 和约翰·冯·诺伊曼。量子力学逻辑。数学年刊，37(4):823–843，1936.[22] Emmanuel M. Pothos 和 Jerome R. Busemeyer。量子概率能否为认知建模提供新方向?行为与脑科学，36(3):255–274，2013。https://doi.org/10.1017/S0140525X12001525.[23] Dominic Widdows、Kirsty Kitto 和 Trevor Cohen。人工智能中的量子数学。人工智能研究杂志，72:1307–1341，2021。https: //doi.org/10.1613/jair.1.12702.[24] Dominic Widdows、Jyoti Rani 和 Emmanuel M. Pothos。用于认知决策的量子电路组件。熵，25(4):548，2023。https://doi.org/10.3390/ e25040548。