A Roe 双模的典范连续场

V. MANUILOV

arXiv:2603.23366v1 [math.OA] 24 Mar 2026

Abstract. 我们将 C^*-代数连续场的概念推广到希尔伯特 C^*-双模。给定一个偏序集 P，以及赋予 P各点的一族单调非递增的三元算子环（TRO），我们在 P 上赋予某种零维豪斯多夫拓扑，并利用某种紧化 γP，得到希尔伯特 C^*-双模连续场的基空间 γP。

作为一个启发性例子，我们考虑集合 $D(X,\ Y)$，它由两个度量空间 X 和 Y的不交并上度量的粗等价类构成。每个这样的等价类都会产生一个一致 Roe 双模，即连接 X 和 Y的一致 Roe 代数的 TRO。由此得到的 TRO 族关于 $D(X,\ Y)$上的自然偏序是非递减的，因此产生了以$\gamma D(X,\ Y)$为基的希尔伯特 C^*-双模典范连续场。

1. Introduction

Banach 空间（例如 C^*-代数、Hilbert C^*-模等）的连续场和 Fell 丛，是一种将这些空间族组织成代数结构的方法，并具有某些连续性性质 [4, 2]。对于连续场，基空间应当是局部紧豪斯多夫空间；而对于 Fell 丛，基空间应当是逆半群。我们感兴趣的是一种中间结构，其基集是一个偏序集，并带有由偏序决定的某种拓扑（回想一下，逆半群结构决定了一个典范偏序）。

首先，我们将 C^*-代数连续场的定义推广到 HilbertC^*-(双)模。随后，我们在偏序集 P 上引入一种拓扑，使其成为 P豪斯多夫且零维的，但并非离散的。由于 P 在这种拓扑下未必是紧的，甚至未必是局部紧的，我们转而考虑一种与偏序相容的特定紧化 γP，它应当作为 C^*-代数连续场和 Hilbert C^*-双模的基空间。

如果将一个算子三元环（TRO） M_a 赋给偏序集 P中的每个点 a，且这些 TRO 构成的族单调不减（即 $M_a \subset M_b$ 若 $a \leq b$），那么我们证明，这些 TRO 可以组织成一个以 γP为底空间的希尔伯特 C^*-双模连续场。

作为一个例子，对于度量空间 X 和 Y，我们考察 $D(X,\ Y)$ 上度量的粗等价类集合。 $X \sqcup Y$上的度量粗等价类确定了一个一致 Roe 双模 [6]，其底层为 Y 和 X的一致 Roe 代数。由于这些一致 Roe 双模是 TRO，它们可以组织成一个以 $\gamma D(X,\ Y)$ 为底空间的“典范”希尔伯特 C^*-双模连续场。

文献 [5] 证明了集合 $D(X,\ X)$ 具有自然的逆半群结构，因此这个例子也与 Fell 束构造有关。

作者感谢俄罗斯科学基金会项目 25-11-00018 的资助。1

2. Continuous fields of Hilbert C^*-bimodules

给定集合 T 和一族赋范空间 $\{A_t\}_{t\in T}$，我们用 $\prod_{t\in T}A_t$ 表示满足 $\sup_{t\in T}\|a_t\|_t<\infty$ 的族 $\{a_t\}_{t\in T}$ 的集合。

我们来回顾一下 C^*-代数连续场的定义（又称 $C(T)$-C^*-代数，[2], 第 10 章）。设 T 是一个紧豪斯多夫空间，A 并且 A_t、$t\in T$、C^*是代数，$A\subset\prod_{t\in T}A_t$，$p_t:\ A\to A_t$ 为典范投影。若 $C(T)$ 对 A的作用与包含关系 $A\subset\prod_{t\in T}A_t$相容，即对于任意 $a\in A$、$t\in T$、$f\in C(T)$，都有 $p_t(fa)=f(t)p_t(a)$，则称该作用相容。若四元组 $\mathcal{A}=(T,A,\{A_t\}_{t\in T},\{p_t\}_{t\in T})$ 是 C^*-代数的连续场，则要求对任意 $t\in T$，p_t都是满射；$C(T)$ 在 A上的作用与上述包含关系相容；并且对任意 $a\in A$，映射 $t\mapsto\|p_t(a)\|$ 都是连续的。

同样，可以定义希尔伯特 C^*-模的连续场。

定义 2.1。设 M_t是 A_t 上的左希尔伯特 C^*-模，其内积为 ${}_{A_t}\langle\cdot,\cdot\rangle$；$M$ 是 A 上的左希尔伯特 C^*-模，其内积为 ${}_A\langle\cdot,\cdot\rangle$；并且 $M\subset\prod_{t\in T}M_t$，其投影映射为 $\pi_t\colon M\to M_t$。四元组 $\mathcal{M}=(T,M,\{M_t\}_{t\in T},\{\pi_t\}_{t\in T})$ 是 $\mathcal{A}$ 上的左希尔伯特 C^*-模的连续场，如果

(1) 对任意 $t\in T$，π_t 都是满射；(2) $C(T)$ 与 M相容地作用，并与包含映射 $M\subset\prod_{t\in T}M_t$相容，即对任意 $t\in T$、$f\in C(T)$、$m\in M$，$\pi_t(fm)=f(t)\pi_t(m)$；(3) 对任意 $a\in A$、$m\in M$、$t\in T$，$\pi_t(am)=p_t(a)\pi_t(m)$；(4) 对任意 $m,n\in M$、$t\in T$，${}_{A_t}\langle\pi_t(m)\ \pi_t(n)\rangle=p_t({}_A\langle m,n\rangle)$。

注意，在这种情况下，映射 $t\mapsto\|\pi_t(m)\|$是连续的。事实上，映射 $t\mapsto\|p_t({}_A\langle m,m\rangle)\|$ 是连续的，因为 ${}_A\langle m,\ m\rangle\in A$，所以它与平方根的复合也是连续的。

例2.2。将 $C(T)$ 视为一个连续场，其纤维 $\mathbb{C}$位于 T之上。则标准希尔伯特 C^*-模 $M=l_2(C(T))$ 是 Hilbert空间的连续场。

例2.3。设 $\mathcal{A}=(T,\ A,\ \{A_t\}_{t\in T},\ \{p_s\}_{t\in T})$ 是一个 C^*-代数的连续场。设 $M=l_2(A)$ 是 A 上的标准希尔伯特 C^*-模。则 p_s 诱导出一个映射 $\pi_t:l_2(A)\to l_2(A_t)$，它是满射（因为 p_t是满射），并且 $(T,\ l_2(M)\ \{l_2(A_t)\}_{t\in T},\ \{\pi_t\}_{t\in T})$ 是一个希尔伯特 C^*-模的连续场。

类似地，设 $e\in A$ 是一个投影，并令 $M=pA\subset A$。那么对于任意 $t\in T$，$p_t(e)\in A_t$ 都是一个投影。令 $M_t=p_t(e)A_t\subset A_t$。那么 $\pi_t=(p_t)|_{pA}$ 是满射，并且 $(T,\ M,\ \{M_t\}_{t\in T},\ \{\pi_t\}_{t\in T})$ 是 Hilbert C^*-模的连续场。

定义 2.4. 设 $\mathcal{A}=(T,A,\{A_t\}_{t\in T},\{p_t\}_{t\in T})$ 和 $\mathcal{B}=(T,B,\{B_t\}_{t\in T},\{q_t\}_{t\in T})$ 是两个 C^*-代数的连续场。那么我们将 T 上的 Hilbert $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-C^*-双模连续场定义为四元组 $\mathcal{M}=(T,M,\{M_t\}_{t\in T},\{\pi_t\}_{t\in T})$，其中 M 是一个 Hilbert A-B-C^*-双模，其内积为 ${}_A\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$（相应地，$M_t$ 是一个 HilbertA_t-B_t-C^*-双模，其内积为 ${}_{A_t}\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{B_t}$）；$M_t\subset\prod_{t\in T}M_t$, $C(T)$ 与此包含相容地作用于 M 上；典范投影 $\pi_t:M\to M_t$ 是满射；

$$\pi_t(am)=p_t(a)\pi_t(m)\quad\text{and}\quad\pi_t(ma)=\pi_t(m)q_t(a)\tag{1}$$

对于任意 $a\in A$、$m\in M$、$t\in T$；并且

$$p_t({}_A\langle m,n\rangle)={}_{A_t}\langle\pi_t(m),\pi_t(n)\rangle\quad\text{and}\quad q_t(\langle m,n\rangle_B)=\langle\pi_t(m),\pi_t(n)\rangle_{B_t}\tag{2}$$

对于任意 $t\in T$、$m,\ n\in M$。这也意味着映射 $t\mapsto\|\pi_t(m)\|$ 对任意 $m\in M$ 都是连续的。

命题 2.5。设$(T,M,\{M_t\}_{t\in T},\{\pi_t\}_{t\in T})$ 是连续场$(T,A,\{A_t\}_{t\in T},\{p_t\}_{t\in T})$ 上的左 *Hilbert* C^*-模连续场，其中该连续场由 C^*-代数组成。设 $t_0\in T$, $\varepsilon>$

0。设 $m \in M$ 满足 $p_{t_0}({}_A\langle m, m\rangle) = e \in A_{t_0}$ 是一个投影。则存在 t_0 在 S 中的一个邻域 U，以及 $n \in M$，使得

(1) $\|n - m\| < \varepsilon$ 和 $\pi_{t_0}(n) = \pi_{t_0}(m)$; (2) p_t

$({}_A\langle n, n\rangle)$ 对任意 $t \in U$ 都是一个投影。

证明。设 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，满足当 $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 时 $g(x) = 0$，且当 $x \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ 时 $g(x) = \frac{1}{x}$，并设 $f(x) = xg(x)$。设 $a = {}_A\langle m, m\rangle \in A$。由于当 t 接近 t_0 时，$\|p_t(a - a^2)\|$ 很小，因此存在 t_0 的一个邻域 U'，使得 $p_t(f(a))$ 是一个投影。令 $n' = g^{1/2}(a)m$。于是

$$ {}_A\langle n', n'\rangle = g^{1/2}(a)ag^{1/2}(a) = f(a),$$

因此，当 $t \in U'$ 时，$p_t({}_A\langle n', n'\rangle) = p_t(f(a))$ 是一个投影。我们还有

$$\|n' - m\| = \|(1 - g^{1/2}(a))m\| \le \|1 - g^{1/2}(a)\|.$$

由于 $p_{t_0}(1 - g^{1/2}(a)) = 0$ 且 $1 - g^{1/2}(a) \in A$，$\|n' - m\|$ 在 $s \in U'$ 时很小。取一个开集 U，使得 $t_0 \in U, U \subset U'$。为了使任意 $t \in T$ 对应的 $\|n - m\|$ 都很小，用 U' 和 $V = S \setminus U$ 覆盖 S，并对该覆盖取单位分解 $\varphi_{U'}, \varphi_V$，从而设定$n = \varphi_{U'}n' + \varphi_V m$。□

命题 *2.6.* 设 $(T, M, \{M_t\}_{t\in T}, \{\pi_t\}_{t\in T})$ 是连续场 $(T, A, \{A_t\}_{t\in T}, \{p_t\}_{t\in T})$ 上左 *Hilbert* C^*-模的一个连续场，其中 $(T, A, \{A_t\}_{t\in T}, \{p_t\}_{t\in T})$ 是 C^*-代数的连续场。设 $t_0 \in T, \varepsilon > 0$。设 $m, n \in M$ 在 t_0 上正交，即 $p_{t_0}({}_A\langle m, n\rangle) = 0$，并设 $p_{t_0}({}_A\langle m, m\rangle), p_{t_0}({}_A\langle n, n\rangle)$ 为投影。则存在 t_0 在 S 中的一个邻域 U，以及 $m', n' \in M$，使得

(1) $\|m' - m\| < \varepsilon$ 和 $\pi_{t_0}(m') = \pi_{t_0}(m)$； $\|n' - n\| < \varepsilon$ 和 $\pi_{t_0}(n') = \pi_{t_0}(n)$；

(2) $p_t({}_A\langle n', n'\rangle)$ 和 $p_t({}_A\langle n', n'\rangle)$ 对任意 $t \in U$ 都是投影；(3) $p_t({}_A\langle m', n'\rangle) = 0$ 对任意 $t \in U$ 均成立。

证明。首先，应用命题 2.5，得到满足 (i) 和 (ii) 的 m'。然后令 $\tilde{n} = n - {}_A\langle m', n\rangle m'$。于是，对于任意使 $p_t({}_A\langle m', m'\rangle)$ 为投影的 $t \in T$，$\pi_{t_0}(\tilde{n} - n) = 0$ 和 $p_t({}_A\langle \tilde{n}, m'\rangle) = 0$ 均成立，因此我们可以应用命题 2.5，从满足 (i) 和 (ii) 的 $\tilde{n}$ 得到 n'。由于 n' 是 $\tilde{n}$ 的倍数，n' 和 m' 对任意 $t \in U$ 都正交。□

推论 2.7. 设$(T, M, \{M_t\}_{t\in T}, \{\pi_t\}_{t\in T})$ 是左 *Hilbert* C^*-模的一个连续场，$t_0 \in T$。设 M_{t_0} 是A_{t_0}上的自由有限生成 *Hilbert* C^*-模，即$M_{t_0} \cong A_{t_0}^k, k \in \mathbb{N}$。那么存在 t_0 在 T 中的一个邻域 U，使得 M_t 包含A_t^k 作为正交直和项。

证明。 取M_{t_0}中的一个标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^k$。根据定义，存在 $m_i \in M, i = 1, \dots, k$，使得 $p_{t_0}(m_i) = e_i$。应用命题 2.6 k 次，可得到 M_t 中的标准正交元素，它们对于 t 接近 t_0。然后应用 Dupr´e–Fillmore 定理 [3]，得出A_t^k 是 M_t中的一个正交直和项。

□

3. Continuous fields of Hilbert C^*-bimodules over posets

3.1. 偏序集上的拓扑与一种紧化。设 P 为一个偏序集。对于 $a \in P$，令

$$U_a = \{b \in P : a \le b\}, \quad V_a = P \setminus U_a.$$

显然，对于任意 $a \in P$，都有 $a \in U_a$。考虑由集合 U_a 和 V_a、$a \in P$ 构成的子基所确定的 P 上的拓扑。这种定义在偏序集上的拓扑不像其他一些拓扑（例如区间拓扑）那么常见，但它有两个优点：其子基由既开又闭集构成，而且具有良好的分离性质。

引理 3.1. P 是豪斯多夫且吉洪诺夫的。

证明。设 $a \neq b \in P$。那么 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 不成立。假设 $b \leq a$ 不成立。那么 $b \in V_a$。由于 $a \in U_a$ 且 $U_a \cap V_a = \emptyset$，P 是豪斯多夫的。

设 $F \subset P$ 是一个闭子集，$a \notin F$。那么 $P \setminus F$ 是 a 的一个开邻域，因此，存在 a_1、...、a_n、a'_1、.....、$a'_m \in P$，使得

$$W = U_{a_1} \cap \cdots \cap U_{a_n} \cap V_{a'_1} \cap \cdots \cap V_{a'_m}$$

是 a 的一个闭开邻域，使得 $W \subset P \setminus F$。令 $f(b) = \begin{cases} 1, & \text{若 } b \in W; \\ 0, & \text{若 } b \notin W. \end{cases}$。

那么 f 是连续的，$f(a) = 1$ 且 $f|_F = 0$，因此 P 是吉洪诺夫的。□

带有此拓扑的偏序集 P 不一定是紧的。

引理 3.2. 如果 P 有无限多个极小元 c_i, $i \in I$，那么 P 不是紧的 t.

证明。由于 $a \in U_a$ 对任意 $a \in P$，族 $\{U_a\}_{a \in P}$ 都是 P 的一个覆盖。若存在有限子覆盖 $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$，那么对任意 c_i，都存在 j 使得 $c_i \in U_{a_j}$，即 $a_j \leq c_i$，因此 $a_j = c_i$。但根据假设，存在无限多个不同的 c_i ——矛盾。□

我们来定义 P 的一个紧化。令 χ_a（分别地，χ'_a）为集合 U_a（分别地，V_a）的特征函数，并令 C 为由所有 χ_a 和 χ'_a, $a \in P$ 生成的、由 C^* 构成的 C^*-代数 $C_b(P)$ 的 P 上所有有界连续函数组成的子代数。于是，根据盖尔范德对偶，$C = C(T)$，其中 T 是某个紧豪斯多夫空间；包含映射 $C(T) \subset C_b(P)$ 确定了一个满射 $\beta P \to T$，其定义域为斯通–切赫紧化 βP。由于 $C(T)$ 能分离 P 中的点，P 嵌入 T 为稠密子集，因此 T 是 P 的一个紧化。将其记为 γP。显然，γP 是豪斯多夫空间。

P 上的偏序可扩展为 γP 上的偏序。对于 $r,\ t \in \gamma P$ 令 $r \leq t$，若 $\widetilde{\chi}_a(r) = 1$ 蕴含 $\widetilde{\chi}_a(t) = 1$, $a \in P$。

若 P 有最小元 0，那么只需使用单位元和特征函数 χ_a，无需 χ'_a，即可得到 $C(\gamma P)$，因为 χ_0 是 $C(\gamma P)$ 中的单位元。为简便起见，我们在此处及下文均假设 P 有最小元。在这种情况下，所有特征函数 χ_a 都是单调不减的，因此我们的紧化是纳赫宾紧化 [7], 的一个商；该紧化由 C^* 代数通过盖尔范德对偶得到，此代数由 P 上所有单调不减的连续有界函数生成，通常用于紧化偏序集。

对于表示其通过连续性延拓到 γP 上的函数，而 $\sim f(t) = \mathrm{ev}_t(f)$ 表示在点 $t \in \gamma P$ 处对 f 的取值。

3.2. 算子三元环。 设 H_1 和 H_2 为希尔伯特空间，$\mathbb{B}(H_1, H_2)$ 表示从 H_1 到 H_2 的有界算子集合。闭线性子空间 $M \subset \mathbb{B}(H_1, H_2)$ 若满足 $MM^*M \subset M$，则称为算子三元环（TRO）。$A = MM^*$ 和 $B = M^*M$ 的闭包是 C^*-代数，而 M 是一个带有内积 ${}_A\langle m, n\rangle = mn^*$, $\langle m, n\rangle_B = m^*n$ 的希尔伯特 A-B-C^*-双模。三元乘积定义为 $(mnr) = mn^*r$, $m, n, r \in M$。关于算子三元环，我们参考文献 [9]。

设 $\{M_a\}_{a \in P}$ 是 TRO 族，对于任意 $a \in P$，$M_a \subset \mathbb{B}(H_1, H_2)$。若 $a \leq b$ 蕴含 $M_a \subset M_b$，则称其与 P 上的偏序相容。

令 $s \in M_a$。若 $a \leq b$，则令 $\chi_{s,a}(b) = \begin{cases} s \end{cases}$；否则为 0。利用代数张量积 $C_b(P) \otimes \mathbb{B}(H_1, H_2)$ 到 $C_b(P, \mathbb{B}(H_1, H_2))$ 的典范嵌入，我们将 $\chi_{s,a}$ 写作 $\chi_a \otimes s$。若 $\{M_a\}_{a \in P}$ 与偏序相容，则对于任意 $a, b \in P$，有 $\chi_{s,a}(b) \in M_a$。令 M 为 $C_b(P, \mathbb{B}(H_1, H_2))$ 中包含所有

$\chi_{s,\ a}$, $a \in P$, $s \in M_a$，并且对三元乘积以及在 P 上的有界连续函数乘法封闭。

引理 3.3。若 $m \in M$ 则

(1) $m \in C_b(P, \mathbb{B}(H_1, H_2))$；(2) m 通过连续性延拓为一个从 γP 出发的映射；(3) 对于任意 $a \in P$，映射 $M \to M_a$, $m \mapsto \pi_a(m)$ 是满射。

证明。映射 $\chi_{s,a}$：$P \to \mathbb{B}(H_1, H_2)$ 显然连续，并延拓为一个连续映射 $\widetilde{\chi}_{s,a} = \widetilde{\chi}_a \otimes s$，其定义域为 γP，值域为 $\mathbb{B}(H_2, H_1)$。线性组合、乘以 P 上的连续函数，以及映射 $\chi_{s,a}$, $a \in P$ 的三元乘积也同样成立。将所有这些映射构成的集合记为 $C_0 \subset C_b(P, \mathbb{B}(H_1, H_2))$。若 $C_0^{\sim}$ 中的网 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 在 P 上一致收敛到映射 f，则每个 f_λ 都延拓为 γP 上的连续映射 f_λ。于是，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda_0 \in \Lambda$，使得 $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$ 蕴含 $\sup_{a\in P} \|f_\lambda(a) - f_{\lambda'}(a)\| < \varepsilon$；因此，对于任意 $t \in \gamma P$，$\{f_\lambda(t)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个柯西网，故 $\lim_\Lambda f_\lambda(t)$ 在 $\mathbb{B}(H_1, H_2)$ 中存在，即 f 通过连续性延拓为 γP 上的映射。最后，由于对于任意 $s \in M_a$，$\pi_a(\chi_{s,a}) = s$，映射 $m \mapsto \pi_a(m)$ 是满射。□

我们将映射 $m \in M$ 到 γP 的连续延拓记为 $\widetilde{m}$。

定义求值映射 π_t：$M \to \mathbb{B}(H_1, H_2)$，使得 $\pi_t(m) = \widetilde{m}(t)$，$t \in \gamma P$。下述结果是众所周知的。

定理 3.4. 对于任意 $t \in \gamma P$，映射 π_t：$M \to \mathbb{B}(H_1, H_2)$ 具有闭值域。

证明。固定 $t \in \gamma P$。令 $m_k \in M, k \in \mathbb{N}, \pi_t(m_k) = s_n$，$\lim_{k\to\infty} s_k = s$。我们将构造$m \in M$，使得 $\pi_t(m) = s$。

不失一般性，取一个子列后，可以假设对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\|s_{k+1} - s_k\| < 2^{-k}$。令 $n_k = m_{k+1} - m_k \in M$。

由连续性可知，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 t 的一个开邻域 W_k，使得对于任意 $a \in W_k$，$\|n_k(t)\| < 2^{-k+1}$。令 $W_1' = W_1$, $W_k' = W_{k-1}' \cap W_k$, $k \geq 2$。于是$t \in \ldots \subset W_{k+1}' \subset W_k' \subset \ldots \subset W_1'$。

对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\varphi_k \in C(\gamma P)$ 满足 $\varphi_k(t) = 1$, $0 \leq \varphi_k(r) \leq 1$，对任意 $r \in \gamma P$ 且 $\operatorname{supp} \varphi_k \subset W_k'$。设 $l_1 = \varphi_1 m_1$, $l_k = \varphi_k n_{k-1}$, $k \geq 2$。那么，对任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $l_k \in M$。由于 $\|l_k\| \leq \sup_{r\in\gamma P} \|n_{k-1}(r)\| < 2^{-k+2}$，级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}} l_k$ 收敛到某个 $m \in M$。令 $p_N = \sum_{k=1}^N l_k$ 为该级数的部分和。那么 $p_N(t) = s_N$，因此 $m(t) = \lim_{N\to\infty} p_N(t) = s$。□

将 π_t 的值域记为 M_t。

推论 3.5。 M_t 对任意 $t \in \gamma P$ 都是一个算子三元环。

引理 3.6. 对于 $t \in \gamma P$, $M_t = \overline{\bigcap_{a\in P,\ a\leq t} M_a}$。

证明。如果 $t \in P$，那么这是显然的，因此设 $t \notin P$。取 $m = \sum_{i=1}^k \widetilde{\chi}_{a_i} \otimes s_i$, $a_i \in P$, $s_i \in M_{s_i}$。这类元素在 M 中稠密。于是 $\pi_t(m) = m(t) = \sum_{i:\ a_i\leq t} s_i \in \bigcap_{a\in P,\ a\leq t} M_a$。由定理 3.4 即得证。□

3.3. **的连续场-双模**。与三元算子环类似，可以从一族 $\{A_u\}_{u\in P}$ 构造一个 C^*-子代数 A，它由映射 $\chi_u \otimes a, a \in A_u$ 生成，并且这一族由 $\mathbb{B}(H)$ 的 C^*-子代数组成，且与 P 上的偏序相容。随后，A 可以嵌入到 $C(\gamma P,\ \mathbb{B}(H))$ 中，A_v 上的 C^*-代数可以像对 $v \in \gamma P \setminus P$ 那样定义，映射 p_v：$A \to A_v$ 也可以定义。

引理 3.7. 四元组 $\mathcal{A} = (\gamma P, A, \{A_v\}_{v\in\gamma P}, \{p_v\}_{v\in\gamma P})$ 是一个C^*-代数连续场。

证明. 只需证明，对于任意 $a \in A$，映射 $v \mapsto \|p_v(a)\|$ 是连续的；这可由 a 作为从 γP 到 $\mathbb{B}(H)$ 的映射的连续性得出。□

设 $\{M_u\}_{u\in P}$ 是 $\mathbb{B}(H_1, H_2)$ 中与 P 上的偏序相容的 TRO 族，并设 γP、$\{M_v\}_{v\in\gamma P}$、M 和 $\{\pi_v\}_{v\in\gamma P}$ 如上所构造。对每个 $v \in \gamma P$，令 $A_v = M_v M_v^*$、$B_v = M_v^* M_v$。则 $\{A_u\}_{u\in P}$、$\{B_u\}_{u\in P}$ 分别是 $\mathbb{B}(H_2)$ 和 $\mathbb{B}(H_1)$ 的 C^*-子代数族，并且二者都与 P 上的偏序相容。于是它们确定了连续场

$$\mathcal{A} = (\gamma P, A, \{A_v\}_{v\in\gamma P}, \{p_v\}_{v\in\gamma P}) \quad \text{and} \quad \mathcal{B} = (\gamma P, B, \{B_v\}_{v\in\gamma P}, \{q_v\}_{v\in\gamma P})$$

C^*-代数。

定理 3.8。 $\mathcal{M} = (\gamma P、\ M、\ \{M_v\}_{v\in\gamma P}、\ \{\pi_v\}_{v\in\gamma P})$ 是一个连续的 *Hilbert* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-C^*-双模连续场。

证明。 π_v 的满射性已在定理 3.4 中证明。接下来只需验证定义 2.4 中的其他（代数）性质。由于 $C_b(\gamma P, \mathbb{B}(H_1, H_2))$ 是 $C_b(\gamma P, \mathbb{B}(H_2))$ 与 $C_b(\gamma P, \mathbb{B}(H_1))$ 上的双模，性质 (1) 成立。若定义 ${}_A\langle m, n\rangle = mn^*$, $\langle m, n\rangle_B = m^* n$，则由 $C_b(\gamma P, \mathbb{B}(H_1, H_2))$ 的相同性质可得性质 (2)。□

4. Tautological continuous field of uniform Roe bimodules

4.1. 度量空间有序对上的度量偏序集。设 X 和 Y 是度量空间，其度量分别为 d_X 和 d_Y。对于有序对 (X, Y)，令 $\mathcal{D}(X, Y)$ 表示 $X \sqcup Y$ 上满足以下条件的度量 d 的集合

(1) $d|_X = d_X$，$d|_Y = d_Y$；
(2) $\inf_{x\in X,\ y\in Y} d(x,\ y) > 0$。

如果调换 X 和 Y 的顺序，那么对于 $X \sqcup Y$ 上的同一个度量，我们记作 d^*，即对于 $d \in \mathcal{D}(X,\ Y)$，记作 $d^* \in \mathcal{D}(Y,\ X)$。

回顾一下，两个度量 $d_1,\ d_2 \in \mathcal{M}(X,\ Y)$ 粗等价，当且仅当存在 $[0, \infty$ 的一个同胚 ϕ），使得

$$\phi^{-1}(d_1(x, y)) \le d_2(x, y) \le \phi(d_1(x, y))$$

对于任意 $x \in X,\ y \in Y$。记 $D(X,\ Y)$ 为 $\mathcal{D}(X,\ Y)$ 的粗等价类集合。

在 $D(X,\ Y)$ 上定义偏序：$[d_1] \le [d_2]$ 当且仅当存在 $[0, \infty$ 的一个同胚 ϕ），使得对于任意 $x \in X,\ y \in Y,\ d_2(x,\ y) \le \phi(d_1(x,\ y))$。

为简单起见，从现在起，我们不考虑一般的度量空间，而只考虑一致离散且具有有界几何的离散度量空间（一致离散是指 $\inf_{x,\ x'\in X} d_X(x,\ x') > 0$；具有有界几何是指对任意$R > 0$，都存在 $C > 0$，使得任意半径为 R 的球中至多包含 C 个点）。对于离散空间 X，我们用 $H_X = l_2(X)$表示 X上平方可和函数构成的希尔伯特空间，并固定 H_X 上的一组标准正交基，其元素为点的特征函数：$\delta_x(z) = \begin{cases} 1, & \text{当 } z = x\text{时;} \end{cases}$

否则为 0，$x \in X$。对于算子 $S\colon H_X \to H_Y$，令 $S_{yx} = \langle \delta_y,\ S\delta_x\rangle$, $x \in X$, $y \in Y$。

有界算子 $S\colon H_X \to H_Y$ 相对于度量$d \in \mathcal{M}(X,\ Y)$的传播为 $\le L$，若 $S_{yx} \ne 0$ 蕴含 $d(x,\ y) \le L$。令 $M_{[d]}$ 表示有限传播算子集合在$\mathbb{B}(H_X,\ H_Y)$中的范数闭包。这是一个 $C_u^*(Y)$-$C_u^*(X)$-双模，其上的左右作用代数分别为 X 和 Y [6]的一致 Roe 代数。显然，它不依赖于所选度量，只依赖于其粗等价类。

引理4.1。 $M_{[d]}$ 是一个算子三元环。

证明。设 T、 S、 $R \in M_{[d]}$。我们需要证明 $TS^*R \in M_{[d]}$，只需对具有固定传播的 T、 S、 R证明即可，因此假设它们的传播均为 $\leq L$。令$x \in X$、 $y \in Y$。假设$(TS^*R)_{yx} = \sum_{v\in Y}$、 $_{u\in X} T_{yu}S_{vu}R_{vx} \neq 0$。那么应存在 $u \in X$和 $v \in Y$，使得 $d(x,\ v) \leq L$、 $d(u,\ v) \leq L$ 以及 $d(u,\ y) \leq L$。于是，由三角不等式， $d(x,\ y) \leq 3L$，因此 TS^*R的传播为 $\leq 3L$。□

引理 4.2。族 $\{M_{[d]}\}_{[d]\in D(X,Y)}$与 $D(X, Y)$上的偏序相容。证明。显然。

□

若 $d_1 \in \mathcal{D}(X, y)$ 和 $d_2 \in \mathcal{D}(Y, Z)$，则可定义它们的乘积 $d_1d_2 \in \mathcal{D}(X, Z)$:

$$(d_2d_1)(x, z) = \inf_{y\in Y}(d_1(x, y) + d_2(y, z)), \tag{3}$$

由此得到结合乘法 $D(X, Y)\ \times D(Y, Z)\ \to D(X, Z)$。

4.2. 的乘法性 $M_{[d]}$。设 $d \in \mathcal{D}(X, Z)$、 $U \subset X$、 $W \subset Z$。回顾一下，双射$t\colon\ U \to W$是一个部分平移 [1]，如果存在 $C > 0$，使得对任意 $x \in C$，都有 $d(x, f(x)) < C$。任一部分平移 t 都确定一个算子 T，其作用方式为 $T\delta_x = \begin{cases} \delta_{t(x)}, & \text{若 } x \in U; \\ 0, & \text{若 } x \notin U. \end{cases}$。众所周知（例如，见 [8] 中的引理 2.4），由于 X、 Z 具有有界几何，从 H_X 到 H_Z 的任意有限传播算子都可表示为有限和 $\sum_i f_iT_i$，其中 $f_i \in C(X)$， T_i 是由部分等距确定的算子。

定理 4.3。令 $d_1 \in \mathcal{D}(X, Y)$、 $d_2 \in \mathcal{D}(Y, Z)$。则 $M_{[d_2]}M_{[d_1]} = M_{[d_2d_1]}$。

证明。令 $S \in M_{[d_1]}$、 $T \in M_{[d_2]}$ 具有有限传播 $\leq L$，并令 $R = TS$。则 R 的传播为 $\leq 2L$，因此 $M_{[d_2]}M_{[d_1]} \subset M_{[d_2d_1]}$。为证明反向包含，考虑一个部分平移 $t\colon\ U \to W$、 $U \in X$、 $W \in Z$，其关于度量 $d = d_1d_2$的常数为 C。那么对于任意 $x \in U$，存在 $y \in Y$，使得 $d_1(x,\ y) < C$ 且 $d_2(y,\ f(z)) < C$。这给出了一个映射 $f\colon\ U \to Y$。令 $V = f(U)$。如果 $f(x_1) = f(x_2) = y$，那么 $d_X(x_1,\ x_2) \leq d(x_1,\ y) + d(x_2,\ y) < 2C$；根据有界几何条件，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $f^{-1}(y)$ 由 $\leq N$ 个点组成。因此， U 可以划分为$\leq N$个子集 $U = U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_N$，使得对于每个 $i = 1$，.....、 N， $f|_{U_i}$都是单射。于是， $f|_iU_i$是关于度量 d_1的 $X \sqcup Y$中的部分平移。若 $x \in U_i$，令 $g_i(f_i(x)) = t(x_i)$。那么$g_i\colon\ V \to W_i$、 $W = W_1 \sqcup \ldots \sqcup W_N$也是部分平移，并且 $g_i(f_i(x)) = t(x)$。令T、 F_i、 G_i 分别为与部分平移 t、 f_i、 g_i对应的算子。则 $T = \sum_i G_iF_i$。因此， $M_{[d]} \subset M_{[d_2]}M_{[d_1]}$。□

推论 4.4. $M_{[d^*]}M_{[d]} = M_{[d^*d]}$， $M_{[d]}M_{[d^*]} = M_{[dd^*]}$。

Let $d \in \mathcal{D}(X, Y)$, $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$. Set

$$d^r(x_1, x_2) = \begin{cases} \inf_{u\in Y}(d(x_1, u) + d(x_2, u)), & \text{if } x_1 \neq x_2; \\ 0, & \text{if } x_1 = x_2, \end{cases}$$

$$d^l(y_1, y_2) = \begin{cases} \inf_{u\in X}(d(u, y_1) + d(u, y_2)), & \text{if } y_1 \neq y_2; \\ 0, & \text{if } y_1 = y_2. \end{cases}$$

注意， d^*d 是 $\mathcal{D}(X,\ X)$中的一个度量，而 dd^* 是 $\mathcal{D}(Y,\ Y)$中的一个度量。

这里我们必须区分 X的两个副本，因此将 X 记作 X的第一个副本，将 X' 记作第二个副本。用这种记号，恒等映射是一个同胚 $i\colon\ X \to X'$。我们将 $i(x)$记作 $x' \in X'$， $x \in X$。我们还将 Y和 Y' 记作 Y的两个副本。

引理 4.5. 对于 $d \in \mathcal{D}(X, Y)$，对于任意 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$，有 $(d^*d)(x_1, x_2') = d^r(x_1, x_2)$ 以及 $(dd^*)(y_1, y_2') = d^l(y_1, y_2)$。

证明。 这直接由 (3) 得出。 □

推论 4.6. d^r 是 X上的度量； d^l 是 Y上的度量。

$C^*_u(X,\ d')$ 是相对于度量 d' 的 X 的一致 Roe 代数。

推论 4.7. 在 $H_X = H_{X'}$与 $H_Y = H_{Y'}$的识别下，有 $C^*_u(X, d^r) = M_{[d^* d]}$ 以及 $C^*_u(Y, d^l) = M_{[dd^*]}$。

若 $d_1 \leq d_2$，则 $C^*_u(X, d^r_1) \subset C^*_u(X, d^r_2)$，且 $C^*_u(Y, d^l_1) \subset C^*_u(Y, d^l_2)$。因此，可以定义 C^*-代数的连续场 $\mathcal{A} = (T, A, \{A_t\}_{t\in T}, \{p_t\}_{t\in T})$ 和 $\mathcal{B} = (T, B, \{B_t\}_{t\in T}, \{q_t\}_{t\in T})$，其中 $T = \gamma D(X, Y)$，使得当 $t = [d] \in D(X, Y)$ 时， $A_t = C^*_u(Y, d^l)$ 且 $B_t = C^*_u(X, d^r)$。

定理 4.8。 $\mathcal{M} = (T, M, \{M_t\}_{t\in T}, \{\pi_t\}_{t\in T})$，其中 $T = \gamma D(X, Y)$，是一个希尔伯特 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-C^* 双模的连续场。

证明。 显然。 □

4.3. **一个例子**。 注意， $D(X, Y)$ 有最小元 0，由度量 $d(x, y) = d_X(x, x_0) + 1 + d_Y(y_0, y)$ 给出，其中 $x_0 \in X, y_0 \in Y$（这些点的不同选取给出粗等价的度量），因此引理 3.2 无助于检验紧性。我们认为，除非 X 或 Y 有界，否则它并不紧。下面给出一个不紧的例子。

令 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ 配备标准度量。令 $Y_i = \{(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots) :\ y_i \in \mathbb{N}_0, y_j = 0\ \forall j \neq i\} \subset l_1$，$Y = \cup_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ 配备度量 l_1，其度量为 d_Y。为区分同一个 Y 的两个副本，我们像之前一样用 Y' 表示第二个副本。对于任意度量 $d \in \mathcal{D}(Y, Y')$，都可以赋予一个度量矩阵 $d = (d_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$，其中 $d_{ij} \in \mathcal{D}(Y_i, Y'_j)$ 是 d 在 $Y_i \sqcup Y'_j$ 上的限制。注意，对应关系 $d \mapsto (d_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ 不是单射。

引理 4.9. 令 $d \in \mathcal{D}(Y, Y')$，并令 $(d_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ 为相应的矩阵。那么，矩阵 $([d_{ij}])_{i,j\in\mathbb{N}}$ 的每一行和每一列至多包含一个非零元素。

证明。反设结论不成立。不失一般性，可假设 $[d_{11}] \neq 0$ 和 $[d_{12}] \neq 0$。由 [5] 的命题 7.1 可知，存在 $C > 0$ 以及无限集 $B_1, B_2 \subset \mathbb{N}_0$，使得对 $n \in B_1$ 有 $d((n, 0, 0, \ldots), (n, 0, 0, \ldots)') < C$，并且对 $n \in B_2$ 有 $d((n, 0, 0, \ldots), (0, n, 0, \ldots)') < C$。不失一般性，还可假设 $d((0, 0, 0, \ldots), (0, 0, 0, \ldots)') < C$。三角不等式说明

$$d_Y((n, 0, 0, \ldots), (m, 0, 0, \ldots)) \geq d_Y((n, 0, 0, \ldots), (0, m, 0, \ldots)) - 2C = n + m - 2C.$$

另一方面， $d_Y((n,\ 0,\ 0,\ \ldots), (m,\ 0,\ 0,\ \ldots)) = |m - n|$，因此若 $m > n$，则有 $m - n \geq n + m - 2C$，从而 $n \leq C$；这对任意 $n \in B_1$ 都成立，而它是无限的——矛盾。□

若 $b,\ d \in \mathcal{D}(Y,\ Y')$，则 $[b] \leq [d]$ 意味着，对于任意 $i,\ j \in \mathbb{N}$，都有 $[b_{ij}] \leq [d_{ij}]$（但反向蕴含未必成立）。

记 I 为 $\mathcal{D}(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{N}'_0)$ 上满足 $I(n,\ m') = |m - n| + 1$ 的度量。容易看出， $[I]$ 是 $D(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{N}'_0)$ 中的最大元素。

设 $b_k \in \mathcal{D}(Y,\ Y')$ 是一个度量，使得 $(b_k)_{ij} = \begin{cases} I, & \text{若 } i = j \leq k; \\ \text{否则为 } 0。 \end{cases}$

引理 4.10. 序列 $[b_k] \in D(Y, Y')$ 没有聚点，因此 $D(Y, Y')$不是紧集。

证明. 假设 $[d] \in D(Y, Y')$ 是该序列的一个聚点。由于 $U_{[d]}$是 $[d]$的一个邻域, $[b_k] \in U_{[d]}$ 对无穷多个 k都成立。令 k_0 为其中之一，则$[d_{ij}] = \begin{cases} a_i, \text{若 } i = j \le k_0; \end{cases}$ 否则为 0, ，其中 $a_i \in D(\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0')$。取 $[d]$的另一个邻域 V_c，其中 $c = [b_{k_0+1}]$。于是 $[b_k] \ge c$，因此当 $k \ge k_0 + 1$ 时有 $[b_k] \notin V_c$——这与 $[d]$ 是一个聚点矛盾。□

这是 $D(Y, Y')$ 的余冠中的一个点的例子。定义 $\varphi(\chi_a) = \lim_{n\to\infty} \chi_a(b_n)$,$a \in D(Y, Y)$。注意， $\chi_a(b_n) = 1$ if a 在对角线之外有非零元素，或者若 $a_{ii} \neq 0$ for some $i > n$，那么对于任意 $a \in D(Y, Y')$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n > N$， $\chi_a(b_n)$ 等于 0 或 1，因此， φ 是良定义的。显然， φ 是乘法的：$\varphi(\chi_a\chi_b) = \varphi(\chi_a)\varphi(\chi_b)$， $a, b \in D(Y, Y')$。因此， φ 定义了一个点 $t \in \gamma D(Y, Y')$。

引理 4.11。 $t \notin D(Y, Y')$，即对于任意 $b \in D(Y, Y')$，都存在 $a \in D(Y, Y')$，使得 $\varphi(\chi_a) \neq \chi_a(b)$。

证明。反设：对于任意 $a \in D(Y, Y')$， $\varphi(\chi_a) = \chi_a(b)$。于是 $\varphi(\chi_b) = 1$，因此 b 的矩阵是对角矩阵，且只有有限个非零项；也就是说，存在$n \in \mathbb{N}$，使得对于 $i \ge n$， $b_{ii} = 0$。取 $a = b_n$。那么 $\varphi(\chi_{b_n}) = 1$，而 $\chi_{b_n}(b) = 0$。□

值得探究的是，余冠$\gamma D(X, Y)$ 上各点对应的 C^*-代数 $\setminus D(X, Y)$ 是否为一致 Roe 代数，或者也可能是更一般的 C^*-代数。在上面的例子中，存在一个度量 $d \in \mathcal{D}(Y, Y')$，使得对于 d， A_t 是一个一致 Roe 代数。

References

[1] J. Brodzki、G. A. Niblo、N. Wright。群中的性质 *A*、部分平移结构与一致嵌入。J. London Math. Soc. (2) **76** (2007), 479–497.[2] J. Dixmier， C^*-代数。North-Holland，阿姆斯特丹、纽约、牛津，1977.[3] M. J. Dupr´e、P. A. Fillmore。希尔伯特模的平凡性定理。Topics in modern operator theory (蒂米ș什瓦拉/赫库兰，1980), Operator Theory: Adv. Appl., **2**, Birkha¨user，巴塞尔–波士顿，1981, 71–79.[4] R. Exel。部分动力系统、*Fell* 丛及其应用。Math. Surveys and Monographs，**224**, AMS, 2017.[5] V. Manuilov。作为逆半群的双重空间上的度量。J. Geom. Anal., **31** (2021), 5721–5739.[6] V. Manuilov，希尔伯特 C^*-模与离散度量空间相关。Russian Math., **65** (2021), No 5, 40–47.[7] L. Nachbin。拓扑与序。Van Nostrand Math. Studies，普林斯顿，1965.[8] J. ˇSpakula、R. Willett。极限算子的度量方法。Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 263–308.[9] H. Zettl。三元算子环的刻画。Adv. Math. **48**(1983), 117–143。

Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow State University, Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia电子邮箱地址：manuilov@mech.math.msu.su