arXiv:2603.23242v1 [math.DG] 24 Mar 2026

乘积黎曼流形上的零模

JURGEN JULIO-BATALLA

Abstract. 本文研究闭自旋流形的乘积上的零模方程 $D_g\varphi = iA\cdot\varphi$（$M_1^{n_1}\times M_2^{n_2}, g_1+g_2, \sigma$），其维数分别为 $n_1 \le n_2$。这里， A 是 $M^n = M_1^{n_1}\times M_2^{n_2}$上的实向量场。在满足关于 $|\varphi|$ 的非递增条件时，我们证明

$$\| A \|_n^2 \geq \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n, [g]),$$

其中， Y（$M^n, [g]$）是（M^n, g）的 Yamabe 常数。此估计在偶数维时是尖锐的。我们还得到了零模型方程 $D_g\varphi = f\varphi$ 的非平凡解的类似估计，其中 f 是一个标量函数。

1. 引言

对于闭自旋流形的乘积（$M^n = M_1^{n_1}\times M_2^{n_2}, g = g_1+g_2, \sigma$），我们关注零模方程

$$D_g\varphi = iA\cdot\varphi, \tag{1.1}$$

其中 A 是实向量场， φ 是定义在 (M^n, g) 上的旋量场，而 D_g 是关于度量 g的狄拉克算子。 A对 $\cdot$的作用通过克利福德乘法给出。

这个方程出现在数理物理的诸多领域中。例如，在研究与自旋磁场相互作用的原子的稳定性时（见 [6]）。在这类情形下，存在满足 (1.1) 的非平凡对 (φ, A) 会引发障碍问题。

Loss-Yau 于 [7] 在 $\mathbb{R}^3$中构造了第一个零模对 (φ, A)。此后，人们投入了大量精力来理解方程 (1.1) 的结构。有关零模方程近期进展的综述，请读者参阅 [4] 及其中的参考文献。

Frank-Loss 于 [5], 在 $\mathbb{R}^n$ 中针对欧几里得度量研究了方程 (1.1)，取得了重大进展。他们找到了非平凡解 (φ, A) 的一个必要条件。更确切地说，若 (φ, A) 是非平凡解，则

$$\| A \|_n^2 \geq \frac{n}{n-2} S_n, \tag{1.2}$$

其中 S_n 是 $\mathbb{R}^n$中的最优 Sobolev 常数。

在维数为 $n = 3$ 的情形下， [7] 给出了满足（1.2）中等号的显式例子，而 Dunne-Mi 在 [3]中找到了这些例子在更高奇数维中的推广。此外，Frank-Loss 在[5] 中证明，这些例子是等号成立时的唯一解，这表明（1.2）在偶数维中并非最优。

最近，这一结果已推广到一般自旋流形的情形。J. Reuss 在 [8]中改进了 Frank-Loss 的方法，并得到了

$$\| A \|_n^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} Y(M^n, [g]), \tag{1.3}$$

其中 Y（M^n， $[g]$）是（M^n， g）的 Yamabe 常数。

最近，Wang-Zhang 在 [9] 中给出了等号情形的完整分类。他们证明，当且仅当 (M^n, g) 是 Sasaki-Einstein 流形时，等号成立。[1]

从这一刻画出发，一个自然的问题随之而来：在什么几何或解析条件下，尖锐不等式 (1.3) 可以得到改进?

零模方程 (1.1) 的一个显著特点有助于解决这一问题，那就是它具有共形不变性。具体而言，如果 $(\varphi,\ A)$ 是度量 g 下方程 (1.1) 的解，那么对于 $[g]$ 中任意共形度量，都存在一个对应的解对，且向量势的 $\|\cdot\|_n$ 范数相同。因此，在给定的共形类中选择合适的度量，或许能够改善 A 的 L^n-范数估计。

为准确陈述我们的主要定理，我们引入以下定义：

定义 1.1. 对于任意给定的一对实值函数 F, G，我们称 F 关于 G 非递增，如果

$$\int_M \langle \nabla F, \nabla ln(u_1)\rangle \, dv_g \leq 0,$$

其中 u_1 是加权线性问题的第一特征函数

$$-a_n\Delta u + s_g u = kG^2 u$$

或者等价地，u_1 是以下表达式的最小值

$$L(u) = \frac{\int_M \left(a_n|\nabla u|^2 + s_g u^2\right) dv_g}{\int_M G^2u^2 dv_g}$$

在索伯列夫空间 $H^1(M)$上。这里 $a_n = 4(n-1)/(n-2)$。

有了这个定义，我们的主要结果改进了 $\|\ A\ \|_n^2$ 的下界，条件是乘积度量 $g = g_1 + g_2$ 存在一个零模（$\varphi,\ A$），使得 φ 的 g–长度关于 $|A|_g$ 非递增。

定理 1.2。 设 (M^n, g, σ) 是一个维数为 $n = n_1 + n_2$ 的闭黎曼自旋流形，它是分别具有维数 $n_1 \leq n_2$ 的闭黎曼流形 $(M_1^{n_1}, g_1)$、$(M_2^{n_2}, g_2)$ 的乘积。假设乘积度量 $g = g_1 + g_2$ 具有正标量曲率。设 (φ, A)是度量 g 下方程 (1.1) 的一个非平凡解。

如果 $|\varphi|_g^2$ 关于 $|A|_g$ 非递增，那么

$$\| A \|_n^2 \geq \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n, [g]). \tag{1.4}$$

此外，若等号成立，则：

(a) 向量势 A 具有恒定长度，***(b)*** 度量 g 是 ***Yamabe*** 度量，***(c)*** $(M_2^{n_2}, g_2)$ 存在非平凡的实 ***Killing*** 旋量，***(d)*** 当 $n_1 < n_2$ 时，$(M_1^{n_1}, g_1)$ 存在平行旋量；当 $n_1 = n_2$时，则存在平行旋量或实 ***Killing*** 旋量。

注 1.3. 关于 $|A|_g$，$|\varphi|_g^2$ 的非递增条件是对如下条件的轻微修改：$|\varphi|_g^2$ 沿由共形拉普拉斯算子 L_g 关于权函数 $|A|_g^2$的第一特征函数 u_1 所生成的梯度流非递增。特别是，当 $|\varphi|_g$ 或 u_1 为常值函数时，该条件显然成立。

注 1.4. 存在一些零模的显式例子，它们使(1.4)取等号。例如，在维数为 $n = 3$ 时，***Loss-Yau*** 在 [7] 中发现的零模(φ, A) 满足

$$|\varphi(x)| = \frac{1}{1+|x|^2}, \quad |A(x)| = \frac{3}{1+|x|^2}$$

相对于欧几里得度量 dx^2。根据零模方程(1.1) 的共形不变性，数对(φ, A) 在球面$(\mathbb{S}^3, g_0)$ 上诱导出方程的一个解(φ_0, A_0)，其度量为圆度量

$$g_0 = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}dx^2.$$

因此，

$$|\varphi_0|_{g_0} = \frac{1}{2}, \quad |A_0|_{g_0} = \frac{3}{2}.$$

因此，数对$(\varphi_0 \otimes \varphi_0, A_0 \oplus A_0)$ 是乘积$(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, g_0 + g_0)$ 上的一个零模，其中$|\varphi_0 \otimes \varphi_0|^2$ 为常数（因而沿着 $|A_0 \oplus A_0|$非递增）。另一方面，

$$\left(\int_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3} |A_0 \oplus A_0|^6 dv_{g_0+g_0}\right)^{1/3} = 2|A_0|^2_{g_0} vol(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, g_0+g_0)^{1/3} = \frac{3}{8}Y(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, [g_0+g_0]).$$

因此，零模$(\varphi_0 \otimes \varphi_0, A_0 \oplus A_0)$ 在(1.4)中取等号。

类似地，利用 *Dunne-Mi* 在 [3] 中得到的零模，我们可以找到奇数维球面的乘积上的零模示例$(\mathbb{S}^{2n+1}, g_0)$，它们在前述定理中取等号。

另一个例子系列可通过考虑奇数维球面$(\mathbb{S}^{2n+1}, g_0)$ 与圆$(\mathbb{S}^1, dt^2)$的乘积得到。

注 1.5. 前述达到(1.4) 等号的零模示例(φ, A) 出现在偶数维中。这与锐不等式(1.2) 和(1.3) 形成对比：我们知道，等号情形只出现在奇数维中（见 [5, 9]）。

本文还考虑了一个密切相关的方程（我们称之为零模型方程）

$$D_g\varphi = f\varphi, \tag{1.5}$$

其中 f 是一个标量函数。

我们得到一个 v 们得到了关于方程 (1.5 的非平凡解存在性的一个非常相似的必要条件):

定理 1.6. 设(M^n, g, σ) 是一个闭黎曼自旋流形，与定理 *1.2* 中的情形相同。设(φ, f) 是乘积度量 $g = g_1 + g_2$下方程(1.5) 的一个非平凡解。

如果 $|\varphi|^2_g$ 关于 f 非递增，则

$$\| f \|^2_n \geq \frac{n_2}{4(n_2-1)}Y(M^n, [g]). \tag{1.6}$$

此外，等号成立当且仅当：

(a) 标量势 f 是常数；*(b)* 度量 g 是 *Yamabe* 度量；*(c)* $(M_2^{n_2}, g_2)$ 存在非平凡的实 *Killing* 旋量；*(d)* 当 $n_1 < n_2$ 时，$(M_1^{n_1}, g_1)$ 存在平行旋量；当 $n_1 = n_2$时，存在平行旋量或实 *Killing* 旋量。

注 1.7。 不同于不等式 (1.4)，我们完全刻画了尖锐不等式 (1.6)的等号情形。

最后，关于正则性，由于 [4, 5, 9] 中关于零模（φ， A）的正则性结果，我们在全文中始终假设 $|A|$属于 $L^n(M^n)$，且旋量场 φ属于 $L^p(M^n)$，其中某个$p > n/(n-1)$。

本文的安排如下。第 2 节回顾关于自旋流形以及乘积流形上的彭罗斯型算子的背景知识。第 3 节证明不等式 (1.4)。不等式 (1.6) 的证明将在第 4 节给出。

2. Preliminaries

2.1. 自旋流形

在闭的定向黎曼流形 $(M^n,\ g)$ 上，我们可以定义一个 $SO(n)$-主丛 $P_{SO}M$，其底空间为 M，纤维是 $x \in M$ 处定向的 g–标准正交基。对于 $n \geq 3$，存在万有覆盖$\sigma : spin(n) \to SO(n)$，其中 $spin(n)$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 中长度为 1 的偶数个向量生成的群，它属于实克利福德代数 Cl_n（由关系 $VW + WV = -2(V,\ W)$ 生成的结合 $\mathbb{R}$–代数，其中度量为欧几里得度量 $(,\ )$）。如果存在一个 $spin(n)$–主丛$P_{spin}M$，其底空间为 M，且它是 $P_{SO}M$ 的二重覆盖，并且在每个纤维上的限制都是二重覆盖 $\sigma : spin(n) \to SO(n)$，则称流形 M 为自旋流形。从 $P_{spin}M$ 到 $P_{SO}M$, σ 的这种二重覆盖称为自旋结构。

与自旋流形（M^n, g, σ）相关的特殊结构有四种:

(1) 复向量丛 $SM := P_{spin}(M) \times_\rho \Sigma_n$，其中 $\rho : spin(n) \to Aut(\Sigma_n)$ 是复克利福德代数 $\mathbb{C}l_n \simeq Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\Sigma_n \simeq \mathbb{C}^N$ 和 $N = 2^{[n/2]}$ 的不可约表示 ρ: $\mathbb{C}l_n \to End(S_n)$ 在 $spin(n)$ 上的限制。(2) 在 SM 上定义的克利福德乘法 m，其定义为

$$\begin{aligned} m : TM \times SM &\to SM \\ X \otimes \varphi &\mapsto X \cdot_g \varphi := \rho(X)\varphi. \end{aligned}$$

(3) SM 的截面上的厄米内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。

(4) ∇ 上的列维-奇维塔联络 SM。

所有这些结构都以如下方式相容:

$$\begin{aligned} \langle X \cdot \varphi, \psi \rangle &= -\langle \varphi, X \cdot \psi \rangle, \\ X(\langle \varphi, \psi \rangle) &= \langle \nabla_X \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \nabla_X \psi \rangle, \\ \nabla_X (Y \cdot \varphi) &= \nabla_X Y \cdot \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi, \end{aligned}$$

对于所有 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 和 $\varphi, \psi \in \Gamma(SM)$。给定列维-奇维塔联络 ∇: $\Gamma(SM) \to \Gamma(Hom(TM, SM))$，并将 $\Gamma(Hom(TM, SM))$ 与 $\Gamma(TM \otimes SM)$ 视为相同，我们可以将狄拉克算子 D_g 定义为 ∇ 与克利福德乘法 m 的复合，即 $D_g := m \circ \nabla$。对于局部正交标架 $\{E_i\}$，有

$$D_g \varphi = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot_g \nabla_{E_i} \varphi.$$

2.2. 乘积上的彭罗斯型算子

我们将回顾由 $TM = TM_1 \oplus TM_2$ 的分解所诱导的彭罗斯型算子的若干性质，以及它们与狄拉克算子的关系。详情见 [1]

设 $E_{1,1}, E_{1,2}, \cdots, E_{1,n_1}, E_{2,1}, E_{2,2}, \cdots E_{2,n_2}$ 为 $TM_1 \oplus TM_2$ 上的适配局部正交标架，并令 π_i: $TM \to TM_i$ 为 $i = 1, 2$ 时 TM 在 TM_i 上的正交投影。

我们可以定义算子

$$D_{(i)} \varphi := \sum_{j=1}^{j=n_i} E_{i,j} \cdot \nabla_{\pi_i E_{i,j}} \varphi,$$

对于 $i = 1,\ 2$。

很容易证明 $D_{(i)}$ 的以下性质

引理 2.1. *(1)* $D = D_{(1)} + D_{(2)}$;

(2) $D_{(1)} D_{(2)} + D_{(2)} D_{(1)} = 0$;

(3) $D^2 = D_{(1)}^2 + D_{(2)}^2$;

(4) $D_{(i)}$ 是自伴的（对于 $i=1,\ 2$）。

在这种情况下，定义彭罗斯型算子

$$T_X\varphi = \nabla_X\varphi + \frac{1}{n_1}\pi_1(X)\cdot D_{(1)}\varphi + \frac{1}{n_2}\pi_2(X)\cdot D_{(2)}\varphi,$$

对所有旋量场 φ 和所有向量场 X 均成立。

该算子满足

$$|T\varphi|^2 = |\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{n_1}|D_{(1)}\varphi|^2 - \frac{1}{n_2}|D_{(2)}\varphi|^2 \tag{2.1}$$

3. Proof of Theorem 1.2

本节将证明主要定理 1.2。我们将定理分为两部分。首先，讨论不等式 (1.4)。随后，我们将讨论等号在 (1.4) 中成立的必要条件。

定理 1.2 的第一部分等价于

定理 3.1. 设$(M^n = M_1^{n_1}\times M_2^{n_2}, g = g_1 + g_2, \sigma)$是由维数为 $n_1 \le n_2$ 的闭自旋流形构成的乘积。假设标量曲率 s_g 为正。设(φ, A) 是零模方程的一个非平凡解

$$D_g\varphi = i\lambda A\cdot_g\varphi, \quad \int_M |A|^n dv_g = 1.$$

若 $|\varphi|^2$ 关于 $|A|$ 非递增，则

$$\lambda^2 \ge \frac{n_2}{4(n_2-1)}Y(M^n,[g]).$$

证明。 由 Schr¨odinger-Lichnerowitz 公式

$$0 = \int_M \left(-\left\langle D_g^2\varphi,\varphi\right\rangle + \frac{s_g}{4}|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right) dv_g$$

利用斯托克斯定理和零模方程，我们得到

$$0 = \int_M \left(-\lambda^2|A|^2|\varphi|^2 + \frac{s_g}{4}|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right) dv_g.$$

取第 2 节中的彭罗斯型算子 T，将项 $|\nabla\varphi|^2$ 按（2.1）分解，从而得到

$$0 = \int_M \left(-4\lambda^2|A|^2 + s_g\right)|\varphi|^2 + \int_M 4|T\varphi|^2 + \int_M \left(\frac{4}{n_1}|D_{(1)}\varphi|^2 + \frac{4}{n_2}|D_{(2)}\varphi|^2\right).$$

由于每个 $D_{(i)}$ 都是自伴的，且 $D^2 = D_{(1)}^2 + D_{(2)}^2$，我们可知

$$\int_M |D_{(2)}\varphi|^2 = \int_M |D\varphi|^2 - \int_M |D_{(1)}\varphi|^2.$$

因此，由最后两个方程可得

$$0 = \int_M |\varphi|^2\left(4\left(\frac{1-n_2}{n_2}\right)\lambda^2|A|^2 + s_g\right) + \int_M 4|T\varphi|^2 + \int_M 4\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)|D_{(1)}\varphi|^2.$$

另一方面，对于任意正函数 u，我们有

$$\int_M a_n\left\langle\nabla ln(u), \nabla|\varphi|^2\right\rangle = \int_M -a_n|\varphi|^2\left(\frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\right).$$

将最后两个方程相加，我们得到以下积分恒等式 **(*)**

$$0=\int_M \frac{|\varphi|^2}{u}\left(-a_n\Delta u+s_g u+4\left(\frac{1-n_2}{n_2}\right)\lambda^2|A|^2u\right)+\int_M 4|T\varphi|^2+\int_M 4\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)|D_{(1)}\varphi|^2$$
$$+\int_M a_n|\varphi|^2\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\int_M a_n\left\langle\nabla ln(u),\nabla|\varphi|^2\right\rangle.$$

现在考虑由下式定义的常数 $I(M,g,|A|^2)$

$$I(M,g,|A|^2)=\inf_{H^1(M^n)}\frac{\int_M\left(a_n|\nabla u|^2+s_gu^2\right)dv_g}{\int_M(|A|u)^2dv_g}.$$

i即线性加权问题 $-a_n\Delta u+s_gu=I|A|^2u.$ 的第一特征值

设 u_1 是使 $I(M,g,|A|^2)$ 取到的正光滑函数。由 $|\varphi|^2$ 的非增假设可得

$$-\int_M a_n\left\langle\nabla ln(u_1),\nabla|\varphi|^2\right\rangle\geq 0.$$

特别地，将 u_1 代入积分恒等式 **(*)**，可得

$$4\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)\lambda^2<I(M,g,|A|^2)$$

这意味着 φ 必须是平凡的。因此

$$4\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)\lambda^2\geq I(M,g,|A|^2)$$

为得到 I 的下界，注意到由 $|A|$ 的归一化以及 H¨older 不等式可得 t

$$\int_M(|A|u)^2dv_g\leq\left(\int_M u^{2n/(n-2)}dv_g\right)^{(n-2)/n},$$

从而

$$I\geq\inf_{H^1(M)}\frac{\int_M\left(a_n|\nabla u|^2+s_gu^2\right)dv_g}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)}dv_g\right)^{(n-2)/n}}=Y(M^n,[g]).$$

因此

$$\lambda^2\geq\frac{n_2}{4(n_2-1)}Y(M^n,[g]).$$

□

本节最后，我们讨论等式 **(1.4)** 成立的一个必要条件。

If

$$\lambda^2=\frac{n_2}{4(n_2-1)}Y(M^n,[g])$$

then

$$\lambda^2=\frac{n_2}{4(n_2-1)}I(M,g,|A|^2)$$

以及 $I(M,\ g,\ |A|^2)=Y(M,\ [g])$。

方程 $\lambda^2=\frac{n_2}{4(n_2-1)}I(M,g,|A|^2)$ 和积分恒等式 **(*)** 表明 $T\varphi=0,\quad D_1\varphi=0$（若 $n_1<n_2$），且 u_1 是常数。

断言1。等号 $I(M,g,|A|^2)=Y(M,[g])$ 成立，且 u_1 为常数，当且仅当 $|A|$ 为常数且 g 是 *Yamabe* 度量。

断言的证明。等号 $I(M,g,|A|^2) = Y(M,[g])$ 成立且 u_1 为常数，这意味着 g 必须是 Yamabe 度量。特别地，s_g 为常数。由于 $s_g = I(M,g,|A|^2)|A|^2$，我们得到 $|A|$ 为常数。

现在，若 g 是 Yamabe 度量且 $|A|$ 是常数，则 $|A| = 1/(vol(M, g))^{1/n}$（由归一化可得 $\int_M |A|^n dv_g = 1$）。

Thus

$$I(M,g,|A|^2) = \inf_{H^1} \frac{\int_M \left(a_n|\nabla u|^2 + s_g u^2\right) dv_g}{\int_M (|A|u)^2 dv_g} = \inf_{H^1} \frac{\int_M \left(a_n|\nabla u|^2 + s_g u^2\right) dv_g}{\int_M u^2 dv_g} vol(M,g)^{2/n}.$$

另一方面

$$\lambda_1(L_g) = \inf_{H^1} \frac{\int_M \left(a_n|\nabla u|^2 + s_g u^2\right) dv_g}{\int_M u^2 dv_g}$$

是共形拉普拉斯算子的第一特征值 L_g。

由于 g 是 Yamabe 度量，我们有

$$\lambda_1(L_g) vol(M,g)^{2/n} = Y(M^n,[g]).$$

因此 $I(M, g, |A|^2) = Y(M^n, [g])$。

特别地，$s_g = Y(M, [g])vol(M^n, g)^{-2/n} = I(M, g, |A|^2)|A|^2$ 且 u_1 是正的常数。 □

现在我们得到标量曲率 s_g,s_{g_1} 和 s_{g_2} 均为常数。

与 经典扭量旋量（例如参见 [2]）类似，方程 $T\varphi = 0$ 意味着

$$D^2_{(i)} = \frac{n_i}{4(n_i-1)} s_{g_i} \varphi,$$

对于 $i = 1,2$。

因此

$$D^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} s_g \varphi.$$

Let

$$\mu = \frac{n_2}{4(n_2-1)} s_g.$$

容易看出，$\psi := \sqrt{\mu}\varphi + D\bar{\varphi}$ 是狄拉克算子的特征旋量，其特征值为 $\sqrt{\mu}$。

在 [1] Alexandrov 证明了，这种特征旋量的存在意味着乘积 $M = M_1 \times M_2$ 的每个因子都满足：M_2 具有非平凡的实 Killing 旋量，且 M_1 具有非平凡的平行旋量（当 $n_1 < n_2$ 时）；或者 M_1 具有非平凡的实 Killing 旋量或非平凡的平行旋量（当 $n_1 = n_2$ 时）

因此，我们已经证明

定理 3.2. 若等号成立

$$\lambda^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n,[g])$$

上一条定理中的结论成立，则乘积度量 g 是一个 *Yamabe* 度量，向量势 A 具有恒定长度，(M_2, g_2) 具有非平凡的实 *Killing* 旋量，且(M_1, g_1) 具有平行旋量（若 $n_1 < n_2$）；而当 $n_1 = n_2$ 时，则具有平行旋量或实 *Killing* 旋量。

4. Proof of Theorem 1.6

下一条定理的证明与上一节中的证明相似。不过，我们单独讨论这种情形，因为等号成立的部分可以得到完整刻画。

首先，我们得到不等式 (1.6)。为完整起见，我们给出证明

定理 4.1. 设$(M^n = M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}, g = g_1 + g_2, \sigma)$是维数为 $n_1 \leq n_2$ 的闭自旋流形的乘积。假设标量曲率 $s_g > 0$。设(φ, f) 是零模型方程的一个非平凡解

$$D_g\varphi = \lambda f\varphi, \quad \int_M f^n dv_g = 1.$$

如果 $|\varphi|^2$ 关于 f 非递增，则

$$\lambda^2 \geq \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n, [g]).$$

证明。 在定理 3.1 的证明中，我们可以在积分恒等式 (*) 中用 f^2 替换 $|A|^2$，从而得到以下积分恒等式 (**)

$$0 = \int_M \frac{|\varphi|^2}{u}\left(-a_n\Delta u + s_g u + 4\left(\frac{1-n_2}{n_2}\right)\lambda^2 f^2 u\right) + \int_M 4|T\varphi|^2 + \int_M 4\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)|D_1\varphi|^2 + \int_M a_n|\varphi|^2\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \int_M a_n\left\langle \nabla ln(u), \nabla|\varphi|^2\right\rangle.$$

现在考虑由下式定义的常数 $I(M, g, f)$

$$I(M, g, f) = \inf_{H^1} \frac{\int_M \left(a_n|\nabla u|^2 + s_g u^2\right) dv_g}{\int_M (fu)^2 dv_g}.$$

根据假设

$$-\int_M a_n\left\langle \nabla ln(u_1), \nabla|\varphi|^2\right\rangle \geq 0,$$

其中 u_1 是使 $I(M, g, f)$ 取到值的正函数。特别地，将 u_1 代入积分恒等式 (**) 可得

$$4\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)\lambda^2 \geq I(M, g, f).$$

由 f的归一化以及 $\int_M (fu)^2 dv_g$中的 Hölder 不等式可知

$$I \geq \inf \frac{\int_M \left(a_n|\nabla u|^2 + s_g u^2\right) dv_g}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)} dv_g\right)^{(n-2)/n}} = Y(M^n, [g]).$$

因此

$$\lambda^2 \geq \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n, [g]).$$

□

现在，我们讨论 (1.6) 中的等号情形。如果

$$\lambda^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n, [g])$$

then

$$\lambda^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} I(M, g, f)$$

并且 $I(M, g, f) = Y(M, [g])$。

等号 $\lambda^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} I(M, g, f)$ 以及积分恒等式 (**) 蕴含 $T\varphi = 0$, $D_1\varphi = 0$（若 $n_1 < n_2$），且 u_1 为常数。

等号 $I(M, g, f) = Y(M, [g])$ 以及 u_1常数成立，当且仅当 f是常值函数且 g 是 Yamabe 度量。证明与断言1完全相同。

因此， φ 是狄拉克特征旋量。因此，方程 $T\varphi = 0$ 等价于乘积 $M = M_1 \times M_2$ 的每个因子都满足 M_2 存在非平凡实 Killing 旋量这一条件

并且 M_1 存在非平凡平行旋量（当 $n_1 < n_2$时），或者 M_1 存在非平凡实 Killing 旋量或非平凡平行旋量（当 $n_1 = n_2$时）

因此我们可以证明

定理 4.2. 等号

$$\lambda^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} Y(M^n, [g])$$

在前一定理中成立，当且仅当 g 是一个 *Yamabe* 度量，势函数 f 是常数，(M_2, g_2)具有一个非平凡的实 *Killing* 旋量，并且(M_1, g_1) 具有一个平行旋量（若 $n_1 < n_2$），或者当 $n_1 = n_2$ 时具有一个平行旋量或实 *Killing* 旋量。

证明。 等号成立的必要部分对应于前面的讨论。现在假设 (M_1, g_1)、(M_2, g_2) 如前所述，且 $g = g_1 + g_2$ 是一个 Yamabe 度量。

根据乘积 $(M = M_1 \times M_2, g)$ 上 Dirac 特征值的刻画，存在一个旋量场 φ 使得

$$D_g \varphi = \lambda \varphi,$$

其中 $\lambda^2 = \frac{n_2}{4(n_2-1)} s_g$。

令 $f = \frac{1}{vol(M, g)^{1/n}}$。因此 (φ, f) 是方程的一个零模

$$D\varphi = \left(\frac{\lambda}{f}\right) f\varphi.$$

此外，应用 H¨older 不等式估计 $\int_M (fu)^2$，可得

$$Y(M^n, [g]) = \inf_u \frac{\int_M (a_n |\nabla u|^2 + s_g u^2)}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)}\right)^{(n-2)/n}} \le I(M, g, f) = \inf_u \frac{\int_M (a_n |\nabla u|^2 + s_g u^2)}{\left(\int_M (fu)^2\right)}$$
$$\le s_g f^{-2} = s_g vol(M^n, g)^{2/n} = Y(M^n, [g]).$$

在最后一个等号中，我们用到了 g 是一个 Yamabe 度量。

因此，常值函数 u_1 是该问题的第一特征函数

$$-a_n \Delta u + s_g u = I(M, g, f) f^2 u.$$

特别地，$|\varphi|^2$ 沿着 f^2非递增。

Thus (φ, f) 是参数 λ/f对应的零模，且满足 (1.6) 中的等号 .

□

注 4.3。 请注意，乘积自旋流形 $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_0 + g_0)$ 是满足(1.6)中等号的一个例子。

References

[1] B. Alexandrov, *The first eigenvalue of the Dirac operator on locally reducible Riemannian manifolds*, J. Geom. Phys. 57（2007），第 2 期，467–472。[2] H. Baum、T. Friedrich、R. Grunewald、I. Kath, *Twistor and Killing spinors on Riemannian manifolds*, Teubner 数学文丛，第 124 卷，Teubner 出版社，斯图加特/莱比锡，1991 年。[3] G. Dunne、H. Min。 *Abelian zero modes in odd dimensions*。Phys. Rev. D，78(6):067701，4，2008。[4] R. Frank、M. Loss， *Which magnetic fields support a zero mode?* 。J. Reine Angew. Math. 788（2022）[5] R. Frank、M. Loss， *A sharp criterion for zero modes of the Dirac equation*。Journal of the European Mathematical Society（2024）[6] J. Fr¨ ohlich、E. Lieb、Michael Loss。 *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. I. The one-electron atom.* Comm. Math. Phys.，104(2):251–270，1986。[7] M. Loss、H.-T Yau, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. III. Zero energy bound states of the Pauli operator* 104 2 283 290, 1986 。Comm. Math. Phys.，（）：–。[8] J. Reuss， *A note on the existence of nontrivial zero modes on Riemannian manifolds*, arXiv 预印本 arXiv:2503.01602（2025）。

[9] G. Wang、M. Zhang, *Conformal properties of the zero mode equation*, arXiv 预印本 arXiv:2512.17854v2（2026）Universidad Industrial de Santander, Carrera 27 calle 9, 680002, Bucaramanga, Santander, Colom-bia*Email address*: jajuliob@uis.edu.co