arXiv:2603.23363v1 [math.QA] 24 Mar 2026

广义刘代数上的简单 Yetter-Drinfeld 模

XIANGJUN ZHEN†、GONGXIANG LIU 和 JING YU

Abstract. 设 H 是特征零代数闭域 $\Bbbk$ 上的广义刘代数。我们证明， H 上的所有单 Yetter-Drinfeld 模都是有限维的，并给出这些模的显式分类。此外，我们完全确定了其中哪些模具有有限维 Nichols 代数。

1. Introduction

双代数上的 Yetter-Drinfeld 模最早由 Yetter 于 [57] 1990年提出，当时它们被称为交叉双模。后来，这些模获得了现在的名称[42]。对于域 $\Bbbk$上的任意有限维 Hopf 代数 H ，Majid [34]通过范畴等价${}^H_H\mathcal{YD} \approx {}_{H^{cop}}\mathcal{YD}^{H^{cop}} \approx {}_{D(H^{cop})}\mathcal{M}$，将这些模与 Drinfeld 双 $D(H^{cop})$ 上的模对应起来。

现在假设 H 是一个具有双射反粒子的 Hopf 代数。那么范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 是一个编织幺半范畴。一个自然而重要的问题是，彻底分类 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的 Yetter-Drinfeld 模。这种分类是进一步研究的必要步骤，尤其是运用 Andruskiewitsch 和 Schneider [11, 12] 的提升方法对尖点 Hopf 代数进行分类。

作为理解整个 Yetter-Drinfeld 模范畴的关键一步，自然应首先研究其中的简单对象。因此，许多作者都致力于单 Yetter-Drinfeld 模的分类。如上所述，对于有限维 Hopf 代数，这一问题通常通过研究 Drinfeld 双的表示来解决。例如，若 H 是可因子化 Hopf 代数，Reshetikhin 和 Semenov-Tian-Shansky [43] 证明了 Drinfeld 双 $D(H)$ 与 $H \otimes H$ 的某个扭曲同构。这一结果使构造 Yetter-Drinfeld 模变得容易得多。后来，Schneider [45] 表明， H 是可因子化的，当且仅当 $D(H)$ 与这样的扭曲同构。此外，对于半单 Hopf 代数 H，文献 [15] 证明，其 Drinfeld 双 $D(H)$ 的任意不可约表示都可以由某个 Hopf 子代数上的诱导表示得到。近来，Liu 和 Zhu [31] 描述了半单且余半单的拟三角 Hopf 代数上的单 Yetter-Drinfeld 模。Cohen 和 Westreich [17] 还给出了另一种描述，其基域 $\Bbbk$ 代数闭且特征为零。

Key words and phrases. Hopf 代数、广义刘代数、单 Yetter-Drinfeld 模、Nichols 代数。
2020 *Mathematics Subject Classification*。16T05。

† 通讯作者。

尽管一般理论已相当完善，但单 Yetter-Drinfeld 模的精确分类在很大程度上取决于具体的 Hopf 代数。因此，研究者往往不得不针对每种情况分别解决这一问题。

最简单的情形是有限群 $H = \Bbbk G$ 在特征零的代数闭域 G 上的群代数。 $\Bbbk$ 在这种情况下， $D(H$上的单模已由 Dijkgraaf、Pasquier 和 Roche 完全分类， [18], Gould 也独立完成了分类[20]。除了群代数之外，许多研究者还研究了群代数上玻色化的 Drinfeld 双。具体而言，设 G为阿贝尔群，且 W 为 $\Bbbk G$上的 Yetter-Drinfeld 模。关于 Drinfeld 双 $D(\mathcal{B}(W)\#\Bbbk G$及其若干变体的表示，已有许多研究成果。例如， [7, 5, 9, 6, 1, 10], 中计算了具体的代数，而 [24, 26, 32, 38, 41]中则得到了更一般的结果。

除了群代数之外，许多其他半单 Hopf 代数上的单 Yetter-Drinfeld 模也已得到分类。例如，一些低维情形，如 Kac-Paljutkin 代数 [27, 46] 和 Kashina 的十六维 Hopf 代数 [30, 61, 62, 63], ，以及其他若干特殊情形 [47, 48]。

对于非半单 Hopf 代数，也已有许多重要成果。在尖点情形下，Taft 代数 [16] 和广义 Taft 代数 [36]上的 Yetter-Drinfeld 模已经得到完整确定。在非尖点情形下，研究者研究了若干具体例子 [19, 28, 53, 54, 55, 56, 60], ，但一般性的分类仍是一个开放问题。

关于 Yetter-Drinfeld 模分类的现有研究主要关注有限维 Hopf 代数，通常通过计算 Drinfeld 双的表示来获得结果。对于无限维 Hopf 代数，这种标准方法并不适用，因此可用的分类结果要少得多。一个显著的例外是 Zhang [58]对无限二面体群 $\mathbb{D}_\infty$上的单 Yetter-Drinfeld 模所作的分类。

群代数 $\Bbbk\mathbb{D}_\infty$ 是 Ding、Liu 和 Wu [52] 分类的 GK 维数为一的仿射素正则 Hopf 代数五类之一。在这一框架的基础上，我们最近研究了这一族中的另一种代数——无限维 Taft 代数，并在 [59] 中完整分类了其单 Yetter-Drinfeld 模。本文继续这一研究，考察该族中另一个重要成员：广义刘代数 $B(n,\ w,\ \gamma)$。与其有限维对应代数不同，这些无限维代数具有丰富得多的表示论性质，并且由于其非半单性而面临独特的结构挑战。确定广义刘代数上的 Yetter-Drinfeld 模，是推进 GK 维数为一的 Hopf 代数分类这一更广泛研究计划的重要一步（见 [14, 问题 1.15]）。

我们的第一个主要结果是定理4.3:

定理 1.1. 设 $H = B(n, w, \gamma)$。

(1) 每个 H 上的单 *Yetter-Drinfeld* 模都同构于某个 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$，其中标量 $\alpha, \beta \in \Bbbk^*$ 和整数 r, $i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\alpha^w = \beta^n$。(2) 两个这样的模 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 和 $V(\alpha', \beta', x^{r'} g^{i'})$ 同构，当且仅当

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad and \quad x^r g^i = x^{r'} g^{i'}.$$

此外，我们完全确定了这些模中哪些具有有限维 Nichols 代数。这就是定理 5.10的内容，具体如下：

定理 1.2。设 $H = B(n, w, \gamma)$。则在 V上的 H满足 *Nichols* 代数 $\mathcal{B}(V)$ 为有限维的单 *Yetter-Drinfeld* 模，恰好是引理 *1–6* 之后表*5.6*中所分类的那些模。

值得注意的是，H 具有无穷多个两两不同构的有限维单 Yetter-Drinfeld 模，其中大多数无法实现为有限维尖点霍普夫代数上的 Yetter-Drinfeld 模（见注 4.5）。

本文组织如下。在第 2 节中，我们回顾有关 Yetter-Drinfeld 模和 Nichols 代数的基本定义与记号。我们还简要回顾玻色化和 2-余循环变形的概念。此外，我们介绍广义刘代数及其有限维对应代数。在第 3 节中，我们首先证明每个广义刘代数上的单 Yetter-Drinfeld 模都是有限维的。随后证明每个这样的模都具有一个标准基，并相对于该基明确描述其余模结构。在第4 节中，我们给出所有单 Yetter-Drinfeld 模的显式构造，并完全刻画它们的同构类。最后，在第 5 节中，我们精确确定那些模 V，其相应的 Nichols 代数$\mathcal{B}(V)$是有限维的。

2. Preliminaries

全文中，$\Bbbk$ 表示特征为 0 的代数闭域，所有空间均定义在 $\Bbbk$上。$\Bbbk$ 上的张量积简记为 $\otimes$。包含零的自然数集合记为 $\mathbb{N}_0$，正整数集合记为 $\mathbb{N}$。对于任意整数 $m \geq 1$，令 R_m 表示本原 m次单位根的集合，令 R_∞ 表示所有单位根构成的群。

符号 H 始终表示定义在 $\Bbbk$ 上的 Hopf 代数，其余乘法为 Δ、余单位为 ε、对极为 S。我们将使用 Sweedler σ 记号 [49] 表示余积和余作用：$\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$用于余代数，$\delta(v) = \sum v_{(-1)} \otimes v_{(0)}$用于左余模。当不涉及明确计算时，通常省略求和符号。用 $G(H)$表示 H的群样元集合。对于 $g, h \in G(H)$，(g, h)-本原元构成的线性空间为：

$$\mathcal{P}_{g,h}(H) = \{x \in H \mid \Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x\}.$$

关于 Hopf 代数的基础知识，请参阅 [37, 49]。

2.1. 辫向量空间与 Yetter-Drinfeld 模。我们简要回顾辫向量空间的基本概念（例如，参见 [25, 定义 1.5.1]）。设 V 是一个在 $\Bbbk$ 上的向量空间，且 $c \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$。若配对 (V, c) 满足条件 c，则称其为一个辫向量空间

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

这里，映射 c 称为编织。

设 I 是一个指标集，且 $(q_{i,j})_{i,j \in I}$ 是 $\Bbbk$中的一族非零标量。设 V 是一个以 $\{x_i\}_{i \in I}$为基的向量空间。定义线性映射 $c: V \otimes V \to V \otimes V$如下：

$$c(x_i \otimes x_j) = q_{i,j} x_j \otimes x_i \quad \text{for all } i, j \in I.$$

则（V，c）是一个编织向量空间（参见例如 [25, 注 1.5。4]）。称（V，c）为一个对角型编织向量空间。矩阵（$q_{i,j}$）$_{i,j \in I}$ 称为编织矩阵

关于（V， c）相对于基 $\{x_i\}_{i\in I}$的编织。对角型编织构成最简单的一类编织。另一类有趣的编织是三角型编织，由 Stefan 研究[50]。他后来在 [51] 中证明，这类编织来自带有阿贝尔余根的尖点 Hopf 代数上的某些 Yetter-Drinfeld 模。

现在回顾 Yetter-Drinfeld 模的概念。本文始终只讨论左-左 Yetter-Drinfeld 模，即同时为左模和左余模的对象。

定义 2.1. ([3, 定义 3]) 设 H 为 *Hopf* 代数，H 上的 *Yetter-Drinfeld* 模是一个向量空间，并配备

(1) 左 H-模结构 $\cdot: H\otimes V\to V$ 以及(2) 左 H-余模结构 $\delta:$
$V\to H\otimes V$，使得(3) 对所有 $h\in H$ 和 $v\in V$，以下相容条件成立：

$$\delta(h\cdot v)=h_{(1)}v_{(-1)}S(h_{(3)})\otimes h_{(2)}\cdot v_{(0)}. \tag{2.1}$$

H 上的 Yetter-Drinfeld 模范畴记作 ${}^H_H\mathcal{YD}$。此范畴中的态射是同时保持作用和余作用的线性映射。若对极 S是双射，则 ${}^H_H\mathcal{YD}$成为一个编织幺半范畴。对于任意 $V,W\in {}^H_H\mathcal{YD}$，编织 $c_{V,W}: V\otimes W\to W\otimes V$定义为

$$c_{V,W}(v\otimes w)=v_{(-1)}\cdot w\otimes v_{(0)}$$

及其逆 $c^{-1}_{V,W}: W\otimes V\to V\otimes W$由下式给出

$$c^{-1}_{V,W}(w\otimes v)=v_{(0)}\otimes S^{-1}(v_{(-1)})\cdot w$$

对所有的 $v\in V$和 $w\in W$均成立。

特别地，取 $W=V$ 可知，每个 Yetter-Drinfeld 模 V 自然都是一个带有编织 $c_{V,V}$ 的编织向量空间。然而，逆命题需要额外条件：只有当一个编织向量空间的编织具有刚性时，它才能被实现为某个具有双射反粒子的 Hopf 代数上的 Yetter-Drinfeld 模（见 [25, 定义 4.2。11]）。Lyubashenko [33] 首先对对称情形证明了这一点，Schauenburg [44]随后证明了一般情形。

实际上，下面的引理提供了一种检验相容条件的实用方法 .

引理 2.2。 ([59, 引理 2。5]) 设 H为一个 *Hopf* 代数，并设 （V， $\cdot$， δ）为一个左 H-模和一个左 H-余模。那么 （V， $\cdot$， δ）是 H 上的 *Yetter-Drinfeld* 模，当且仅当相容条件 （2.1）对 H 的一组代数生成元和 V的一组张成向量成立。

我们以余矩阵的概念结束本小节，该概念为余模提供了矩阵表示。这一概念将在第3节中发挥重要作用。

定义 2.3。 设 (C,Δ,ε) 是 $\Bbbk$ 上的一个余代数。若方阵 $\mathcal{A}=(c_{ij})_{r\times r}$ 的元素属于 C，则称其为一个余矩阵；如果对任意 $1\le i,j\le r$，都有

$$\Delta(c_{ij})=\sum_{l=1}^{r}c_{il}\otimes c_{lj}\quad and\quad \varepsilon(c_{ij})=\delta_{i,j},$$

其中$\delta_{i,\ j}$ 表示克罗内克δ。

引理 2.4. ([25, 引理 2.1.1]) 设 (C, Δ, ε) 是一个定义在 $\Bbbk$上的余代数，并设 V是一个 n维向量空间，其基为 $\{v_1, \dots, v_n\}$。考虑线性映射 $\delta\colon V \to C \otimes V$定义如下

$$\delta(v_k) = \sum_{l=1}^{n} c_{kl} \otimes v_l \quad (1 \le k \le n,\ c_{kl} \in C).$$

设 $\mathcal{A} = (c_{ij})_{n\times n}$。那么 (V, δ) 是一个左 C-余模，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是一个余矩阵。

2.2. **Nichols 代数**。现在我们转而讨论 Nichols 代数。尽管它们有几种等价的定义方式，我们遵循 Heckenberger 和 Schneider [25]的方法。

定义 2.5。([25, 定义 1.3。12]) 设 $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} C(n)$ 是一个带投影 $\pi_n : C \to C(n)$ 的 $\mathbb{N}_0$-分次余代数，其中对所有 $n \ge 0$均成立。对每个 $n \ge 1$，定义映射 $\Delta_{1^n}^{C}$ 为以下复合:

$$\Delta_{1^n}^{C} : C(n) \subseteq C \xrightarrow{\Delta^{n-1}} C^{\otimes n} \xrightarrow{\pi_1^{\otimes n}} C(1)^{\otimes n},$$

其中 $\Delta^0 =$ 恒等映射$_C$： $C \to C$ 且 $\Delta^n =$ (恒等映射$_C \otimes \Delta^{n-1})\Delta$： $C \to C^{\otimes(n+1)}$。

现在，设 H 是一个具有双射反粒子的 Hopf 代数，并取 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$。张量代数 $T(V)$ 自然构成 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个 $\mathbb{N}_0$-分次 Hopf 代数。其余乘法是代数映射 $\Delta\colon T(V) \to T(V)\otimes T(V)$，定义为对所有 $v \in V$， $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$。由于$T(V)$ 也是一个标准的 $\mathbb{N}_0$-分次余代数，我们可以利用上述构造在其上定义映射 $\Delta^{T(V)}{}_{1^n}$。

定义 2.6。([25, 定义 7.1。13]) 设 H 是一个具有双射反粒子的 *Hopf* 代数，并且$V \in {}^H_H\mathcal{YD}$。那么

$$\mathcal{B}(V) = T(V) \Big/ \bigoplus_{n\ge 2} \ker\left(\Delta_{1^n}^{T(V)}\right)$$

称为 V 的 *Nichols* 代数。 $\mathcal{B}(V)$ 称为对角型，如果$(V, c_{V,\ V})$ 是对角型。

根据构造，Nichols 代数 $\mathcal{B}(V) = \bigoplus_{n\ge 0} \mathcal{B}^n(V)$ 是一个 $\mathbb{N}_0$-分次向量空间。其齐次分量可明确表示为

$$\mathcal{B}^0(V) = \Bbbk 1, \quad \mathcal{B}^1(V) = V, \quad \text{and} \quad \mathcal{B}^n(V) = V^{\otimes n} \Big/ \ker\left(\Delta_{1^n}^{T(V)}\right) \text{ for } n \ge 2.$$

此外， $\mathcal{B}(V)$ 在 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中成为一个 $\mathbb{N}_0$-分次 Hopf 代数，并具有以下性质 s:

- $\mathcal{B}^0(V) \cong \Bbbk$, $\mathcal{B}^1(V) \cong V$在 ${}^H_H\mathcal{YD}$,
- $\mathcal{B}(V)$ 由 $\mathcal{B}^1(V)$ 作为代数生成，并且
- $\mathcal{B}(V)$ 是严格分次的，也就是说， $P(\mathcal{B}(V)) = \mathcal{B}^1(V)$.

众所周知，这些性质刻画了 Nichols 代数（参见例如 [2,定理 5.7]）。

我们也可以通过与 $(V,\ c_{V,\ V})$ 相关联的编织对称化映射 $S_n\colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$来考察这个商（参见 [25, 定义 1.8.10]）。根据 [25, 推论 1.9.7],，映射 $\Delta^{T(V)}{}_{1^n}$恰好是 S_n。此外，还可以更一般地定义任意编织向量空间的 Nichols 代数，即使其底层没有 Hopf 代数（参见 [25, 定义 7.1.1]）。

注 2.7. 设 $V = \Bbbk v$ 是一个一维 Yetter-Drinfeld 模（或简称为编织向量空间），其编织为 $c(v \otimes v) = qv \otimes v$，其中 $q \in \Bbbk^*$为某个元素。回顾一下，本文始终假设 char$(\Bbbk) = 0$。在此假设下，众所周知，Nichols 代数 $\mathcal{B}(V)$ 有限维当且仅当 q 是非平凡单位根（即不同于 1 的单位根）。更多详情参见，例如， [25, Example 1.10.1]。

2.3. **玻色化**。 设 H 是一个定义在 $\Bbbk$上的 Hopf 代数。回顾一下，范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 是一个编织幺半范畴。若 R 是范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个 Hopf 代数（通常称为辫子霍普夫代数），我们可以构造一个新的普通 Hopf 代数，记作 $R\#H$，称为 玻色化 [35] 或 *Radford* 双积 [40]，由 R 与 H构成。

定义 2.8。 ([40, 定理 1 和命题 2]) 设 $R \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 是一个辫子霍普夫代数。玻色化 $R\#H$ 定义如下：

(1) 作为向量空间， $R\#H = R \otimes H$。我们将元素 $r \otimes h$ 记作 $r\#h$。(2) 乘法由交叉积给出：

$$(r\#h)(s\#l) = r(h_{(1)} \cdot s)\#h_{(2)}l, \tag{2.2}$$

对所有 r、 $s \in R$以及 h、 $l \in H$均成立。此处，点号 $\cdot$表示 H在 R上的作用。

(3) 余乘法由交叉余积给出：

$$\Delta(r\#h) = (r^{(1)}\#(r^{(2)})_{(-1)}h_{(1)}) \otimes ((r^{(2)})_{(0)}\#h_{(2)}), \tag{2.3}$$

其中， $\Delta_R(r) = r^{(1)} \otimes r^{(2)}$ 表示 R中的辫子余积，而 $\delta(r) = r_{(-1)} \otimes r_{(0)}$表示 H 在 R上的余作用。

(4) 单位元为 $1_R\#1_H$，余单位为 $\varepsilon(r\#h) = \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h)$。(5) 对极 S 由下式给出：

$$S(r\#h) = (1\#S_H(r_{(-1)}h))(S_R(r_{(0)})\#1), \tag{2.4}$$

其中 S_R 是范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$中 R 的对极。

玻色化 $A = R\#H$ 自带典范的 Hopf 代数态射ι： $H \to A$ 由 $\iota(h) = 1_R\#h$给出，以及 π：$A \to H$ 由 $\pi(r\#h) = \varepsilon_R(r)h$给出，并满足$\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$。反过来，Radford [40] 的一项基本结果指出，这种分裂性质刻画了玻色化结构。具体而言，设 A 和 H 是配备 Hopf 代数态射 ι：$H \to A$和 π： $A \to H$的 Hopf 代数，且满足 $\pi\circ\iota = \mathrm{id}_H$。那么$A \cong R\#H$，其中 $R = A^{\mathrm{co}\,\pi} = \{a \in A \mid (\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}$ 是余不变量的代数，它在 ${}^H_H\mathcal{YD}$中具有自然的辫子霍普夫代数结构。

2.4. **2-余循环变形**。 在本小节中，我们回顾通过 2-余循环扭曲 Hopf 代数乘法的过程，以及由此对 Yetter-Drinfeld 模范畴产生的影响。我们遵循 [3, 第 3.4 节]中的阐述。

设 H 是域 $\Bbbk$上的一个 Hopf 代数。

定义 2.9。 ([3, 定义 10]) 若线性映射 $\sigma\colon H \otimes H \to \Bbbk$ 关于卷积乘积可逆，且满足余循环条件，则称其为酉 *2*-余循环。

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)}),$$

并且满足酉条件 $\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = \varepsilon(x)$ 对所有 x、 y、 $z \in H$均成立。

给定一个酉 2-余循环 σ，可以定义一个新的 Hopf 代数 $H_\sigma = (H, \cdot_\sigma, \Delta)$。余代数结构保持不变，而新的乘法定义如下：

$$x \cdot_\sigma y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}\sigma^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)}), \quad \text{for } x, y \in H.$$

一个基本结果揭示了 H 与 H_σ的表示理论之间的联系。下述定理证明了它们的 Yetter-Drinfeld 范畴等价（参见 [3, 定理4]）。

定理 2.10。 设 σ： $H \otimes H \to \Bbbk$ 是一个酉 *2*-余循环。

(1) 存在一个编织范畴的等价

$$\mathcal{T}_\sigma : {}^H_H\mathcal{YD} \to {}^{H_\sigma}_{H_\sigma}\mathcal{YD}, \quad V \mapsto V_\sigma.$$

函子 $\mathcal{T}_\sigma$ 在底层向量空间、态射和余作用上是恒等的。它将 H 在 V 上的作用变换为扭曲作用 $\cdot_\sigma$： $H_\sigma \otimes V_\sigma \to V_\sigma$，其定义如下：

$$h \cdot_\sigma v = \sigma(h_{(1)}, v_{(-1)})(h_{(2)} \cdot v_{(0)})_{(0)}\sigma^{-1}((h_{(2)} \cdot v_{(0)})_{(-1)}, h_{(3)}), \tag{2.5}$$

对所有的 $h \in H_\sigma$ 和 $v \in V_\sigma$。$\mathcal{T}_\sigma$ 上的幺半群结构由自然同构给出

$$J_{V,W} : (V \otimes W)_\sigma \to V_\sigma \otimes W_\sigma,$$

其定义公式如下：

$$J_{V,W}(v \otimes w) = \sigma(v_{(-1)}, w_{(-1)})v_{(0)} \otimes w_{(0)}, \quad for\ v \in V, w \in W. \tag{2.6}$$

(2) 函子 $\mathcal{T}_\sigma$ 保持 *Nichols* 代数。具体而言，

$$\mathcal{B}(V)_\sigma \cong \mathcal{B}(V_\sigma)$$

as objects in ${}^{H_\sigma}_{H_\sigma}\mathcal{YD}$.

由于 $\mathcal{T}_\sigma$ 保持 Nichols 代数的维数， $\mathcal{B}(V)$是有限维的，当且仅若 $\mathcal{B}(V_\sigma)$是有限维的。 y

2.5. **广义刘代数**。 本小节将简要介绍广义刘代数及类似的 Hopf 代数。

定义 2.11。 ([13, 第 3 节。4]) 设 n 和 w 为正整数，并设 γ 是 *1* 的一个本原n次单位根。广义刘代数记作 $B(n, w, \gamma)$，由 $x^{\pm 1}, g$和y生成，并满足以下关系

$$\begin{cases} xx^{-1} = x^{-1}x = 1,\ xg = gx,\ xy = yx, \\ yg = \gamma gy, \\ y^n = 1 - x^w = 1 - g^n. \end{cases}$$

$B(n, w, \gamma)$ 的余乘法、余单位和对极定义如下：

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(y) = y \otimes g + 1 \otimes y,$$

$$\varepsilon(x) = 1, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(y) = 0,$$

and

$$S(x) = x^{-1}, \quad S(g) = g^{-1}, \quad S(y) = -yg^{-1}.$$

注 2.12。 设 $H := B(n, w, \gamma)$。则 H是尖点霍普夫代数，其群样元群为

$$G(H) = \left\{ g^j x^k \mid 0 \le j < n,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

H 的一组线性基如下：

$$\left\{ y^i g^j x^k \mid 0 \le i, j < n,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

接下来，我们介绍另一类有限维尖点 Hopf 代数，记作$A(d,\ m,\ \gamma,\ \mu)$。我们证明，某些单 Yetter-Drinfeld 模 V在 $B(n,\ w,\ \gamma)$ 上可以实现为这一新类代数上的单 Yetter-Drinfeld 模；参见引理 4.4。通过这种实现，我们可以判定 $\mathcal{B}(V)$ 是否为有限维。

定义 2.13。设 d、m、n 为正整数，且 $n \mid d$。设 γ 为 *1* 的一个本原 n 次单位根，且 $\mu \in \Bbbk$。*Hopf* 代数 $A(d, m, \gamma, \mu)$ 由 x、g 和 y 生成，满足以下关系

$$\begin{cases} xg = gx, \quad xy = yx, \\ yg = \gamma gy, \\ g^d = x^m = 1, \quad y^n = \mu(1 - g^n). \end{cases}$$

A（d、w、γ）的余乘法、余单位和对极定义如下

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(y) = y \otimes g + 1 \otimes y,$$

$$\varepsilon(x) = 1, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(y) = 0,$$

and

$$S(x) = x^{-1}, \quad S(g) = g^{-1}, \quad S(y) = -yg^{-1}.$$

注 2.14。

（1）当 $d = n$时，代数 A（n，m，γ，1）是 B（n，m，γ）的商代数。（2）代数 A（d，m，γ，μ）是 Radford 代数 [39]的一种变体；具体而言，它是通过添加一个中心类群元构造而成的。特别地，当 $m = 1$ 且$\mu = 0$时，它与 [29]中引入的广义 Taft 代数一致。

令 $G = \langle g \rangle \times \langle x \rangle$ 表示阶分别为 d 和 m、由 g 和 x 分别生成的循环群的直积。注意，当 $n = 1$时，代数 $A(d, m, \gamma, 0)$与群代数 $\Bbbk G$一致。因此，我们将重点讨论 $n \geq 2$的情形。在此情形下，$A(d, m, \gamma, 0)$可实现为 $\Bbbk G$上的玻色化。具体而言，令 $V_0 = \Bbbk\{y\}$ 表示 $\Bbbk G$ 上的一维 Yetter-Drinfeld 模，其作用和余作用定义如下：

- 作用定义为
$$g \cdot y = \gamma y \ , \ x \cdot y = y;$$
- 余作用定义为
$$\delta(y) = g \otimes y.$$

注意，$\mathcal{B}(V_0) = \Bbbk[y]/(y^n)$ 是截断多项式代数。因此我们得到如下同构。

引理 2.15. 设 $n \geq 2$。存在一个霍普夫代数同构

$$\psi : \mathcal{B}(V_0) \# \Bbbk G \xrightarrow{\cong} A(d, m, \gamma, 0),$$

由生成元上的映射确定：$\psi(y\#1) = yg^{-1}$, $\psi(1\#g) = g^{-1}$，以及 $\psi(1\#x) = x$。具体而言，基元素上的映射如下：

$$\psi(y^i \# g^j x^k) = \gamma^{\frac{i(i-1)}{2}} y^i g^{-(i+j)} x^k, \tag{2.7}$$

对所有 $0 \leq i < n$、$0 \leq j < d$ 和 $0 \leq k < m$。

代数 $A(d, m, \gamma, 1)$ 是 $A(d, m, \gamma, 0)$ 的 2-余循环变形。根据 [21, 第 4 节，4], 我们可以明确描述产生这一变形的 2-余循环。在基元素 $x^i g^j y^k$ 上定义双线性形式 η：$A(d, m, \gamma, 0) \otimes A(d, m, \gamma, 0) \to \Bbbk$：

$$\eta(x^i g^j y^k, x^r g^t y^s) = \begin{cases} -\gamma^{tk} & \text{if } k + s = n, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中指标满足 $0 \le i, r < m$, $0 \le j, t < d$，且 $0 \le k, s < n$。那么 η是 $A(d, m, \gamma, 0)$ 上的 Hochschild 2-余循环。

令 σ 为指数 $\sigma = e^{\eta}$，其逆为 $\sigma^{-1} = e^{-\eta}$。注意，由于 $\eta * \eta = 0$，级数截断，得到:

$$\sigma = e^{\eta} = \varepsilon \otimes \varepsilon + \eta \quad \text{and} \quad \sigma^{-1} = e^{-\eta} = \varepsilon \otimes \varepsilon - \eta.$$

引理 *2.16*（[21], 命题 *4.2*）。令 $n \ge 2$。映射 $\sigma = \varepsilon \otimes \varepsilon + \eta$ 是 $A(d, m, \gamma, 0)$ 上的酉 2-余循环。此外，扭曲代数 $(A(d, m, \gamma, 0))_{\sigma}$ 与 $A(d, m, \gamma, 1)$ 相同。

在本文余下部分，我们固定正整数 n, w，并令 γ 为一个本原 n 次单位根。令 $H = B(n, w, \gamma)$，并用 $G = G(H)$ 表示其群样元组成的群。

3. Comodule Structures over Simple Yetter-Drinfeld Modules

本节将证明， H 上的每个单 Yetter-Drinfeld 模都是有限维的。随后我们将说明，每个这样的模都有一个标准基，并计算其相对于该基的余矩阵。对这些余矩阵的分析对于我们的分类至关重要。

3.1. 单 Yetter-Drinfeld 模的标准基的存在性。

st

我们首先证明 H 上的每个单 Yetter-Drinfeld 模都是有限维的。

命题 3.1. 每个 H 上的单 *Yetter-Drinfeld* 模 V 都是有限维的。

证明. 设 $(V, \cdot, \delta)$ 是 H上的一个单 Yetter-Drinfeld 模。

首先，我们证明 V 作为子代数 $\Bbbk[x, x^{-1}]$上的模是有限生成的。定义 soc(V) 为 V的所有单子余模之和。由于 H 是尖点的，

$$\mathrm{soc}(V) = \bigoplus_{h \in G(H)} V_h,$$

其中 $V_h = \{v \in V \mid \delta(v) = h \otimes v\}$。取 $h \in G(H)$，使得 $V_h \neq 0$。令 v为 V_h中的一个非零向量。考虑由 v生成的 H-子模 $M = H \cdot v$。根据相容条件（2.1），对任意 $a \in H$，余作用为

$$\delta(a \cdot v) = a_{(1)} v_{(-1)} S(a_{(3)}) \otimes a_{(2)} \cdot v_{(0)} = a_{(1)} h S(a_{(3)}) \otimes a_{(2)} \cdot v.$$

这表明 M是 V的子余模，因此 M是 V的 Yetter-Drinfeld 子模。由于 V作为 Yetter-Drinfeld 模是单的，我们必有 $V = M = H \cdot v$。因此，V 是一个循环 H-模。

接下来，考察 H的结构。关系式 $y^n = 1 - x^w$ 和 $g^n = x^w$ 表明，H 是中心子代数 $R = \Bbbk[x, x^{-1}]$上的有限生成模。具体而言， H 由集合 $\{g^i y^j \mid 0 \le i, j \le n-1\}$ 在 R上张成。由于 V是一个循环 H-模，它作为 R-模是有限生成的。特别地， V由 $\{g^i y^j \cdot v \mid 0 \le i, j \le n-1\}$在 R 上张成。

现在考虑 x 对 V 的作用。由于 x 在 H 中是中心元且为类群元，因此对任意 $\lambda \in \Bbbk$，映射 $\phi_\lambda \colon V \to V$，由 $u \mapsto (x - \lambda) \cdot u$ 定义，是作为 Yetter-Drinfeld 模的 V 的自同态。根据 Yetter-Drinfeld 模的舒尔引理，任何自同态要么为零，要么可逆。假设 x 的作用不是标量作用。那么对所有 $\lambda \in \Bbbk$，映射 $x - \lambda$ 都可逆。这意味着 V 是 PID $R = \Bbbk[x, x^{-1}]$ 上的可除模（注意 $\Bbbk$ 是代数闭的）。然而，PID 上的非零有限生成模不可能是可除模。矛盾说明存在某个 $\alpha \in \Bbbk$，使得 ϕ_α 不可逆，因此根据舒尔引理， $\phi_\alpha = 0$。

因此，对所有 $u \in V$，均有 $x \cdot u = \alpha u$。由此可知， V 在 $\Bbbk$ 上由集合 $\{g^i y^j \cdot v \mid 0 \leq i,\ j \leq n-1\}$ 张成。因此， V 在 $\Bbbk$ 上是有限维的。□

因此，只需考虑有限维单 Yetter-Drinfeld 模。为此 ，
我们先引入以下概念。

定义 3.2. 设$(V, \cdot, \delta)$ 是 H 上的一个 *Yetter-Drinfeld* 模。若存在一个群样元 $h \in G(H)$ 以及标量 $\alpha, \beta \in \Bbbk^*$，使得非零元素 $v \in V$ 满足下述条件，则称 $v \in V$ 为标准元素：

$$x \cdot v = \alpha v, \quad g \cdot v = \beta v, \quad \delta(v) = h \otimes v.$$

在这种情况下，我们称 v 是类型为(α, β, h)的标准元素。

由于 $x^w = g^n$，若 v 是类型为 (α, β, h) 的标准元素，则必有 $\alpha^w = \beta^n$。下面的引理保证标准元素的存在。

引理 3.3. 每个有限维 *Yetter-Drinfeld* 模在 H 上都包含一个标准 d 元素。

证明。 设 $(V, \cdot, \delta)$ 是 H 上的有限维 Yetter-Drinfeld 模。定义 soc(V) 为 V 的所有单子余模之和。由于 H 是尖点的，

$$\mathrm{soc}(V) = \bigoplus_{h \in G(H)} V_h,$$

其中 $V_h = \{v \in V \mid \delta(v) = h \otimes v\}$。选取满足 $V_h \neq 0$ 的 $h \in G(H)$。于是 V_h 是有限维的，因为 V 是。由相容条件 (2.1)，子空间 V_h 在 x 和 g 的作用下均不变。由于 $xg = gx$ 和 $\Bbbk$ 是代数闭的，线性映射x 和 g 有一个位于 V_h 中的公共特征向量 v。因此， v 是 V 的一个标准元素。□

设 V 是 H 上的 Yetter-Drinfeld 模。对于任意标准元素 $v \in V$ 和整数$k \geq 0$，定义 $V(v, k)$ 为 $\{v, y \cdot v, \ldots, y^k \cdot v\}$ 的线性张成。我们有以下直接结论。

命题 3.4. 设 V 是 H 上的 *Yetter-Drinfeld* 模。设 $v \in V$ 是类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素，其中 $\alpha, \beta \in k^*$ 和 $r, i \in \mathbb{Z}$。那么对于任意 $k \geq 0$:

(1) $x \cdot (y^k \cdot v) = \alpha (y^k \cdot v)$ $g \cdot (y^k \cdot v) = \beta \gamma^{-k} (y^k \cdot v)$; (2) $V(v, k)$ 是 V 的子余模; (3) 若 $y^{k+1} \cdot v \in V(v, k)$，则 $V(v, k)$ 是 V 的 *Yetter-Drinfeld* 子模。

证明。 **(1)** 是显然的。

对于 **(2)**，我们对 k使用归纳法。显然， $k = 0$ 的情形成立。假设 $V(v, k)$ 是一个子余模。那么 $\delta(y^k \cdot v) = \sum_{l=0}^{k} c_{kl} \otimes (y^l \cdot v)$ 对某个 $c_{kl} \in H$成立。由相容条件 (2.1)，

$$\begin{aligned}
& \delta(y^{k+1} \cdot v) \\
= \ & \delta(y \cdot (y^k \cdot v)) \\
= \ & \sum_{l=0}^{k} \left(c_{kl} S(y) \otimes 1 \cdot (y^l \cdot v) + c_{kl} S(g) \otimes y \cdot (y^l \cdot v) + y c_{kl} S(g) \otimes g \cdot (y^l \cdot v) \right) \\
= \ & \sum_{l=0}^{k+1} c_{k+1,l} \otimes y^l \cdot v,
\end{aligned}$$

其中

$$c_{k+1,l}=\begin{cases} c_{k0}S(y)+\beta y c_{k0}S(g), & l=0,\\ c_{kl}S(y)+\beta\gamma^{-l}yc_{kl}S(g)+c_{k,l-1}S(g), & 0<l<k+1,\\ c_{kk}S(g), & l=k+1. \end{cases} \tag{3.1}$$

因此 $\delta(y^{k+1}\cdot v)\in H\otimes V(v,\ k+1)$。根据归纳假设，$V(v,\ k+1)$ 是一个子余模 .

对于 (3)，注意到由 (1) 可知，$V(v,\ k)$ 是一个 $\Bbbk G$-子模。若 $y^{k+1}\cdot v\in V(v,\ k)$，则 $V(v,\ k)$ 在 y 下稳定，因此是一个 H-子模。结合 (2)，它是一个 Yetter-Drinfeld 子模。□

引理 3.5。设 V是一个 H上的单 *Yetter-Drinfeld* 模，且其 维数$_{\Bbbk}V=p+1$，其中 $p\geq 0$。对于任意标准元素 $v\in V$，集合 $\{v,y\cdot v,\dots,y^p\cdot v\}$ 构成 V的一组基。

证明。设 k为满足 $\{v,y\cdot v,\dots,y^k\cdot v\}$线性无关的最大整数。于是 $y^{k+1}\cdot v\in V(v,k)$。由命题 3.4(3)，$V(v,k)$ 是一个 Yetter-Drinfeld 子模。由于V是单的，$V=V(v,k)$。因此，集合 $\{v,y\cdot v,\dots,y^k\cdot v\}$是 V的基，故 $\dim_{\Bbbk}V=k+1$。由于 $\dim_{\Bbbk}V=p+1$，我们得到 $k=p$，证明完毕。□

引理 3.5 中给出的基称为标准基；利用它，我们推导出以下结果。

引理 3.6。设 V是 H上的单 *Yetter-Drinfeld* 模，且 $\dim_{\Bbbk}V=p+1$，其中$p\geq 0$。设 $v\in V$是类型为(α,β,h)的标准元素，其中 α、$\beta\in\Bbbk^*$和 $h\in G(H)$。则：

(1) $p+1\leq n$; (2) </style}若，则；(3) $y^{p+1}\cdot v=0$ 当且仅当 $\alpha^w=\beta^n=1$; (4) $y^{p+1}\cdot v\neq 0$ 当且仅当 $\alpha^w=\beta^n\neq 1$。

证明。(1) 由引理 3.5，集合 $\{v,y\cdot v,\dots,y^p\cdot v\}$ 构成 V 的一组基。此外，我们有

$$y^n\cdot v=(1-g^n)\cdot v=(1-\beta^n)v.$$

这迫使 $p<n$，从而证明了结论 (1)。

(2) 假设 $y^{p+1}\cdot v\neq 0$。由命题 3.4(1)，对每个 k 满足 $0\leq k\leq p+1$ 的情形，我们有

$$g\cdot(y^k\cdot v)=\beta\gamma^{-k}(y^k\cdot v).$$

因此，向量 v，$y\cdot v$，.....，$y^{p+1}\cdot v$是 g 对应于不同特征值$\beta\gamma^{-k}$的特征向量，故它们线性无关。这与 $\{v,y\cdot v,\dots,y^p\cdot v\}$ 是 V 的一组基这一事实矛盾。因此，必有 $y^{p+1}\cdot v=0$。

由于 (3) 和 (4) 等价，只需证明 (3)。首先，假设 $y^{p+1}\cdot v=0$。由于 $p+1\leq n$（由第 (1) 部分可知），因此

$$0=y^{n-(p+1)}\cdot(y^{p+1}\cdot v)=y^n\cdot v=(1-\beta^n)v.$$

这意味着 $\beta^n=1$。由于 $\alpha^w=\beta^n$，因此 $\alpha^w=1$。

反过来，假设 $\alpha^w=\beta^n=1$。由 (1) 可知 $p+1\leq n$。若 $p+1<n$，则由 (2) 得 $y^{p+1}\cdot v=0$。若 $p+1=n$，则

$$y^{p+1}\cdot v=y^n\cdot v=(1-g^n)\cdot v=(1-\beta^n)v=0.$$

在这两种情况下，$y^{p+1}\cdot v=0$。 □

相对于标准基，单 Yetter-Drinfeld 模的作用和余作用具有简单的形式。设 V 是维数为 $p+1$ 的 H 上的单 Yetter-Drinfeld 模，其中 $p \geq 0$。取一个类型为 $(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$ 的标准元素 $v \in V$，其中 $\alpha,\ \beta \in k^*$ 且 $r,\ i \in \mathbb{Z}$。那么集合 $\{v, y \cdot v, \ldots, y^p \cdot v\}$ 构成了 V 的标准基。记 $0 \leq k \leq p$ 为 $v_k = y^k \cdot v$，则该基上的作用和余作用如下：

- x 对 $0 \leq k \leq p$ 的作用定义为

$$x \cdot v_k = \alpha v_k.$$

- g 对 $0 \leq k \leq p$ 的作用定义为

$$g \cdot v_k = \beta \gamma^{-k} v_k.$$

- y 对 $0 \leq k \leq p$ 的作用定义为

$$y \cdot v_k = \begin{cases} v_{k+1}, & 0 \leq k < p, \\ \sum_{l=0}^{p} a_l v_l, & k = p, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中，对于 $0 \leq l \leq p,\ a_l \in \Bbbk$。

$0 \leq k \leq p$ 上的余作用定义为

$$\delta(v_k) = \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \otimes v_l,$$

其中系数$c_{k、\ l}$ 由方程（3.1）递归定义，初始条件为 $c_{0,\ 0} = x^r g^i$。

3.2. **相对于标准基的余矩阵**。 上一小节最后描述了有限维单 Yetter-Drinfeld 模相对于标准基的作用和余作用。现在我们考察逆问题：给定任意参数 α、$\beta \in \Bbbk^*$、 r、$i \in \mathbb{Z}$、 $p \geq 0$以及标量 $a_l \in \Bbbk\,(0 \leq l \leq p)$，令 V为一个维数为 $p+1$、基为 $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$的向量空间，并赋予其由（3.2）定义的作用和余作用。一个自然的问题是， V是否因此成为 H上的 Yetter-Drinfeld 模。

一般而言，答案是否定的。例如，当 $p+1 < n$时，可得 $a_l = 0$对所有 l均成立。此外，参数 p 和 a_l 还必须经过选择，以满足相容条件（2.1）。

尽管 V可能不是一个完整的 Yetter-Drinfeld 模，但我们将证明它总是具有一个 H-余模结构。我们的策略是显式计算余作用的系数矩阵，并验证它是一个余矩阵。该矩阵的元素由方程（3.1）递归定义，下面将对此进行形式化说明。

定义 3.7. 令 $r, i \in \mathbb{Z}$和 $\beta \in \Bbbk^*$，递归定义系数 $c^{r}{}_{,\beta}{}^{i}(k,l) \in H$如下：令 $c^{r}{}_{,\beta}{}^{i}(0,0) := x^r g^i$ 并且对于 $k \geq 0,\ 0 \leq l \leq k+1$:

$$c_\beta^{r,i}(k+1,l) := \begin{cases} c_\beta^{r,i}(k,0)S(y) + \beta y c_\beta^{r,i}(k,0)S(g), & l = 0, \\ c_\beta^{r,i}(k,l)S(y) + \beta\gamma^{-l} y c_\beta^{r,i}(k,l)S(g) + c_\beta^{r,i}(k,l-1)S(g), & 0 < l < k+1, \\ c_\beta^{r,i}(k,k)S(g), & l = k+1. \end{cases}$$

对于 $p \geq 0$，定义下三角矩阵 $(p+1) \times (p+1)$ $\mathcal{A}^{r,}{}_{\beta}{}^{i}(p)$，其元素为：

$$\left(\mathcal{A}_{\beta}^{r,i}(p)\right)_{k,l} = \begin{cases} c_{\beta}^{r,i}(k,l), & 0 \leq l \leq k \leq p, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

明确地说：

$$\mathcal{A}_{\beta}^{r,i}(p) = \begin{pmatrix} c_{\beta}^{r,i}(0,0) & 0 & \cdots & 0 \\ c_{\beta}^{r,i}(1,0) & c_{\beta}^{r,i}(1,1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\beta}^{r,i}(p,0) & c_{\beta}^{r,i}(p,1) & \cdots & c_{\beta}^{r,i}(p,p) \end{pmatrix}.$$

以下性质可由定义直接得出。

注 3.8。令 r，i，t，$s \in \mathbb{Z}$ 且 α，$\beta \in \mathbb{k}^*$。

(1) 若 $x^r g^i = x^t g^s$，则对所有 $p \geq 0$，$\mathcal{A}^{r,}{}_{\beta}{}^{i}(p) = \mathcal{A}^{t,}{}_{\beta}{}^{s}(p)$。换言之，系数$c^{r,}{}_{\beta}{}^{i}(k, l)$ 仅取决于群样元 $x^r g^i$ 和标量 β。(2) 对任意 H 上的 Yetter-Drinfeld 模 V，若 $v \in V$ 是类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素，则

$$\delta(y^k \cdot v) = \sum_{l=0}^{k} c_{\beta}^{r,i}(k,l) \otimes y^l \cdot v \tag{3.3}$$

对所有 $k \geq 0$ 均成立。

为明确表示各项 $c^{r,}{}_{\beta}{}^{i}(k,l)$，我们定义以下关于$\mathbb{k}$的系数族。注意，它们仅依赖于参数 i 和 β。

定义 3.9. 令 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\beta \in \mathbb{k}^*$，在 $\mathbb{k}$中定义以下系数族：

(1) 对于 $k \geq 0$ 和 $0 \leq l \leq k$:

$$R_{\beta}^{i}(k,l) := \begin{cases} \beta\gamma^{-l} - \gamma^{k-1-i}, & 0 \leq l < k, \\ 1, & l = k. \end{cases}$$

(2) 令 $\lambda_{\beta}^{i}(0,0) := 1$，且对于 $k \geq 1$, $0 \leq l \leq k$:

$$\lambda_{\beta}^{i}(k,l) := \begin{cases} R_{\beta}^{i}(k,0)\lambda_{\beta}^{i}(k-1,0), & l = 0, \\ R_{\beta}^{i}(k,l)\lambda_{\beta}^{i}(k-1,l) + \lambda_{\beta}^{i}(k-1,l-1), & 0 < l < k, \\ 1, & l = k. \end{cases}$$

注 3.10.

(1) 对所有 $k \geq 1$，都有 $\lambda_{\beta}^{i}(k,0) = \prod_{l=1}^{k}(\beta - \gamma^{l-1-i})$。特别地，$\lambda_{\beta}^{i}(n,0) = \beta^n - 1$。
(2) 若 $\beta = \gamma^j$ 对某个 $j \in \mathbb{Z}$成立，则 $\lambda_{\beta}^{i}(k,l)$（分别地，$R_{\beta}^{i}(k,l)$）与无限维 Taft 代数 $H(n, 1, \gamma)$ 中定义的 $\lambda_{j}^{i}(k,l)$（分别地，$R_{j}^{i}(k,l)$）一致（参见[59,定义 3.8]）。

接下来，我们建立 $c^{r,}{}_{\beta}{}^{i}(k,l)$ 与 $\lambda_{\beta}^{i}(k,l)$ 之间的关系。

命题 3.11。设 $r, i \in \mathbb{Z}$ 和 $\beta \in k^*$。那么

$$c_\beta^{r,i}(k,l) = \lambda_\beta^i(k,l) y^{k-l} x^r g^{i-k}$$

对所有 $0 \le l \le k$。

证明。我们对 k进行归纳。根据定义，基础情形 $k = 0$ 成立。对于 th e 归纳步骤，假设

$$c_\beta^{r,i}(k,l) = \lambda_\beta^i(k,l) y^{k-l} x^r g^{i-k}$$

对所有 $0 \le l \le k$均成立。

对于情形 $l = k+1$，定义 3.7 立即给出 $c^{r,\ i}_{\beta}(k+1,\ k+1) = x^r g^{i-(k+1)}$。对于 $0 < l < k+1$，我们有

$$\begin{aligned}
& c_\beta^{r,i}(k+1,l) \\
= \ & c_\beta^{r,i}(k,l) S(y) + \beta\gamma^{-l} y c_\beta^{r,i}(k,l) S(g) + c_\beta^{r,i}(k,l-1) S(g) \\
= \ & \left(\lambda_\beta^i(k,l) y^{k-l} x^r g^{i-k}\right) S(y) + \beta\gamma^{-l} y \left(\lambda_\beta^i(k,l) y^{k-l} x^r g^{i-k}\right) S(g) + \\
& \left(\lambda_\beta^i(k,l-1) y^{k-l+1} x^r g^{i-k}\right) S(g) \\
= \ & \left(-\gamma^{k-i}\lambda_\beta^i(k,l) + \beta\gamma^{-l}\lambda_\beta^i(k,l) + \lambda_\beta^i(k,l-1)\right) y^{k+1-l} x^r g^{i-(k+1)} \\
= \ & \left(R_\beta^i(k+1,l)\lambda_\beta^i(k,l) + \lambda_\beta^i(k,l-1)\right) y^{k+1-l} x^r g^{i-(k+1)} \\
= \ & \lambda_\beta^i(k+1,l) y^{k+1-l} x^r g^{i-(k+1)}.
\end{aligned}$$

类似地，情形 $c^{r,\ i}_{\beta}(k+1,\ 0) = \lambda^i_\beta(k+1,\ 0) y^{k+1} x^r g^{i-(k+1)}$ 可通过类似的计算得出。这就完成了归纳步骤和证明。□

接下来，我们验证 $\mathcal{A}^{r,\ i}_{\beta}(m)$ 是一个余矩阵。首先，我们给出 $\lambda^i_\beta(k,\ l)$ 的显式公式，它类似于 [59] 中的命题 3.11。我们约定，当 $p = k$ 时，$\prod_{l=p+1}^{k} R^i_\beta(l,\ 0) = 1$（空积）。

命题 3.12. 对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\beta \in \Bbbk^*$ 和 $0 \le p \le k$，

$$\lambda_\beta^i(k,p) = \binom{k}{p}_\gamma \gamma^{-(k-p)p} \prod_{l=p+1}^{k} R_\beta^i(l,0). \tag{3.4}$$

证明。我们对 k进行归纳法。基础情形 $k = 0$ 由定义成立。假设对于固定的 $k \ge 0$ 以及所有 $0 \le p \le k$，3.4成立。考虑 $k+1$的情形。对于 $0 \le p \le k+1$:

- When $p = 0$ or $p = k+1$, (3.4) holds by definition.
- For $0 < p < k+1$, the recursive definition gives:

$$\begin{aligned}
& \lambda_\beta^i(k+1,p) \\
= \ & R_\beta^i(k+1,p)\lambda_\beta^i(k,p) + \lambda_\beta^i(k,p-1) \\
= \ & (\beta\gamma^{-p} - \gamma^{k-i}) \binom{k}{p}_\gamma \gamma^{-(k-p)p} \prod_{l=p+1}^{k} R_\beta^i(l,0) + \binom{k}{p-1}_\gamma \gamma^{-(k-p+1)(p-1)} \prod_{l=p}^{k} R_\beta^i(l,0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \gamma^{-(k+1-p)p}\left(\prod_{l=p+1}^{k} R_\beta^i(l,0)\right)\left[(\beta\gamma^{-p}-\gamma^{k-i})\gamma^p\binom{k}{p}_\gamma + \right. \\
& \left.(\beta-\gamma^{p-1-i})\gamma^{k+1-p}\binom{k}{p-1}_\gamma\right] \\
= \quad & \gamma^{-(k+1-p)p}\left(\prod_{l=p+1}^{k} R_\beta^i(l,0)\right)\left[\beta\left(\binom{k}{p}_\gamma+\gamma^{k+1-p}\binom{k}{p-1}_\gamma\right)- \right. \\
& \left.\gamma^{k-i}\left(\gamma^p\binom{k}{p}_\gamma+\binom{k}{p-1}_\gamma\right)\right] \\
= \quad & \gamma^{-(k+1-p)p}\left(\prod_{l=p+1}^{k} R_\beta^i(l,0)\right)\left(\beta\binom{k+1}{p}_\gamma-\gamma^{k-i}\binom{k+1}{p}_\gamma\right) \\
= \quad & \binom{k+1}{p}_\gamma\gamma^{-(k+1-p)p}\prod_{l=p+1}^{k+1} R_\beta^i(l,0).
\end{aligned}
$$

归纳法至此完成。 □

现在我们证明 $\mathcal{A}^r{}_{,\beta}{}^i(m)$ 是一个余矩阵。

推论 3.13. 对于所有的 $r,i\in\mathbb{Z}$, $\beta\in\Bbbk^*$ 和 $m\geq 0$, $\mathcal{A}^r{}_{,\beta}{}^i(m)$ 都是余矩阵。

证明。令 $c^r{}_{,\beta}{}^i(k,l)=0$，其中 $l>k$。对于任意 $0\leq l,k\leq m$，显然有

$$\varepsilon(c_\beta^{r,i}(k,l))=\delta_{k,l}.$$

还需证明

$$\Delta(c_\beta^{r,i}(k,l))=\sum_{p=0}^{m} c_\beta^{r,i}(k,p)\otimes c_\beta^{r,i}(p,l).$$

情形 $l>k$ 显然成立。因此，只需考虑 $0\leq l\leq k$。一方面，计算等式左边可得:

$$
\begin{aligned}
& \Delta(c_\beta^{r,i}(k,l)) \\
= \quad & \lambda_\beta^i(k,l)\Delta(y)^{k-l}\Delta(x)^r\Delta(g)^{i-k} \\
= \quad & \lambda_\beta^i(k,l)(y\otimes g+1\otimes y)^{k-l}(x\otimes x)^r(g\otimes g)^{i-k} \\
= \quad & \lambda_\beta^i(k,l)\left(\sum_{p=0}^{k-l}\binom{k-l}{p}_\gamma(y\otimes g)^{k-l-p}(1\otimes y)^p\right)(x^r\otimes x^r)(g^{i-k}\otimes g^{i-k}) \\
= \quad & \sum_{p=0}^{k-l}\binom{k-l}{p}_\gamma\lambda_\beta^i(k,l)\gamma^{-(k-(p+l))p}\left(y^{k-(p+l)}x^r g^{i-k}\otimes y^p x^r g^{i-(p+l)}\right).
\end{aligned}
$$

另一方面，对于等式右边，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m} c_{\beta}^{r,i}(k,p)\otimes c_{\beta}^{r,i}(p,l) &= \sum_{p=l}^{k} c_{\beta}^{r,i}(k,p)\otimes c_{\beta}^{r,i}(p,l)\\ &= \sum_{p=l}^{k} \lambda_{\beta}^{i}(k,p)\lambda_{\beta}^{i}(p,l) y^{k-p}x^{r}g^{i-k}\otimes y^{p-l}x^{r}g^{i-p}.\end{aligned}$$

通过比较项 $y^{k-(p+l)}x^{r}g^{i-k}\otimes y^{p}x^{r}g^{i-(p+l)}$ 的系数，对于任意 $0\le p\le k-l$，只需证明

$$\lambda_{\beta}^{i}(k,p+l)\lambda_{\beta}^{i}(p+l,l)=\binom{k-l}{p}_{\gamma}\lambda_{\beta}^{i}(k,l)\gamma^{-(k-(p+l))p}.$$

这个等式可由命题3.12直接得到。 □

3.3. 余矩阵的进一步分析。本小节将详细分析上一小节中定义的余矩阵，从而推导出关于 H 上有限维单 Yetter-Drinfeld 模的关键性质。这些性质对于我们的分类至关重要。

设 V 是 H 上的单 Yetter-Drinfeld 模，且 $\dim_{\Bbbk} V=p+1$，其中 $p\ge 0$。设 $v\in V$ 是类型为 $(\alpha,\ \beta,\ x^{r}g^{i})$ 的标准元素，其中 $\alpha,\ \beta\in\Bbbk^{*}$ 且 $r,\ i\in\mathbb{Z}$。由引理3.5，集合 $\{v,y\cdot v,\dots,y^{p}\cdot v\}$ 是 V 的一组基。相对于这组基，V 的余模结构由矩阵 $\mathcal{A}^{r,\ i}_{\ \beta}(p)$ 确定。

现在我们转而关注矩阵 $\mathcal{A}^{r,\ i}_{\ \beta}(p+1)$。出于几个原因，我们考虑高一阶的矩阵。首先，在引理 3.18中，这使我们能够证明 V 的维数由 β 和 i决定。其次，在引理 4.2中，要验证所构造的 Yetter-Drinfeld 模的相容条件，需要了解第 $(p+2)$ 行中的元素。

首先，考虑 $\beta^{n}\neq 1$ 的情形。由引理 3.6(2) 和 (3)，必有 $p=n-1$。然后，根据命题 3.12，$c^{r,\ i}_{\ \beta}(k,\ 0)\neq 0$ 对所有 $0\le k\le n$ 均成立，而 $c^{r,\ i}_{\ \beta}(n,\ l)=0$ 对所有 $1\le l\le n-1$ 均成立。因此，我们得到以下结果。

引理 3.14。设 r、$i\in\mathbb{Z}$ 和 $\beta\in\Bbbk^{*}$ 满足 $\beta^{n}\neq 1$。那么，$\mathcal{A}^{r,\ i}_{\ \beta}(n)$ 第一列中的元素全都非零，而最后一行中除首项和末项外，其余元素均为零。具体而言，

$$\mathcal{A}_{\beta}^{r,i}(n)=\begin{pmatrix} c_{\beta}^{r,i}(0,0) & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_{\beta}^{r,i}(1,0) & c_{\beta}^{r,i}(1,1) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ c_{\beta}^{r,i}(n,0) & 0 & \cdots & 0 & c_{\beta}^{r,i}(n,n)\end{pmatrix}.$$

接下来，考虑情形 $\beta^{n}=1$。我们立即得到以下结果。

引理 3.15。设 V 是 H 上的一个单 *Yetter-Drinfeld* 模，且对某个 $p\ge 0$ 有 维数$_{\Bbbk}V=p+1$。设 $v\in V$ 是一个类型为 $(\alpha,\beta,x^{r}g^{i})$ 的标准元素，其中 α、$\beta\in\Bbbk^{*}$ 以及 r、$i\in\mathbb{Z}$。

如果 $\beta^n = 1$，那么对于所有 $0 \le l \le p$，有 ${c^r}_{,\beta}{}^i(p+1,l) = 0$。明确地，

$$\mathcal{A}^{r,i}_{\beta}(p+1) = \begin{pmatrix} c^{r,i}_{\beta}(0,0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c^{r,i}_{\beta}(1,0) & c^{r,i}_{\beta}(1,1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c^{r,i}_{\beta}(p+1,p+1) \end{pmatrix}.$$

证明。 由引理 3.6(3)，我们有 $y^{p+1} \cdot v = 0$。然后，由注记 3.8(2)，得到

$$0 = \delta(y^{p+1} \cdot v) = \sum_{l=0}^{p+1} c^{r,i}_{\beta}(p+1,l) \otimes y^l \cdot v.$$

由于 $y^{p+1} \cdot v = 0$，对应于 $l = p+1$ 的项为零。因此，该等式简化为

$$\sum_{l=0}^{p} c^{r,i}_{\beta}(p+1,l) \otimes y^l \cdot v = 0.$$

由引理 3.5，集合 $\{v, y \cdot v, \ldots, y^p \cdot v\}$ 是 V 的一组基。因此，这些基元素的线性无关性意味着，对于所有 $0 \le l \le p$，均有 ${c^r}_{,\beta}{}^i(p+1,l) = 0$。□

我们接下来证明，对于所有 $0 \le l \le k \le p$，均有 ${c^r}_{,\beta}{}^i(k,l) \ne 0$。为此，我们先确定 p 的值。由于 ${c^r}_{,\beta}{}^i(p+1,0) = 0$，我们引入以下定义。我们将证明，$p$ 与下文定义的整数 m 相同，并且 m 由 β 和 i 唯一确定。

定义 3.16. 对于满足 $\beta^n = 1$的任意 r、$i \in \mathbb{Z}$ 和 $\beta \in \Bbbk^*$，我们定义 ${\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i := \overline{{\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i}(m)$，其中 $m \ge 0$ 是满足 ${c^r}_{,\beta}{}^i(m+1,0) = 0$的最小整数。

以下性质可直接由定义得出。

注 3.17.

(1) 回顾一下，${c^r}_{,\beta}{}^i(m+1,0) = 0$ 当且仅当 $\lambda^i_{\beta}(m+1,0) = 0$。因此，$m$ 是满足 $\lambda^i_{\beta}(m+1,0) = 0$的最小整数；等价地，它也是满足 $R^i_{\beta}(m+1,0) = 0$的最小整数。(2) 命题 3.12 推出，对于所有 $0 \le l \le k \le m$，$\lambda^i_{\beta}(k,l) \ne 0$。这意味着 ${\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i$ 的下三角部分（包括对角线）中的所有元素均非零。(3) 命题 3.12 推出，对于所有 $0 \le l \le m < k$，$\lambda^i_{\beta}(k,l) = 0$。因此，${\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i(m+1)$ 最后一行中的元素除最后一个外，均为零。

受注记 3.17(3) 启发，我们注意到，就最后一行而言，${\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i(m+1)$ 与${\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i(p+1)$ 具有相似的结构。现在我们继续证明 $m = p$。为此，我们首先定义一个函数 ϕ，以便给出 m 的显式表达式。对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，令 $\phi(i)$ 表示满足条件的 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中唯一的整数

$$i \equiv \phi(i) \pmod{n}.$$

引理 3.18. 设 V 是 H 上的单 *Yetter-Drinfeld* 模，且 维数$_{\Bbbk}V = p+1$，其中 $p \geq 0$。设 $v \in V$ 是类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素，其中 $\alpha, \beta \in \Bbbk^*$ 和 $r, i \in \mathbb{Z}$。若对于某个 $j \in \mathbb{Z}$ 有 $\beta = \gamma^j$，则

$$p = m = n - \phi(-i-j),$$

其中 $m \geq 0$ 是使得 $c^{r,\ {}_{\beta}{}^{i}}(m+1,\ 0) = 0$ 成立的最小整数。

证明。对于任意 $k \geq 1$，我们有

$$R^i_\beta(k,0) = \gamma^j - \gamma^{k-1-i} = \gamma^j(1 - \gamma^{k-1-i-j}).$$

由备注 3.17(1) 可知 $m = n - \phi(-i-j)$。还需证明 $p = m$.

首先，反设 $p < m$。那么备注3.17(2) 蕴含$c^{r,\ {}_{\beta}{}^{i}}(p+1,\ 0) \neq 0$，这与引理 3.15矛盾。因此，必有 $p \geq m$。

反过来，假设 $p > m$。由备注 3.17(3)，系数 $c^{r,\ {}_{\beta}{}^{i}}(m+1,\ l)$ 消失 h 对所有 $0 \leq l \leq m$ 均成立。因此，

$$\delta(y^{m+1} \cdot v) = c^{r,i}_\beta(m+1, m+1) \otimes y^{m+1} \cdot v = x^r g^{i-(m+1)} \otimes y^{m+1} \cdot v.$$

结合命题 3.4(1)，这意味着 $y^{m+1} \cdot v$ 是 V的标准元素。由于$p > m$，$y^{m+1} \cdot v \neq 0$。因此，子空间 $W = \mathrm{span}\{y^{m+1} \cdot v, \ldots, y^p \cdot v\}$ 是 V的非零真 Yetter-Drinfeld 子模。这与 V的单性矛盾。因此，我们得出 $p = m$。 □

我们将引理 3.14、引理 3.15、注 3.17和引理3.18中得到的结果总结为以下命题。

命题 3.19。设 V 是 H 上的单 *Yetter-Drinfeld* 模，且对于某个 $p \geq 0$，有 维数 $_{\Bbbk}V = p+1$。设 $v \in V$ 是类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素，其中 α、$\beta \in \Bbbk^*$ 以及 r、$i \in \mathbb{Z}$。

(1) 若 $\beta^n \neq 1$，则 $p = n-1$。此时，$\mathcal{A}^{r,\ {}_{\beta}{}^{i}}(n)$ 的第一列元素均非零，最后一行除首尾两项外均为零。具体而言，

$$\mathcal{A}^{r,i}_\beta(n) = \begin{pmatrix} c^{r,i}_\beta(0,0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c^{r,i}_\beta(1,0) & c^{r,i}_\beta(1,1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ c^{r,i}_\beta(n,0) & 0 & \cdots & 0 & c^{r,i}_\beta(n,n) \end{pmatrix}.$$

(2) 若 $\beta^n = 1$，则 $\beta = \gamma^j$，其中某个 $j \in \mathbb{Z}$。于是 $p = n - \phi(-i-j)$。在这种情况下，$\mathcal{A}^{r,\ {}_{\beta}{}^{i}}(p+1)$ 的第一列中除最后一个外，其余元素均非零；最后一行中除最后一个外，其余元素均为零。具体而言，

$$\mathcal{A}^{r,i}_\beta(p+1) = \begin{pmatrix} c^{r,i}_\beta(0,0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c^{r,i}_\beta(1,0) & c^{r,i}_\beta(1,1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c^{r,i}_\beta(p+1,p+1) \end{pmatrix}.$$

我们以以下两个推论结束本节。第一个推论断言， H 上的有限维单 Yetter-Drinfeld 模的标准元素在相差一个标量因子的意义下唯一。

推论 3.20。设 V 是一个关于 H 的单 *Yetter-Drinfeld* 模，且 维数$_{\Bbbk} V = p+1$，其中 $p \geq 0$。设 $v \in V$ 是一个类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素，其中 α、$\beta \in \Bbbk^*$ 以及 r、$i \in \mathbb{Z}$。若 w 是 V 的任意标准元素，则 $w = \lambda v$，其中 $\lambda \in \Bbbk^*$。

证明。根据引理 3.5，集合 $\{v, y \cdot v, \ldots, y^p \cdot v\}$ 是 V 的一组基。由命题 3.4(1)，对每个 $0 \leq k \leq p$，有

$$g \cdot (y^k \cdot v) = \beta \gamma^{-k} (y^k \cdot v).$$

因此，向量 v、$y \cdot v$、.....、$y^p \cdot v$ 是 g 的特征向量，对应于互不相同的特征值 $\beta\gamma^{-k}$。由于 w 是一个标准元素，它也是 g 的特征向量。因此，对于某个 $\lambda \in \Bbbk^*$ 和 $0 \leq k \leq p$，有 $w = \lambda y^k \cdot v$。此外，存在一个元素 $h \in G(H)$，使得

$$h \otimes w = \delta(w) = \lambda \delta(y^k \cdot v) = \lambda \sum_{l=0}^{k} c_{\beta}^{r,i}(k,l) \otimes y^l \cdot v.$$

比较两边基元素的系数可得，对于所有$0 \leq l < k$，${c^r}_{,\beta}{}^i(k,l) = 0$。然而，根据命题 3.19，矩阵 ${\mathcal{A}^r}_{,\beta}{}^i(p)$ 的第一列包含非零项（具体而言，${c^r}_{,\beta}{}^i(k,0) \neq 0$），这与前面的推论矛盾，除非$k = 0$。因此，我们必有 $k = 0$，这意味着 $w = \lambda v$。□

第二个结果指出，两个H 上的有限维单 Yetter-Drinfeld 模同构，当且仅当它们具有相同类型的标准元素。若存在 $\alpha, \beta \in \Bbbk^*$ 和 $r, i \in \mathbb{Z}$，使得 V和 W都包含一个类型为（$\alpha, \beta, x^r g^i$）的标准元素，则称两个 Yetter-Drinfeld 模 V 和 W 具有相同类型的标准元素 。

推论 3.21. 设 V和 W 是H上的两个有限维单 *Yetter-Drinfeld* 模。那么， V 与 W 同构，当且仅当它们具有相同类型的标准元素。

证明。若 V 与 W同构，则容易看出它们具有相同类型的标准元素。反过来，假设存在 α, $\beta \in \Bbbk^*$和 $r, i \in \mathbb{Z}$，使得 $v \in V$是类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素，且 $w \in W$是类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素。由命题 3.19，存在某个 $p \geq 0$，使得 $\dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk} W = p+1$。由引理 3.5，集合 $\{v, y \cdot v, \ldots, y^p \cdot v\}$ 是 V 的一组基，而集合 $\{w, y \cdot w, \ldots, y^p \cdot w\}$ 是 W 的一组基。

定义线性映射 $f\colon V \to W$，令 $f(y^k \cdot v) = y^k \cdot w$ 对所有 $0 \leq k \leq p$均成立。容易验证， f 是 Yetter-Drinfeld 模的一个同构。这就完成了证明。□

4. Classification of Simple Yetter-Drinfeld Modules over H

本节将对 H 上有限维单的 Yetter-Drinfeld 模给出完整分类，明确描述其结构并确定其同构类。

本节安排如下。在第 4.1 节中，我们给出这些模在 H 上的分类。随后，在第4.2 节中，我们证明，这些模中的一部分可以在代数 $A(d, m, \gamma, 1)$ 上实现为适当参数 d 和 m对应的单 Yetter-Drinfeld 模。

4.1. H 上的单 Yetter-Drinfeld 模。 根据推论 3.21， V 的结构完全由其标准元素的类型决定。因此，要对 H 上的有限维单 Yetter-Drinfeld 模进行分类，只需构造与每种标准元素类型相对应的 Yetter-Drinfeld 模。

对于满足 $\alpha^w = \beta^n$ 的任意标量 α、$\beta \in \Bbbk^*$ 和整数 r、$i \in \mathbb{Z}$，我们定义模$V(\alpha$、β、$x^r g^i)$ 如下：

- Let $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ be a $\Bbbk$-basis of $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$, where
$$m = \begin{cases} n - \phi(-i-j), & \text{if } \beta = \gamma^j \text{ for some } j \in \mathbb{Z}, \\ n-1, & \text{if } \beta^n \neq 1; \end{cases}$$
- x 的作用定义为：对于 $0 \le k \le m$， 有
$$x \cdot v_k = \alpha v_k;$$
- g 的作用定义为：对于 $0 \le k \le m$， 有
$$g \cdot v_k = \beta \gamma^{-k} v_k; \tag{4.1}$$
- y 的作用定义为：对于 $0 \le k \le m$， 有
$$y \cdot v_k = \begin{cases} v_{k+1}, & 0 \le k < m, \\ (1-\beta^n) v_0, & k = m; \end{cases}$$
- 余作用定义为：对于 $0 \le k \le m$， 有
$$\delta(v_k) = \sum_{l=0}^{k} c_\beta^{r,i}(k,l) \otimes v_l.$$

注 4.1. 令 $V = V(\alpha, \beta, x^r g^i)$.

(1) 由注 3.8(1) 可知，模结构定义良好。也就是说，若 $x^r g^i = x^t g^s$ 属于 H，则为 $V(\alpha$, $\beta, x^r g^i)$ 和 $V(\alpha, \beta, x^t g^s)$ 定义的余作用一致。(2) 元素 v_0 是类型为（$\alpha, \beta, x^r g^i$）的标准元素。(3) 由 V 诱导的编织是三角型的。

我们首先证明，上述构造的模确实是单 Yetter-Drinfeld 模。

引理 4.2. 对于满足条件 $\alpha^w = \beta^n$ 的任意标量 α、$\beta \in \Bbbk^*$ 和整数 r、$i \in \mathbb{Z}$， 模$V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 是 H 上的单 *Yetter-Drinfeld* 模。

证明。 令 $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ 为 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 在（4.1）中定义的基，并将$V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 简记为 V。我们先证明 V是一个 Yetter-Drinfeld 模。

由引理2.4和推论3.13， V 是一个左 H-余模。容易验证， V 也是一个左 H-模。接下来只需验证对所有$h \in H$ 和 $v \in V$，相容条件（2.1）成立。定义

$$\rho(h \cdot v) = h_{(1)} v_{(-1)} S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot v_{(0)}.$$

根据引理 2.2，只需证明对所有 $0 \le k \le m$:

$$\delta(x \cdot v_k) = \rho(x \cdot v_k), \tag{4.2}$$
$$\delta(g \cdot v_k) = \rho(g \cdot v_k), \tag{4.3}$$
$$\delta(y \cdot v_k) = \rho(y \cdot v_k). \tag{4.4}$$

(4.2) 的验证是显然的。对于 (4.3)，我们计算：

$$\begin{aligned}\rho(g\cdot v_k) &= \sum_{l=0}^{k} gc_\beta^{r,i}(k,l)g^{-1}\otimes g\cdot v_l\\ &= \sum_{l=0}^{k} g\left(\lambda_\beta^i(k,l)y^{k-l}x^r g^{i-k}\right)g^{-1}\otimes g\cdot v_l\\ &= \sum_{l=0}^{k}\gamma^{-(k-l)}\lambda_\beta^i(k,l)y^{k-l}x^r g^{i-k}\otimes \beta\gamma^{-l}v_l\\ &= \beta\gamma^{-k}\sum_{l=0}^{k} c_\beta^{r,i}(k,l)\otimes v_l\\ &= \delta(g\cdot v_k),\end{aligned}$$

因此该条件成立。

为验证 (4.4)，记 $y\cdot v_m$ 为 v_{m+1}。根据 $c^r{}_\beta{}^i(k,l)$ 的定义，我们计算得

$$\begin{aligned}\rho(y\cdot v_k) &= \sum_{l=0}^{k}\left(c_\beta^{r,i}(k,l)S(y)\otimes 1\cdot v_l + c_\beta^{r,i}(k,l)S(g)\otimes y\cdot v_l + yc_\beta^{r,i}(k,l)S(g)\otimes g\cdot v_l\right)\\ &= \sum_{l=0}^{k+1} c_\beta^{r,i}(k+1,l)\otimes v_l\end{aligned}$$

对所有 $0\le k\le m$。这证明了 4.4) 对 $0\le k<m$成立。

对于情形 $k=m$，我们考虑以下两种情况。

情形 1： $\beta=\gamma^j$ **对某个** $j\in\mathbb{Z}$ **成立**。

在此情形下，$m=n-\phi(-i-j)$ 和 $v_{m+1}=(1-\beta^n)v_0=0$。根据命题 3.19(2)，我们有 e

$$\rho(y\cdot v_m)=\sum_{l=0}^{m+1} c_\beta^{r,i}(m+1,l)\otimes v_l=0=\delta(y\cdot v_m).$$

情形 2： $\beta^n\neq 1$。

在此情形下，$m=n-1$ 和 $v_n=(1-\beta^n)v_0$。根据命题 3.19(1)，我们有

$$\begin{aligned}\rho(y\cdot v_{n-1}) &= \sum_{l=0}^{n} c_\beta^{r,i}(n,l)\otimes v_l\\ &= c_\beta^{r,i}(n,0)\otimes v_0 + c_\beta^{r,i}(n,n)\otimes v_n\\ &= \lambda_\beta^i(n,0)y^n x^r g^{i-n}\otimes v_0 + x^r g^{i-n}\otimes(1-\beta^n)v_0\\ &= (1-\beta^n)x^r g^i\otimes v_0\\ &= \delta(y\cdot v_{n-1}).\end{aligned}$$

因此，相容条件成立，且 V 是一个 Yetter-Drinfeld 模。

最后，我们证明 V 是单的。设 W 是 V的一个非零 Yetter-Drinfeld 子模；我们证明 $W=V$。根据引理 3.3，我们可以选取一个标准元素 w，属于 W。与推论 3.20中的论证类似，我们可以证明，对于某个 $w=\lambda v_0$，有 $\lambda\in\Bbbk^*$。由于 v_0作为模生成 V（根据基的构造），因此 $W=V$。□

命题 3.1 保证每个 V 上的单 Yetter-Drinfeld 模 H 都是有限维的。此外，引理3.3 和推论 3.20 保证每个这样的模都含有一个标准元素，且该元素在相差一个标量因子的意义下唯一。由于 V的结构完全由其标准元素的类型决定（推论 3.21），我们现在得到了 H 上的单 Yetter-Drinfeld 模的完整分类及其同构判据。我们在下述定理中总结这些结果。

定理 4.3. 设 $H = B(n, w, \gamma)$。

(1) H 上的每个单 *Yetter-Drinfeld* 模都同构于 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$，其中标量 $\alpha, \beta \in \Bbbk^*$ 和整数 r, $i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\alpha^w = \beta^n$。(2) 两个这样的模 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 和 $V(\alpha', \beta', x^{r'} g^{i'})$ 同构，当且仅当

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \textit{and} \quad x^r g^i = x^{r'} g^{i'}.$$

4.2. **与 $A(d, m, \gamma, 1)$ 上的单 Yetter-Drinfeld 模的联系。** 本小节证明，当 α 和 β 是单位根时，模 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$可通过适当选取 d 和 m，实现为 $A(d, m, \gamma, 1)$上的单 Yetter-Drinfeld 模。

回忆一下， R_∞ 表示所有单位根构成的群。令 $\mathcal{T}$ 表示所有标准元素的类型集合。我们将 $\mathcal{T}$ 划分为两个子集 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$，如下所示:

$$\mathcal{T} = \left\{(\alpha, \beta, x^r g^i) \mid \alpha, \beta \in \Bbbk^*,\, r, i \in \mathbb{Z},\ \text{and } \alpha^w = \beta^n\right\}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{T}_1 = \left\{(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T} \mid \alpha, \beta \in R_\infty\right\}, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{T}_2 = \left\{(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T} \mid \alpha, \beta \notin R_\infty\right\}. \tag{4.7}$$

注意，条件 $\alpha^w = \beta^n$ 意味着 $\alpha \in R_\infty$ 当且仅当 $\beta \in R_\infty$。因此，不存在混合情形，并且我们有分解 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$。

注意，如果 β 是一个 d次单位根，那么它也是一个 dn次单位根。换句话说，我们可以选择 d，使得 $n \mid d$。

引理 4.4. 对于任意$(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T}_1$，假设 α 是一个 m次单位根，且 β 是一个d次单位根，使得 $n \mid d$。那么， $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 是一个在$A(d, m, \gamma, 1)$上的单 *Yetter-Drinfeld* 模。

证明。 证明与引理4.2的证明相同。 □

我们以如下评注结束本节。

注 4.5。

(1) 注意，如果 α 是 m 次单位根，那么它也是 $2m$ 次单位根；类似地，如果 β 是 d 次单位根，那么它也是 $2d$ 次单位根。因此，根据引理 4.4， $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 也是 $A(2d, 2m, \gamma, 1)$ 上的单 Yetter-Drinfeld 模。这表明该模有多种实现（即实现并不唯一）。**(2)** 如果 $(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T}_2$，那么 $V(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 无法实现为任何有限维尖点 Hopf 代数上的 Yetter-Drinfeld 模。原因很简单：有限维尖点 Hopf 代数的群样元具有有限阶。因此，它们对任何特征向量（例如标准元素）的作用必定是乘以一个单位根。这与 $\mathcal{T}_2$ 的定义相矛盾，因为 α 和 β 不是单位根。

5. Finite-dimensional Nichols algebras over the simple modules $V(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$

本节中，我们将分类所有满足相关 Nichols 代数 $\mathcal{B}(V(\alpha,\beta,x^r g^i))$ 为有限维的 Yetter-Drinfeld 模 $V(\alpha,\beta,x^r g^i)$。根据类型 $(\alpha,\beta,x^r g^i)$ 是否属于 $\mathcal{T}_1$ 或 $\mathcal{T}_2$，我们将讨论分为两个主要情形。

5.1. 情形 $(\alpha,\beta,x^r g^i) \in \mathcal{T}_1$。

我们首先讨论第一种情形。设 α 是一个本原 m次单位根，且 β 是一个满足 $n \mid d$的 d次单位根。在本小节中，我们固定整数 d 和 m。设 ξ 是一个本原 d 次单位根。设$G = \langle g\rangle \times \langle x\rangle$ 为阶数分别为 d和 m的循环群的直积，生成元分别为 g和 x。令 A_0和 A_1分别表示代数 $A(d,m,\gamma,0)$ 和 $A(d,m,\gamma,1)$，并令 $V = V(\alpha,\beta,x^r g^i)$。

我们首先考虑以下情形 $n = 1$。在这种情况下， $V = \Bbbk\{v\}$ 是一个一维 Yetter- Drinfeld 模，其编织由 $c(v\otimes v) = \alpha^r\beta^i v\otimes v$给出。由于 α 和 β 都是单位根，标量 $\alpha^r\beta^i$ 也为单位根。因此，Nichols 代数 $\mathcal{B}(V)$ 是有限维的，当且仅当 $\alpha^r\beta^i \neq 1$ （见注 2.7）。

现在假设 $n \geq 2$。回顾引理 2.15 和引理 2.16， A_0 可实现为 $\Bbbk G$上的 Nichols 代数的玻色化，而 A_1 是 A_0的 2-余循环变形。我们采用其中使用的记号。

由引理 4.4， V 是 A_1上的单 Yetter-Drinfeld 模。因此，判断 Nichols 代数 $\mathcal{B}(V)$ 在范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中是否有限维，可归结为在范畴 ${}^{A_1}_{A_1}\mathcal{YD}$中回答同一问题。利用 Andruskiewitsch 和 Angiono 的结果[4], ，我们可以将其转化为判断对角型 Nichols 代数是否有限维的问题。Heckenberger 利用根系完成了这一分类 [22, 23]。

我们首先回顾单的 Yetter-Drinfeld 模之间的双射对应 es

O以及 $\Bbbk G$ 与 $A_0 = \mathcal{B}(V_0)\#\Bbbk G$ 上的单的 Yetter-Drinfeld 模之间的双射对应，该对应见 [4, 8]。

范畴 ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 是半单的，其简单对象由满足 $0 \leq d_1, d_2 < d$和 $0 \leq m_1, m_2 < m$的整数元组 (d_1,d_2,m_1,m_2) 参数化。具体而言，与元组 (d_1,d_2,m_1,m_2) 相关联的简单对象 $\lambda^{d_2,d_1}{}^{m_2}_{,m_1}$ 是由元素 v 生成的一维向量空间 $\Bbbk\{v\}$ ，其作用和余作用分别定义如下:

- 作用定义为
$$g\cdot v = \xi^{d_1} v \quad \text{and} \quad x\cdot v = \alpha^{m_1} v;$$
- 余作用定义为
$$\delta(v) = g^{d_2}x^{m_2}\otimes v.$$

注意，引理 2.15 中描述的模 V_0 对应于 $\lambda^{1}{}^{0}_{,d_1\ 0,}$，前提是$\xi^{d_1} = \gamma$。此外，对于任意整数 $d_1,d_2,m_1,m_2 \in \mathbb{Z}$，记号 $\lambda^{d_2,d_1}{}^{m_2}_{,m_1}$ 都有定义。此外，我们有如下恒等

$$\lambda^{d_2,m_2}_{d_1,m_1} = \lambda^{d_2',m_2'}_{d_1',m_1'}$$

当 $d_1 \equiv d_1'$ （模 d）、 $d_2 \equiv d_2'$ （模 d）、 $m_1 \equiv m_1'$ （模 m）且 $m_2 \equiv m_2'$ （模 m）时。

给定任意一个 $\Bbbk G$上的单 Yetter-Drinfeld 模 λ ，取 $W = V_0 \oplus \lambda$。Nichols 代数$\mathcal{B}(W)$可分解为 $\mathcal{B}(W) = \mathcal{K}\#\mathcal{B}(V_0)$，其中 $\mathcal{K}$ 是范畴中的 Hopf 代数

${}^{A_0}_{A_0}\mathcal{YD}$。定义

$$L(\lambda) = \mathrm{ad}_c\, \mathcal{B}(V)(\lambda).$$

那么 $L(\lambda) \subset \mathcal{K}$ 是一个关于 A_0 的单 Yetter-Drinfeld 模；见 [8, 第 3 节。3]此外，我们有以下结果。

命题 5.1. 设 $n \geq 2$。则

(1) 映射 $\lambda^{d_2,d_1}{}^{m_2}_{,m_1} \mapsto L(\lambda^{d_2,d_1}{}^{m_2}_{m_1,})$在 ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 的简单对象与 ${}^{A_0}_{A_0}\mathcal{YD}$ 的简单对象之间建立双射对应，对所有 $0 \leq d_1, d_2 < d$ 及 $0 \leq m_1, m_2 < m$ 均成立。(2) *Nichols* 代数 $\mathcal{B}(L(\lambda^{d_2,d_1}{}^{m_2}_{m_1,}))$ 是有限维的，当且仅当 $\mathcal{B}(V_0 \oplus \lambda^{d_2,d_1}{}^{m_2}_{m_1,})$是有限维的。

证明。 （1）由 [8, 引理 3.3 和命题 3.5] 以及 [4, 命题 2.9] 得出。（2）由 [4, 命题 2.10] 得出。□

利用引理 2.16中所述的 2-余循环，我们可以将确定 $\mathcal{B}(V)$ 是否有限维的问题，转化为确定一个对角型 Nichols 代数是否有限维的问题。我们采用上文引入的记号。

推论 *5.2.* 设 $n \geq 2$。若 $(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T}_1$，则 $\mathcal{B}(V(\alpha, \beta, x^r g^i))$ 有限维，当且仅当 $\mathcal{B}(W(\alpha, \beta, x^r g^i))$ 有限维，其中 $W(\alpha, \beta, x^r g^i) = V_0 \oplus V_1$。这里， V_0如引理 *2.15* 中所述，而 $V_1 = \Bbbk\{v\}$ 表示由 $\Bbbk G$ 定义的 *Yetter-Drinfeld* 模

$$g \cdot v = \beta^{-1} v, \quad x \cdot v = \alpha v, \quad \textit{and} \quad \delta(v) = x^r g^{-i} \otimes v.$$

证明。 由定理 2.10和命题 5.1，只需建立一个同构 $(L(V_1))_\sigma \simeq V(\alpha, \beta, x^r g^i)$.

回忆一下， $V_1 = \Bbbk\{v\}$。我们考察将元素 v 视为 $L(V_1) \subset \mathcal{K}$ 中的元素时，其作用与余作用。作为 ${}^{\mathcal{B}(V_0}_{\mathcal{B}\ V_0}{}^{\Bbbk G}_{)\#()\#\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 中的对象，直接计算可得:

$$(1\#g) \cdot v = \beta^{-1} v, \quad (1\#x) \cdot v = \alpha v, \quad \text{and} \quad \delta(v) = (1\#x^r g^{-i}) \otimes v.$$

将 A_0 与 $\mathcal{B}(V_0)\#\Bbbk G$ 通过引理 2.15中的同构 ψ 相识别后， v 作为 A_0 上的 Yetter-Drinfeld 模元素时，其作用与余作用变为:

$$g \cdot v = \beta v, \quad x \cdot v = \alpha v, \quad \text{and} \quad \delta(v) = x^r g^i \otimes v.$$

由于 $L(V_1)$ 是单的，扭曲模 $(L(V_1))_\sigma$ 在 A_1 上仍然是单的。我们验证元素 v 上的扭曲结构:

$$g \cdot_\sigma v = \beta v, \quad x \cdot_\sigma v = \alpha v, \quad \text{and} \quad \delta(v) = x^r g^i \otimes v.$$

这表明 $(L(V_1))_\sigma$ 含有一个类型为 $(\alpha, \beta, x^r g^i)$ 的标准元素。通过类似于推论 3.21的论证，此类单模的同构类由该标准元素唯一确定。因此，$(L(V_1))_\sigma \simeq V(\alpha, \beta, x^r g^i)$。□

注意到 $W(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$ 关于基 $\{y, v\}$ 是一个对角型编织向量空间。因此，可以利用 Heckenberger 分类 [22, 23], 来确定其 Nichols 代数是否为有限维；该分类建立了有限维对角型 Nichols 代数与某些广义 Dynkin 图之间的对应关系。现在我们继续应用这一理论。

在基元素上， $c(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$ 的编织由下式给出：

$$\begin{array}{lll} c(y\otimes y) &=& \gamma y\otimes y, \qquad\qquad c(y\otimes v)=\beta^{-1}v\otimes y,\\ c(v\otimes y) &=& \gamma^{-i}y\otimes v, \qquad\qquad c(v\otimes v)=\alpha^r\beta^i v\otimes v. \end{array} \tag{5.1}$$

相应的编织矩阵 $\mathbf{q}=(q_{ij})_{2\times 2}$ 为

$$\mathbf{q}=\begin{pmatrix} \gamma & \beta^{-1} \\ \gamma^{-i} & \alpha^r\beta^i \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

因此，广义 Dynkin 图 $D(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$ 为：

$$\underset{\bigcirc}{\gamma} \qquad \underset{\bigcirc}{\alpha^r\beta^i} \qquad \text{or} \qquad \underset{\bigcirc}{\gamma}\ \ \underset{\bigcirc}{\beta^{-1}\gamma^{-i}}\ \ \underset{\bigcirc}{\alpha^r\beta^i} \tag{5.3}$$

这取决于乘积 $q_{12}q_{21}=\gamma^{-i}\beta^{-1}$ 是否等于 1。

注5.3。注意，若 $\alpha^r=1$ 且 $\beta=\gamma^j$，则广义 Dynkin 图$D(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$ 与 $D_{i,\ j}$第 [59, 5 节2]中给出的图一致。

秩为 2 的算术根系所对应的广义 Dynkin 图列于 [22, 表 1]中。这些图取决于固定参数 $q,\ \zeta\in\Bbbk^*$。按照 [36], 中的记号，我们将它们称为 Heckenberger 图。每个图的索引为$H_{k,\ l}$，其中 k 表示行号， l 表示该行中从左起的位置向右。例如，$H_{4,1}$ 表示图 $\underset{\bigcirc}{q}\ \underset{\bigcirc}{q^{-2}}\ \underset{\bigcirc}{q^2}$，其中 $q\in\Bbbk^*$，$n\{-1,1\}$。Heckenberger 图的指标集合如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\ :=\ \{\ & (1,1),(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(5,1),(5,2),(6,1),(6,2),(7,1),(7,2),\\ & (8,1),(8,2),(8,3),(8,4),(8,5),(9,1),(9,2),(9,3),(10,1),(10,2),(10,3),\\ & (11,1),(12,1),(12,2),(12,3),(13,1),(13,2),(13,3),(13,4),(14,1),(14,2),\\ & (15,1),(15,2),(15,3),(15,4),(16,1),(16,2),(16,3),(16,4),(17,1),(17,2)\ \}. \end{aligned}$$

利用推论 5.2 和 [22, 推论 6], ，我们可以通过 $\mathcal{B}(V(\alpha,\beta,x^r g^i))$ 来判定 $D(\alpha,\beta,x^r g^i)$ 是否有限维，具体表述如下引理。

引理5.4. 设 $n\geq 2$ *and* $(\alpha,\beta,x^r g^i)\in\mathcal{T}_1$。*Nichols* 代数 $\mathcal{B}(V(\alpha,\beta,x^r g^i))$ 有限维，当且仅当 $D(\alpha,\beta,x^r g^i)=H_{k,l}$ 对于某个 $(k,l)\in\mathcal{I}$ 以及 $\alpha^r\beta^i\neq 1$。

注5.5。

(1) 实际上，只要 $(k,l)\neq(1,1)$，条件 $\alpha^r\beta^i\neq 1$ 就自动满足。在这种情况下， $\mathcal{B}(V(\alpha,\beta,x^r g^i))$ 有限维，当且仅当 $D(\alpha,\beta,x^r g^i)=H_{k,l}$。(2) 请回想，我们最初在第 2.5 节末尾固定了 Hopf 代数 $H=B(n,w,\gamma)$，此前的讨论均基于这一约定。然而，为了对这类 Hopf 代数上的所有有限维 Nichols 代数进行分类，我们还必须考虑结构参数 n, w 和 γ。为此，此处引入记号 $V(n,w,\gamma,\alpha,\beta,x^r g^i)$，以明确表示第 4.1 节中构造的、定义在 Hopf 代数 $B(n,w,\gamma)$ 上的 Yetter-Drinfeld 模 $V(\alpha,\beta,x^r g^i)$。相应地， $D(n,w,\gamma,\alpha,\beta,x^r g^i)$ 表示其对应的广义Dynkin图，如下文所述。

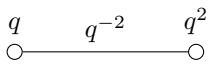
回顾一下，对于任意整数 $m\geq 1$， R_m 表示本原 m 次单位根的集合，而 R_∞ 表示所有单位根构成的群。接下来，我们要确定所有满足条件的六元组 $(n,\ w,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$，使得其对应的图 $D(n,\ w,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$ 与某个

Heckenberger 图重合。具体而言，我们考虑满足以下基本条件的六元组： $n \geq 2$ 和 $w \geq 1$ 是整数， $\gamma \in R_n$、 r， $i \in \mathbb{Z}$，以及 α， $\beta \in R_\infty$ 满足关系式 $\alpha^w = \beta^n$。

我们的分类策略如下：首先，根据顶点的标记确定 γ，进而确定整数 n。其次，对于任意选定的整数 $i \in \mathbb{Z}$，边标记唯一确定标量 β。最后，我们刻画其余参数 α、 r 和 w。注意，我们不为 α、 r 和 w 指定具体取值，而是建立它们必须满足的代数方程。

现在，我们将这一策略应用于具体的 Heckenberger 图 $H_{4,\ 1}$， $H_{6,\ 2}$， $H_{10,\ 1}$，以及 $H_{16,\ 1}$。我们逐一考察每种情形。

图 $H_{4,\ 1}$。 图 $H_{4,\ 1}$ 如下：



$$\text{with } q \in \Bbbk^* \setminus \{-1, 1\}.$$

这些顶点分别标记为不同的标量 q 和 q^2。因此， γ 有两种可能的识别方式。

情形 1： $\gamma = q$。由于 $q \in \Bbbk^* \setminus \{-1, 1\}$，我们有 $\gamma \neq \pm 1$，这意味着 $n \geq 3$。对于任意选定的整数 $i \in \mathbb{Z}$，边标记 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = q^{-2}$ 上的条件变为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \gamma^{-2}$，从而得到

$$\beta = \gamma^{2-i}.$$

在确定了 n， i 和 β 后，我们考虑剩余的参数 α， w， r。代入 $\beta = \gamma^{2-i}$ 到关系式 $\alpha^w = \beta^n$ 和 $\alpha^r\beta^i = q^2 = \gamma^2$中，我们得到以下条件

$$\alpha^w = \beta^n = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^r = \gamma^{i^2-2i+2}.$$

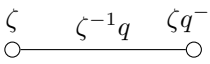
情形 2： $\gamma = q^2$。在此情形下， $n \geq 2$。类似地，对于任意选定的 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = q^{-2}$ 变为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \gamma^{-1}$，这意味着

$$\beta = \gamma^{1-i}.$$

最后，我们确定 α， w， r。关系式 $\alpha^r\beta^i = q$意味着 $(\alpha^r\beta^i)^2 = q^2 = \gamma$。将$\beta = \gamma^{1-i}$ 代入关系式 $\alpha^w = \beta^n$ 和 $\alpha^{2r}\beta^{2i} = \gamma$，得到：

$$\alpha^w = \beta^n = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^{2r} = \gamma^{2i^2-2i+1}.$$

图 $H_{6,\ 2}$。 图 $H_{6,\ 2}$ 如下所示：



$$\text{with } \zeta \in R_3,\ q \in \Bbbk^* \setminus \{1, \zeta, \zeta^2\}.$$

显然， $\zeta \neq \zeta q^{-1}$，因为 $q \neq 1$。因此，这些顶点互不相同，而 γ有两种可能的识别方式。

情形 1： $\gamma = \zeta$。由于 $\gamma \in R_3$，我们立即得到 $n = 3$。对于任意选定的整数 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \gamma^{-1}q$。由于 β， γ 是单位根， q 也必定是单位根。由约束 $q \in \Bbbk^* \setminus \{1, \zeta, \zeta^2\}$，我们推知 $q \in R_m$，其中 $m = 2$ 或$m \geq 4$。这等价于要求 $\beta \in R_m$，其中 $m = 2$ 或 $m \geq 4$。最后，我们确定 α 的关系。将 β 的表达式代入顶点方程，可得参数的如下分类：

$$\alpha^w = \beta^3 \quad \text{and} \quad \alpha^r = \beta^{1-i}\gamma^i.$$

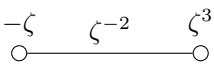
情形 2： $\gamma = \zeta q^{-1}$。在这种情况下，我们有 $n = 2$ 或 $n \geq 4$。同样，对于任意选定的 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \zeta^{-1}q = \gamma^{-1}$ 意味着

$$\beta = \gamma^{1-i}.$$

最后，利用第一个顶点的标签 $\alpha^r\beta^i = \zeta$，并代入 $\beta = \gamma^{1-i}$，我们推得 $\alpha^r\gamma^{i-i^2} = \zeta$。因此，这些参数满足：

$$\alpha^w = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^r\gamma^{i-i^2} \in R_3.$$

图 $H_{10,\ 1}$。图 $H_{10,\ 1}$ 为：



$$\text{with } \zeta \in R_9.$$

显然，由于 $\zeta \in R_9$，这些顶点彼此不同。因此，有两种情形。

情形 1： $\gamma = -\zeta$。显然，$n = 18$。对于任意选定的整数 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \zeta^{-2}$。由于 $\gamma = -\zeta$，我们有 $\zeta^{-2} = (-\gamma)^{-2} = \gamma^{-2}$。因此，该条件化简为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \gamma^{-2}$，从而得到

$$\beta = \gamma^{2-i}.$$

现在我们确定 α。利用第二个顶点的标签 $\alpha^r\beta^i = \zeta^3$，并注意到 t $\zeta^3 = (-\gamma)^3 = -\gamma^3 = \gamma^{12}$（因为 $\gamma^9 = -1$），我们代入 $\beta = \gamma^{2-i}$，得到：

$$\alpha^w = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^r = \gamma^{i^2-2i+12}.$$

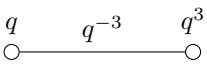
情形 2： $\gamma = \zeta^3$。由于 $\zeta \in R_9$，我们有 $\gamma \in R_3$，因此 $n = 3$。类似地，对于任意选定的 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \zeta^{-2}$ 意味着

$$\beta = \zeta^{2-3i}.$$

最后，利用第一个顶点 $\alpha^r\beta^i = -\zeta$ 的标记，我们代入 β，得到 α。注意，$\alpha^w = \beta^3 = (\zeta^{2-3i})^3 = \zeta^{6-9i} = \zeta^6$。因此，参数分类如下：

$$\alpha^w = \zeta^6 \quad \text{and} \quad \alpha^r = -\zeta^{3i^2-2i+1}.$$

图 $H_{11,\ 1}$。图 $H_{11,\ 1}$ 由下式给出：



$$\text{with } q \in \Bbbk^* \setminus \{-1, 1\},\ q \notin R_3.$$

显然，这些顶点互不相同。因此，存在两种情形。

情形 1： $\gamma = q$。由于 $q \notin R_3$ 和 $q \neq \pm 1$，我们有 $n \geq 4$。对于任意选定的整数 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件意味着

$$\beta = \gamma^{3-i}.$$

利用第二个顶点的标签，我们得到如下分类：

$$\alpha^w = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^r = \gamma^{i^2-3i+3}.$$

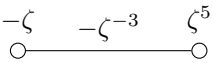
情形 2： $\gamma = q^3$。在此情形下，$n \geq 2$。类似地，对于任意选定的 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件推出

$$\beta = \gamma^{1-i}.$$

利用第一个顶点 $\alpha^r\beta^i = q$ 的标记，这意味着 $(\alpha^r\beta^i)^3 = \gamma$，我们得到：

$$\alpha^w = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^{3r} = \gamma^{3i^2-3i+1}.$$

图 $H_{16,\ 1}$. 图 $H_{16,\ 1}$ 如下所示:



$$\text{with } \zeta \in R_{15}.$$

显然，顶点互不相同，因为 $\zeta \in R_{15}$。因此，有两种情形。

情形 1: $\gamma = -\zeta$。显然， $n = 30$。对于任意选定的整数 $i \in \mathbb{Z}$，边标签条件为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = -\zeta^{-3}$。由于 $\gamma = -\zeta$，我们有 $-\zeta^{-3} = -(-\gamma)^{-3} = -(-1)^{-3}\gamma^{-3} = \gamma^{-3}$。因此，该条件简化为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = \gamma^{-3}$，从而得到

$$\beta = \gamma^{3-i}.$$

现在我们确定 α。利用第二个顶点的标签 $\alpha^r\beta^i = \zeta^5$，并注意到$\zeta^5 =(-\gamma)^5 = -\gamma^5$，代入 $\beta = \gamma^{3-i}$ 得到:

$$\alpha^w = 1 \quad \text{and} \quad \alpha^r = -\gamma^{i^2-3i+5}.$$

情形 2: $\gamma = \zeta^5$。首先，图的结构意味着 $\gamma = \zeta^5$ ，且边标签条件为 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = -\zeta^{-3}$，其中 $\zeta \in R_{15}$。这等价于以下条件:

$$\gamma \in R_3 \quad \text{and} \quad \beta^{-1}\gamma^{-i} \in R_{10}.$$

这个等价关系的一个方向显然成立。反过来，给定 $\gamma \in R_3$ 和 $\beta^{-1}\gamma^{-i} \in R_{10}$，可以通过定义 $\zeta = -\gamma^2(\beta^{-1}\gamma^{-i})^3$，显式地恢复 ζ，且完全满足 $\zeta \in R_{15}$、$\gamma = \zeta^5$ 和 $\beta^{-1}\gamma^{-i} = -\zeta^{-3}$。

由 $\gamma \in R_3$，我们立即得到 $n = 3$。最后，我们将 α 完全用 γ 和β表示。由构造可知，$\zeta = -\gamma^2(\beta^{-1}\gamma^{-i})^3 = -\beta^{-3}\gamma^{2-3i}$，将其代入第一个顶点标记方程 $\alpha^r\beta^i = -\zeta$ ，得到:

$$\alpha^w = \beta^n = \beta^3 \quad \text{and} \quad \alpha^r = \beta^{-3-i}\gamma^{2-3i}.$$

其余 Heckenberger 图的分析也类似。现在我们总结完整分类。

在下面的引理中，我们对所有满足相关 Nichols 代数 $\mathcal{B}(V(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i))$ 为有限维的六元组 $(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i)$ 进行分类。我们根据底层 Yetter-Drinfeld 模的维数，将这一分类整理在表 1 至表 6 中$V(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i)$。

在这些表中，第一列给出了对 n和 γ 的条件（通常只限制 n的取值，而允许 γ 为任意本原 n次单位根）。第二列概述了对 β 和 i的条件，第三列则详细列出了 α、w和 r必须满足的代数关系。每当一个六元组 $(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i)$ 同时满足前三列中的条件时，Nichols 代数 $\mathcal{B}(V(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i))$ 就是有限维的。此外，对于第四列中列出的任意一对 (k, l)，其对应的图都与 Heckenberger 图 $H_{k,l}$ 一致。

引理 *5.6.* 对于所有满足 $\in \mathcal{I}$的数对 (k, l)，都存在一个六元组 $(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i)$，满足$n$，$w \geq 1$, $\gamma \in R_n$，且 $(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T}_1$，使得 $D(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i) = H_{k,l}$。此外，对于任意这样的六元组，$\dim_{\Bbbk} \mathcal{B}(V(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i)) < \infty$ 当且仅当 $\alpha^r\beta^i \neq 1$。产生有限维 *Nichols* 代数的六元组 $(n, w, \gamma, \alpha, \beta, x^r g^i)$ 的完整分类见表 *1–6*。

表 1：维数为 $\mathbb{k}V=1$ 时有限维 Nichols 代数的分类

n,γ	β,i	α,w,r	$(k,\ l)$
$n=1$	$\beta\in R_\infty$	$\alpha^w=\beta^n,\quad \alpha^r\beta^i\in R_\infty\setminus\{1\}$	
$n\geq 2$	$\beta=\gamma^{-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r\gamma^{-i^2}\in R_\infty\setminus\{1\}$	(1, 1)

表 2：维数为 $\mathbb{k}V=2$ 的有限维 Nichols 代数的分类

n,γ	β,i	α,w,r	$(k,\ l)$
$n\geq 2$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=\gamma^{i^2-i+1}$	(2, 1)
$n\geq 3$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=-\gamma^{i^2-i}$	(3, 1)
$\gamma=-1$	$\beta\notin\{-1,1\}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{1-i}$	(3, 1)
$\gamma=-1$	$\beta\notin\{-1,1\}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=-\beta^{-i}$	(3, 2)
$n\geq 2$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^{2r}=\gamma^{2i^2-2i+1}$	(4, 1)
$\gamma=-1$	$\beta\notin\{-1,1\}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^{2r}=(-1)^i\beta^{1-2i}$	(5,1), (5, 2)
$n\geq 2,\ n\neq 3$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r\gamma^{i-i^2}\in R_3$	(6, 1), (6, 2)
$\gamma=-1$	$(-1)^{i+1}\beta\in R_3$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^{i+1}\beta^{-1-i}$	(7, 1), (7, 2)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_{12}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=\beta^{4-i}$	(8, 2), (8, 3)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_{12}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{3-i}$	(8,4), (8, 5)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_4$	$\alpha^w=-1,\quad \alpha^r\beta^i\in R_3$	(9, 2)
$\gamma=-1$	$\beta=(-1)^{i+1}\zeta^{-3}$ (其中 $\zeta\in R_{12}$)	$\alpha^w=-1,\quad \alpha^r=-\zeta^{3i-1}$	(9, 3)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_9$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{3-i}$	(10, 2)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_9$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=-\beta^{-i-2}$	(10, 3)
$n\geq 2$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^{3r}=\gamma^{3i^2-3i+1}$	(11, 1)
$n=8$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=\gamma^{i^2-i-2}$	(12, 1)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_8$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=\beta^{2-i}$	(12, 2)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_8$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{3-i}$	(12, 3)
$n=24$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=\gamma^{i^2-i-6}$	(13, 2)

表 2：维数为 $_{\mathbb{k}}V=2$ 的有限维 Nichols 代数的分类（续）

n,γ	β,i	α,w,r	$(k,\ l)$
$\gamma=-1$	$\beta\in R_{24}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=\beta^{8-i}$	(13, 3)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_{24}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{5-i}$	(13, 4)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_5$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{-i-3}$	(14, 1)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_5$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^{i+1}\beta^{-i-1}$	(14, 2)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_{20}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{7-i}$	(15, 1), (15, 2)
$\gamma=-1$	$\beta\in R_{20}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=\beta^{4-i}$	(15, 3), (15, 4)
$n=30$	$\beta=\gamma^{1-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=\gamma^{i^2-i-12}$	(16, 2)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_{30}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=\beta^{10-i}$	(16, 3)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_{30}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=\beta^{6-i}$	(16, 4)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_{14}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=(-1)^i\beta^{5-i}$	(17, 1)
$\gamma=-1$	$(-1)^i\beta\in R_{14}$	$\alpha^w=\beta^2,\quad \alpha^r=-\beta^{10-i}$	(17, 2)

表 3：$\dim_{\mathbb{k}}V=3$ 时有限维 Nichols 代数的分类

n,γ	β,i	$\alpha,\ w,\ r$	$(k,\ l)$
$n\geq 3$	$\beta=\gamma^{2-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=\gamma^{i^2-2i+2}$	(4, 1)
$n\geq 3,\ n\neq 4$	$\beta=\gamma^{2-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=-\gamma^{i^2-2i}$	(5,1), (5, 2)
$n=3$	$\beta^3\neq 1$	$\alpha^w=\beta^3,\quad \alpha^r=\beta^{1-i}\gamma^i$	(6,1), (6, 2)
$n=3$	$\beta=-\gamma^{-1-i}$	$\alpha^w=-1,\quad \alpha^r=(-1)^{i+1}\gamma^{i}_{+i^2}$	(7, 1), (7, 2)
$n=3$	$\beta\gamma^i\in R_4$	$\alpha^w=\beta^3,\quad \alpha^r=\beta^{-i}\gamma^{-1}$	(8, 1)
$n=3,\quad \gamma=-\zeta^{-2}$ （其中 $\zeta\in R_{12}$）	$\beta=(-1)^i\zeta^{2i+1}$	$\alpha^w=\zeta^3,\quad \alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{-2i}_{-i^2}$	（8, 2），（8, 3）
$n=3,\ \gamma=-\zeta^2$ (其中 $\zeta\in R_{12}$)	$\beta=(-1)^i\zeta^{-2i-1}$	$\alpha^w=\zeta^{-3},\quad \alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{2i}_{+i^2+2}$	(9, 1)
$n=3$	$\beta\gamma^i\in R_4$	$\alpha^w=\beta^3,\quad \alpha^r=-\beta^{-i}$	(9, 2)
$n=18$	$\beta=\gamma^{2-i}$	$\alpha^w=1,\quad \alpha^r=\gamma^{i^2-2i+12}$	(10, 1)

表 3：$\dim_{\mathbb{k}} V = 3$ 的有限维 Nichols 代数的分类（续）

n, γ	β, i	α、w、r	$(k$、$l)$
$n=3$、 $\gamma=\zeta^3$ （其中 $\zeta \in R_9$）	$\beta=\zeta^{2-3i}$	$\alpha^w=\zeta^6$, $\alpha^r=-\zeta^{3i^2-2i+1}$	(10, 1)
$n=3$, $\gamma=\zeta^3$ （其中 $\zeta \in R_9$）	$\beta=\zeta^{-3i+1}$	$\alpha^w=\zeta^3$, $\alpha^r=-\zeta^{3i^2-i}$	(10, 2)
$n=3$, $\gamma=-\zeta^{-4}$ （其中 $\zeta \in R_{24}$）	$\beta=(-1)^{i+1}\zeta^{4i+1}$	$\alpha^w=-\zeta^3$, $\alpha^r=\zeta^{-4i^2-i+6}$	(13, 1)
$n=3$, $\gamma=-\zeta^{-4}$ （其中 $\zeta \in R_{24}$）	$\beta=(-1)^i\zeta^{4i-5}$	$\alpha^w=\zeta^9$, $\alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{-4i+\frac{2}{5}i}$	(13, 3)
$n=3$	$\beta\gamma^i \in R_{10}$	$\alpha^w=\beta^3$, $\alpha^r=\beta^{-3-i}\gamma^{2-3i}$	(16, 1)
$n=3$, $\gamma=\zeta^5$ （其中 $\zeta \in R_{15}$）	$\beta=-\zeta^{-5i+2}$	$\alpha^w=-\zeta^6$, $\alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{5i-\frac{2}{2}i}$	(16, 3)

表4：维数为$\dim_{\mathbb{k}} V = 4$的有限维 Nichols 代数的分类

n, γ	β, i	α, w, r	$(k$, $l)$
$n=4$, $\gamma=-\zeta^3$ （其中 $\zeta \in R_{12}$）	$\beta=(-1)^i\zeta^{-3i-1}$	$\alpha^w=\zeta^8$, $\alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{3i+\frac{2}{i}}$	(8, 4), (8, 5)
$n=12$	$\beta=\gamma^{3-i}$	$\alpha^w=1$, $\alpha^r=-\gamma^{i^2-3i}$	(9, 3)
$n \geq 4$	$\beta=\gamma^{3-i}$	$\alpha^w=1$, $\alpha^r=\gamma^{i^2-3i+3}$	(11, 1)
$n=4$, $\gamma=\zeta^2$ （其中 $\zeta \in R_8$）	$\beta=\zeta^{-2i-1}$	$\alpha^w=-1$, $\alpha^r=\zeta^{2i^2+i-1}$	(12, 1)
$n=4$, $\gamma=\zeta^2$ （其中 $\zeta \in R_8$）	$\beta=-\zeta^{-2i+1}$	$\alpha^w=-1$, $\alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{2i-\frac{2}{i}}$	(12, 2)
$n=8$	$\beta=\gamma^{3-i}$	$\alpha^w=1$, $\alpha^r=-\gamma^{i^2-3i}$	(12, 3)
$n=4$, $\gamma=\zeta^6$ （其中 $\zeta \in R_{24}$）	$\beta=-\zeta^{-6i+1}$	$\alpha^w=\zeta^4$, $\alpha^r=(-1)^{i+1}\zeta^{6i-\frac{2}{i}-4}$	(13, 1)

表4：维数为$_{\Bbbk} V = 4$ 的有限维 Nichols 代数的分类（续）

n, γ	β, i	α、w、r	$(k,\ l)$
$n = 4$、 $\gamma = \zeta^6$ （其中 $\zeta \in R_{24}$）	$\beta = \zeta^{-6i-1}$	$\alpha^w = \zeta^{-4}$, $\alpha^r = \zeta^{6i^2+i-1}$	(13, 2)
$n = 5$	$\beta = \gamma^{3-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2+2i}$	(14, 1)
$n = 20$	$\beta = \gamma^{3-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-3i}$	(15,1), (15, 2)
$n = 30$	$\beta = \gamma^{3-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-3i+5}$	(16, 1)
$n = 14$	$\beta = \gamma^{3-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-3i}$	(17, 1)

表 5：$\dim_{\Bbbk} V = 5$ 的有限维 Nichols 代数的分类

n, γ	β, i	α, w, r	$(k,\ l)$
$n = 18$	$\beta = \gamma^{4-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-4i}$	(10, 3)
$n = 10$	$\beta = \gamma^{4-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-4i}$	(14, 2)
$n = 5$, $\gamma = -\zeta^{-2}$ （其中 $\zeta \in R_{20}$）	$\beta = (-1)^i \zeta^{2i-3}$	$\alpha^w = \zeta^5$, $\alpha^r = (-1)^{i+1} \zeta^{-2i+\frac{2}{3}i}$	(15,3), (15, 4)
$n = 5$, $\gamma = \zeta^3$ （其中 $\zeta \in R_{15}$）	$\beta = -\zeta^{-3i-4}$	$\alpha^w = -\zeta^{-5}$, $\alpha^r = (-1)^{i+1} \zeta^{3i+\frac{2}{4}i-4}$	(16, 2)
$n = 5$, $\gamma = \zeta^3$ （其中 $\zeta \in R_{15}$）	$\beta = -\zeta^{-3i-2}$	$\alpha^w = -\zeta^5$, $\alpha^r = (-1)^{i+1} \zeta^{3i+\frac{2}{2}i}$	(16, 4)

表6：$_{\Bbbk} V = 6$ 的有限维 Nichols 代数的分类

n, γ	β, i	α, w, r	(k, l)
$n = 24$	$\beta = \gamma^{5-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-5i}$	(13, 4)
$n = 14$	$\beta = \gamma^{5-i}$	$\alpha^w = 1$, $\alpha^r = -\gamma^{i^2-5i}$	(17, 2)

注释 5.7。 关于我们的分类，我们作如下观察：

（1）在表 1 中，第一行的最后一列为空。这对应于$n = 1$的情形，此时 Yetter-Drinfeld 模 V 必为一维。正如本小节开头所讨论的，我们直接根据其编织来确定 $\mathcal{B}(V)$是否为有限维，而不使用引理 5.4（该引理要求$n \geq 2$）。因此，此情形不对应任何 Heckenberg 图。

（2）我们对有限维 Nichols 代数的分类比针对 $D_{i,\ j}$ 在 [59, 第 5 节.2]中所得的分类涵盖了显著更多的情形。这是因为在当前的设定中，参数 β 不必具有 γ^j的形式，而且我们还纳入了一个额外参数 α。

5.2. **情形 $(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T}_2$。** 现在我们转而讨论第二种情形，即 $(\alpha, \beta, x^r g^i) \in \mathcal{T}_2$。在本小节中，我们继续固定 Hopf 代数 $H = B(n, w, \gamma)$，并考虑其上的 Yetter-Drinfeld 模 V。我们将证明，无论参数n, w和 γ如何取值，相应的 Nichols 代数$\mathcal{B}(V(\alpha, \beta, x^r g^i))$都是无限维的。尽管我们的方法严格遵循 [59, 第 5 节.3],中确立的思路，为求完整起见，我们仍在此给出完整证明。

设 $(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i) \in \mathcal{T}_2$并令 $V = V(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i)$。由定理 4.3，我们不妨假设 $0 \leq i \leq n-1$。回忆一下（$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$）中 V的基（4.1）。对每个$0 \leq k \leq n-1$，令 $V_k = \Bbbk\{v_k\}$ 为一个 1 维空间。我们将投影映射定义为：

$$p_k : V \to V_k, \quad \sum_{l=0}^{n-1} a_l v_l \mapsto a_k v_k.$$

为简洁起见，我们省略张量符号。我们用 $u_1 \cdots u_m$ 代替 $u_1 \otimes \cdots \otimes u_m$。我们要证明，对所有 $m \geq 1$,

$$\Delta_{1^m}^{T(V)}(v_i^m) \neq 0. \tag{5.4}$$

若此结论成立，则 $\mathcal{B}(V)$ 是无限维的。

对于 $m \geq 1$，定义 $\psi_m = p_i^{\otimes m} \circ \Delta_{1^m}$。我们只需证明

$$\psi_m(v_i^m) \neq 0. \tag{5.5}$$

注意，对于某个标量 $a_m \in \Bbbk$，$\psi_m(v_i^m) = a_m v_i \otimes \cdots \otimes v_i$。因此，我们只需证明 $a_m \neq 0$。为此，我们逐步计算 $\Delta^{T(V)}{}_{1^m}(v_i^m)$。

对于 $m \geq 2$，我们有如下公式：

$$\Delta_{1^m}^{T(V)}(v_i^m) = (\pi_1 \otimes \Delta_{1^{m-1}}^{T(V)})(\Delta(v_i^m)). \tag{5.6}$$

由于 Δ 是代数映射，我们得到：

$$\Delta(v_i^m) = (1 \otimes v_i + v_i \otimes 1)^m = \sum x_1 x_2 \cdots x_m.$$

这里，每个 x_k 要么是 $1 \otimes v_i$，要么是 $v_i \otimes 1$。若某一项恰好含有 l 个 $v_i \otimes 1$ 和 $m-l$ 个 $1 \otimes v_i$，则它属于 $V^{\otimes l} \otimes V^{\otimes\ (m-l)}$。

在方程（5.6）中，映射 π_1 迫使我们只考察 $V \otimes V^{\otimes(m-1)}$中的项。这些项恰好含有一个 $v_i \otimes 1$。因此，我们得到：

$$\Delta_{1^m}^{T(V)}(v_i^m) = (\pi_1 \otimes \Delta_{1^{m-1}}^{T(V)}) \left(\sum_{k=1}^{m} (1 \otimes v_i^{k-1})(v_i \otimes v_i^{m-k}) \right). \tag{5.7}$$

现在，考虑项（$1 \otimes v_i^{k-1}$）（$v_i \otimes v_i^{m-k}$）。若 $k=1$，这就只是 $v_i \otimes v_i^{m-1}$。若 $k>1$，则将其展开为：

$$(1 \otimes v_i^{k-1})(v_i \otimes v_i^{m-k}) = (v_i^{k-1})_{-1} \cdot v_i \otimes (v_i^{k-1})_0 v_i^{m-k} = \sum a_{j_1,\dots,j_m} v_{j_1} \otimes v_{j_2} \cdots v_{j_m},$$

其中 $a_{j_1,\dots,j_m} \in \Bbbk$ 且 $0 \le j_l \le n-1$。根据 V 上的作用和余作用，对于系数非零的任意项（即 $a_{j_1,\dots,j_m} \neq 0$），其指标必须满足：

$$j_1 + \cdots + j_m \le mi.$$

事实上，一个更一般的不等式成立，我们将其表述为以下引理。

引理 5.8. 对于任意 $m \ge 2$，考虑如下展开：

$$\Delta_{1^m}^{T(V)}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}) = \sum a_{j_1,\dots,j_m} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m},$$

其中 $a_{j_1,\dots,j_m} \in \Bbbk$ 且 $0 \le i_l, j_l \le n-1$。每当 $a_{j_1,\dots,j_m} \neq 0$ 时，这些指标满足：

$$j_1 + \cdots + j_m \le i_1 + \cdots + i_m.$$

现在我们证明（5.5）。利用上述事实，我们计算 $\psi_m(v_i^m)$：

$$\begin{aligned}
\psi_m(v_i^m) &= (p_i^{\otimes m} \circ \Delta_{1^m})(v_i^m) \\
&= \left(p_i \otimes p_i^{\otimes^{m-1}}\right)(\pi_1 \otimes \Delta_{1^{m-1}}^{T(V)}) \left(\sum_{k=1}^{m} (1 \otimes v_i^{k-1})(v_i \otimes v_i^{m-k})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} (p_i\pi_1 \otimes \psi_{m-1}) \left((v_i^{k-1})_{-1} \cdot v_i \otimes (v_i^{k-1})_0 v_i^{m-k}\right).
\end{aligned}$$

对于每个 $1 \le k \le m$，我们断言：

$$(p_i\pi_1 \otimes \psi_{m-1}) \left((v_i^{k-1})_{-1} \cdot v_i \otimes (v_i^{k-1})_0 v_i^{m-k}\right) = (\alpha^r)^{k-1} v_i \otimes \psi_{m-1}(v_i^{m-1}).$$

情形 $k=1$ 显然。对于 $k \ge 2$，证明步骤类似。我们以情形 $k=3$ 为例。由于 $c^{r}{}_{,\beta}{}^{i}(i,i) = x^r$，我们得到：

$$\begin{aligned}
&(p_i\pi_1 \otimes \psi_{m-1}) \left((v_i^2)_{-1} \cdot v_i \otimes (v_i^2)_0 v_i^{m-3}\right) \\
&= (p_i\pi_1 \otimes \psi_{m-1}) \left(\sum_{0 \le r,l \le i} c_\beta^{r,i}(i,r) c_\beta^{r,i}(i,l) \cdot v_i \otimes v_r v_l v_i^{m-3}\right) \\
&= (\alpha^r)^2 v_i \otimes \psi_{m-1}(v_i^{m-1}).
\end{aligned}$$

最后一步由引理 5.8 得出，它迫使 $\psi_{m-1}(v_r v_l v_i^{m-3}) = 0$ 在 $r < i$ 或 $l < i$ 时成立。将其代回主求和式，可得：

$$\begin{aligned}
\psi_m(v_i^m) &= \sum_{k=1}^{m} (p_i\pi_1 \otimes \psi_{m-1}) \left((v_i^{k-1})_{-1} \cdot v_i \otimes (v_i^{k-1})_0 v_i^{m-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m} (\alpha^r)^{k-1}\right) \left(v_i \otimes \psi_{m-1}(v_i^{m-1})\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m} (\alpha^r)^{k-1}\right) \left(\sum_{k=1}^{m-1} (\alpha^r)^{k-1}\right) \left(v_i \otimes v_i \otimes \psi_{m-2}(v_i^{m-2})\right) \\
&= \left(\prod_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{l} (\alpha^r)^{k-1}\right)\right) (v_i \otimes \cdots \otimes v_i).
\end{aligned}$$

由于 $(\alpha,\ \beta,\ x^r g^i) \in \mathcal{T}_2$，我们知道要么是 $\alpha^r = 1$，要么是 $\alpha^r \notin R_\infty$。在这两种情况下，乘积都不为零：

$$\prod_{l=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{l}(\alpha^r)^{k-1}\Big) \neq 0.$$

因此，对所有 $m \geq 1$，$\psi_m(v_i^m) \neq 0$。由此得到我们的最终结果。

引理 5.9。 *Nichols* 代数 $\mathcal{B}(V(\alpha,\beta,x^r g^i))$ 对所有 $(\alpha,\beta,x^r g^i) \in \mathcal{T}_2$ 都是无限维的。

我们以如下定理结束本节。

定理 5.10。 设 $H = B(n,w,\gamma)$。使 *Nichols* 代数 $\mathcal{B}(V)$ 为有限维的、 H 上的 V 单 *Yetter-Drinfeld* 模，恰为引理 *5.6*后表 *1–6* 中分类的那些。

证明。 这可由引理 5.6 和 5.9 立即得出。 □

资助。 本研究获得国家重点研发计划（2024YFA1013802）和国家自然科学基金委员会（12271243）资助。

数据可用性。 本文所述研究未使用任何数据。

References

[1] H.H. Andersen, J.C. Jantzen, W. Soergel，单位根阶为 p 次时量子群的表示，以及特征 p 下半单群的表示：与 p 的独立性，Ast´erisque 220 (1994) 321 页。[2] N. Andruskiewitsch，关于有限维 Hopf 代数，载于：理论物理与数学中的量子对称性，巴里洛切，2000年，载于：当代数学，第294卷，美国数学会，2002年，第1–57页。https://doi.org/10.1090/conm/294/04969。[3] N. Andruskiewitsch，Nichols 代数导论，载于：A. Cardona 等（编），数学与物理中的量子化、几何与非交换结构，Springer-Nature，2017年，第135–195页。[4] N. Andruskiewitsch, I. Angiono，关于基本 Hopf 代数上的 Nichols 代数，Math. Z. 296 (3-4) (2020) 1429–1469。https://doi.org/10.1007/s00209-020-02493-w。[5] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. Mej´ıa, C. Renz，未识别对角型 Nichols 代数的量子双代数的单模 $\mathfrak{ufo}(7)$，Comm. Algebra, 46 (4) (2018) 1770–1798。https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1357726。[6] N. Andruskiewitsch, D. Bagio, S. Della Flora, D. Flˆores，特征 2 下受限 Jordan 平面的 Drinfeld 双代数，J. Pure Appl. Algebra 229 (1) (2025) 论文编号 107798，共27页。https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2024.107798。[7] N. Andruskiewitsch, F. Dumas, H. Pe˜na Pollastri，关于 Jordan 平面的双代数，Ark. Mat. 60 (2) (2022) 213–229。https://doi.org/10.4310/arkiv.2022.v60.n2.a1。[8] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger, H.-J. Schneider，半单 Yetter-Drinfeld 模的 Nichols 代数，Amer. J. Math. 132 (6) (2010) 1493–1547。[9] N. Andruskiewitsch, H. Pe˜na Pollastri，奇特征下的受限 Jordan 平面，J. Algebra Appl.，20 (1) (2021) 论文编号 2140012，共26页。https://doi.org/10.1142/S0219498821400120。[10] N. Andruskiewitsch, D.E. Radford, H.-J. Schneider，尖点 Hopf 代数上模的完全可约性定理，J. Algebra 324 (11) (2010) 2932–2970。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.06.002。[11] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider，量子线性空间与阶为 p^3 的尖点 Hopf 代数的提升，J. Algebra 209 (2) (1998) 658–691。https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7643。[12] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider，有限维尖点 Hopf 代数的分类，Ann. Math. (2) 171 (1) (2010) 375–417。https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.375。

[13] K.A. Brown, J.J. Zhang，GK 维数为一的素正则霍普夫代数，伦敦数学会会刊 (3) 101 (1) (2010) 260–302。https://doi.org/10.1112/plms/pdp060。[14] K.A. Brown, J.J. Zhang，GK 维数为1和2的 Hopf 代数综述，载于：Hopf 代数、张量范畴及相关主题，载于：当代数学，第771卷，美国数学会，2021年，第43–62页。https://doi.org/10.1090/conm/771/15507。[15] S. Burciu，关于广义德林费尔德双代数的格罗滕迪克环，J. Algebra 486 (2017) 14–35。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.05.019。[16] H.-X. Chen，一类量子双代数的不可约表示，J. Algebra 225 (1) (2000) 391–409。https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8135。[17] M. Cohen, S. Westreich，拟三角 Hopf 代数的量子双代数的表示，载于：阿米楚尔百年纪念研讨会，载于：当代数学，第800卷，美国数学会，2024年，第101–116页。https://doi.org/10.1090/conm/800/16052。[18] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche，拟 Hopf 代数、群上同调与轨形模型，Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 18B (1990) 60–72。https://doi.org/10.1016/0920-5632(91)90123-V。[19] G.A. Garc´ıa, J.M.J. Giraldi，关于量子子群上的 Hopf 代数，J. Pure Appl. Algebra 223 (2) (2019) 738–768。https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.04.018。[20] M.D. Gould，有限群代数的量子双代数及其表示，Bull. Austral. Math. Soc. 48 (2) (1993) 275–301。https://doi.org/10.1017/S0004972700015707。[21] L. Grunenfelder, M. Mastnak，尖点 Hopf 代数作为余循环变形，arXiv:1010.4976v1。[22] I. Heckenberger，具有有限算术根系的秩2 Nichols 代数，Algebr. Represent. Theory 11 (2) (2008) 115–132。https://doi.org/10.1007/s10468-007-9060-7。[23] I. Heckenberger，算术根系的分类，Adv. Math. 220 (1) (2009) 59–124。https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.08.005。[24] I. Heckenberger，对角型 Nichols 代数玻色化的 Drinfel'd 双代数的卢斯蒂格同构，J. Algebra 323 (8) (2010) 2130–2182。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.02.013。[25] I. Heckenberger, H.-J. Schneider，Hopf 代数与根系，数学调查与专著，第247卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2020年。[26] I. Heckenberger, H. Yamane，Drinfel'd 双代数与沙波瓦洛夫行列式，Rev. Un. Mat. Argentina 51 (2) (2010) 107–146。[27] J. Hu, Y. Zhang，β-特征代数与 Hopf 代数中的交换对，Algebr. Represent. Theory 10 (5) (2007) 497–516。https://doi.org/10.1007/s10468-007-9055-4。[28] N. Hu, R. Xiong，关于不具有对偶 Chevalley 性质的 Hopf 代数族，Rev. Un. Mat. Argentina 59 (2) (2018) 443–469。https://doi.org/10.33044/revuma.v59n2a12。[29] H. Huang, H.-X. Chen, P. Zhang，广义 Taft 代数，Algebra Colloq. 11 (3) (2004) 313–320。[30] M. Liu, G. Liu, K. Zhou，Kashina 的 $H_{c:\sigma_0}$ 上的有限维 Nichols 代数，arXiv:2207.11863。[31] Z. Liu, S. Zhu，拟三角 Hopf 代数上不可约 Yetter-Drinfeld 模的结构，J. Algebra 539 (2019) 339–365。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.08.016。[32] G. Lusztig，量子群导论，1994年版重印本，现代 Birkhäuser 经典著作，Birkh¨auser/Springer，纽约，2010年。https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4717-9。[33] V.V. Lyubashenko，Hopf 代数与向量对称性，Uspekhi Mat. Nauk 41 (5(251)) (1986) 185–186。[34] S. Majid，拟三角 Hopf 代数的双代数，Comm. Algebra 19 (11) (1991) 3061–3073。https://doi.org/10.1080/00927879108824306。[35] S. Majid，编织群的交叉积与玻色化，J. Algebra 163 (1) (1994) 165–190。https://doi.org/ 10 1006 1994 1011 。/jabr. . O. Marquez, D. Bagio, [36] ´ J.M.J. Giraldi, G.A. Garc´ıa，有限维对偶 Radford 代数上的 Nichols 代数，J. Algebra Appl. 20 (1) (2021) 论文编号 2140001，共39页。https://doi.org/10.1142/ S0219498821400016[37] S. Montgomery，Hopf 代数及其在环上的作用，CBMS 区域会议丛书，数学，第82卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年。https://doi.org/10.1090/cbms/082。[38] B. Pogorelsky, C. Vay，非阿贝尔群上的量子群的 Verma 模与单模，Adv. Math. (301) (2016) 423–457。https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.06.019。[39] D.E. Radford，关于有限维 Hopf 代数的余根基，Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1) (1975) 9–15。https://doi.org/10.2307/2040355。[40] D.E. Radford，具有投影的 Hopf 代数的结构，J. Algebra 92 (2) (1985) 322–347。https://doi.org/10.1016/0021-8693(85)90124-3。[41] D.E. Radford, H.-J. Schneider，广义量子群与量子双代数的单表示，J. Algebra 319 (9) (2008) 3689–3731。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.11.037。[42] D.E. Radford, J. Towber，任意双代数关联的 Yetter-Drinfeld 范畴，J. Pure Appl. Algebra 87 (3) (1993) 259–279。https://doi.org/10.1016/0022-4049(93)90114-9。

[43] N. Yu. Reshetikhin、M. A. Semenov-Tian-Shansky，量子 R-矩阵与分解问题，J. Geom. Phys. 5 (4) (1988年) 533–550。https://doi.org/10.1016/0393-0440(88)90018-6。[44] P. Schauenburg，关于余拟三角 Hopf 代数与量子 Yang-Baxter 方程，Algebra Berichte，第 67 卷，Verlag Reinhard Fischer，慕尼黑，1992年。[45] H.-J. Schneider，关于可因子化 Hopf 代数的一些性质，Proc. Amer. Math. Soc. 129 (7) (2001年) 1891–1898。https://doi.org/10.1090/S0002-9939-01-05787-2。[46] Y. Shi，Kac-Paljutkin 代数上的有限维 Hopf 代数，Rev. Un. Mat. Argentina 60 (1) (2019年) 265–298。https://doi.org/10.33044/revuma.v60n1a17。[47] Y. Shi，Suzuki 代数上的有限维 Nichols 代数 I： $A^{\mu\lambda}_{N\ 2n}$的简单 Yetter-Drinfeld 模，Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 29 (2) (2022年) 207–233。https://doi.org/10.36045/ j.bbms.211101。[48] Y. Shi，Suzuki 代数上的有限维 Nichols 代数 II： $A^{\mu\lambda}_{N2n+1}$的简单 Yetter-Drinfeld 模，J. Algebra Appl. 23 (10) (2024年) 论文编号 2450165，24 页。https://doi.org/10.1142/ S0219498824501652。[49] M.E. Sweedler，Hopf 代数，Mathematics Lecture Note Series，W. A. Benjamin, Inc.，纽约，1969年。[50] S. Ufer，一类编织 Hopf 代数的 PBW 基，J. Algebra 280 (1) (2004年) 84–119。https://doi. org/ 10 1016 2004 06 017 。/j.jalgebra. . . S. Ufer，三角编织与尖点 Hopf 代数，J. Pure Appl. Algebra 210 (2) (2007年) 307–320。[51] https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.09.007。[52] J. Wu、G. Liu、N. Ding，GK 维数为一的仿射素正则 Hopf 代数的分类，Adv. Math. 296 (2016年) 1–54。https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.03.037。[53] R. Xiong，关于不具有对偶 Chevalley 性质的唯一 12 维 Hopf 代数上的 Hopf 代数，Comm. Algebra 47 (4) (2019年) 1516–1540。https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1508582。[54] R. Xiong，关于 24 维基本 Hopf 代数上的 Hopf 代数，Rev. Un. Mat. Argentina 65 (2) (2023年) 469–493。[55] R. Xiong，最小的非点基本 Hopf 代数上的有限维 Hopf 代数，Front. Math. 19 (5) (2024年) 865–890。https://doi.org/10.1007/s11464-022-0272-2。[56] R. Xiong、N. Hu，对偶 Radford 代数上的有限维 Hopf 代数分类，Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 28 (5) (2021年) 633–688。https://doi.org/10.36045/j.bbms.210612。[57] D.N. Yetter，量子群与幺半范畴的表示，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 108 (2) (1990年) 261–290。https://doi.org/10.1017/S0305004100069139。[58] Y. Zhang，无限二面体群上的有限 GK 维数 Nichols 代数，Algebr. Represent. Theory 27 (1) (2024年) 161–177。https://doi.org/10.1007/s10468-023-10213-1。[59] X. Zhen、G. Liu、J. Yu，无限维 Taft 代数上的简单 Yetter-Drinfeld 模，arXiv:2509.26154。[60] Y. Zheng，关于 D上不可约 Yetter-Drinfeld 模的结构，AIMS Math. 9 (8) (2024年) 21321–21336。https://doi.org/10.3934/math.20241035。[61] Y. Zheng、Y. Gao、N. Hu，Kashina 的 Hopf 代数 $H_{b:1}$ 上的有限维 Hopf 代数，J. Algebra 567 (2021年) 613–659。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.09.035。[62] Y. Zheng、Y. Gao、N. Hu，Kashina 的 Hopf 代数$H_{d:-1,\ 1}$ 上的有限维 Hopf 代数，J. Pure Appl. Algebra 225 (4) (2021年) 论文编号 106527，37 页。https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2020.106527。[63] Y. Zheng、X. Yu，关于 Kashina 的 $H_{a:y}$ 上的有限维 Hopf 代数的若干分类，J. Algebra Appl. 24 (11) (2025) 论文编号 2550257，36 页。https://doi.org/10.1142/S0219498825502573。

Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China
Email address: xjzhen@smail.nju.edu.cn

Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China
Email address: gxliu@nju.edu.cn

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China
Email address: yujing46@ustc.edu.cn