arXiv:2603.23316v1 [math.MG] 24 Mar 2026

# 几何数据集的几何 I

横田茂昭

Abstract. Hanika、Schneider 和 Stumme 引入了几何数据集，作为度量测度空间的一种推广，用于计算可观测直径，并将度量测度空间之间的可观测距离推广为几何数据集之间的可观测距离。本文首先证明几何数据集之间的可观测距离不可分。随后，我们将度量测度空间之间的盒距离推广为几何数据集之间的盒距离，并证明其完备性和不可分性。

## 1. Introduction

格罗莫夫 [3] 基于测度集中现象和流形塌缩理论，发展了度量测度空间的几何。三元组 $(X,\ d_X,\ \mu_X)$，或简写为 $X$，若 $d_X$ 是 $X$上的完备可分度量，且 $\mu_X$ 是度量空间 $(X,\ d_X)$上的博雷尔概率测度，则称其为度量测度空间 。他在所有度量测度空间的集合（记为 $\mathcal{X}$）上定义了基于测度集中的可观测距离 $d_{\mathrm{conc}}$ ，以及基于塌缩理论的盒距离 $\square$，并构造了 $(\mathcal{X},\ d_{\mathrm{conc}})$ 的自然紧化。关于这些距离和空间的各种性质已有研究，其中尤其关注 $(\mathcal{X},\ d_{\mathrm{conc}})$ 的可分性，以及 $(\mathcal{X},\ \square)$ 的完备性和可分性。

Pestov [7]将数据视为mm-空间，并利用可观测直径（见定义3.20），通过测度集中现象解释维数灾难的一种表现。然而，目前尚无已知方法能够高效计算 mm-空间 $X$ 的可观测直径；而在定义中直接对所有1-利普希茨连续函数组成的集合进行计算，例如$\mathrm{Lip}_1(X)$，其计算时间会随着数据样本集的数量$\#X$ $X$呈指数增长。他提出限制函数族，以计算可观测直径。

在此基础上，Hanika、Schneider和Stumme [4] 将几何数据集定义为mm-空间的一种推广，以便通过可观测直径计算维数灾难，定义如下：三元组$(X,\ F_X,\ \mu_X)$，或简记为 $X$，称为几何数据集，如果 $F_X$ 是定义在 $X$ 上的实值函数集合，使得

$$d_X(x,y) \coloneqq \sup_{f\in F_X} |f(x)-f(y)|,\ x,y\in X,$$

是完备可分度量，且如果 $\mu_X$ 是度量空间 $(X,\ d_X)$ 上的博雷尔概率测度。mm-空间可解释为一种特殊情形，其中 $F_X=\mathrm{Lip}_1(X,\ d_X)$。他们将 mm-空间之间的可观测距离推广到几何数据集，并以类似方式将可观测直径推广到几何

*Date*：2026年3月25日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 53C23。
*Key words and phrases.* 度量测度空间、几何数据集、可观测距离、盒距离。作者获得了JSPSKAKENHI GrantNumber22H04942项目的资助。

数据集。随后，他们确认了几何数据集的可观测直径作为统计测度的特征。

Hanika 等人的论文旨在将可观测直径用作统计测度，而通常并不证明可观测距离的性质。虽然已知 $(\mathcal{X},\ d_{\mathrm{conc}})$ 具有可分性，但 $(\mathcal{D},\ d_{\mathrm{conc}})$ 的拓扑性质完全未知。同样，尽管 $(\mathcal{X},\ \square)$ 的完备性和可分性已得到确立，但尚未在 $\mathcal{D}$ 上定义盒距离。本文证明了$(\mathcal{D},\ d_{\mathrm{conc}})$ 的不可分性，并进一步将盒距离扩展至$\mathcal{D}$，证明其完备性和不可分性。

我们陈述一个关于 $(\mathcal{D},\ d_{\mathrm{conc}})$ 不可分性的定理。对于集合 $A \subset \mathbb{R}$，定义一个单点几何数据集 $*_A$ 如下：

$$*_A \coloneqq \{*\}, \quad F_{*_A} = \{* \mapsto x \mid x \in A\}, \quad \mu_{*_A} = \delta_*.$$

于是，我们得到如下结论。

**定理 1.1**。集合 $\{*_A \mid A \subset \mathbb{N}\}$ 是$(\mathcal{D}, d_{\mathrm{conc}})$的一个不可数离散子集。特别地，$(\mathcal{D}, d_{\mathrm{conc}})$是不可分的。

这与（$\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}}$）的可分性形成对比。

接下来，我们将盒距离 $\square$推广到几何数据集之间的情形。度量测度空间 $X$ 和 $Y$ 之间的盒距离仅使用距离和测度来定义。Nakajima 给出了如下表示 [5]:

$$\square(X,Y) = \inf_{\pi,S} \max\{1-\pi(S), \operatorname{dis} S\},$$

其中，$\pi$ 遍历 $\mu_X$ 与 $\mu_Y$之间的所有耦合（定义 2.9），而 $S$ 遍历 $X \times Y$中的所有闭集。$S$的畸变 ‘dis $S$’定义为

$$\operatorname{dis} S \coloneqq \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')|; (x,y),(x',y') \in S\}.$$

为了将盒距离 $\square$ 推广到 $\mathcal{D}$，需要将相对于距离$d_X$ 和 $d_Y$ 的值 $\operatorname{dis} S$ 替换为相对于函数族$F_X$ 和 $F_Y$的值。引入定义在 $S$上的实值函数 $f$和 $g$ 的扩展伪距离，

$$d_\infty^S(f,g) \coloneqq \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|,$$

并将其 Hausdorff距离记为 $\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}$，我们证明如下引理:

**引理 1.2**。我们有

$$\operatorname{dis} S = 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(\mathrm{Lip}_1(X) \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{Lip}_1(Y) \circ \mathrm{pr}_2).$$

这里，$\mathrm{pr}_n$ 表示从乘积到第 $n$ 个分量的投影，对于$n = 1,\ 2$； $F \circ f$ 表示函数族 $F$ 中每个元素与 $f$ 进行复合所得到的所有复合的集合。利用此引理，我们将盒距离扩展到 $\mathcal{D}$ ，如下所示：

**定义 1.3.** 我们将两个几何数据集 $X$和 $Y$ 之间的盒距离定义为

$$\square(X,Y) \coloneqq \inf_{\pi,S} \max\{1-\pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\},$$

其中，$\pi$ 遍历 $\mu_X$ 与 $\mu_Y$之间的所有耦合， $S$ 遍历 $X \times Y$中的所有闭集。

此处定义的盒距离满足距离公理。引理 1.2 表明，在 $\mathcal{D}$ 上定义的盒距离是传统盒距离的一种推广。众所周知，传统可观测距离与盒距离之间满足不等式 $d_{\mathrm{conc}} \leq \square$ ，而且很容易证明，该不等式对几何数据集也成立。

此外， $\mathcal{D}$ 上的盒距离满足以下性质。

**定理 1.4.** $(\mathcal{D}, \square)$ 是完备但不可分的。

$(\mathcal{D}, \square)$ 的不可分性由 $d_{\mathrm{conc}} \leq \square$ 和定理 1.1 得出。特别是，这与 $(\mathcal{X}, \square)$ 的完备性和可分性形成对比。

本文安排如下。第 2 章介绍基本定义，例如 mm-空间和耦合。第 3 章定义几何数据集，描述单点几何数据集等基本几何数据集，并讨论几何数据集的可观测直径的（半）连续性。接下来，我们介绍几何数据集之间称为特征序的偏序关系的定义，并从特征子集中构造商几何数据集，即支配几何数据集。商几何数据集用于证明盒距离的完备性。第 4 章确认几何数据集之间可观测距离的不可分性，并将类似的技术应用于 Nakajima 对 mm-空间之间可观测距离的刻画 [5] ，以刻画几何数据集之间的可观测距离。第 5 章将盒距离推广到几何数据集，并证明这一推广保留了完备性，但不具备可分性。

在 [9], 下一篇论文中，我们将考察关于 $\mathcal{X}$ 的技术在 $\mathcal{D}$上的可观测距离和盒距离中能够应用到何种程度。关于 $\mathcal{X}$，($\mathcal{X}$， $d_{\mathrm{conc}}$)的自然紧化由格罗莫夫构造， [3], 而 Shioya [8]证明了该紧化是可度量化的。将相同方法应用于几何数据集时，显而易见的障碍是($\mathcal{D}$， $d_{\mathrm{conc}}$)和($\mathcal{D}$， $\square$)的不可分性。在这里，通过考虑 $\mathcal{D}$的一个适当子集，可以使 $d_{\mathrm{conc}}$和 $\square$保持可分。这个子集由 $X$ 中 $\mathcal{D}$ 的所有元素组成，这些元素具有一个函数族 $F_X$ ，该函数族相对于适当的函数族$\mathcal{L} \subset \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$是恰当地“闭”的，因此我们将其记为 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$。可以证明，($\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$， $d_{\mathrm{conc}}$)和($\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$， $\square$)是可分的。此外，利用与($\mathcal{X}$， $d_{\mathrm{conc}}$)的紧化相同的技术，可以构造($\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$， $d_{\mathrm{conc}}$)的自然紧化，并证明其是可度量化的。

致谢。 作者谨向 Takashi Shioya 教授致以谢意，感谢他提供的诸多宝贵建议和指导。

## 2. Metric Measure Space and Coupling

我们用 $\mathrm{pr}_n$ 表示到第 $n$个坐标的投影，其中 $n = 1$， 2， .....。此外，我们还设

$$\mathrm{pr}_{n_1,n_2,\ldots,n_m} \coloneqq (\mathrm{pr}_{n_1}, \mathrm{pr}_{n_2} \ldots, \mathrm{pr}_{n_m})$$
$$\mathrm{pr}_{\leq m} \coloneqq \mathrm{pr}_{1,2,\ldots,m}$$

对于 $m = 1,2, \ldots$ 以及 $n_1, n_2, \ldots, n_m = 1,2, \ldots$ 。

设 $X$ 是一个拓扑空间。我们用 $\mathcal{F}(X)$ 表示$X$ 的闭子集的集合，用 $\mathcal{K}(X)$ 表示 $X$ 的紧子集的集合。

**定义 2.1**（推前）。设 $(X,\mu)$ 是一个测度空间，$Y$ 是一个可测空间。对于可测映射 $f\colon X\to Y$，定义

$$f_*\mu(A)\coloneqq\mu(f^{-1}(A))\text{ for any measurable subset }A\subset Y.$$

我们称 $f_*\mu$ $f$ 对 $\mu$ 的推前。

**定义 2.2**（支集）。设 $X$ 是一个拓扑空间，$\mu$ 是 $X$ 上的一个测度。我们将支集 $\operatorname{supp}\mu$ 定义为 $\mu$：

$$\operatorname{supp}\mu\coloneqq\big\{x\in X\mid\mu(U)>0\text{ for all open neighbourhood }U\text{ of }x\big\}.$$

**引理 2.3**（[5, 命题 2.3]）。设 $X$ 和 $Y$ 是两个拓扑空间，并设 $f\colon X\to Y$ 是一个连续映射。若 $X$ 上的博雷尔测度 $\mu$ 满足

$$\mu(X\setminus\operatorname{supp}\mu)=0,$$

那么我们有

$$\operatorname{supp}f_*\mu=\overline{f(\operatorname{supp}\mu)}.$$

**定义 2.4**（度量测度空间，mm-空间）。若三元组 $(X,d,\mu)$ 满足：对 $(X,d)$ 而言，它是一个完备可分度量空间；$\mu$ 是一个博雷尔概率测度；且 $\operatorname{supp}\mu=X$，则称该三元组为度量测度空间，或简称为*mm*-空间。

注记2.5。我们有时称 $X$ 为一个 mm-空间，其关联的距离函数记为 $d_X$，测度记为 $\mu_X$。

**定义 2.6**（普罗霍罗夫距离）。设 $\mu$ 和 $\nu$ 是可分距离空间 $X$ 上的两个博雷尔概率测度。$\mu$ 和 $\nu$ 之间的普罗霍罗夫距离定义为

$$d_{\mathrm{P}}(\mu,\nu)\coloneqq\inf\big\{\varepsilon\geq0\mid\mu\big(U_X(A;\varepsilon)\big)\geq\nu(A)-\varepsilon\text{ for any Borel subset }A\subset X\big\}.$$

**定义 2.7**（Ky Fan度量）。设 $(X,\mu)$ 是一个测度空间，$Y$ 是一个度量空间。我们在从 $X$ 到 $Y$ 的 $\mu$-可测映射集合上定义*Ky Fan*度量 $d^{\mu}_{\mathrm{KF}}$ 如下：

$$d^{\mu}_{\mathrm{KF}}(f,g)\coloneqq\inf\{\varepsilon\geq0\mid\mu(\{x\in X\mid d_Y(f(x),g(x))>\varepsilon\})\leq\varepsilon\}$$

对任意两个 $\mu$-可测映射 $f,g\colon X\to Y$。

**引理 2.8** ([8, 引理 1。26])。设 $(X,\mu)$ 是一个博雷尔概率测度空间，$Y$ 是一个度量空间，且 $f$、$g\colon X\to Y$ 是映射。那么，我们有

$$d_{\mathrm{P}}(f_*\mu,g_*\mu)\leq d^{\mu}_{\mathrm{KF}}(f,g).$$

**定义 2.9**（耦合）。设 $(X,\mu)$，$(Y,\nu)$ 是博雷尔概率测度空间。若博雷尔概率测度 $\pi$ 定义在 $X\times Y$ 上，且 $(\mathrm{pr}_1)_*\pi=\mu$ 和 $(\mathrm{pr}_2)_*\pi=\nu$，则称其为 $\mu$ 和 $\nu$ 的一个耦合。我们用 $\Pi(\mu,\nu)$ 表示 $\mu$ 和 $\nu$ 的耦合集合。

**引理 2.10** (普罗霍罗夫定理)。设 $X$ 为可分度量空间，$M$ 为 $X$ 上博雷尔概率测度集合的子集。那么，以下 *(1)* 和 *(2)* 等价：

(1) 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $X$ 中的紧集 $K$，使得对于任意 $\mu\in M$，$<\varepsilon($ $X\setminus K)$。(2) $M$ 关于 $d_{\mathrm{P}}$ 相对紧。

**引理 2.11.** 设 $(X,\mu)$ 和 $(Y,\nu)$ 是博雷尔概率测度空间。那么，$\Pi(\mu,\nu)$ 是 $d_{\mathrm{P}}$-紧的。

**定义 2.12**（弱豪斯多夫收敛）。设 $X$ 是一个度量空间，$S_n$、$S$ 是 $X$、$n = 1, 2, \ldots$ 上的闭集。若满足以下条件（1）和（2），我们称 $S_n$ 在 $n \to \infty$ 时以弱豪斯多夫 意义收敛到 $S$。

(1) 对任意 $x \in S$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x, S_n) = 0.$$

(2) 对任意 $x \in X \setminus S$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} d_X(x, S_n) > 0.$$

**定理 2.13** ([1, 定理 5.2.12])。在完备可分度量空间上的任意闭集序列，都存在一个在弱豪斯多夫意义下收敛的子序列。

**命题 2.14** ([5, 引理 3.9])。设 $X$ 是一个度量空间，$\mu$ 是 $X$ 上的一个博雷尔概率测度，且 $S_n$、$S$ 是 $X$、$n = 1, 2, \ldots\ldots$ 上的闭集。如果 $S_n$ 在弱豪斯多夫意义下收敛到 $S$，那么我们有

$$\mu(S) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(S_n).$$

## 3. Geometric Data Set

### 3.1. 特征空间与几何数据集。

**定义 3.1**（温和）。设 $X$ 为非空集合，$F$ 为幂集 $\mathbb{R}^X$的非空子集。我们定义函数 $d_F$: $X \times X \to [0, +\infty]$，如下所示:

$$d_F(x, y) \coloneqq \sup_{f\in F} |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in X.$$

$d_F$ 是对称的，且满足三角不等式。

若对于任意 $x$，$y \in X$，$F$满足 $d_F(x, y) < +\infty$，则称其为温和。

**定义 3.2**（特征空间）。若一对 $(X, F)$ 满足以下条件，则称其为特征空间: $X$ 是非空集合，$F \subset \mathbb{R}^X$ 是温和的，且 $d_F$ 是距离函数。对于特征空间 $(X, F)$，$F$中的任一元素称为特征。

注 3.3。我们有时会说 $X$ 是一个特征空间，其关联的特征集记为 $F_X$，距离函数 $d_{F_X}$ 记为 $d_X$。

**命题 3.4.** 设 $X$ 是一个度量空间。那么我们有 $d_{\mathrm{Lip}_1(X)} = d_X$.

证明. 任取 $x, y \in X$. 对任意 $f \in \mathrm{Lip}_1(X)$，可得

$$|f(x) - f(y)| \leq d_X(x, y),$$

这就证明了 $d_{\mathrm{Lip}_1(X)}(x, y) \leq d_X(x, y)$。我们将 $g \in \mathrm{Lip}_1(X)$ 定义为

$$g(z) \coloneqq d_X(x, z),\ z \in X.$$

由于

$$d_X(x, y) = |g(x) - g(y)| \leq d_{\mathrm{Lip}_1(X)}(x, y),$$

我们有 $d_{\mathrm{Lip}_1(X)}(x, y) = d_X(x, y)$。$x$和 $y$的任意性完成了证明。□

备注 3.5. 对于特征空间 $(X, F)$，我们有 $F \subset \mathrm{Lip}_1(X, d_F)$。

设 $(X, F)$ 为特征空间，$p \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$，$Y$ 为非空集合，且 $\varphi$: $Y \to X$ 为映射。记 $p \circ F \coloneqq \{p \circ f \mid f \in F\}$ 和 $F \circ \varphi \coloneqq \{f \circ \varphi \mid f \in F\}$。

定义 3.6（乘积特征空间）。 $(X, F)$ 与 $(Y, G)$ 的乘积特征空间 定义为 $(X \times Y, F \otimes G)$, 其中

$$F \otimes G \coloneqq F \circ \mathrm{pr}_1 \cup G \circ \mathrm{pr}_2 \,.$$

注记 3.7。 $d_{F\otimes G}$ 与 $d_\infty$ 在 $X \times Y$ 上重合，其中

$$d_\infty\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \coloneqq \max\{d_F(x_1, x_2), d_G(y_1, y_2)\}$$

对于所有 $x_1$， $x_2 \in X$ 以及 $y_1$， $y_2 \in Y$。

定义 3.8（几何数据集）。 我们称三元组（$X$， $F$， $\mu$）为几何数据集，如果（$X$， $d_F$, $\mu$）是一个 mm-空间。

注记 3.9。 我们有时称 $X$ 为几何数据集，其关联的特征集记为 $F_X$， $X$ 上的测度记为 $\mu_X$，距离函数 $d_{F_X}$ 记为 $d_X$。

定义 3.10（单点几何数据集）。 对于单点集 $*$，其元素也记为 $*$。对于子集 $A \subset \mathbb{R}$, 我们定义一个单点几何数据集为

$$*_A \coloneqq (*, \{* \mapsto a \mid a \in A\}, \delta_*),$$

其中 $\delta_*$ 是位于 $*$处的狄拉克测度。

定义 3.11（乘积几何数据集）。 设 $X, Y$是两个几何数据集。 $X$ 和 $Y$的乘积几何数据集 $X \times Y$定义为

$$F_{X\times Y} \coloneqq F_X \otimes F_Y, \quad \mu_{X\times Y} \coloneqq \mu_X \otimes \mu_Y.$$

命题3.12。设 $X$ 是一个 *mm*-空间， $Y$是一个度量空间。在$\mathrm{Lip}_1(X, Y)$上，逐点收敛与 $d^X_{\mathrm{KF}}$-收敛等价。特别地， $d^X_{\mathrm{KF}}$ 不仅是测度收敛的度量化，也是逐点收敛的度量化。

证明。 首先，我们证明：若 $\mathrm{Lip}_1(X, Y)$ 中的一个序列逐点收敛，则它$d^X_{\mathrm{KF}}$-收敛。设 $f_n, f \in \mathrm{Lip}_1(X, Y)$, $n = 1, 2, \ldots$，并假设 $f_n$在 $n \to \infty$时逐点收敛于 $f$。任取 $\varepsilon > 0$。存在一个紧子集 $K \subset X$，使得 $\mu_X(K) > 1 - \varepsilon$。由 $K$的紧致性，存在有限多个点

$$x_1, x_2, \ldots, x_M \in K \text{ such that } K \subset \bigcup_{m=1}^{M} U_X(x_m; \varepsilon).$$

由于 $f_n$ 逐点收敛于 $f$，当 $n \to \infty$ 时，且 $M$ 是有限的，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$d_Y(f_n(x_m), f(x_m)) < \varepsilon \quad \text{for any } m = 1, 2, \ldots, M \text{ and } n \geq N.$$

对于任意 $x \in K$，存在 $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$，使得 $d_X(x, x_m) < \varepsilon$。由此可得$d_Y(f_n(x)\ f(x)) < 3\varepsilon$，对于 $n \geq N$成立。由于 $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$，且 $x \in K$是任意的，因此对于任意 $n \geq N$，都有 $d^X_{\mathrm{KF}}(f_n, f) \leq 3\varepsilon$。

接下来，我们证明：如果 $\mathrm{Lip}_1(X, Y)$ 中的函数序列 $d^X_{\mathrm{KF}}$-收敛，那么它逐点收敛。设 $f_n, f \in \mathrm{Lip}_1(X, Y)$, $n = 1, 2, \ldots$，使得 $f_n$ 不逐点收敛到 $f$（当 $n \to \infty$ 时）。存在 $x \in X$、 $\delta > 0$ 以及一个子序列$\{f_{\iota(n)}\}_n$ ，使得

$$d_Y(f_{\iota(n)}(x), f(x)) > \delta \text{ for } n = 1, 2, \ldots.$$

取 $r > 0$ 足够小，使得 $\mu(U_X(x, \delta - r)) > r$。对于任意 $\varepsilon \in (0, r)$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mu_X(\{x \in X \mid d_Y(f_{\iota(n)}(x), f(x)) > \varepsilon\}) &\geq \mu_X(U_X(x; \delta - \varepsilon)) \\ &\geq r > \varepsilon.\end{aligned}$$

由于它表明 $d_{\mathrm{KF}}^X(f_{\iota(n)}, f) \geq r$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$，我们证明 $f_n$ 不会-收敛到 $f$，当 $n \to \infty$时。□

注 3.13。此后，对于 $F \subset \mathrm{Lip}_1(X)$，我们将关于逐点收敛或依测度收敛拓扑的 $F$ 闭包记作 $\overline{F}$。

定义 3.14（几何数据集的同构）。若存在一个博雷尔可测映射 $\varphi\colon X \to Y$，使得 $\varphi_* \mu_X = \mu_Y$且 $F_Y \circ \varphi = F_X$，则称两个几何数据集 $X$和 $Y$ 同构，记作 $X \simeq Y$。这样的 $\varphi$称为同构。用 $\mathcal{D}$ 表示几何数据集的同构类集合。

定义 3.15（特征序、支配）。若存在一个博雷尔可测映射 $f\colon X \to Y$，使得 $f_* \mu_X = \mu_Y$且 $F_Y \circ f \subset F_X$，则称几何数据集 $X$支配 几何数据集 $Y$，记作 $Y \preceq X$。这样的 $f$称为支配。关系 $\preceq$称为特征序关系。

命题 3.16（[4,命题 3.5]）。关系 $\preceq$ 是 $\mathcal{D}$上的偏序。

注 3.17。根据命题 3.4，任何 mm-空间 $X$ 都可以视为一个几何数据集（$X$, $\mathrm{Lip}_1(X)$ $\mu_X$）。我们定义

$$\begin{aligned}&D(X) \coloneqq (X, \mathrm{Lip}_1(X), \mu_X) \in \mathcal{D}, \text{ for } X \in \mathcal{X}, \\ &D(\mathcal{X}) \coloneqq \{D(X) \mid X \in \mathcal{X}\}, \\ &\mathcal{X}(X) \coloneqq (X, d_X, \mu_X) \in \mathcal{X}, \text{ for } X \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

命题 3.18。设 $X$ 和 $Y$ 为几何数据集。那么，支配 $p\colon X \to Y$ 是 *1*-利普希茨连续的。

证明。任取 $x$, $y \in X$ 以及任意 $\varepsilon > 0$。存在 $g \in F_Y$使得

$$d_Y(p(x), p(y)) < |g(p(x)) - g(p(y))| + \varepsilon.$$

由于 $g \circ p \in \overline{F_X}$，存在 $f \in F_X$使得

$$|g \circ p(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad |g \circ p(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned}d_Y(p(x), p(y)) &< |g \circ p(x) - g \circ p(y)| + \varepsilon \\ &< |f(x) - f(y)| + 3\varepsilon \leq d_X(x, y) + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon$的任意性可知，$d_Y(p(x), p(y)) \leq d_X(x, y)$。此外，由于 $x$ 和 $y$的任意性，我们证明了 $p \in \mathrm{Lip}_1(X, Y)$。□

注 3.19。在 [8, 定义 2.10], 中，我们称一个 mm-空间 $X$ 支配另一个 mm-空间 $Y$，如果存在 $f \in \mathrm{Lip}_1(X, Y)$ 使得 $f_* \mu_X = \mu_Y$。此时，$f$ 是从 $(X, \mathrm{Lip}_1(X), \mu_X)$ 到 $(Y, \mathrm{Lip}_1(Y), \mu_Y)$ 的支配映射。设 $g$ 是从几何数据集 $X'$ 到几何数据集 $Y'$ 的支配映射。根据命题 3.4, $g$ 是从 mm-空间 $(X', d_{X'}, \mu_{X'})$ 到 $(Y', d_{Y'}, \mu_{Y'})$ 的支配映射。

然而，一般来说，度量测度空间之间的支配不一定是几何数据集之间的支配。例如，$\mathrm{id}_*$ 是从度量测度空间 $(*, d_*, \delta_*)$ 到 $(*, d_*, \delta_*)$ 的支配，但不是从 $*_{\{0\}}$ 到 $*_{\{1\}}$ 的支配。

3.2. **可观测直径**。

定义 3.20（可观测直径）。设 $\mu$ 是一个博雷尔概率测度，$\kappa \in [0,1]$ 是一个实数。$\mu$ 的 $(1-\kappa)$-部分直径定义为

$$\mathrm{PartDiam}(\mu; 1-\kappa) \coloneqq \inf\{\operatorname{diam} I \mid I \subset \mathbb{R}\colon \text{Borel measurable},\ \mu(I) \geq 1-\kappa\}.$$

对于几何数据集 $X$，$\kappa$-可观测直径 $X$ 定义为

$$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) \coloneqq \sup\{\mathrm{PartDiam}(f_*\mu_X; 1-\kappa) \mid f \in F\}$$

注 3.21. mm-空间 $X$ 的可观测直径定义为

$$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) \coloneqq \sup\{\mathrm{PartDiam}(f_*\mu_X; 1-\kappa) \mid f \in \mathrm{Lip}_1(X)\}$$

根据 [8, 定义 2.13]。我们看到，$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) = \mathrm{ObsDiam}(D(X); -\kappa)$。

定义 3.22（L´evy 族）. 几何数据集的序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为*L´evy* 族，如果

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

对任意实数 $\kappa \in (0,1)$。

引理 3.23 ([6, 引理 3.1(1)])。设 $\mu$ 和 $\nu$ 是 $\mathbb{R}$上的博雷尔概率测度。对于任意实数 $\kappa \in (0,\ 1)$ 以及 $\delta > d_{\mathrm{P}}(\mu,\ \nu)$，有

$$\mathrm{PartDiam}(\mu; 1-(\kappa+\delta)) \leq \mathrm{PartDiam}(\nu; 1-\kappa) + 2\delta.$$

引理 3.24 ([6, 引理 3.1(2)])。设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}$上的博雷尔概率测度。$\mu$ 的$\alpha$-部分直径 $\mathrm{PartDiam}(\mu;\alpha)$ 关于实数 $\alpha \in (0,\ 1)$左连续。

命题 3.25。设 $X$ 是一个几何数据集。$\mu$的 $\kappa$-可观测直径关于实数 $\kappa \in (0,\ 1)$右连续。

证明。由引理 3.24，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) &= \sup_{f\in F_X} \mathrm{PartDiam}(X; 1-\kappa) \\
&= \sup_{f\in F_X} \lim_{n\to\infty} \mathrm{PartDiam}(X; (1-\kappa)-1/n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sup_{f\in F_X} \mathrm{PartDiam}(X; 1-(\kappa+1/n)) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X; -(\kappa+1/n)).
\end{aligned}$$

由 $\mathrm{ObsDiam}(\mu; -\kappa)$ 关于 $\kappa$单调非增这一性质，$\mu$ 的 $\kappa$-可观测直径 $\mathrm{ObsDiam}(\mu; -\kappa)$ 关于$\kappa$右连续。□

3.3. **商几何数据集**。

引理 3.26。设 $X$ 是一个完备可分度量空间，$X$上的一个伪度量为 $d'$。若对任意 $x,\ y \in X$，都有 $d'(x,y) \leq d_X(x,y)$，则存在一个完备可分度量空间 $Y$和一个 *1*-利普希茨连续映射 $f\colon X \to Y$，使得下列(1)、(2)和(3)成立。

(1) 像 $f(X)$ 在 $Y$上是紧的。(2) 对于任意 $x, y \in X$，都有 $d_Y(f(x)\ f(y)) = d'(x,y)$。

(3) 设 $Z$ 是一个度量空间，且 $g\colon X \to Z$ 是一个 *1*-利普希茨连续映射。若对于任意 $x, y \in X$，都有$d_Z(g(x)\ g(y)) \le d'(x, y)$，则存在唯一的 *1*-利普希茨连续映射 $\tilde{g}\colon Y \to Z$，使得 $\tilde{g} \circ f = g$。特别地，$Y$在等距变换意义下唯一。

证明。定义 $Y$和 $f$。我们在 $X$ 上定义等价关系 $\sim$：当且仅当 $d'(x,\ y) = 0$时，$x \sim y$。令 $p\colon X \to X/\sim$为自然投影，并且

$$\tilde{d}(p(x), p(y)) \coloneqq d'(x, y) \text{ for all } x, y \in X.$$

˜那么，$(X/\sim,\ d)$是一个定义良好的度量空间，并且 $p$ 是 1-利普希茨连续的。令$Y$为 $(X/\sim, d)$的完备化，$q\colon X/\sim \to Y$为自然保距映射，且 $f \coloneqq q \circ p$。我们看到 $f$ 是 1-利普希茨连续的。

由于 $f(X) = q \circ p(X) = q(X/\sim)$，(1)显然成立。特别地，$Y$是可分的。由于 $q$ 是保距映射，(2)也显而易见。我们证明 (3)。设 Z 是一个度量空间，且 $g\colon X \to Z$ 是一个 1-利普希茨连续映射。我们假设

$$d_Z(g(x), g(y)) \le d'(x, y) \text{ for any } x, y \in X.$$

我们定义

$$g'\colon X/\sim \to Z \text{ by } g'(p(x)) \coloneqq g(x) \text{ for } x \in X.$$

由于

$$d_Z(g(x), g(y)) \le d'(x, y) = 0 \text{ for any } x, y \in X \text{ with } x \sim y,$$

$g'$ 的良定义性成立。根据 $g'$的定义，我们有$g'$的连续性。由完备化 $Y$的泛性质，存在唯一的连续映射 $\tilde{g}\colon Y \to Z$，满足 $\tilde{g} \circ q = g'$。由于 $g' \circ p = g$，我们有 $\tilde{g} \circ f = g$。下面证明 $\tilde{g}$的 1-Lipschitz 连续性。对于所有的 $x,\ y \in X$，我们有

$$d_Z(\tilde{g}(f(x)), \tilde{g}(f(y))) = d_Z(g(x), g(y)) \le d'(x, y) = d_Y(f(x), f(y)).$$

由 (1)，这就完成了 $\tilde{g}$的 1-Lipschitz 连续性的证明。最后，我们证明 $\tilde{g}$的唯一性。任取映射 $h,\ k\colon Y \to Z$，使得 $h \circ f = k \circ f$，即 $h \circ q \circ p = k \circ q \circ p$。由 $p$的投射性，我们有 $h \circ q = k \circ q$。根据 $Y$的泛性质，我们得到 $k = h$。□

定义 3.27（商几何数据集，商支配）。设 $X$ 是一个几何数据集，$G \subset F_X$ 是一个子族。若几何数据集 $Y$是 $\overline{X}$ 关于 $G$ 的商几何数据集，且映射 $f\colon X \to Y$是商支配，则称其满足以下条件 (1) 和 (2)：

(1) 等式 $F_Y \circ f = G$ 成立。(2) 对任意几何数据集 $Z$及任意支配 $g\colon X \to Z$，若 $F_Z \circ g \subset G$，则存在唯一的支配 $\tilde{g}\colon Y \to Z$，使得 $\tilde{g} \circ f = g$。

根据定义，若 $X$ 关于 $G$的商几何数据集存在，则它在同构意义下唯一，因此记为 $X/G$。

此外，对于几何数据集 $X$和 $G \subset Lip_1(X)$，即使 $G \not\subset F_X$，我们也将 $X/G$定义为（$X$，$Lip_1(X)$ $\mu_X$）$/G$。在这种情况下，我们仍称其为商几何数据集；但是，商支配未定义。

命题 3.28。设 $X$ 为一个几何数据集。对于任意子集 $G \subset F_X$，存在一个由 $G$ 支配 $X$ 所得的商几何数据集 $Y$，以及一个商支配 $f\colon X \to Y$。

证明。由引理 3.26，存在一个完备可分度量空间 $Y$ 和一个 1-利普希茨连续映射 $f\colon X \to Y$，使得以下 (a)、(b) 和 (c) 成立。

(a) $f(X)$ 在 $Y$ 上是紧的。(b) 对任意 $x,\ y \in X$，有 $d_Y(f(x),\ f(y)) = d_G(x,\ y)$。(c) 设 $Z'$ 是一个度量空间，且 $g\colon X \to Z'$ 是一个 1-利普希茨连续映射。若对任意 $x,\ y \in X$，都有 $d_{Z'}(g(x),\ g(y)) \leq d_G(x,\ y)$，则存在唯一的 1-利普希茨连续映射 $\tilde{g}\colon Y \to Z'$，使得 $\tilde{g} \circ f = g$。

令

$$F_Y \coloneqq \{h \in \mathrm{Lip}_1(Y) \mid h \circ f \in G\} \text{ and } \mu_Y \coloneqq f_*\mu_X.$$

$Z' = \mathbb{R}$ 的条件 (c) 蕴含 (1)。特别地，我们看到 $F_Y \circ f \subset F_X$。由引理 2.3 和 (a)，有 $\operatorname{supp}\mu_Y = Y$。下面证明 $d_Y = d_{F_Y}$。任取 $x,\ y \in X$。我们有

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) = d_G(x, y) &= \sup_{g \in G} |g(x) - g(y)| \\ &= \sup_{h \in F_Y} |h \circ f(x) - h \circ f(y)| = d_{F_Y}(f(x), f(y)). \end{aligned}$$

由 (a)，我们得到 $d_Y = d_{F_Y}$。特别地，$Y$ 是一个几何数据集，而 $f$ 是一个支配。

我们证明 (2)。设 $Z$ 是一个几何数据集，且 $g\colon X \to Z$ 是一个支配，满足 $F_Z \circ g \subset G$。对 $Z' = Z$应用 (c)，存在唯一的 1-利普希茨连续映射 $\tilde{g}\colon Y \to Z$，使得 $\tilde{g} \circ f = g$。由于

$$F_Z \circ \tilde{g} \circ f = F_Z \circ g \subset \overline{G} = \overline{F_Y \circ f} = \overline{F_Y} \circ f$$

并且由 $f$的泛性质可知，$F_Z \circ \tilde{g} \subset \overline{F_Y}$。由于

$$\mu_Z = g_*\mu_X = \tilde{g}_* f_* \mu_X = \tilde{g}_*\mu_Y,$$

我们发现 $\tilde{g}$ 是一个支配。由命题 3.18 和 (c)，$\tilde{g}$ 的唯一性显而易见。□

## 4. Observable Distance

### 4.1. **可观测距离的定义与刻画**。

定义 4.1（参数）。我们令 $I \coloneqq [0,1]$，并将 $I$上的一维勒贝格测度记为 $\lambda$。设 $(X, \mu)$ 是一个博雷尔概率测度空间。若 $\varphi_*\lambda = \mu$，则称博雷尔可测映射 $\varphi\colon I \to X$ 为 $\mu$ 的参数。

定义 4.2（可观测距离）。设 $X$ 和 $Y$ 是两个几何数据集。我们将 $X$ 和 $Y$之间的可观测距离 $d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$定义为$\left(d_{\mathrm{KF}}^{\lambda}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \varphi, F_Y \circ \psi)$的下确界，其中 $\varphi$ 和 $\psi$ 分别遍历 $\mu_X$ 和 $\mu_Y$的所有参数。

注 4.3。在 [3], 中，两个 mm-空间 $X$和 $Y$之间的可观测距离 $d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$定义为 $\left(d_{\mathrm{KF}}^{\lambda}\right)_{\mathrm{H}}(\mathrm{Lip}_1(X) \circ \varphi, \mathrm{Lip}_1(Y) \circ \psi)$ 的下确界，其中 $\varphi$ 和 $\psi$ 分别遍历 $\mu_X$ 和 $\mu_Y$ 的所有参数。我们看到，对于任意 $X, Y \in \mathcal{X}$，有 $d_{\mathrm{conc}}(X, Y) = d_{\mathrm{conc}}(D(X),\ D(Y))$。

定义 4.4（集中，集中拓扑）。设 $X_n$、$n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$，以及 $X$ 均为几何数据集。若序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 集中到 $X$，则称

$$\lim_{n \to \infty} d_{\mathrm{conc}}(X_n, X) = 0.$$

若 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 集中到 X，我们记作 $X_n \xrightarrow{\text{conc}} X$。我们称由 $d_{\text{conc}}$ 在 $\mathcal{D}$ 上引入的拓扑为集中拓扑。

注记 4.5. 我们可以考虑由伪度量定义的另一种拓扑，其形式为 $d_{\text{conc}}(\mathcal{X}(X)\ \mathcal{X}(Y))$，其中任意 $X, Y \in \mathcal{D}$ 均满足该定义。该拓扑并不比集中拓扑更细，因为

$$d_{\text{conc}}(\mathcal{X}(*_{\{0\}}), \mathcal{X}(*_{\{1\}})) = d_{\text{conc}}(*,*) = 0 < 1 = d_{\text{conc}}(*_{\{0\}}, *_{\{1\}}),$$

其中 $d_* \coloneqq 0$，而 $\mu_*$ 是狄拉克测度。此外，该拓扑与集中拓扑并不一致。事实上，存在以下例子。对于 $N = 1, 2, \ldots$，我们将 N 点离散几何数据集定义为

$$X_N \coloneqq \left(\{1, \ldots, N\}, \{d_m^N \mid m = 1, 2, \ldots, N\}, \mu_N\right),$$

其中 $\mu_N$ 是归一化计数测度，并且

$$d_m^N(n) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } n = m, \\ 1 & \text{if } n \neq m, 1 \leq n \leq N. \end{cases}$$

让我们计算 $X_N$ 与 $*_{\{1\}}$之间的可观测距离。我们通过以下方式设置参数 $\varphi_N \colon I \to X_n$ 和 $\psi \colon I \to *$

$$\varphi_N(t) \coloneqq \frac{\lfloor N \cdot t \rfloor}{N} + 1, \quad \psi(t) \coloneqq *$$

对于 $N = 1, 2, \ldots$，其中 $\lfloor x \rfloor$ 是不大于 $x$ 的最大整数。由于

$$\begin{aligned} d_{\text{KF}}^{\lambda}(d_m^N \circ \varphi_N, 1 \circ \psi) &\leq \lambda\left(\{t \in I \mid d_m^N \circ \varphi_N(t) \neq 1 \circ \psi(t)\}\right) \\ &\leq \lambda\left(\left(\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}\right]\right) = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

对于 $m = 1, 2, \ldots$，我们有

$$d_{\text{conc}}(X_N, *_{\{1\}}) \leq \left(d_{\text{KF}}^{\lambda}\right)_{\text{H}}(F_{X_N} \circ \varphi_N, \{1\} \circ \psi) \leq \frac{1}{N} \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

然而，$\{\mathcal{X}(X_N)\}_{N=1}^{\infty}$不会集中到 $\mathcal{X}(*_{\{1\}})$。对于 $N = 1, 2, \ldots$，我们将 $h_N \in \text{Lip}_1(X_{2N})$ 定义为

$$h_N(n) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } 1 \leq n \leq N, \\ 1 & \text{if } N < n \leq 2N. \end{cases}$$

由于对于任意 $x \in \mathbb{R}$，$d^{X_{2N}}{}_{\text{KF}}(h_N, x) \geq 1/2$，我们有

$$d_{\text{conc}}(\mathcal{X}(X_{2N}), \mathcal{X}(*_{\{1\}})) \geq \frac{1}{2}.$$

注 4.6. 度量空间 $(\mathcal{D}, d_{\text{conc}})$ 不可分。事实上，对于任意子集$\eta \subset 2^{\mathbb{N}}$，$*_\eta$ 唯一存在的参数可表示为 $\varphi(t) \coloneqq *$。对于任意不同于 $\eta$ 的 $\xi \subset 2^{\mathbb{N}}$，我们有

$$\begin{aligned} d_{\text{conc}}(*_\eta, *_\xi) &= \left(d_{\text{KF}}^{\lambda}\right)_{\text{H}}(\{* \mapsto n \mid n \in \eta\} \circ \varphi, \{* \mapsto n \mid n \in \xi\} \circ \varphi) \\ &= \max\left\{(d_{\mathbb{R}})_{\text{H}}(\eta, \xi), 1\right\} = 1. \end{aligned}$$

由 $\mathbb{N}$ 的所有子集构成的集合 $2^{\mathbb{N}}$ 不可数，这意味着 $(\mathcal{D},\ d_{\text{conc}})$ 不是可分的。

众所周知，mm-空间之间的可观测距离具有一些良好的性质 [5]。下面我们来证明，几何数据集之间的可观测距离也具有相同的性质。我们将使用几个引理。

引理 4.7（[5, 引理 4.2]）。对于 *mm*-空间 $X, Y$，有

$$\Pi(\mu_X, \mu_Y) = \{(\varphi, \psi)_* \lambda \mid \varphi \text{ is parameter of } \mu_X, \psi \text{ is parameter of } \mu_Y\}$$

引理 4.8（[5, 引理 5.3]）。对于 *mm*-空间 $X, Y$，参数 $\varphi$ $X$的参数、 $\psi$ $Y$的参数，以及 *1-Lipschitz* 函数 $f \in \mathrm{Lip}_1(X)$ $g \in \mathrm{Lip}_1(Y)$，有

$$d_{\mathrm{KF}}^{(\varphi,\psi)_*\lambda}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) = d_{\mathrm{KF}}^{\lambda}(f \circ \varphi, g \circ \psi).$$

由引理 4.8 可知，以下结论显然成立。

推论 4.9（[5, 引理 5.4]）。对于 *mm*-空间 $X, Y$以及参数 $\varphi$ $X$的参数、 $\psi$ $Y$的参数，有

$$\left(d_{\mathrm{KF}}^{(\varphi,\psi)_*\lambda}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2) = \left(d_{\mathrm{KF}}^{\lambda}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \varphi, F_Y \circ \psi).$$

引理 4.10（[5, 引理 5.6]）。设 $X, Y$为度量空间， $\mu, \nu$为博雷尔概率测度， $f, g \in \mathrm{Lip}_1(X, Y)$ 为 *1-Lipschitz* 函数。则有

$$|d_{\mathrm{KF}}^{\mu}(f, g) - d_{\mathrm{KF}}^{\nu}(f, g)| \leq 2d_{\mathrm{P}}(\mu, \nu).$$

定义 4.11。令

$$d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y) \coloneqq (d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)$$

对于 $\pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)$。

引理 4.12。对于几何数据集 $X$、 $Y$ 以及耦合 $\pi$、 $\rho \in \Pi(\mu_X$、 $\mu_Y)$，

$$|d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y) - d_{\mathrm{conc}}^{\rho}(X, Y)| \leq 2d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho),$$

其中我们在 $X \times Y$ 上赋予 $l^\infty$-乘积度量。

证明。 由 $\pi$， $\rho$ 的对称性，只需证明

$$d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y) - d_{\mathrm{conc}}^{\rho}(X, Y) \leq 2d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho).$$

任取 $\varepsilon > 0$ 和 $f \in F_X$。 存在 $g \in F_Y$ 使得

$$d_{\mathrm{KF}}^{\rho}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) < d_{\mathrm{conc}}^{\rho}(X, Y) + \varepsilon.$$

引理 4.10 意味着

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{KF}}^{\pi}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) &\leq d_{\mathrm{KF}}^{\rho}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) + 2d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) \\ &\leq d_{\mathrm{conc}}^{\rho}(X, Y) + 2d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 $f$ 的任意性可得 $F_X \circ \mathrm{pr}_1 \subset U_{d_{\mathrm{KF}}^{\pi}}(F_Y \circ \mathrm{pr}_2)$。由 $f$ 和 $g$ 的对称性，我们证明

$$d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y) \leq d_{\mathrm{conc}}^{\rho}(X, Y) + 2d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon.$$

$\varepsilon$ 的任意性意味着 $d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y) - d_{\mathrm{conc}}^{\rho}(X, Y) \leq 2d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho)$。 □

**定理 4.13.** 对于几何数据集 $X$、 $Y$，我们有

$$d_{\mathrm{conc}}(X, Y) = \min\{(d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2) \mid \pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)\}.$$

证明. 设 $\varphi$ 是 $X$ 的一个参数， $\psi$ 是 $Y$ 的一个参数。由引理 4.7，我们证明

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{conc}}(X,Y) &= \inf\{\big(d_{\mathrm{KF}}^{\lambda}\big)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\varphi, F_Y\circ\psi) \mid \varphi,\psi\} \\ &= \inf\{\Big(d_{\mathrm{KF}}^{(\varphi,\psi)_*\lambda}\Big)_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2) \mid \varphi,\psi\}. \end{aligned}$$

由引理 4.8，得

$$\inf\{(d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2) \mid \pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)\}.$$

引理 4.12 蕴含 $(d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2)$ 关于 $d_{\mathrm{P}}$ 在 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$ 中的连续性。由引理 2.11，存在 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$ 使得

$$(d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2) = d_{\mathrm{conc}}(X,Y).$$

□

4.2. **关于可观测距离的可观测直径的半连续性，以及特征序关系与可观测距离的对话**。以下命题显然给出了可观测直径关于可观测距离的半连续性。

命题 4.14。设 $X$、$Y$ 为几何数据集。对于任意实数 $\delta > d_{\mathrm{conc}}(X,Y)$ 和 $\kappa\in[0,1-\delta]$，有

$$\mathrm{ObsDiam}\big(X;\ -(\kappa+\delta)\big) \le \mathrm{ObsDiam}(Y;\ -\kappa) + 2\delta.$$

证明。 对于任意 $f\in F_X$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$ $g\in F_Y$ 使得

$$d_{\mathrm{KF}}^{\pi}(f\circ \mathrm{pr}_1, g\circ \mathrm{pr}_2) < \delta.$$

引理 2.8 表明

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{P}}(f_*\mu_X, g*\mu_Y) &= d_{\mathrm{P}}(f_*(\mathrm{pr}_1)_*\pi, g_*(\mathrm{pr}_2)_*\pi) \\ &\le d_{\mathrm{KF}}^{\pi}(f\circ \mathrm{pr}_1, g\circ \mathrm{pr}_2) < \delta. \end{aligned}$$

由此以及引理 3.23，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{PartDiam}\big(f_*\mu_X;\ -(\kappa+\delta)\big) &\le \mathrm{PartDiam}(g_*\mu_Y;\ -\kappa) + 2\delta \\ &\le \mathrm{ObsDiam}(Y;\ -\kappa) + 2\delta. \end{aligned}$$

$f$ 的任意性表明

$$\mathrm{ObsDiam}\big(X;\ -(\kappa+\delta)\big) \le \mathrm{ObsDiam}(Y;\ -\kappa) + 2\delta.$$

□

为了证明特征序关系在集中拓扑下保持不变，我们需要一些引理。

引理 4.15。设 $X$ 是一个 *mm*-空间， $x_0\in X$，且 $c\ge 0$ 是一个实数。则集合

$$\mathrm{Bdd}(X,x_0,c) \coloneqq \{f\in \mathrm{Lip}_1(X) \mid |f(x_0)|\le c\}$$

关于逐点拓扑和依测度收敛拓扑是紧的。

证明。 $\mathrm{Lip}_1(X)$ 的等度连续性显然。对于任意 $x \in X$ 和 $f \in \mathrm{Bdd}(X, x_0, c)$，我们有

$$|f(x)| \leq d_X(x, x_0) + c.$$

这意味着 $\mathrm{Bdd}(X,\ x_0,\ c)$ 逐点有界。根据 Arzel`a–Ascoli 定理，$\mathrm{Bdd}(X,\ x_0,\ c)$ 关于逐点拓扑是紧的。根据引理 3.12，我们知道它关于依测度收敛拓扑也是紧的。 □

引理 4.16。对于几何数据集 $X$、$Y$和 $\pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)$，存在一个映射$u\colon F_X \to F_Y$，使得

$$d^{\pi}_{\mathrm{KF}}(f \circ \mathrm{pr}_1, u(f) \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$$

对于任意 $f \in F_X$。

证明。 取任意 $f \in F_X$，并令我们找出满足下式的 $g \in F_Y$

$$d^{\pi}_{\mathrm{KF}}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y).$$

在 $d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X,\ Y) = 1$ 的情况下，显然

$$d^{\pi}_{\mathrm{KF}}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq 1 = d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y)$$

对于任意 $g \in F_Y \neq \emptyset$。我们假设 $d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X,\ Y) < 1$ 并令 $\varepsilon \coloneqq (1 - d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X,\ Y))/3$。存在一个序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F_X$，使得 $d^{X}_{\mathrm{KF}}(f_n,\ f) < \varepsilon/n$，因为 $f \in F_X$。根据 $d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X,\ Y)$ 的定义，存在 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F_Y$，使得

$$d^{\pi}_{\mathrm{KF}}(f_n \circ \mathrm{pr}_1, g_n \circ \mathrm{pr}_2) \leq d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

$d^{\pi}_{\mathrm{KF}}$ 的三角不等式表明

$$d^{\pi}_{\mathrm{KF}}(f \circ \mathrm{pr}_1, g_n \circ \mathrm{pr}_2) \leq d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) + \frac{2\varepsilon}{n}.$$

我们将闭集定义为

$$S_n \coloneqq \left\{ (x, y) \in X \times Y \;\middle|\; |f(x) - g_n(y)| \leq d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) + \frac{2\varepsilon}{n} \right\}.$$

于是，我们有 $\pi(S_n) \geq 1 - (d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) + 2\varepsilon/n) > 0$。特别地，$S_n$ 非空。根据定理 2.13，存在 $X \times Y$ 的一个闭子集 $S$ 以及一个子序列$\{S_{\iota_1(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，使得$S_{\iota_1(n)}$ 在弱豪斯多夫意义下收敛于 $S$。命题 2.14 表明 $\pi(S) \geq 1 - d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) > 0$。特别地，$S$ 非空。对于任意 $(x, y) \in S$，存在 $(x_n, y_n) \in S_{\iota_1(n)}$，$n = 1, 2, \ldots$，使得当 $n \to \infty$ 时，$(x_n, y_n)$ 收敛于 $(x, y)$。因此，我们有

$$\begin{aligned} \left|f(x) - g_{\iota_1(n)}(y)\right| &\leq d_X(x, x_n) + \left|f(x_n) - g_{\iota_1(n)}(y_n)\right| + d_Y(y_n, y) \\ &\leq d_X(x, x_n) + d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) + \frac{2\varepsilon}{\iota_1(n)} + d_Y(y_n, y) \\ &\to d^{\pi}_{\mathrm{conc}}(X, Y) \end{aligned}$$

如 $n \to \infty$。取一点 $(x_0,\ y_0) \in S \neq \emptyset$ 并置

$$L \coloneqq \sup\left\{ \left|f(x_0) - g_{\iota_1(n)}(y_0)\right| \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\} < +\infty.$$

由引理 4.15 和 $g_{\iota_1(n)}(y_0) \in \mathrm{Bdd}(Y,\ y_0,\ |f_(x_0)| + L)$，存在一个 $g \in F_Y$和一个子序列 $\left\{g_{\iota_1\circ\iota_2(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $g_{\iota_1\circ\iota_2(n)}$ 收敛到 $g$，当 $n \to \infty$ 时。对所有 $(x,\ y) \in S$,

$$\begin{aligned}|f(x) - g(y)| &\leq \lim_{n\to\infty} |f(x) - g_{\iota_1\circ\iota_2(n)}(y)| \\ &\leq d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y).\end{aligned}$$

由于 $\pi(S) \geq 1 - d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y)$，我们有

$$d_{\mathrm{KF}}^{\pi}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}^{\pi}(X, Y).$$

□

引理 4.17。设 $X, Y$ 为几何数据集，$Z$ 为特征空间，$Z$ 上的一个 *Borel* 概率测度为 $\nu$，且 $\varphi\colon Z \to X$, $\psi\colon Z \to Y$ 为映射。若 $\varphi, \psi$ 满足

$$F_X \circ \varphi \subset F_Z,\ F_Y \circ \psi \subset F_Z,\ \varphi_*\nu = \mu_X,\ \psi_*\nu = \mu_Y,$$

那么我们有

$$d_{\mathrm{conc}}(X, Y) \leq (d_{\mathrm{KF}}^{\nu})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \varphi, F_Y \circ \psi).$$

证明。令 $\pi \coloneqq (\varphi, \psi)_*\nu$。那么 $\pi$ 是 $\mu_X$ 和 $\mu_Y$ 之间的耦合。对于任意 $f \in F_X$, $g \in F_Y$ 和 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\begin{aligned}&\pi(\{(x, y) \in X \times Y \mid |f \circ \mathrm{pr}_1(x, y) - g \circ \mathrm{pr}_2(x, y)| \geq \varepsilon\}) \\ &= \nu\left((\varphi, \psi)^{-1}\left(\left\{(x, y) \in X \times Y \;\middle|\; |f \circ \mathrm{pr}_1(x, y) - g \circ \mathrm{pr}_2(x, y)| \geq \varepsilon\right\}\right)\right) \\ &= \nu\left(\left\{z \in Z \;\middle|\; |f \circ \varphi(z) - g \circ \psi(z)| \geq \varepsilon\right\}\right).\end{aligned}$$

$\varepsilon$ 的任意性意味着

$$d_{\mathrm{KF}}^{\pi}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{KF}}^{\nu}(f \circ \varphi, g \circ \psi).$$

由于 $f$，$g$ 是任意的,

$$d_{\mathrm{conc}}(X, Y) \leq (d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2) \leq (d_{\mathrm{KF}}^{\nu})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \varphi, F_Y \circ \psi).$$

□

引理 4.18。设 $X$、$X'$、$Y$ 是几何数据集。若 $X' \preceq X$，则存在一个几何数据集 $Y'$，使得

$$\#F_{Y'} \leq \#F_{X'},\ Y' \preceq Y,\ d_{\mathrm{conc}}(X', Y') \leq d_{\mathrm{conc}}(X, Y).$$

证明。取一个支配 $\varphi\colon X \to \underline{X'}$。由定理 4.13 和引理 4.16，存在 $\pi \in \Pi(\mu_X,\ \mu_Y)$ 和 $u\colon F_X \to F_Y$，使得

$$d_{\mathrm{KF}}^{\pi}(f \circ \mathrm{pr}_1, u(f) \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$$

对任意 $f \in \overline{F_X}$。我们取 $Y' \coloneqq Y/u(F_{X'} \circ \varphi)$ 以及商支配 $\psi\colon Y \to Y'$。由于 $F_{Y'} \circ \psi = u(F_{X'} \circ \varphi)$ 且根据引理 4.17，我们有

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{conc}}(X', Y') &\leq (d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_{X'} \circ \varphi \circ \mathrm{pr}_1, F_{Y'} \circ \psi \circ \mathrm{pr}_2) \\ &= (d_{\mathrm{KF}}^{\pi})_{\mathrm{H}}(F_{X'} \circ \varphi \circ \mathrm{pr}_1, u(F_{X'} \circ \varphi) \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(X, Y).\end{aligned}$$

□

**定理 4.19**。设 $X$、$Y$、$X_n$、$Y_n$ 为几何数据集，$n = 1$、2、.....。若对于 $n = 1$, $X_n \preceq Y_n$2、.....，并且当 $n \to \infty$ 时，$X_n$ 和 $Y_n$ 分别收敛于 $X$ 和 $Y$，则有 $X \preceq Y$。

证明。 根据定理 4.13，存在耦合

$$\pi_n \in \Pi(\mu_X, \mu_{X_n}) \text{ and } \rho_n \in \Pi(\mu_Y, \mu_{Y_n})$$

使得

$$(d_{\mathrm{KF}}^{\pi_n})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_{X_n} \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(X, X_n)$$

and

$$(d_{\mathrm{KF}}^{\rho_n})_{\mathrm{H}}(F_{Y_n} \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(Y_n, Y).$$

取一个支配关系 $\varphi_n\colon Y_n \to X_n$。由于 $\rho_n' \coloneqq (\varphi_n \times \mathrm{id}_Y)_*\rho_n$ 是 $\mu_{X_n}$与 $\mu_Y$之间的耦合，因此存在一个定义在 $X \times X' \times Y$上的博雷尔概率测度 $\eta_n'$，使得

$$(\mathrm{pr}_{1,2})_*\eta_n' = \pi_n,\ (\mathrm{pr}_{1,2})_*\eta_n' = \rho_n'.$$

由粘合引理。令 $\eta_n \coloneqq (\mathrm{pr}^{1,3})_*\eta_n'$，它是 $X$ 与$Y$之间的耦合。根据引理 2.11，存在一个子序列 $\{\eta_{\iota(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 和一个定义在 $Y$上的博雷尔概率测度 $\eta$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\eta_{\iota(n)} \to \eta$。对于任意 $f \in F_X$ 和 $n = 1, 2, \ldots\ldots$，存在 $f_n \in F_{X_{\iota(n)}}$，使得

$$\left(d_{\mathrm{KF}}^{\pi_{\iota(n)}}\right)_{\mathrm{H}}(f \circ \mathrm{pr}_1, f_n \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(X, X_n)$$

由引理 4.16。根据 $f_n \circ \varphi_{\iota(n)} \in F_Y$ 和引理 4.16，还存在 $g_n \in F_{Y_{\iota(n)}}$，使得

$$\left(d_{\mathrm{KF}}^{\rho_{\iota(n)}}\right)_{\mathrm{H}}(f_n \circ \varphi_{\iota(n)} \circ \mathrm{pr}_1, g_n \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_{\mathrm{conc}}(Y_n, Y).$$

引理 4.10 意味着

$$\begin{aligned}
&d_{\mathrm{KF}}^{\eta}(f \circ \mathrm{pr}_1, g_n \circ \mathrm{pr}_2) \\
&\leq d_{\mathrm{KF}}^{\eta_{\iota(n)}}(f \circ \mathrm{pr}_1, g_n \circ \mathrm{pr}_2) + 2d_{\mathrm{P}}(\eta_{\iota(n)}, \eta) \\
&\leq d_{\mathrm{KF}}^{\pi_{\iota(n)}}(f \circ \mathrm{pr}_1, f_n \circ \mathrm{pr}_2) + d_{\mathrm{KF}}^{\rho_{\iota(n)}'}(f_n \circ \mathrm{pr}_1, g_n \circ \mathrm{pr}_2) + 2d_{\mathrm{P}}(\eta_{\iota(n)}, \eta) \\
&\leq d_{\mathrm{conc}}(X, X_n) + d_{\mathrm{conc}}(Y_n, Y) + 2d_{\mathrm{P}}(\eta_{\iota(n)}, \eta) \to 0
\end{aligned}$$

由于 $n \to \infty$。因为 $(\mathrm{pr}_2)_*\eta = \mu_Y$，我们看到 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是关于 $d_{\mathrm{KF}}^Y$ 的柯西序列。由 $(\mathrm{Lip}_1(Y)\ d_{\mathrm{KF}}^Y)$ 的完备性，存在 $g \in F_Y$，使得 $d^{\eta}{}_{\mathrm{KF}}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) = 0$。我们令

$$G \coloneqq \left\{ g \in \overline{F_Y} \;\middle|\; f \in F_X, d_{\mathrm{KF}}^{\eta}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) = 0 \right\},\ X' \coloneqq Y/G.$$

于是，我们有 $(d^{\eta}{}_{\mathrm{KF}})_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, G \circ \mathrm{pr}_2) = 0$。由引理 4.17，我们得到$d_{\mathrm{conc}}(X, X') = 0$。这就完成了 pr 证明。□

## 5. Box Distance

盒距离是格罗莫夫引入的两个度量测度空间之间的一种完备距离。本节还定义了两个几何数据集之间的盒距离，并证明了其完备性。

设 $X$ 为一个集合， $Y$ 为一个度量空间， $A$ 为 $X$ 的非空子集。我们定义 a 映射全体从 $X$ 到 $Y$ 上的伪度量 $d_A$ 为

$$d_{\infty}^A(f, g) \coloneqq \sup\left\{ d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in A \right\}.$$

类似地，我们定义 $d_{\infty}^{\emptyset} \equiv 0$。

5.1. **定义**。

**定义 5.1**（盒距离）。设 $X$，$Y$为两个几何数据集。对于一个耦合$\pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)$、特征子集 $F \subset \mathrm{Lip}_1(X)$ 和 $G \subset \mathrm{Lip}_1(Y)$，以及一个闭子集$S \subset X \times Y$，我们定义

$$\begin{aligned}\square_\pi^S(F,G) &\coloneqq \max\left\{1-\pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(F\circ \mathrm{pr}_1, G\circ \mathrm{pr}_2)\right\}\\ \square_\pi(F,G) &\coloneqq \inf\left\{\square_\pi^S(F,G) \;\middle|\; S\subset \mathcal{F}(X\times Y)\right\}.\end{aligned}$$

我们将 $X$ 与 $Y$之间的盒距离 定义为

$$\square(X,Y) \coloneqq \inf\left\{\square_\pi(F_X,F_Y) \mid \pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)\right\}.$$

**命题5.2**。对于任意几何数据集 $X$、$Y$，有

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) \le \square(X,Y).$$

**证明**。取任意耦合 $\pi \in \Pi(\mu_X,\mu_Y)$和一个闭子集 $S \subset X\times Y$。对于$f \in \mathrm{Lip}_1(X)$和 $g\in \mathrm{Lip}_1(Y)$，有

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{KF}}^\pi(f\circ\mathrm{pr}_1, g\circ\mathrm{pr}_2) &\le \max\{1-\pi(S), \left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(f\circ\mathrm{pr}_1, g\circ\mathrm{pr}_2)\}\\ &\le \max\{1-\pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(f\circ\mathrm{pr}_1, g\circ\mathrm{pr}_2)\}.\end{aligned}$$

$f$ 和 $g$ 的任意性意味着

$$\begin{aligned}(d_{\mathrm{KF}}^\pi)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Y\circ\mathrm{pr}_2) &\le \max\{1-\pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Y\circ\mathrm{pr}_2)\}\\ &= \square_\pi^S(F_X,F_Y).\end{aligned}$$

由于 $\pi$ 和 $S$ 是任意的，我们得到

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{conc}}(X,Y) &= \inf\left\{d_{\mathrm{KF}}^\pi(f\circ\mathrm{pr}_1, g\circ\mathrm{pr}_2) \mid \pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)\right\}\\ &\le \inf\left\{\square_\pi^S(F_X,F_Y) \;\middle|\; \pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y), S\in\mathcal{F}(X\times Y)\right\} = \square(X,Y).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

**引理 5.3**。设 $X$、$Y$是两个几何数据集。对于任意耦合 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$、子集 $F\subset \mathrm{Lip}_1(X)$ 和 $G\subset \mathrm{Lip}_1(Y)$，我们有

$$\square_\pi(F,G) = \inf\left\{\square_\pi^K(F,G) \;\middle|\; K\in\mathcal{K}(X\times Y)\right\}.$$

**证明**。任取闭子集 $S\in\mathcal{F}(X\times Y)$ 和实数 $\varepsilon>0$。由 $\mu_X$ 的内正则性，存在紧子集 $K\in\mathcal{K}(S)$，使得 $\mu_X(S\setminus K) < \varepsilon$。对于任意映射 $f,g\in\mathrm{Lip}_1(X\times Y)$，我们有

$$\max\{1-\pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(f,g)\} \le \max\{1-\pi(K), 2\left(d_\infty^K\right)_{\mathrm{H}}(f,g)\} + \varepsilon$$

$f,g$ 的任意性意味着

$$\square_\pi^S(F,G) \le \square_\pi^K(F,G) + \varepsilon.$$

由于 $S$ 和 $\varepsilon$ 是任意的，我们得到

$$\square_\pi(F,G) \le \inf\left\{\square_\pi^K(F,G) \;\middle|\; K\in\mathcal{K}(X\times Y)\right\}.$$

另一侧的不等式显然成立。 □

**引理 5.4.** 设 $X$ 为度量空间。对于 $X$ 的任意紧子集 $K$ 及子集$F\subset \mathrm{Lip}_1(X)$，有 $\left(d_\infty^K\right)_{\mathrm{H}}(F,F) = 0$。

证明。任取实数 $\varepsilon > 0$。存在 $K$ 的一个有限子集 $A$，使得 $K \subset B_X(A;\, \varepsilon)$。对于任意映射 $f \in F$，存在一个映射 $f' \in F$，使得$d_\infty^A(f, f') < \varepsilon$。特别地，$d_\infty^K(f, f') < 2\varepsilon$。由 $f$的任意性可得$F \subset B_{d_\infty^K}(F;\, 2\varepsilon)$。$\varepsilon$的任意性蕴含$\bigl(d_\infty^K\bigr)_{\mathrm{H}}(F, F) = 0$。证毕。$\square$

命题 5.5。$(\mathcal{D}, \square)$ 是一个度量空间。

证明。我们来证明 $\square$ 在 $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ 上的定义是良定义的。任取几何数据集 $X_1, Y_1, Y_2$，满足 $Y_1 \simeq Y_2$，并取一个同构 $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$。我们得到

$$\begin{aligned}
\square(X_1, Y_1) &= \inf\left\{\square_\pi^K(F_{X_1}, F_{Y_1}) \;\middle|\; \pi \in \Pi(\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}), K \in \mathcal{K}(X_1 \times Y_1)\right\} \\
&= \inf\left\{\square_\pi^K(F_{X_1}, \overline{F_{Y_1}}) \;\middle|\; \pi \in \Pi(\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}), K \in \mathcal{K}(X_1 \times Y_1)\right\} \\
&= \inf\left\{\square_\pi^K(F_{X_1}, \overline{F_{Y_2}} \circ \varphi) \;\middle|\; \pi \in \Pi(\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}), K \in \mathcal{K}(X_1 \times Y_1)\right\} \\
&= \inf\left\{\square_{(\mathrm{id}_X \times \varphi)_* \pi}^{(\mathrm{id}_X \times \varphi)(K)}(F_{X_1}, \overline{F_{Y_2}}) \;\middle|\; \pi \in \Pi(\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}), K \in \mathcal{K}(X_1 \times Y_1)\right\} \\
&\geq \inf\left\{\square_\rho^L(F_{X_1}, \overline{F_{Y_2}}) \;\middle|\; \rho \in \Pi(\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}), L \in \mathcal{K}(X_1 \times Y_2)\right\} = \square(X_1, Y_2).
\end{aligned}$$

由 $Y_1$ 与 $Y_2$ 的对称性以及 $X_1$的任意性，我们有

$$\square(X_1, Y_1) = \square(X_1, Y_2) = \square(Y_2, X_1) = \square(Y_2, X_2) = \square(X_2, Y_2)$$

即使对于任意满足 $X_1 \simeq X_2$的几何数据集 $X_2$ 也成立。由此得到 $\square$的良定义性。

我们证明 $\square$是一个距离。由定义可知，非负性和对称性显然成立，而非退化性由命题 5.2 得出。我们来证明三角不等式

$$\square(X, Z) \leq \square(X, Y) + \square(Y, Z)$$

对于任意几何数据集 $X$，$Y$，$Z$。对于任意实数 $\varepsilon > 0$，存在

$$\begin{gathered}
\pi_{X,Y} \in \Pi(\mu_X, \mu_Y), S_{X,Y} \in \mathcal{F}(X \times Y), \\
\pi_{Y,Z} \in \Pi(\mu_Y, \mu_Z) \text{ and } S_{Y,Z} \in \mathcal{F}(Y \times Z)
\end{gathered}$$

使得

$$\begin{aligned}
\max\left\{1 - \pi_{X,Y}(S_{X,Y}), 2\bigl(d_\infty^S\bigr)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\right\} &\leq \square(X, Y) + \varepsilon, \\
\max\left\{1 - \pi_{Y,Z}(S_{Y,Z}), 2\bigl(d_\infty^S\bigr)_{\mathrm{H}}(F_Y \circ \mathrm{pr}_1, F_Z \circ \mathrm{pr}_2)\right\} &\leq \square(Y, Z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

根据粘合引理，存在一个博雷尔概率测度 $\rho$，其定义在 $X \times Y \times Z$ 上，使得

$$\bigl(\mathrm{pr}_{1,2}\bigr)_* \rho = \pi_{X,Y} \text{ and } \bigl(\mathrm{pr}_{2,3}\bigr)_* \rho = \pi_{Y,Z}.$$

令

$$\pi_{X,Z} \coloneqq \bigl(\mathrm{pr}_{1,3}\bigr)_* \rho,\ S_{X,Z} \coloneqq \overline{\{(x, z) \mid (x, y) \in S_{X,Y}, (y, z) \in S_{Y,Z}\}},$$

我们有

$$\begin{aligned}
1 - \pi_{X,Z}(S_{X,Z}) &= 1 - \rho((S_{X,Y} \times Z) \cap (X \times S_{Y,Z})) \\
&\leq 1 - \pi_{X,Y}(S_{X,Y}) + 1 - \pi_{Y,Z}(S_{Y,Z}) \\
&= \square(X, Y) + \square(Y, Z) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

让我们计算剩余项 $\left(d_\infty^{S_{X,Z}}\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Z\circ\mathrm{pr}_2)$。对于 $f\in F_X$，存在 $g\in F_Y$ 和 $h\in F_Z$ 使得

$$d^{S_{X,Y}}(f\circ\mathrm{pr}_1, g\circ\mathrm{pr}_2)\le \left(d^{S_{X,Y}}\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Y\circ\mathrm{pr}_2)+\varepsilon,$$
$$d^{S_{Y,Z}}(g\circ\mathrm{pr}_1, h\circ\mathrm{pr}_2)\le \left(d^{S_{Y,Z}}\right)_{\mathrm{H}}(F_Y\circ\mathrm{pr}_1, F_Z\circ\mathrm{pr}_2)+\varepsilon.$$

对于任意的 $(x,\ z)\in S_{X,\ Z}$，存在 $y\in Y$使得 $(x,\ y)\in S_{X,\ Y}$且 $(y,\ z)\in S_{Y,\ Z}$。于是，

$$\begin{aligned}|f(x)-h(z)| &\le |f(x)-g(y)|+|g(y)-h(z)|\\ &\le \left(d_\infty^{S_{X,Y}}\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Y\circ\mathrm{pr}_2)+\left(d_\infty^{S_{Y,Z}}\right)_{\mathrm{H}}(F_Y\circ\mathrm{pr}_1, F_Z\circ\mathrm{pr}_2)+2\varepsilon\\ &\le \frac{1}{2}\left(\square(X,Y)+\square(Y,Z)\right)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

$x,\ z$ 的任意性意味着

$$d_\infty^{S_{X,Z}}(f\circ\mathrm{pr}_1, h\circ\mathrm{pr}_2)\le \frac{1}{2}\left(\square(X,Y)+\square(Y,Z)\right)+2\varepsilon.$$

由 $f$ 的任意性以及 $F_X$ 与 $F_Z$ 之间的对称性可得

$$\left(d^{S_{X,Z}}\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Z\circ\mathrm{pr}_2)\le \frac{1}{2}\left(\square(X,Y)+\square(Y,Z)\right)+2\varepsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned}\square(X,Z) &\le \max\left\{1-\pi_{X,Z}(S_{X,Z}), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Z\circ\mathrm{pr}_2)\right\}\\ &\le \square(X,Y)+\square(Y,Z)+4\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，我们得到三角不等式。于是，$\square$ 是 $\mathcal{D}$ 上的距离函数。证明完毕。□

注记 5.6。$(\mathcal{D},\square)$ 不可分。由命题 5.2 和 $d_{\mathrm{conc}}$的不可分性即可证明。

5.2. **刻画**。借助 [5, §4]中盒距离的刻画，我们来看一下定义 5.1 是如何扩展两个 mm-空间之间的盒距离的。

定义 5.7（畸变，[5, 定义 4.1]）。设 $X,Y$为两个几何数据集。对于任意 $S\in\mathcal{F}(X\times Y)$，我们将 $S$ 的畸变 定义为

$$\operatorname{dis} S := \max\left\{|d_X(x_1,x_2)-d_Y(y_1,y_2)| \mid (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S\right\}.$$

对于任意 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$，我们将 $\pi$的畸变 定义为

$$\operatorname{dis}\pi := \inf\left\{\max\left\{1-\pi(S), \operatorname{dis} S\right\} \mid S\in\mathcal{F}(X\times Y)\right\}.$$

命题 5.8。设 $X,Y$为两个几何数据集，且 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$。那么有 $\operatorname{dis}\pi\le\square_\pi(F_X,F_Y)$。

证明。对于任意实数 $\varepsilon>0$，存在 $S\in\mathcal{F}(X\times Y)$ 使得

$$\square_\pi(F_X,F_Y)\le\max\left\{1-\pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Y\circ\mathrm{pr}_2)\right\}+\varepsilon.$$

任取 $(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)\in S$。存在 $f\in F_X$和 $g\in F_Y$，使得

$$d_X(x_1,x_2)\le |f(x_1)-f(x_2)|+\varepsilon,$$
$$d_\infty^S(f\circ\mathrm{pr}_1, g\circ\mathrm{pr}_2)\le \left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1, F_Y\circ\mathrm{pr}_2)+\varepsilon.$$

根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} d_X(x_1,x_2) &< |f(x_1)-f(x_2)|+\varepsilon \\ &\le |f(x_1)-g(y_1)|+|g(y_1)-g(y_2)|+|g(y_2)-f(x_2)|+\varepsilon \\ &\le |g(y_1)-g(y_2)|+2d_\infty^S(f\circ \mathrm{pr}_1, g\circ \mathrm{pr}_2)+\varepsilon \\ &\le d_Y(y_1,y_2)+2\big(d_\infty^S\big)_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2)+3\varepsilon. \end{aligned}$$

$X$ 与 $Y$ 之间的对称性证明

$$|d_X(x_1,x_2)-d_Y(y_1,y_2)| \le 2\big(d_\infty^S\big)_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2)+3\varepsilon.$$

由 $(x_1,y_1)$ 和 $(x_2,y_2)$ 的任意性，得到

$$\operatorname{dis} S \le 2\big(d_\infty^S\big)_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2)+3\varepsilon.$$

$S$ 的定义证明

$$\begin{aligned} \operatorname{dis}\pi &\le \max\{1-\pi(S), \operatorname{dis} S\} \\ &\le \max\left\{1-\pi(S), 2\big(d_\infty^S\big)_{\mathrm{H}}(F_X\circ \mathrm{pr}_1, F_Y\circ \mathrm{pr}_2)+3\varepsilon\right\} \\ &\le \square_\pi(F_X,F_Y)+4\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的，故 $\operatorname{dis}\pi \le \square_\pi(F_X,F_Y)$。至此，证明完成。 □

命题 5.9。设 $X$、$Y$ 是两个几何数据集，且 $\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)$ 是一个耦合。则有 $\operatorname{dis}\pi=\square_\pi(\mathrm{Lip}_1(X),\ \mathrm{Lip}_1(Y))$。

证明。由命题 5.8 可知 $\operatorname{dis}\pi \le \square_\pi(\mathrm{Lip}_1(X),\ \mathrm{Lip}_1(Y))$。只需证明 $\square_\pi(\mathrm{Lip}_1(X),\ \mathrm{Lip}_1(Y)) \le \operatorname{dis}\pi$。

对于任意实数 $\varepsilon>0$，存在 $S\in\mathcal{F}(X\times Y)$ 使得

$$\max\{1-\pi(S), \operatorname{dis} S\} \le \operatorname{dis}\pi+\varepsilon.$$

我们来计算 $\big(d_\infty^S\big)_{\mathrm{H}}(\mathrm{Lip}_1(X)\circ\mathrm{pr}_1, \mathrm{Lip}_1(Y)\circ\mathrm{pr}_2)$。任取 $f\in\mathrm{Lip}_1(X)$，并定义 $g\colon Y\to\mathbb{R}$ by

$$g(y) := \frac{1}{2}\operatorname{dis} S + \inf_{(x,z)\in S}\left(f(x)+d_Y(z,y)\right), \quad y\in Y.$$

我们证明 $g\in\mathrm{Lip}_1(Y)$。对于任意 $y_1,y_2\in Y$，

$$\begin{aligned} g(y_1)-g(y_2) &= \inf_{(x,z)\in S}(f(x)+d_Y(z,y_1)) - \inf_{(x,z)\in S}(f(x)+d_Y(z,y_2)) \\ &\le \inf_{(x,z)\in S}(f(x)+d_Y(z,y_1)-f(x)-d_Y(z,y_2)) \\ &= \inf_{(x,z)\in S}(d_Y(z,y_1)-d_Y(z,y_2)) \le d_Y(y_1,y_2). \end{aligned}$$

$y_1, y_2$ 的任意性意味着 $g \in \mathrm{Lip}_1(Y)$。来看一下 $d_\infty^S(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq (\mathrm{dis}\ S)/2$。对于任意 $(x, y) \in S$，我们有

$$\begin{aligned} g(y) - f(x) &\leq \frac{1}{2}\operatorname{dis} S + (f(x) + d_Y(y, y)) - f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} S \\ f(x) - g(y) &= f(x) - \left(\frac{1}{2}\operatorname{dis} S + \inf_{(x', y') \in S}(f(x') + d_Y(y', y))\right) \\ &\leq \sup_{(x', y') \in S}(f(x) - f(x') - d_Y(y', y)) - \frac{1}{2}\operatorname{dis} S \\ &\leq \sup_{(x', y') \in S}(d_X(x, x') - d_Y(y, y')) - \frac{1}{2}\operatorname{dis} S \leq \frac{1}{2}\operatorname{dis} S. \end{aligned}$$

由于 $x, y$ 的任意性，我们有 $d_\infty^S(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq (\mathrm{dis}\ S)/2$。$X$ 与 $Y$ 之间的对称性意味着

$$\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(\mathrm{Lip}_1(X) \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{Lip}_1(Y) \circ \mathrm{pr}_2) \leq \frac{1}{2}\operatorname{dis} S + \varepsilon.$$

最后，我们有

$$\begin{aligned} \square_\pi(\mathrm{Lip}_1(X), \mathrm{Lip}_1(Y)) &\leq \max\left\{1 - \pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(\mathrm{Lip}_1(X) \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{Lip}_1(Y) \circ \mathrm{pr}_2)\right\} \\ &\leq \max\{1 - \pi(S), \operatorname{dis} S\} + 2\varepsilon < \operatorname{dis}\pi + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon$ 的任意性证明了 $\square_\pi(\mathrm{Lip}_1(X), \mathrm{Lip}_1(Y)) \leq \operatorname{dis}\pi$。这就完成了证明。□

在 [5, 命题 4.4], 中，盒距离甚至定义在度量测度空间之间，且以下命题是已知的:

命题 5.10 ([5, 命题 4.4])。对于度量测度空间 $X, Y$，我们有

$$\square(X, Y) = \inf\{\operatorname{dis}\pi \mid \pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)\}.$$

特别地，我们看到

$$\square(X, Y) = \square(\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(Y))$$

对于任意度量测度空间 $X$，$Y$。对于任意几何数据集 $X$，$Y$，我们还有

$$\square(\mathcal{X}(X), \mathcal{X}(Y)) \leq \square(X, Y).$$

注 5.11。上述不等式中的等式不一定成立。事实上，对于 $n \in \mathbb{N}$，单点几何数据集 $*_{\{n\}}$ 所引入的度量测度空间 $\mathcal{X}(*_{\{n\}})$等于 $*$，其中 $*$ 是单点度量测度空间 $(*, 0, \delta_*)$。对于满足$n \neq m$的 $m \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} \square(\mathcal{X}(*_{\{n\}}), \mathcal{X}(*_{\{m\}})) = \square(*, *) = 0 < 1 = d_{\mathrm{conc}}(*_{\{n\}}, *_{\{m\}}) \\ \leq \square(*, *) \leq \square(*_{\{n\}}, *_{\{m\}}). \end{aligned}$$

命题 5.10 表明，本文定义的几何数据集之间的盒距离，是格罗莫夫提出的度量测度空间之间盒距离的一种推广。接下来，让我们按照 [6,§4]所述，以这种方式刻画盒距离。

引理 5.12。设 $X, Y$是两个几何数据集，且 $\pi, \rho \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)$ 是耦合。则有

$$|\square_\pi(X, Y) - \square_\rho(X, Y)| \leq 4 d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho),$$

其中 $X \times Y$ 配备了 $l^\infty$-乘积度量。

证明。 对于任意实数 $\varepsilon > 0$，存在 $S_\pi \in \mathcal{F}(X \times Y)$，使得

$$\max\left\{1 - \pi(S_\pi), 2\left(d_\infty^{S_\pi}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\right\} < \square_\pi(F_X, F_Y) + \varepsilon.$$

令 $S_\rho := B_{X\times Y}(S; d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon)$，可得

$$\begin{aligned} 1 - \rho(S_\rho) &\leq 1 - (\pi(S_\pi) - (d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon)) \\ &= 1 - \pi(S_\pi) + d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon. \end{aligned}$$

对于任意的 $f \in F_X, g \in F_Y$，有

$$d_\infty^{S_\rho}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) \leq d_\infty^{S_\pi}(f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2) + 2(d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon).$$

$f, g$ 的任意性意味着

$$\begin{aligned} \square_\rho^S(F_X, F_Y) &\leq \max\left\{1 - \pi(S_\rho), 2\left(d_\infty^{S_\rho}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\right\} \\ &\leq \max\left\{1 - \pi(S_\rho), 2\left(\left(d_\infty^{S_\rho}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\right)\right\} + 4(d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + \varepsilon) \\ &< \square_\pi(F_X, F_Y) + 4d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho) + 5\varepsilon. \end{aligned}$$

$\pi$ 与 $\rho$ 之间的对称性以及 $\varepsilon$ 的任意性证明

$$|\square_\pi(X, Y) - \square_\rho(X, Y)| \leq 4d_{\mathrm{P}}(\pi, \rho).$$

至此，证明完毕。 □

命题 5.13。对于几何数据集 $X$、$Y$，有

$$\square(X, Y) = \min\left\{\square_\pi(F_X, F_Y) \mid \pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)\right\}.$$

证明。 该命题由引理 2.11 和 5.12 得出。 □

引理 5.14。设 $X$ 为度量空间，$S_n$、$S$ 是 $X$、$n = 1$、2、.....上的闭集。我们假设 $S_n$ 在弱豪斯多夫意义下收敛于 $S$。那么，对于任意子集 $F$、$G \subset \mathrm{Lip}_1(X)$，存在映射 $u\colon F \to G$，使得

$$d_\infty^S(f, u(f)) \leq \liminf_{n\to\infty}\left(d_\infty^{S_n}\right)_{\mathrm{H}}(F, G)$$

对于任意 $f \in \overline{F}$。

证明。 只需证明存在一个 $g \in G$，使得

$$d_\infty^S(f, g) \leq \liminf_{n\to\infty}\left(d_\infty^{S_n}\right)_{\mathrm{H}}(F, G)$$

对于任意 $f \in \overline{F}$。若 $S$ 为空，则 $d_\infty^S \equiv 0$ 对任意 $g \in G$ 都能证明此引理。因此，我们假设 $S$ 非空。存在一个子序列 $\left\{S_{l(n)}\right\}_{n=1}^\infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(d_\infty^{S_{l(n)}}\right)_{\mathrm{H}}(F, G) = \liminf_{n\to\infty}\left(d_\infty^{S_n}\right)_{\mathrm{H}}(F, G) =: \delta.$$

任取一个 $f \in \overline{F}$。对于每个 $n = 1$，2，.....，存在映射 $f_n \in F$和 $g_n \in G$，使得 $f_n$ 逐点收敛到 $f$，当 $n \to \infty$ 且

$$d_\infty^{S_{l(n)}}(f_n, g_n) < \left(d_\infty^{S_{l(n)}}\right)_{\mathrm{H}}(F, G) + \frac{1}{n}.$$

任取一个 $x \in S$。对于每个 $n = 1$，2，.....，都存在一个 $x_n \in S_n$，使得当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x$。因此，我们有

$$\begin{aligned} |g_n(x) - f(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_{l(n)})| + |g_n(x_{l(n)}) - f_n(x_{l(n)})| \\ &\quad + |f_n(x_{l(n)}) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq 2d_X(x, x_{l(n)}) + d_\infty^{S_{l(n)}}(f_n, g_n) + |f_n(x) - f(x)| \to \delta \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时。

由于 $S$ 非空且 $x$ 任意，存在一个 $s \in S$ 和一个实数$L > 0$，使得对于任意 $n = 1, 2, \ldots$，都有 $g_n \in \mathrm{Bdd}(X, s, L)$。由引理 4.15，存在一个映射 $g \in G$ 和一个子序列 $\{g_{lom(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，使得当 $n \to \infty$时，$g_{lom(n)}$ 逐点收敛到 $g$。由于

$$|f(x) - g(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x) - g_{lom(n)}(x)| \leq \delta$$

且 $x$ 任意，因此我们有 $d_\infty^S(f, g) \leq \delta$。证明完毕。 □

**定理 5.15.** 对于几何数据集 $X, Y$，我们有

$$\square(X, Y) = \min\left\{\square_\pi^S(\overline{F_X}, \overline{F_Y}) \;\middle|\; \pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y), S \in \mathcal{F}(X \times Y)\right\}.$$

证明. 由命题 5.13，存在一个耦合 $\pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)$，使得$\square(X, Y) = \square_\pi(F_X, F_Y)$。对于每个 $n = 1, 2, \ldots$，存在 $S_n \in \mathcal{F}(X \times Y)$，使得

$$\max\left\{1 - \pi(S_n), 2\left(d_\infty^{S_n}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\right\} \leq \square_\pi(F_X, F_Y) + \frac{1}{n}.$$

由于 $X \times Y$ 是可分且完备的，根据定理 2.13，存在一个子序列 $\{S_{m(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 和一个闭集 $S \in \mathcal{F}(X \times Y)$，使得 $S_{m(n)} \to S$ 在弱豪斯多夫意义下收敛到 $n \to \infty$。由命题 2.14 和引理 5.14,

$$\begin{aligned}
\square_\pi^S(\overline{F_X}, \overline{F_Y}) &= \max\left\{1 - \pi(S), 2\left(d_\infty^S\right)_{\mathrm{H}}(\overline{F_X} \circ \mathrm{pr}_1, \overline{F_Y} \circ \mathrm{pr}_2)\right\} \\
&\leq \max\left\{1 - \limsup_{n\to\infty} \pi(S_{m(n)}), 2\liminf_{n\to\infty}\left(d_\infty^{S_{m(n)}}\right)_{\mathrm{H}}(F_X \circ \mathrm{pr}_1, F_Y \circ \mathrm{pr}_2)\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \square_\pi^{S_{m(n)}}(F_X, F_Y) \leq \square(X, Y).
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

5.3. **完备性**。设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 为一族集合，$I_0 \subset I$ 为一个子集。我们定义

$$\mathrm{pr}_{I_0}^I \colon \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I_0} A_i \text{ by } \mathrm{pr}_{I_0}^I(\{x_i\}_{i\in I}) \coloneqq \{x_i\}_{i\in I_0}.$$

引理 5.16（柯尔莫哥洛夫一致性定理，[2, 定理 10.6。2]）。设 $\{X_i\}_{i\in I}$是一族以非空集合 $I$为指标的可分完备空间，$\mathcal{I}$ 是 $I$的所有非空有限子集组成的总体。假设对每个 $I_0 \in \mathcal{I}$，存在一个测度 $\mu_{I_0}$ 满足以下条件(1) 和(2)。

(1) $\mu_{I_0}$ 是 $\prod_{i\in I_0} X_i$ 上的博雷尔概率测度。(2) 对于任意 $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $\mu_{I_2} = (\mathrm{pr}_{I_2}^{I_1})_* \mu_{I_1}$。

那么，存在一个博雷尔概率测度

$$\mu \text{ on } \prod_{i\in I} X_i \text{ such that } \mu_{I_0} = (\mathrm{pr}_{I_0}^I)_* \mu \text{ for any } I_0 \in \mathcal{I}.$$

引理 5.17。设 $X_n$ 是一个几何数据集，且 $\pi_n \in \Pi(\mu_{X_n}, \mu_{X_{n+1}})$ 是一个耦合，$n = 1, 2, \ldots$. 存在一个定义在 $\prod_{n=1}^m X_n$ 上的博雷尔概率测度 $\rho_m$，满足以下条件：(1) 和 (2)。

(1) $(\mathrm{pr}_{\leq m})_* \rho_n = \rho_m$ 对于任意满足 $1 \leq m < n$ 的自然数 $m$ 和 $n$。

(2) $(\mathrm{pr}_{n,\ n+1})_* \rho_n = \pi_n$ 对于任意 $n = 1$、2、.....。

证明。我们归纳地构造测度 $\rho_n$。第一步，令$\rho_1 \coloneqq \mu_{X_1}$，并令 $\rho_2 \coloneqq \pi_1$。显然，这些满足条件 (1) 和 (2)。

在归纳步骤中，取 $n \geq 2$，并假设测度 $\rho_n$ 满足条件 (1) 和 (2)。根据粘合引理，存在一个定义在 $X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ 上的博雷尔概率测度 $\rho_{n+1}$，使得

$$(\mathrm{pr}_{\leq n})_* \rho_{n+1} = \rho_n \text{ and } (\mathrm{pr}_{n,n+1})_* \rho_{n+1} = \pi_n.$$

由于对于任意满足 $1 \leq m < n$的自然数 $m$，都有 $(\mathrm{pr}^{\leq m})_* \rho_{n+1} = (\mathrm{pr}^{\leq m})_* \rho_n = \rho_m$，因此 (1) 成立。证明完毕。□

引理 5.18。对于一个由几何数据集组成的序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及一个序列

$$\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \Pi(\mu_{X_n}, \mu_{X_{n+1}})$$

耦合，存在一个博雷尔概率测度

$$\mu \ on \ \prod_{n=1}^{\infty} X_n \ such \ that \ \pi_n = (\mathrm{pr}_{n,n+1})_* \mu \ for \ each \ n = 1, 2, \ldots.$$

证明。根据引理 5.17，存在一个满足条件 (1) 和 (2) 的博雷尔概率测度序列 $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$。令 $I \coloneqq \{1, 2, 3, \ldots\}$，并令 $\mathcal{I}$ 为 $I$ 的所有有限子集构成的集合，我们定义

$$\mu_{I_0} \coloneqq (\mathrm{pr}_{I_0}^{\{1,2,\ldots,\max I_0\}})_* \rho_{\max I_0}$$

对每个 $I_0 \in \mathcal{I}$。那么，对于任意 $I_1$，$I_2 \in \mathcal{I}$ 满足 $I_1 \subset I_2$，我们有

$$\begin{aligned}
\mu_{I_2} &= (\mathrm{pr}_{I_2}^{\{1,2,\ldots,\max I_2\}})_* \rho_{\max I_2} \\
&= (\mathrm{pr}_{I_2}^{\{1,2,\ldots,\max I_2\}})_* (\mathrm{pr}_{\{1,2,\ldots,\max I_2\}}^{\{1,2,\ldots,\max I_1\}})_* \rho_{\max I_1} \\
&= (\mathrm{pr}_{I_2}^{\{1,2,\ldots,\max I_1\}})_* \rho_{\max I_1} \\
&= (\mathrm{pr}_{I_2}^{I_1})_* (\mathrm{pr}_{I_1}^{\{1,2,\ldots,\max I_1\}})_* \mu_{I_1} = (\mathrm{pr}_{I_2}^{I_1})_* \mu_{I_1}.
\end{aligned}$$

根据引理 5.16，存在一个定义在 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上的博雷尔概率测度 $\mu$，使得$\mu_{I_0} = (\mathrm{pr}_{I_0}^{I})_* \mu$。特别地，我们有

$$\pi_n = (\mathrm{pr}_{n,n+1})_* \rho_{n+1} = (\mathrm{pr}_{n,n+1})_* \mu.$$

证明至此完成。 □

引理 5.19。设 $X_n$ 是一个几何数据集，$n = 1$，$2$，……，并假设

$$\sum_{n=1}^{\infty} \square(X_n, X_{n+1}) < +\infty.$$

那么，存在一个几何数据集 $X_\infty$ 和一个支配 $\varphi_n \colon \ X_\infty \to X_n$，使得

$$\left(d_{\mathrm{KF}}^{X_\infty}\right)_{\mathrm{H}} (F_{X_n} \circ \varphi_n, F_{X_{n+1}} \circ \varphi_{n+1}) \leq \square(X_n, X_{n+1})$$

对于 $n = 1$，$2$，……

证明。 由定理 5.15，存在一个耦合 $\pi_n \in \Pi(\mu_{X_n}, \mu_{X_{n+1}})$ 和一个子集$S_n \in \mathcal{F}(X_n \times X_{n+1})$，使得

$$\max\{1-\pi_n(S_n), 2\big(d_\infty^{S_n}\big)_{\mathrm{H}}(\overline{F_{X_n}} \circ \mathrm{pr}_1, \overline{F_{X_{n+1}}} \circ \mathrm{pr}_2)\} = \square(X_n, X_{n+1}).$$

根据引理 5.17，存在一个博雷尔概率测度 $\mu$，定义在 $\prod_{n=1}^\infty X_n$ 上，使得$\pi_n = (\mathrm{pr}_{n,\ n+1})_*\mu$ 对于任意 $n = 1$，2，.....。我们令

$$X'_\infty \coloneqq \bigcup_{N=1}^\infty \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \;\middle|\; \{(x_n, x_{n+1})\}_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^{N-1} \operatorname{supp} \pi_n \times \prod_{n=N}^\infty S_n \right\}.$$

现在我们在 $X'_\infty$上构造距离函数。定义

$$d_{X'_\infty}\left(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty\right) \coloneqq \sup_{n=1}^\infty\ d_{X_n}(x_n, y_n) \in [0, +\infty]$$

对于每个 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，$\{y_n\}_{n=1}^\infty \in X'_\infty$。由于存在一个自然数 $N$ 使得

$$(x_n, x_{n+1}), (y_n, y_{n+1}) \in S_n$$

对于所有 $n = N$，$N+1$，.....，我们有

$$\left|d_{X_n}(x_n, y_n) - d_{X_{n+1}}(x_{n+1}, y_{n+1})\right| \le \operatorname{dis} S_n \le \square(X_n, X_{n+1}).$$

因此，序列 $\{d_{X_n}(x_n,\ y_n)\}_{n=1}^\infty$ 是有界的，并且 $d_{X'_\infty}$ 定义了乘积拓扑的相对拓扑的度量化。

我们来构造一个可分完备度量空间 $X_\infty$。类似地，我们在 $\prod_{n=1}^\infty X_n$ 上定义距离函数 $d'$

$$d'\left(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty\right) \coloneqq \sup_{n=1}^\infty \frac{d_{X_n}(x_n, y_n)}{n \cdot (1 + d_{X_n}(x_n, y_n))}$$

对于每个 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，$\{y_n\}_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty X_n$。于是，$d'$ 是乘积拓扑的一个可分完备度量化。由于 $\underline{d_{X'_\infty}}$ 大于或等于 $d'$ 在 $X'_\infty$上，$X'_\infty$ 的完备化可以关于乘积拓扑拓扑嵌入到闭包$X'_\infty$ 中。我们将 $X'_\infty$的嵌入的完备化记为 $X_\infty \subset X'_\infty$。$d'$ 的可分性也证明了 $X_\infty$的可分性。

在 $X_\infty$上定义几何数据集的结构。$\mu|_{X_\infty}$ 的限制是 $X_\infty$ 上的博雷尔概率测度，因为我们有

$$\begin{aligned}
\mu(X'_\infty) &\ge \sup_{N=1}^\infty \mu\left(\left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \;\middle|\; \{(x_n, x_{n+1})\}_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^{N-1} \operatorname{supp} \pi_n \times \prod_{n=N}^\infty S_n \right\}\right) \\
&\ge \sup_{N=1}^\infty \mu\left(\bigcap_{n=N}^\infty X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times S_n \times X_{n+2} \times \cdots\right) \\
&\ge \sup_{N=1}^\infty \left(1 - \sum_{n=N}^\infty \square(X_n, X_{n+1})\right) = 1.
\end{aligned}$$

对于每个 $n = 1$，2、.....，我们设 $F_{X_\infty} \coloneqq \mathrm{Lip}_1(X_\infty)$，$\mu_{X_\infty} \coloneqq \mu|_{X_\infty}$，以及 $\varphi_n \coloneqq \mathrm{pr}_n|_{X_\infty}$。

根据$d_{X'_\infty}$的定义，我们可知 $\varphi_n$ 是 1-利普希茨连续的。任取$n = 1$，2，.....。由于

$$(\varphi_n)_*\mu_{X_\infty} = (\mathrm{pr}_n)_*\mu = \mu_{X_n},$$

我们看到，$\varphi_n$ 是支配。

考虑 $F_{X_n}\circ\varphi_n$ 与 $F_{X_{n+1}}\circ\varphi_{n+1}$之间的距离。根据 $\mu_{X_\infty}$的定义，我们有

$$\begin{aligned}\left(d_{\mathrm{KF}}^{X_\infty}\right)_{\mathrm{H}}(F_{X_n}\circ\varphi_n, F_{X_{n+1}}\circ\varphi_{n+1}) &= (d_{\mathrm{KF}}^{\pi_n})_{\mathrm{H}}(F_{X_n}\circ\mathrm{pr}_1, F_{X_{n+1}}\circ\mathrm{pr}_2)\\ &= (d_{\mathrm{KF}}^{\pi_n})_{\mathrm{H}}(\overline{F_{X_n}}\circ\mathrm{pr}_1, \overline{F_{X_{n+1}}}\circ\mathrm{pr}_2).\end{aligned}$$

根据 $d^{\pi_n}{}_{\mathrm{KF}}$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}&(d_{\mathrm{KF}}^{\pi_n})_{\mathrm{H}}(\overline{F_{X_n}}\circ\mathrm{pr}_1, \overline{F_{X_{n+1}}}\circ\mathrm{pr}_2)\\ \le&\max\{1-\pi_n(S_n), \left(d_\infty^{S_n}\right)_{\mathrm{H}}(\overline{F_{X_n}}\circ\mathrm{pr}_1, \overline{F_{X_{n+1}}}\circ\mathrm{pr}_2)\}\\ \le&\max\{1-\pi_n(S_n), 2\left(d_\infty^{S_n}\right)_{\mathrm{H}}(\overline{F_{X_n}}\circ\mathrm{pr}_1, \overline{F_{X_{n+1}}}\circ\mathrm{pr}_2)\} = \square(X_n, X_{n+1}).\end{aligned}$$

因此,

$$\left(d_{\mathrm{KF}}^{X_\infty}\right)_{\mathrm{H}}(F_{X_n}\circ\varphi_n, F_{X_{n+1}}\circ\varphi_{n+1}) \le \square(X_n, X_{n+1}).$$

这就完成了证明。 □

引理 5.20。设 $X$ 是一个几何数据集， $K$ 是 $X$ 的一个紧子集，且 $Y$ 是一个度量空间。那么， $d_\infty^K$ 关于 $(\mathrm{Lip}_1(X,Y)\ d_{\mathrm{KF}}^X)$ 一致连续。

证明。 任取一个实数 $\varepsilon>0$。存在有限多个点

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \in X \text{ such that } K \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_X(x_n;\varepsilon).$$

我们设

$$s := \min\left\{\mu_X(U_X(x_n;\varepsilon)) \mid n=1,\ldots,N\right\},\ \delta := \min\left\{\frac{s}{2}, \varepsilon\right\}.$$

任取 $f$， $g\in\mathrm{Lip}_1(X,\ Y)$，并假设 $d_{\mathrm{KF}}^X(f,\ g)<\delta$。存在 $n\in\{1,2,\ldots,N\}$，使得 $d_X(x,\ x_n)<\varepsilon$。由于

$$\mu_X(\{x\in X \mid d_Y(f(x),g(x))<\delta\}) \ge 1-\delta$$

and

$$\mu_X(U_X(x_n;\varepsilon)) \ge s \ge 2\delta,$$

存在 $x'\in U_X(x_n;\ \varepsilon)$，使得 $d_Y(f(x')\ g(x'))<\delta\le\varepsilon$。因此，我们有

$$d_Y(f(x),g(x)) \le d_Y(f(x'),g(x')) + 2d_X(x,x') < 3\varepsilon.$$

$x$ 的任意性证明了 $d_\infty^K(f,\ g)<3\varepsilon$。任取 $f'$， $g'\in\mathrm{Lip}_1(X,\ Y)$，使得 $d_{\mathrm{KF}}^X(f,\ g)<\delta$。同理，我们有 $d_\infty^K(f,\ g)<3\varepsilon$。由三角不等式，有

$$\begin{aligned}d_\infty^K(f,f') &\le d_\infty^K(f,g) + d_\infty^K(g,g') + d_\infty^K(g',f')\\ &\le d_\infty^K(g,g') + 6\varepsilon.\end{aligned}$$

$(f,\ f')$ 与 $(g,\ g')$ 之间的对称性意味着 $d_\infty^K(g,\ g')\le d_\infty^S(f,\ f')+6\varepsilon$。因此，我们有

$$|d_\infty^K(f,f') - d_\infty^K(g,g')| \le 6\varepsilon.$$

$f, f', g, g'$的任意性完成了证明。 □

引理 5.21。设 $X$、$Y$ 是两个几何数据集，$Z$ 是一个特征空间，$\nu$ 是 $Z$ 上的博雷尔概率测度，且 $\varphi\colon Z\to X$、$\psi\colon Z\to Y$ 是两个映射。我们假设

$$F_X\circ\varphi\subset F_Z,\ F_Y\circ\psi\subset F_Z,\ \varphi_*\nu=\mu_X,\ \psi_*\nu=\mu_Y.$$

于是，我们有

$$\square(X,Y)\le\max\left\{1-\nu(S),2d_\infty^S(F_X\circ\varphi,F_Y\circ\psi)\right\}.$$

证明。由于测度 $(\varphi,\psi)_*\nu$ 是 $\mu_X$ 与 $\mu_Y$ 之间的耦合，因此我们有

$$\begin{aligned}\square(X,Y)&\le\max\left\{1-(\varphi,\psi)_*\nu((\varphi,\psi)(S)),2d_\infty^{\overline{(\varphi,\psi)(S)}}(F_X\circ\mathrm{pr}_1,F_Y\circ\mathrm{pr}_2)\right\}\\&\le\max\left\{1-\nu(S),2d_\infty^S(F_X\circ\varphi,F_Y\circ\psi)\right\}.\end{aligned}$$

证明至此完成。□

**定理 5.22.** $(\mathcal{D},\square)$ 是完备的。

证明。取任意一个由几何数据集构成的柯西序列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$。存在一个子序列 $\{X_{m(n)}\}_{n=1}^\infty$，使得 $\square(X_{m(n)},X_{m(n+1)})<2^{-n}$。根据引理 5.19，存在一个几何数据集 $Y$以及一个支配关系 $\varphi_n\colon Y\to X_n$, $n=1,2,\ldots$，使得

$$\left(d_{\mathrm{KF}}^Y\right)_{\mathrm{H}}(F_{X_{m(n)}}\circ\varphi_n,F_{X_{m(n+1)}}\circ\varphi_{n+1})<2^{-n}.$$

由于 $\{F_{X_{m(n)}}\circ\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $(\mathcal{F}(\mathrm{Lip}_1(Y)),(d_{\mathrm{KF}}^Y)_{\mathrm{H}})$ 中的柯西序列，因此存在一个闭子集 $F_\infty\in\mathcal{F}(\mathrm{Lip}_1(Y))$，使得 $F_{X_{m(n)}}\circ\varphi_n$ 收敛到 $F_\infty$，当 $n\to\infty$ 时。我们令 $X:=Y/F_\infty$，并令 $\varphi$ 为它的商支配。

我们来证明，当 $n\to\infty$ 时，$X_n$ 收敛 $X$。取任意实数 $\varepsilon>0$。由 $\mu_Y$ 的内正则性，存在一个紧集 $K\subset Y$，使得$\mu_Y(K)>1-\varepsilon$。根据引理 5.20，对于所有充分大的自然数 $n$,

$$\left(d_\infty^K\right)_{\mathrm{H}}(F_{X_n}\circ\varphi_n,F_{X_{n+1}}\circ\varphi_{n+1})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据引理 5.21，我们有

$$\square(X_n,X)\le\max\left\{1-\mu_Y(K),\ 2\left(d_\infty^K\right)_{\mathrm{H}}(F_{X_n}\circ\varphi_n,F_X\circ\varphi)\right\}<\varepsilon.$$

证明完毕。□

## References

[1] G. Beer.

*Topologies on closed and closed convex sets* 268 *Mathematics and its Applications*, 1993

第 卷。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，。[2] D. L. Cohn. *Measure theory*。Birkh¨auser 高级教材：巴塞尔教科书。[Birkh¨auser 高级教材：巴塞尔教科书]。Birkh¨auser/Springer，纽约，第二版，2013。[3] M. Gromov.

*Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*。现代 Birkh¨auser 经典著作。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，英文版，2007。根据 1981 年法文原版编写，附录由 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 撰写，Sean Michael Bates 译自法文。[4] T. Hanika、F. M. Schneider 和 G. Stumme。几何数据集的内在维数。*Tohoku Math. J. (2)*，74(1):23–52，2022。[5] H. Nakajima。通过最优传输研究盒距离与可观测距离，2022。arXiv 预印本 arXiv:2204.04893。[6] R. Ozawa 和 T. Shioya。度量测度不变量的极限公式与相变性质。*Math. Z.*，280(3-4):759–782，2015。[7] V. Pestov。数据集内在维数的公理化方法。*Neural Networks*，21(2- 3):204–213，2008。

[8] T. Shioya. *Metric measure geometry* 25 *IRMA Lectures in Mathematics and The-* ,
*oretical Physics* ¨ 2016
第 卷。EMS 出版社，苏黎世，。格罗莫夫的度量与测度的收敛和集中理论。[9] S. Yokota。几何数据集几何 II。
准备中。