arXiv:2603.23368v1 [math.AT] 24 Mar 2026

循环 Batalin–Vilkovisky 拟运算的超图模型及其应用

SERGEI A. MERKULOV

Abstract. 本文引入了一个超图的微分分次循环拟运算 $\mathcal{BVH}graphs$ ，并为其配备了一个从 Batalin–Vilkovisky 代数的循环拟运算 $\mathcal{BV}^c$ 出发的显式拟同构 $\mathcal{BV}^c \to \mathcal{BVH}graphs$ 。本文的大部分内容用于证明 $\mathcal{BVH}graphs$ 的上同调等于 $\mathcal{BV}^c$ 。

我们利用这一模型构造了一个显式拟同构 $Chains(\mathrm{FFM}_2) \to \mathcal{BVH}graphs$ ，其源为紧化模空间中的零亏格曲线的带标记框架点所对应的循环拟运算 FFM_2 的链歌剧，目标为微分分次循环拟运算 $\mathcal{BVH}graphs$ 。结合上述主要结果，这给出了 FFM_2形式性的一个新证明 $cyclic$ 。

1. 引言

1.1. （带框）小圆盘拟运算。 小 $d \geq 2$ 维圆盘拟运算 $\mathcal{D}_d$的形式性最初由 Tamarkin 在 [T] 中、对 $d = 2$ 证明；他在特征为零的域 $\mathbb{K}$ 上运用了 Kohno-Drinfeld 李代数理论。后来，Kontsevich [K2] 提出了另一种证明（完整细节亦见 Lambrechts-Voli´c [LV]）：该证明在实数域上，借助一个精妙的图模型 $\mathcal{G}raphs_d$ 以及 Kontsevich-Soibelman[KS] 提出并由 Hardt-Lambrechts-Turchin-Voli´c [HLTV]发展的半代数集上的半代数微分形式理论，构造了一个显式超越公式。这个图模型给出了小 d 维圆盘拟运算 $\mathcal{D}_d$的同调拟运算 $e_d := H_\bullet(\mathcal{D}_d)$。后一种“显式公式”证明还大量运用了拓扑拟运算 $\mathcal{D}_d$ 与 Fulton-MacPherson 紧化构形空间的拓扑拟运算 FM_d 之间的同伦等价，后者记作 $\mathbb{R}^d$。

Kontsevich 关于 $\mathcal{D}_2$ 形式性的“显式公式”证明背后的一个关键定理，有一个优雅且独立的证明，可见 [SW]；ˇSevera-Willwacher 的方法基于 $\mathcal{L}ie_\infty$-代数范畴中的某个拟运算——即所谓的内部连通图拟运算 ICG——它为 Drinfeld-Kohno 李代数（又称无穷小辫群李代数）的运算子提供了一个组合模型 [W1] 。

拓扑歌剧 $\mathcal{D}_d$ 有一个带框架的版本，即所谓的带框架小 d圆盘拟运算 $f\mathcal{D}_d$ ，它在同伦代数、代数拓扑和数学物理中发挥着重要作用 [G, SW, S, CIW, Br, LW, W2, W3]。其在 $d = 2$ 上的同调等于著名的 Batalin–Vilkovisky 代数拟运算 $\mathcal{BV}$ 。

Giansiracusa-Salvatore [GS1] 和 ˇSevera [S]证明了 $d = 2$ 上的 $f\mathcal{D}_d$ 运算子形式性。Khoroshkin-Willwacher [KW] 证明，当 $d \geq 3$ 时，运算子 $f\mathcal{D}_d$ 在 d 为偶数时是形式的，在 d 为奇数时是余形式的。

带框小圆盘运算子 $f\mathcal{D}_2$ 与 Kimura-Stasheff-Voronov [KSV] 运算子 FFM_2 同伦等价；后者是具有至少两个带标记框架点的零属代数曲线的紧化模空间。后一个拓扑歌剧具有显然的循环 拟运算结构，其同调是 Batalin-Volkovisky 代数的循环 拟运算$\mathcal{BV}^c$ 。上一段引用的结果表明，拓扑歌剧 FFM_2 作为非循环运算子是形式的。

关于实数域上 FFM_2 作为循环拟运算的形式性问题，Giansiracusa-Salvatore [GS2] 最先尝试解决。他们试图为拟运算 $\mathcal{BV}^c$构造一种组合模型——所谓的射影图复形——然后沿着 Kontsevich 关于 $\mathcal{D}_2$形式性的思路，通过一个显式的超越公式证明 FFM_2 的形式性 [K2] 。GS [的工作2] 十分出色且很有用（例如，我们在下文中会用到其中证明的若干结果 [，包括一个非常重要的消失引理），但其中有一个错误，是 Thomas Willwacher [W4]发现的。GS [中的主要问题2] 源于他们对射影图施加的所谓风车条件（见其中的定义 4.4 (R4)），该条件是作为一种

绕过下述障碍的尝试：给定一个任意的 BV 代数 $(A,\ \Delta)$，一个次数为 -2的反对称二元运算[1]

$$\{a,b\} := \Delta(\Delta(a)\cdot b) - (-1)^{|a||b|}\Delta(\Delta(b)\cdot a), \quad \forall a,b\in A,$$

通常不满足 雅可比恒等式。

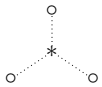
FFM_2 的循环 形式性最初由 Campos-Idrissi-Willwacher [CIW] 证明；他们将 Tamarkin 的[T] 方法和 ˇ Severa 的 [S] 方法分别推广到 $\mathcal{D}_2$ 和 $f\mathcal{D}_2$ 的（非循环）形式性。

1.2. 主要结果概述。 本文引入一个超图微分分次循环算子 $\mathcal{BVH}graphs$ ，并证明它配备了一个明确的微分分次循环算子拟同构

$$F : \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \to \mathcal{BVH}graphs.$$

这一论断的证明占据了本文的大部分篇幅。我们所用的超图类型相对简单：它们只有普通边（上同调次数为 -1）

和三价超边（上同调次数为 -2）



仅有这两种。在循环算子复合下，次数为 -1 的边可以组合成次数为 -2 的超边，因此这两种结构会相互作用。

我们的第二个结果是构造一个显式的拟同构

$$\Omega : \mathcal{BVH}graphs^* \longrightarrow \Omega^{\bullet}_{\mathsf{FFM}_2}$$

从对偶微分分次（Hopf）余运算子 $\mathcal{BVH}graphs^*$ 到几何算子 FFM_2上的半代数微分形式的德拉姆代数。该结果进而推出微分分次循环算子之间的一个拟同构

$$Chains(\mathsf{FFM}_2) \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs$$

并由此证明　　通过一条微分分次循环算子之间的显式拟同构之链，得到 FFM_2 的形式性　　ds

$$Chains(\mathsf{FFM}_2) \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs \longleftarrow \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}.$$

我们对这一主要结果的处理，借助于内部连通超图的循环算子 ICH 及其与无穷小带状辫循环算子的密切关系。这一思路深受 ˇSevera-Willwacher 论文 [SW] 附录B的启发；该附录给出了拟同构 $e_2 \to \mathcal{G}raphs_2$的简洁单页证明。遗憾的是，我们的技术细节并没有那么简短，占据了本文的大部分篇幅。

1.3. 为什么 超图? 令 $\mathsf{FFM}_2((n+1))^0$ 表示带有 $(n+1)$ 个不同带框点的零属代数曲线的模空间。对于任意 $i\neq j\in\{0,1,\dots,n\}$，存在一个映射

$$\pi_{ij} : \mathsf{FFM}_2((n+1))^0 \longrightarrow \mathsf{FFM}_2 \simeq S^1$$

它遗忘了所有标记点,除了由 i和 j标记的两个点。令 Vol_{S^1} 为标准齐次　　s
体积形式　　定义在圆 S^1上，并令

$$\alpha_{ij} := \pi_{ij}^*(\mathrm{Vol}_{S^1}).$$

这些 1-形式可以很好地延拓到 Kimura-Stasheff-Voronov [KSV] 紧化 $\mathsf{FFM}_2((n+1))$ of $\mathsf{FFM}_2((n+1))^0$。再考虑 $\mathsf{FFM}_2((n+1))$ 上以下的（S^1-基本）2-形式，其中 $n\geq 2$

$$\Omega_{ijk} := \alpha_{ij}\alpha_{jk} + \alpha_{ki}\alpha_{ij} + \alpha_{jk}\alpha_{ki}, \tag{1}$$

并令 $\bar{\alpha}_{ij}$ 和

$$\bar{\Omega}_{ijk} := \bar{\alpha}_{ij}\bar{\alpha}_{jk} + \bar{\alpha}_{ki}\bar{\alpha}_{ij} + \bar{\alpha}_{jk}\bar{\alpha}_{ki}.$$

[1]可以将这个二元运算改写为 $\{a,b\}' := \Delta(\Delta(a)\cdot b) - (-1)^{|a||b|ab} - \Delta(\Delta(b)\cdot a) + (-1)^{|a|}{}_{\Delta}(a)\Delta(b)$，使其在 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$中循环置换 (012) 的作用下表现得好得多；这将改变 [GS2] 研究的射影图复形中的微分，但无法解决风车问题。

表示 $H^\bullet(\mathsf{FFM}_2((n+1)))$ 中相应的上同调类。存在一个分次交换代数同构 [GS2]

$$H^\bullet(\mathsf{FFM}_2((n+1))) = \frac{\mathbb{R}[\bar{\alpha}_{ij}]_{0\le i\ne j\le n}}{I},$$

其中 $\mathbb{R}[\bar{\alpha}_{ij}]$ 是由次数为 1 的形式变量 $\bar{\alpha}_{ij}$ 生成的多项式代数，而 I 是由以下 12 项循环 *Arnold* 关系生成的理想，

$$\bar{\Omega}_{jkl} - \bar{\Omega}_{ikl} + \bar{\Omega}_{ijl} - \bar{\Omega}_{ijk} \equiv 0 \quad \forall i,j,k,l \in \{0,1,\dots,n\},\ \#\{i,j,k,l\} = 4.$$

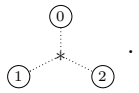
在构造 $\mathcal{BV}^!$ 的组合模型时，我们将 1-形式 α_{ij} 和 2-形式 Ω_{ijk} 视为彼此独立，但将它们在“循环余复合”下的行为（即它们在 FFM_2 的余维一边界分层上的限制）编码进某个循环运算子 $\mathcal{BVH}gra$ 中循环复合的定义里（其精确定义见 §4.4 ）。该循环运算子 $\mathcal{BVH}gra$ 由带有边 ○ ○ （对应于 1-形式传播子 α_{ij}）的超图生成，并且

带有超边  （对应于 2-形式传播子 Ω_{ijk}）；关键在于，循环运算子

○ 复合通常可以由边生成超边。玩具循环运算子 $\mathcal{BVH}gra$ 配备了一个循环运算子态射 [2]

$$\mathcal{L}ie_3 \to \mathcal{G}ra^!$$

它将 $\mathcal{L}ie_3$ 的 Lie 生成元恰好映到只有一条超边的超图



.

因此，可以对 $\mathcal{BVH}gra$ Thomas Willwacher 的扭曲自函子 [W1] （调整为适用于循环运算子）进行应用，经过额外的扭曲（见 §4.6）以反映上述边与超边之间的相互作用后，得到一个定义良好的带微分分次（简称 dg）循环运算子 $f\mathcal{BVH}graphs$ ，从中提取出循环运算子 $\mathcal{BV}^!$ 所需的组合模型 $\mathcal{BVH}graphs$ （见 §§ 7-8）。直接计算（见 §5.1.1）表明，先验独立的传播子 α_{ij} 与 Ω_{ijk} 之间的关系 (1) 必须在模去 d-恰当项的意义下成立；随后，另一项简单计算（见 §5.1.2）又恢复了循环 Arnold 关系，同样是在模去 d-恰当项的意义下。

The dg 拟运算附带一个显然的循环运算子态射

$$\mathcal{BV}^! \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs$$

我们将在第 8–10 节证明它是一个拟同构。我们还将在第 7–8 节构造一个明确的微分分次代数拟同构

$$\mathcal{BVH}graphs^* \longrightarrow \Omega_{\mathsf{FFM}_2}$$

从对偶（微分分次 Hopf）余运算子到 Ω_{FFM_2} 上的半代数 de Rham 代数；该拟同构具有足够良好的性质，从而确保相应的循环运算子态射 $Chains(\mathsf{FFM}_2) \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs$ 是一个定义良好的拟同构。

1.4. 一些记号。集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 简记为 $[n]$，而集合 $\{0,1,2,\dots,n\}$ 简记为 $((n+1))$。$[n]$ （分别为 $((n+1))$）的自同构群记作 $\mathbb{S}_n$ （分别记作 $\mathbb{S}_{(n+1)}$）。$\mathbb{S}_n$ 的平凡（分别为符号）一维表示记作 $\mathbb{1}_n$ （分别记作 sgn_n）。有限集 A的基数记作 $\#A$。

若 $V = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$ 是一个分次向量空间，则 $V[n]$ 表示具有 $V[n]^i := V^{i+n}$ 的分次向量空间；对于 $v \in V^i$，我们令 $|v| := i$。典范的次数 -1 同构 $V \to V[1]$ 记作 $\mathfrak{s}$；对于任意齐次元素 $v \in V$，有 $|\mathfrak{s}^k v| = |v| - k$。

致谢。衷心感谢 Vladimir Dotsenko、Anton Khoroshkin、Sergey Shadrin，尤其是 Thomas Willwacher，感谢他们进行的许多宝贵讨论。

[2]符号 $\mathcal{L}ie_3$ 中的上标 3 表示， $\mathcal{L}ie_3$ 的李括号生成元被赋予上同调次数 $1-3=-2$。

2. 循环算子：定义与例子

2.1. 循环（ 余拟运算。 对称幺范畴 $\mathcal{C}$ 中的循环算子 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}$ 是一个函子 [GK]

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}: & \text{Groupoid of finite finite sets} & \longrightarrow & \mathcal{C}\\ & I & \longrightarrow & \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)\end{array}$$

对任意 $i\in I$、 $j\in J$，配备一个关于 I 和 J 的自然复合态射

$$_i\circ_j : \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)\otimes\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(J)\longrightarrow \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I\sqcup J\setminus\{i,j\}) =: \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)_i\circ_j\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(J)$$

满足结合公理,

$$\left(\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)_i\circ_{j_1}\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(J)\right)_{j_2}\circ_k\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(K) = \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)_i\circ_{j_1}\left(\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(J)_{j_2}\circ_k\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(K)\right),\ \forall i\in I,\ j_1\neq j_2\in J,\ k\in K$$

以及交换公理；在对我们最重要的情形—— $\mathcal{C}$ 是微分分次向量空间范畴——中，它表述如下

$$a\,_i\circ_j b = (-1)^{|a||b|}b_j\circ_i a,\quad \forall\ a\in\mathcal{O}(I),\ b\in\mathcal{O}(J).$$

对任意非负整数 n，我们令 $\mathcal{O}((n+1)) := \mathcal{O}(\{0,1,\dots,n\})$。因此，循环算子 $\mathcal{O}$ 可以理解为由微分分次向量空间的模 $\mathbb{S}_{(n+1)}$ 组成的可数族 $\{\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 0}$，并配备一族可数个复合态射

$$_i\circ_j : \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1))\otimes\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1))\longrightarrow\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((m+n)),$$

由整数对 $i\in\{0,1,\dots,n\}$ 和 $j\in\{0,1,\dots,m\}$参数化，并满足结合公理和交换公理。本文中考虑的所有循环算子代数的"曲率"分量$\mathcal{O}(1)$均为零，因此从现在起假设 $n\geq 1$。

对偶地，循环余歌剧 $co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}$ 是一个函子

$$\begin{array}{rccc}co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}: & \text{Groupoid of finite finite sets} & \longrightarrow & \mathcal{C}\\ & I & \longrightarrow & co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)\end{array}$$

配备了对任意 有限集 I 及其不交并分解 $I=I'\sqcup I''$，带有一个自然映 p

$$\Delta_{I',I''} : co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)\longrightarrow co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I'\sqcup x')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(x''\sqcup I'')$$

使得对于任意有限集 I及其分解 $I=I'\sqcup I''\sqcup I'''$，以下两个映射相等：$\Phi^L_{I',\ I'',\ I'''} = \Phi^R_{I',\ I'',\ I'''}$

$$\begin{array}{rl}(2) & \Phi^R_{I',I'',I'''} : co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)\xrightarrow{\Delta_{I',I''\sqcup I'''}} co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I'\sqcup x')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(x''\sqcup I''\sqcup I''')\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\Delta_{x''\sqcup I'',I'''}}\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I'\sqcup x')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(x''\sqcup I''\sqcup y')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(y''\sqcup I''')\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}(3) & \Phi^L_{I',I'',I'''} : co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I)\xrightarrow{\Delta_{I'\sqcup I'',I'''}} co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I'\sqcup I''\sqcup y')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(y''\sqcup I''')\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{I',I''\sqcup y'}}\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(I'\sqcup x')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(x''\sqcup I''\sqcup y')\otimes co\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}(y''\sqcup I''')\end{array}$$

2.1.1. 循环算子代数的导子。设 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}=\{\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 1}$是微分分次向量空间范畴中的一个无环拟运算。其次数为 $d\in\mathbb{Z}$ 的导子按定义是一族线性映射

$$D:\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1))\to\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1)),\quad\forall\ n\geq 1,$$

使得

$$D(a_i\circ_j b) = D(a)_i\circ_j b + (-1)^{d|a|}a_i\circ_j D(b).$$

$\mathcal{O}$ 中的微分是一个次数为 $+1$ 的导子 δ，使得 $\delta^2=0$。

令 D 为 一个 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((2))$ 中在 $\mathbb{S}_{(2}$ 的作用下满足斜对称条件的元素),

$$(01)(D) = -D.$$

于是，对任意 $n \geq 1$，由下式给出的线性映射

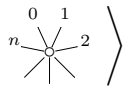
$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1)) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}((n+1)) \\ & a & \longrightarrow & D(a) := \sum_{i=0}^{n} D_1 \circ_i a \end{array}$$

是一个次数为 $|D|$ 的导子。

2.2. 示例：交换代数的循环算子。令 $\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}} = \{\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 1}$ 为由 $\mathbb{S}_{(n+1)}$ 的一维平凡表示组成的集合，

$$\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}((n+1)) := \mathbb{1}_{n+1},$$

其中复合映射 $\circ_i$ 是标准同构 $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$。这是一个循环算子。它适合用图示方式将 $\mathbb{S}_{n+1}$ 的生成元表示为一个花冠，并在其上连接 $n+1$ 条带标签的腿（或毛发），

$$\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}((n+1)) = \mathbb{K}\left\langle \right.$$  $$\left. \right\rangle$$

假设这个花冠是非平面的，并且腿彼此不可区分（因此 $\mathbb{S}_{(n+1)}$ 通过重新标记平凡地作用）。于是，代数运算式复合 $\circ_i$ 可以用图示方式理解为：将一个花冠的带 i 标签的腿与另一个花冠的第 j 条带标签的腿粘合，然后收缩由此产生的内部边（必要时再适当地重新标记腿）。

我们用 $\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}$ 表示 $\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}$ 的增广，根据定义，它是 $\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}$ 的一个循环子拟运算，具有 $\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}(2) = 0$，并且对所有 $n \geq 2$，都有 $\mathcal{C}om^{\mathfrak{c}}(n+1) = \mathcal{C}om(n+1)$。

2.3. 示例：循环同调拟运算 $H_\bullet(S^1)$。设 S^1 为拓扑圆，$H_\bullet(S^1) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[1]$ 为其同调群。$\mathbb{K}[1]$ 的次数为 -1 的生成元记为 Δ。这个上同调群可以构成一个循环拟运算 $H_\bullet(S^1) = \{H_\bullet(S^1)((n+1))\}$，其中除以下一个 $n = 1$ 外，所有 $\mathbb{S}_{(n+1)}$-模 $H_\bullet(S^1)((n+1))$ 均为零，

$$H_\bullet(S^1)(2) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[1],$$

在该模上，$\mathbb{S}_2$ 的作用是平凡的。循环复合规则由以下同构给出

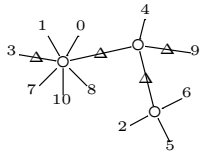
$$\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}[1] \to \mathbb{K}[1], \quad \mathbb{K}[1] \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}[1],$$

以及零映射 $\mathbb{K}[1] \otimes \mathbb{K}[1] \to 0$。

与上文类似，我们用 $\bar{H}_\bullet(S^1)$ 表示 $H_\bullet(S^1)$ 的增广；它是 $H_\bullet(S^1)$ 的一个循环子拟运算，其中 $\bar{H}_\bullet(S^1)((2)) = \mathbb{K}[1]$，其所有代数运算式复合都是平凡的。图中，$\bar{H}_\bullet(S^1)((2))$ 的生成元用一条饰有符号 Δ 的边 表示。

2.4. 示例：一个 BV-代数的循环拟运算。令 $\mathcal{BV}'$ 为由循环运算子 $\mathcal{C}om$ 和 $\bar{H}_\bullet(S^1)$ 自由生成的循环拟运算。其元素可识别为树 T，其顶点是来自 $\mathcal{C}om$ 的花冠，并且

– 内部边（若有）都饰有 Δ，– T 的每条带标签的腿可以没有装饰，也可以恰好带有一个 Δ 装饰，例如

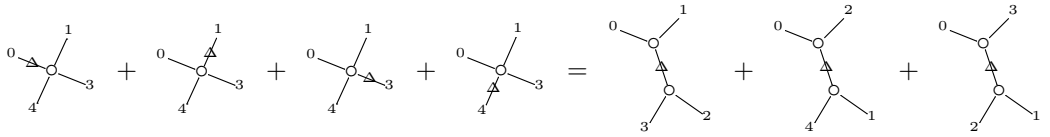


$\in \mathcal{BV}'((10+1))$

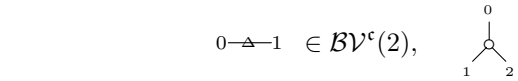
这类树的代数运算式复合 $\circ_i$ 为

（i）当腿 i 和 j 均未由 Δ 装饰时，按 $\mathcal{C}om$ 给出；（ii）当这两条腿中恰有一条由 Δ 装饰时，将腿 i 和 j 粘合成一条新的内部边；（iii）当腿 i 和 j 均由 Δ 装饰时，令其为零。

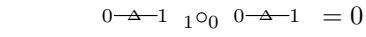
Batalin–Vilkovisky 代数的循环算子 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}=\{\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 1}$ 定义为 $\mathcal{BV}'$ 关于由以下关系生成的算子理想的商

(4) 

循环算子 $\mathcal{BV}$ 本质上有两个生成元



它们满足上述关系以及以下关系

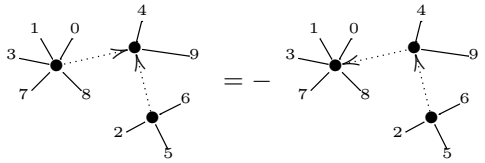


它编码了 $\Delta^2=0$。

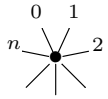
2.5. 示例：一个拓扑循环模演算 FFM_2。 在拓扑空间范畴中的循环算子有一个很好的例子：由 [KSV] 引入的带框点零属代数曲线紧化模空间集合 $\mathrm{FFM}_2=\{\mathrm{FFM}_2(n+1)\}_{n\geq 1}$；该文证明了，其同调算子 $H_\bullet(\mathrm{FFM}_2)$ 恰好是循环算子 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$。

2.6. 同伦李代数的循环算子 $\mathcal{H}olie_d^{\mathfrak{c}}$ 的 d 奇数。 下标 d 表示循环算子 $\mathcal{H}olie_d^{\mathfrak{c}}=\{Holie_d^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 2}$ 是李代数循环算子 $\mathcal{L}ie_d$ 的一个极小分解，其李括号生成元的次数为 $1-d$；因此，情形 $d=1$ 对应于通常的循环 $\mathcal{L}ie_\infty$ 拟运算。

将循环拟运算 $\mathcal{H}olie_d^{\mathfrak{c}}((n+1))$ 的生成元与无根树相对应是合适的：这些树的腿标记为整数 0、1、.....、n，其内部边（图中以虚线表示）带有方向（模翻转及乘以 -1），例如：

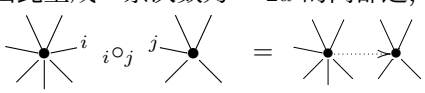


每棵这样的无根树都带有一个定向。根据定义，定向是对其顶点和腿的一种排序（模置换及乘以其符号），并且为每条内部（虚线）边选定一个特定方向。将这样的图理解为由花冠拼接而成很有帮助：

(5) 

其中黑色顶点的次数为 $1+2d$，而连接的腿（或毛发）的次数为 $-d$，这立即说明了前述定向；内部边的次数为 $-2d$，因为假定它们由相关顶点的两条腿拼接而成；这两条腿必须以某种顺序排列，从而为每条边选定一个方向（模翻转及乘以 -1）。我们倾向于用“虚线颜色”表示内部边，以强调其分次不同于腿（腿以“实线颜色”表示）。

这类无根树的循环复合 $\Gamma'{}_i\circ_j\Gamma''$ 是通过将 Γ' 的第 i 条带标签的腿（次数为 $-d$）与 Γ'' 的第 j 条带标签的腿（次数为 $-d$）粘合来定义的，由此生成一条次数为 $-2d$ 的内部边，例如：

(6) 

无根树上的微分 $T\in\mathcal{H}olie_d$ 由以下求和给出

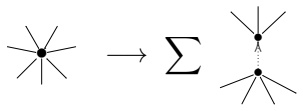
$$\delta T=\sum_{v\in V(T)}\delta_v T$$

其中， δ_v 通过如下方式将顶点 $v=\bullet$ 拆分

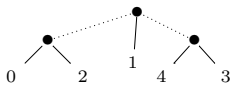
$$\delta_v : \bullet \ \text{ goes into } \ \bullet\cdots\succ\bullet \ .$$

然后对所有可能的悬垂半边/腿重新附接方式求和——这些半边/腿原本附着于 v ——并将它们重新附着到新生成的两个顶点之间，同时确保每个新顶点的价数至少为 3。例如， δ 作用于一个单顶点图时如下所示，

$$\delta : \quad \longrightarrow \sum \quad .$$

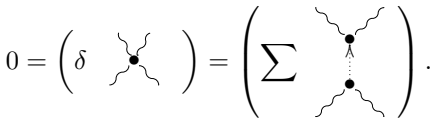


这个循环微分分次算子 $\mathcal{H}olie_d$, $d\in 2\mathbb{Z}+1$ 的上同调是李代数的拟运算 $\mathcal{L}ie_d^{\mathfrak{c}}$，它由图中所示的三价图生成



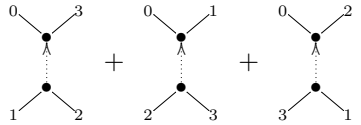
对于每条虚线边，都要对所谓的 IHX 关系取模；也就是说，对将 δ 应用于价数为 4 的黑色顶点 v 所得到的三项关系取模，

$$0=\left(\delta \quad \right)=\left(\sum \quad \right).$$



其中任意一根波浪毛发都可以代表一条实线腿或一条附着于 v 的点线半边。例如，如果所有波浪毛发都是实线腿，就得到一个雅可比关系

$$0= \quad + \quad + \quad$$



情形 $d=3$ 对本文尤为重要。

2.7。示例：图的循环算子 $\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}$。对于任意 $d\in\mathbb{Z}$ 存在一个循环拟运算 $\qquad\qquad$ d

$$\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}} := \{\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 1},$$

其中， $\mathbb{S}_{(n+1)}$-模 $\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((n+1))$ 由图 Γ 张成，这些图具有带标记的 $n+1$ 个顶点，且边的次数为 $1-d$，例如：

$$\text{⓪—①} \in \mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((1+1)), \quad \text{②, ⓪ ①} , \quad \text{②, ⓪—①} , \quad \text{②, ⓪—①} \in \mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((2+1)).$$

当 d 为奇数时，默认假设 Γ 的每条边都带有一个方向，该方向可以翻转（同时将 Γ 乘以 -1）。当 d 为偶数时，边无向，但假设它们有序（相差一个置换时，乘以该置换的符号）。对于图中的奇数 d，我们不标出边的方向，而是假设已作出某种选择。每个图 $\Gamma\in\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((n+1))$ 都赋予上同调次数

$$|\Gamma| := (1-d)\#E(\Gamma),$$

其中 $E(\Gamma)$ 是 Γ 的边集。置换群 $\mathbb{S}_{(n+1)}$ 通过重新标记顶点的方式作用于 $\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((n+1))$ 的生成元。

对于标记为整数 $i\in((n+1))$ 的顶点 $v\in V(\Gamma)$，我们用 $H(i)$ 表示所有连接到 v 的半边集合。

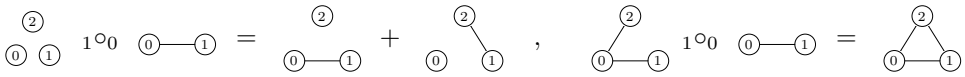
对于任意 $i\in((n+1))$ 和 $j\in((m+1))$，此类图的代数运算式复合

$$\begin{array}{rccc} {}_i\circ_j: & \mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((n+1))\otimes\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((m+1)) & \longrightarrow & \mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}((m+n)) \\ & \Gamma'\otimes\Gamma'' & \longrightarrow & \Gamma'{}_i\circ_j\Gamma'' \end{array}$$

在生成元上的定义为图的线性组合

$$\Gamma'{}_i\circ_j\Gamma'' := \sum_{\substack{f':H()\to V(\Gamma'')\\ f'':H(j)\to V(\Gamma')}} \Gamma'{}_{f'}\circ_{f''}\Gamma'' \tag{7}$$

其中，与每对映射 (f', f'') 相对应的直和项 $\Gamma'_{f'}\circ_{f''}\Gamma''$，由如下图给出：从 Γ' 和 Γ'' 中分别删去标记为 i 和 j 的顶点，再按照 f' 和 f'' 分别指定的规则，将由此产生的悬垂半边重新连接到 Γ'' 和 Γ' 的顶点上。以下是 d 为偶数时 $\mathcal{G}ra_d^{\mathfrak{c}}$ 中循环代数组合的两个例子（此时图不能有重边）



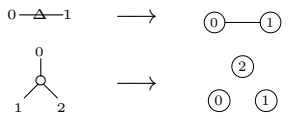
诱导定向显而易见。

这个循环 图的循环算子之所以令我们感兴趣，是因为存在一个循环运算子态射

$$f : \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}} \tag{8}$$

其在生成元上的定义为

(9)



这个映射不是拟同构，但在下文 §7 中，我们将 $\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}$ 扩展为一个更大的微分分次 超图循环算子 $\mathcal{BVH}graphs$，使得上图所示的映射 i 成为拟同构。

2.8. 示例：无穷小带状辫的循环拟运算。令 $\tilde{\mathfrak{t}} = \{\tilde{\mathfrak{t}}(n)\}_{n\geq 1}$ 为 [S]中引入的无穷小带状辫（非循环）拟运算；这是李代数对称幺半范畴中的一个拟运算，其中 $\tilde{\mathfrak{t}}(n)$是由符号 $t_{ij} = t_{ji}$、 i、 $j \in [n]$生成的完备自由李代数，并模去由以下关系生成的李理想

$$\begin{aligned} [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 \quad \text{for } \{i,j\}\cap\{k,l\} = \emptyset, \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] &= 0. \end{aligned}$$

特别地，对于任意 $i \in [n]$，元素 t_{ii} （在 [S]中记作 $2s_i$ ）在 $\tilde{\mathfrak{t}}(n)$中都是中心的。非循环的代数组合在 [S]的§3.1中有明确给出。

由 n 元素 $\{t_{in}\}_{i\in[n]}$ 生成的 $\tilde{\mathfrak{t}}(n)$的李子代数可与 $\mathfrak{freeLie}_{n-1}\oplus\mathbb{K}\langle t_{nn}\rangle$等同，其中 $\mathfrak{freeLie}_{n-1}$ 是由 $\{t_{in}\}_{i\in[n-1]}$个 $n-1$ 生成元生成的完备自由李代数， $\mathbb{K}\langle t_{nn}\rangle$ 是1维中心。它构成一个李理想，并给出李代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathfrak{freeLie}}_{n-1}\oplus\mathbb{K}\langle t_{nn}\rangle \longrightarrow \tilde{\mathfrak{t}}(n) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{t}}(n-1) \longrightarrow 0.$$

文献 [CIW] 中证明，该拟运算具有循环结构，置换 $(01)\in\mathbb{S}_{(n+1)}$ 在生成元上的作用对任意 $i,\ j \geq 2$ 均由以下公式给出

$$t_{ij}\to t_{ij},\quad t_{1i}\to -\sum_{k=1}^{n} t_{ik},\quad t_{11}\to\sum_{k,l=1}^{n} t_{kl}.$$

作用 $\mathbb{S}_{(n+1)}$ 在 $\tilde{\mathfrak{t}}(n)$ 上的作用，若在 $\tilde{\mathfrak{t}}(n)$ 中引入一组新的生成元，则可以简化 ，

$$\begin{aligned} T_{0i} &= -t_{ii} - 2\sum_{k=1} t_{ik} - \sum_{k,l=1}^{n} t_{kl} \quad \text{for any } i\in[n], \\ T_{ij} &= 2t_{ij} - t_{ii} - t_{jj}, \quad \text{for any } i,j\in[n], i\neq j. \end{aligned}$$

于是，该作用就变成了对指标的重新标记，即对于任意的 $A, B \in ((n+1))$，若满足 $A\neq B$ and any $\sigma\in\mathbb{S}_{(n+1)}$ ，则有

$$T_{AB}\longrightarrow T_{\sigma(A)\sigma(B)}.$$

因此， $\tilde{\mathfrak{t}}(n)$ 也可以等价地定义为由符号 $\{T_{AB}\}_{A,B\in((n+1)),A\neq B}$ 生成的完备李代数 $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))$，并模掉以下关系

$$[T_{AB},T_{CD}]=0 \quad \text{for } \{A,B\}\cap\{C,D\}=\emptyset,$$
$$[\sum_{B=0}^{n}T_{AB},T_{CD}]=0 \ \text{ for any } A,C,D\in((n+1)).$$

此处及下文中，我们总是假设，对于任意 $A\in((n+1))$， $T_{AA}\equiv 0$ 。这些关系意味着，对于任意i， j， $k\in[n]$,

$$\begin{array}{rcl}[T_{ij},T_{kl}] & = & 0 \ \text{ if } \ \#\{i,j,k,l\}=4\\ [T_{ij},T_{ik}+T_{jk}] & = & 0 \ \text{ if } \ \#\{i,j,k\}=3\\ [T_{ij},T_{0i}+T_{0j}] & = & 0\\ [T_{0k},T_{0i}+T_{ik}] & = & 0\end{array}$$

进而意味着，由集合$\{T_{An}\}_{A\in((n+1))}$ 生成的李代数 $\mathfrak{t}^{c}((n+1))$ 的子空间 $\mathfrak{t}_n((n+1))$ 是一个李理想，因此存在李代数的短正合列

$$0\longrightarrow \mathfrak{t}_n((n+1))\longrightarrow \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))\longrightarrow \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n))\longrightarrow 0.$$

因此，李理想 $\mathfrak{t}_n((n+1))$ 可识别为由符号 T_{0n}， T_{1n}， $\ldots$， $T_{n-1\,n}$ 生成的完备自由李代数的商，其模掉的关系为：总和

$$T_{0n}+T_{1n}+\ldots+T_{n-1\,n}$$

是 $\mathfrak{t}_n((n+1))$ 中的一个中心元。若按照李词中字母 T_{ij}、i， $j\in[n]$ 的个数对 $\mathfrak{t}_n((n+1))$ 作滤过，则其伴随分次李代数可识别为 $\mathfrak{freeLie}_{n-1}\oplus\mathbb{K}\langle T_{0n}\rangle$，其中 $\mathfrak{freeLie}_{n-1}$ 是由 T_{in}、 $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$生成的完备自由李代数。

这一族

$$\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}:=\{\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 1}$$

是李代数范畴中的循环算子（参见 [CIW] 中的 §3.1）。因此

$$\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}[1]):=\{\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))[1])\}_{n\geq 1}$$

是余微分余交换余代数范畴中与之对应的微分分次循环算子。存在一个循环算子拟同构 [S]

$$\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}\longrightarrow\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}[1]) \tag{10}$$

其在生成元上的定义如下（参见 (9)）

$$\longrightarrow \quad T_{01}\in\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((2))[1],$$



$$\longrightarrow \quad 1\in\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((3))[1]).$$

这一结果是在 [S] 中沿着 Tamarkin 在 [T] 中对 Gerstenhaber 代数拟运算的相应版本所作证明的思路得到的。

3. 超图的辅助循环算子及其扭曲

3.1. 图与超图。超图 Γ 可以理解为三元集合组 $(V(\Gamma),\ V_*(\Gamma),F(\Gamma))$，并配有一个单射 ι： $F(\Gamma)\to V(\Gamma)\times V_*(\Gamma)$。将该映射 ι 与典范投影复合，可得相应的结构映射 ι_V： $F(\Gamma)\to V(\Gamma)$ 和 ι_*： $F(\Gamma)\to V_*(\Gamma)$。集合 $V(\Gamma)$ 称为顶点集， $V_*(\Gamma)$ 称为其超边集（或 $*$-顶点）[3], ，而 $F(\Gamma)$ 称为 Γ的旗标集。

[3]术语 $*$-*vertices* 在超图的图示中很有用。本文根据语境使用两种术语—— $*$-顶点和超边——来指代同一种结构。

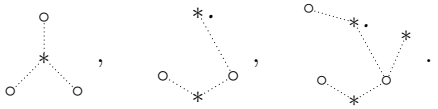
对于任意顶点 $v \in V(\Gamma)$（分别地，任意超边 $v_* \in V_*(\Gamma)$），其原像 $\iota_V^{-1}(v)$（分别地，$\iota_*^{-1}(v_*)$）称为附属于 v （分别地，附属于 v_*）的旗标集，其基数称为价数。超图 Υ 的自同构 是由三个双射构成的

$$f_V : V(\Gamma) \to V(\Gamma), \quad f_* : V_*(\Gamma) \to V_*(\Gamma), \quad f_F : F(\Gamma) \to F(\Gamma)$$

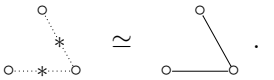
且与结构映射相容，

$$\iota_V \circ f_F = f_V \circ \iota_V, \ \iota_* \circ f_F = f_* \circ \iota_*.$$

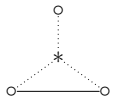
任意超图都显然可以几何地表示为一个 1 维 CW复形，其 0-胞腔是顶点和 $*$-顶点，而其 1-胞腔是旗标，它们总是连接不同类型的顶点，例如：



$*$-顶点全为二价的超图称为图，其旗标称为半边；在这种情况下，图示中会省略 $*$-顶点，相应的超边称为边，例如：

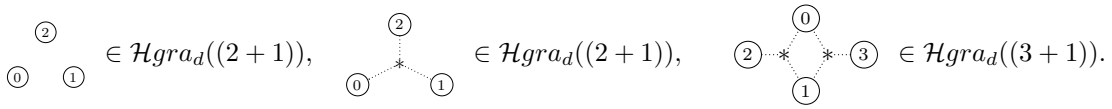


本文采用以下“图示”约定：对于价数大于 2 的 $*$-顶点所对应的超边，其旗标画作虚线边；而二价超边（即边）则始终画作实线边，正如上方紧邻的图和下图所示



因此，超图可以理解为具有两种类型顶点的图，其中“边”总是连接不同类型的顶点。然而，这种解释可能会造成严重误导，因为在我们的应用中，顶点和 $*$-顶点的处理方式截然不同——顶点代表构形空间中的点，而边和超边代表传播子，也就是与其所附着的顶点相关联的半代数微分形式。

3.2. 超图的循环算子 $f\mathcal{H}gra_{d\circ}$ 对于任意整数 $d \in \mathbb{Z}$，都有一个循环算子 $\mathcal{H}gra_d := \{\mathcal{H}gra_d((n+1))\}$，其中 $\mathbb{S}_{(n+1)}$- 模 $\mathcal{H}gra_d((n+1))$ 由超图 Γ 生成，这些超图具有带标签的 $n+1$ 个顶点和次数为 $1-d$ 的三价超边；更确切地说，每个 $*$-顶点的上同调次数为 $1+2d$，而它的三个旗标各自的次数为 $-d$，例如：



注意，对于 d 奇数（这是对我们而言最重要的情形），这些超图不能含有平行旗标；此外，在这种情形下，每个超图都带有一个定向，按定义，它是对其所有 $*$-顶点和旗标进行的排序（排序视同置换，并乘以该置换的符号）。置换群 $\mathbb{S}_{(n+1)}$ 通过重新标记顶点作用于超图。这类超图的代数运算式复合

$$\begin{array}{rccc} {}_i\circ_j : & \mathcal{H}gra_d((n+1)) \otimes \mathcal{H}gra_d((m+1)) & \longrightarrow & \mathcal{H}gra_d((m+n)) \\ & \Gamma' \otimes \Gamma'' & \longrightarrow & \Gamma'{}_i\circ_j\Gamma'' \end{array}$$

定义为超图的线性组合（参见 §2.7）

$$\Gamma'{}_i\circ_j\Gamma'' \sum_{\substack{f':F(i)\to V(\Gamma'') \\ f'':F(j)\to V(\Gamma')}} \Gamma'{}_{f'}\circ_{f''}\Gamma''$$

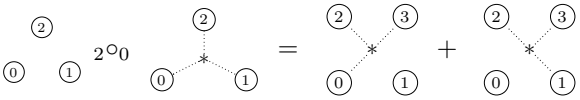
由所有可能的映射参数化

$$f' : F(i) \to V(\Gamma'') \text{ and } f'' : F(j) \to V(\Gamma')$$

其中

(1) $F(i)$（分别为 $F(j)$）是附着于由 i 标记的顶点 $v_i \in \Gamma'$（分别为由 j 标记的顶点$v_j \in V(\Gamma'')$）上的旗标集合；(2) 对于任意给定的一对 (f', f'')，图 $\Gamma'_{f'} \circ_{f''} \Gamma''$由 Γ'和 Γ''通过删除顶点 i和 j （分别）得到，并根据映射 f'和 f''，将由此产生的悬垂旗标重新附着到 Γ'' 和Γ'的顶点上（分别）。

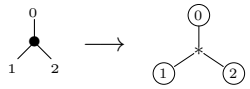
每个直和项中诱导的定向等于 $or_{\Gamma'} \wedge or_{\Gamma''}$。
以下是循环代数组合的一个例子



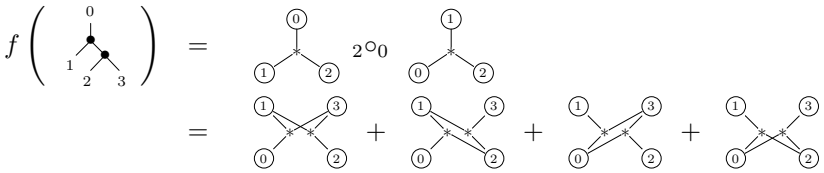
3.2.1. 引理。 对于任意奇整数 d， 存在一个循环运算子态射

$$f : \mathcal{L}ie_d \longrightarrow \mathcal{H}gra_d$$

在生成元上的定义为



证明。我们有



接下来，将群代数 $\mathbb{K}[\mathbb{S}_{(3+1)}]$ 中的元素 $\mathrm{Id} + (123) + (123)^2$ 作用于等式右端，并考虑超图的定向，可得零。□

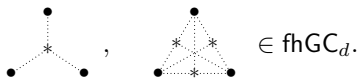
从现在起，我们假设整数参数 d 只取奇数值。

3.3. 超图复形。我们将上述循环运算子态射的变形复形定义为一个（完整的）超图复形，

$$\mathsf{fhGC}_d := \mathsf{Def}(\mathcal{L}ie_d \xrightarrow{f} \mathcal{H}gra_d) = \prod_{n\geq 1} \mathcal{H}gra_d((n+1)) \otimes_{\mathbb{S}_{n+1}} sgn_{n+1}[2d - d(n+1)]$$

本文中这个复形纯粹起辅助作用：(a) 我们在下文讨论的 $\mathcal{H}gra$ 扭曲中会用到它（而该扭曲又用于第 6 节中微分分次循环算子 $f\mathcal{BV}\mathcal{H}graphs$ 的构造）；(b) 我们需要一个关于 fhGC_d 的纯技术性事实（下文将证明）：它包含由所有顶点至少为三价的超图生成的子复形 hGC_d。

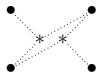
微分分次李代数 fhGC_d 由顶点未标记的超图 Γ 生成，例如：

(11)  $\in \mathsf{fhGC}_d$.

$\Gamma \in \mathsf{fhGC}_d$ 的上同调次数为

$$|\Gamma| = d\#\mathsf{V}_\bullet(\Gamma) + (1+2d)\#\mathsf{V}_*(\Gamma) - d\#\mathsf{F}(\Gamma) - 2d.$$

每个这样的超图 Γ 都配备了一个定向，该定向由其顶点、旗标的排序给出，并且 $*$-顶点，在置换意义下视为相同，并乘以该置换的符号。例如，超图



在 fhGC_d 中恒等于零，因为它存在一个反转其定向的自同构。fhGC_d 中的李括号由循环复合给出，

$$[\Gamma', \Gamma''] = \sum_{\substack{v' \in V_\bullet(\Gamma') \\ v'' \in V_\bullet(\Gamma'')}} \Gamma'_{v' \circ_{v''}} \Gamma''$$

该元素

$$\gamma :=$$ 

是与上文引理中的态射 f 对应的 Maurer–Cartan 元。它使 fhGC_d 成为一个微分分次李代数，其微分由黑色顶点的分拆给出

$$\delta\Gamma = [\gamma, \Gamma] = \sum_{v \in V_\bullet(\Gamma)} \delta_v \Gamma$$

wh其中 $\delta_v\Gamma$ 由 Γ 通过将以下超图代入顶点 v 而得：

(12) $$\delta_v : \bullet \longrightarrow \frac{1}{2}$$ 

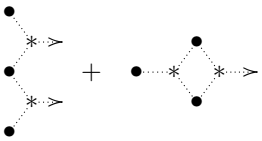
并进行两次求和，

（a）一次求和遍历先前连接到 v 的旗标在两个新黑色顶点之间的所有可能重新附着方式，即遍历将 $F(v)$ 分拆为两个子集的不交并的所有可能方式；（b）第二次求和遍历将悬挂旗标（在上图中画成箭头）附着到 Γ的所有其他黑色顶点上的所有方式，也就是对集合 $V(\Gamma) \setminus v$ 求和。

下面通过初等图示验证说明 δ 确实是一个微分：

$$\delta^2\Gamma = \sum_{v \in V_\bullet(\Gamma)} (\delta)_v^2 \Gamma$$

其中两个运算之和

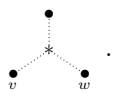
$$(\delta)_v^2 : \bullet \longrightarrow$$ 

恒等于零，因为每个运算都会生成一组图对之和，这些图具有相反定向，彼此抵消（箭头表示对将这些边连接到图中所有其他顶点的情况求和，即排除图中所示的顶点）。

3.4. 至少三价的超图复形 hGC_d。令 $\mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$ 为 fhGC_d 的李子代数，由连通 超图生成，其中每个黑色顶点的价数均为 ≥ 2。注意，与完整的Kontsevich 图复形 fGC_d （即不限制图顶点价数的复形，见[W1]）不同，由至少含有一个单价 黑色顶点的连通超图张成的 fhGC_d 子空间不是 子复形，因为微分可以通过添加一个新的旗标来增加黑色顶点的价数。

3.4.1. 引理。 $\mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$ 是fchGC_d的微分分次李子代数。

证明。 显然，这个子空间是一个李子代数。较不明显的是，$\mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$ 是一个子复形，也就是说，对于任意 $\Gamma \in \mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$， $\delta\Gamma$ 中含有一价顶点的项会相互抵消。实际上，含有一价顶点的项可能通过附着于不同顶点的每一组有序对 $(v、 w) \in V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ 而出现在 $\delta\Gamma$ 中，其中包含一个一价顶点的超边

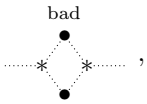
$$\sum_{\substack{(v,w) \in V(\Gamma) \times V(\Gamma) \\ v \neq w}}$$ 

每个这样的直和项都会出现两次：一次是在 δ 拆分 v 时，另一次是在 δ 拆分 w时；这两个直和项带有相反定向，因此彼此抵消。□

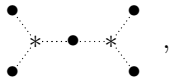
令 hGC_d 为 $\mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$ 的一个线性子空间，由所有顶点度数至少为三的图张成。

3.4.2. 定理。 hGC_d 是$\mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$ 的微分分次李子代数。

证明。 hGC_d 在李括号下封闭显然。我们称图$\Gamma \in \mathsf{hGC}_d^{\geq 2}$ 中的一个二价黑色顶点 v 为坏的，如果连接到 v 的两条超边还共享另一个公共黑色顶点（其价数≥ 2可以任意）；坏的二价顶点构成如下形式的“方形”

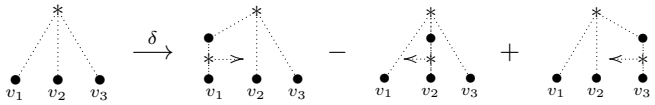


其中下方的黑色顶点可以具有任意价数 ≥ 2。如果 Γ 没有二价顶点，那么 $\delta\Gamma$中包含非坏二价顶点（即形如



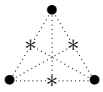
的项会相消，理由与 Kontsevich 的图复形 GC_d 中的情形相同——每个这样的非坏二价顶点都会在求和中出现两次，且符号相反。

接下来证明，对于任意 $\Gamma \in \mathsf{hGC}_d$， $\delta\Gamma$ 中带有坏二价顶点的项也会相消。这里的论证稍微复杂一些，因为我们必须研究 Γ中由一条超边连接的黑色顶点三元组（而非像引理**3.4.1**的证明中那样研究顶点对），即 Γ 的三元组（v_1、 v_2、 v_3）。对这类三元组中的每个顶点应用微分 δ，会得到以下超图的线性组合，其中每个超图都新生成了一个二价黑色顶点，



当顶点 v_i 处的悬挂边连接到另外两个顶点中的任意一个时，就会出现坏的二价顶点。这会产生六个含有坏的二价顶点的直和项；直接检查它们的诱导定向可知，这些直和项两两抵消。□

上述引理意味着，例如，超图

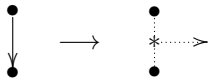


在 $H^{-d}(\mathsf{hGC}_d)$中表示一个非平凡的上同调类，因为微分无法产生二价顶点，因此在这个超图上为零。

3.4.3. 注。 考虑一个奇图复形 GC_d, $d \in 2\mathbb{Z}+1$，并定义一个次数为 $-d$ 的线性映射

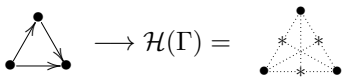
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}: & \mathsf{GC}_d^{\geq 2} & \longrightarrow & \mathsf{hGC}_d \\ & \Gamma & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Gamma) \end{array}$$

通过将每条（　　方向在翻转下视为相同，且带有符号的）边 Γ 替换为一条带有一个“悬挂”旗标的超边，



然后对新生成的“悬挂”旗标与 Γ的顶点之间所有可能的连接方式求和，并将至少含有一个二价顶点的图置为零。例如

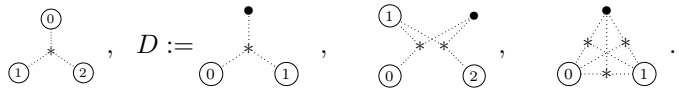
$$\mathcal{H}:\Gamma = \quad \longrightarrow \mathcal{H}(\Gamma) =$$



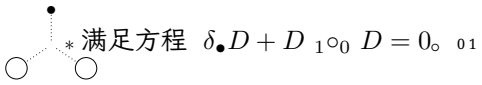
$\mathcal{H}(\Gamma)$ 的定向由 Γ 的定向唯一确定：对 Γ 的每条边 e 选择一个方向，这一选择被编码为新生成的 $*$-顶点将 e 分成的两个半边的排序。注意，该映射保留顶点和（超）边的上同调次数；差值 $|\mathcal{H}(\Gamma)| - |\Gamma| = -d$

在超图的情形下，这来自 hGC_d 中的总次数平移 $-2d$；在普通图的情形下，则来自 $\mathsf{GC}_d^{\geq 2}$ 中的总平移 $-d$。
容易看出，线性映射 $\mathcal{H}:\mathsf{GC}_d\to\mathsf{hGC}_d$ 是复形态射（但不是拟同构）。这一观察在本文其余部分中不起作用。

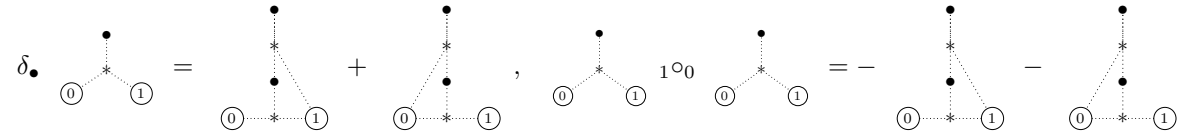
3.5. $\mathcal{H}gra_d$**的扭曲扩张**。引理 **3.2.1** 中的态射 f 可用于如下方式对循环拟运算$\mathcal{H}gra_d$进行扭曲（参见 [W1]中的附录 I）。对于任意奇整数 d，令 $f\mathcal{H}graphs_d=\{f\mathcal{H}graphs_d((n+1))\}_{n\geq 1}$ 表示由超图生成的循环拟运算，其超边与 $\mathcal{H}gra_d$ 中的相同，但顶点分为两类：带标签的顶点（以白色表示）和不带标签的顶点（以黑色表示），例如：



上述列表中的第二个超图 D 关于 (01) 是反对称的，因此它定义了循环拟运算 $f\mathcal{H}graphs_d$ 的一个导子。考虑 $f\mathcal{H}graphs_d$ 上的微分 $\delta_\bullet$，它仅作用于超图的黑色顶点，作用方式恰如公式 (12) 中所示。

3.5.1. 引理。 超图 $D=$  满足方程 $\delta_\bullet D+D\circ_{01}D=0$。

证明。 有

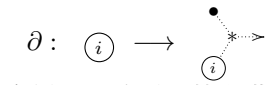


因此结论成立。 □

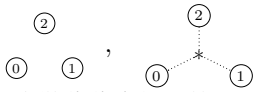
上述引理表明，循环算子 $f\mathcal{H}graphs_d$ 上由下式给出的 1 次导子

$$\partial\Gamma=\delta_\bullet\Gamma+D(\Gamma) \tag{13}$$

是一个微分。它按照 (12) 中的方式拆分黑色顶点，并按如下方式拆分白色顶点，



令 $\mathcal{H}graphs_d$ 为 $f\mathcal{H}graphs_d$ 的微分分次循环子歌剧，其由满足以下条件的图张成：每个黑色顶点的价数至少为三价，且通过旗标构成的连通路径与至少两个白色顶点相连。以下超图



在 $\mathcal{H}graphs_d$ 中代表非平凡的上同调类。下文将微分分次循环算子 $\mathcal{H}graphs_d$ 用作构造 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$ 的组合超图模型的主要构件之一。

4. 迈向循环算子 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$ 的超图模型

4.1. $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$ **的几何模型**。 令 $\mathsf{FFM}_2=\{\mathsf{FFM}_2((n+1))\}_{n\geq 1}$ 为带标记的标架点的零属代数曲线紧化模空间所构成的拓扑歌剧；其同调算子 $H_\bullet(\mathsf{FFM}_2)$ 恰为 Batalin–Vilkovisky 代数 [KSV] 的循环算子 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$。与之关联的对偶循环余歌剧

$$(\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}})^*\simeq H^\bullet(\mathsf{FFM}_2)=\{H^\bullet(\mathsf{FFM}_2((n+1)))\}_{n\geq 1}$$

是一个 Hopf 余歌剧，也就是说，它是分次交换代数范畴中的余运算子。对于每个 $n\geq 1$，上同调群 $H^\bullet(\mathsf{FFM}_2((n+1)))$ 作为分次交换代数，由闭一形式的上同调类 $\bar{\alpha}_{ij}$ 生成

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}:=\pi_{ij}^*(\mathrm{Vol}_{S^1}),\ \forall i\neq j,\ i,j\in\{0,1,\dots,n\},$$

它们由 $S^1 \simeq$FFM$_2$((2)) 上的标准齐次体积形式经由标准遗忘映射π_{ij} : FFM$_2$(($n+1$))$^0 \to$ FFM$_2$((2)) 得到。考虑 FFM$_2$(($n+1$)) 上的以下 2-形式， $n \geq 1$,

$$\Omega_{ijk} := \alpha_{ij}\alpha_{jk} + \alpha_{ki}\alpha_{ij} + \alpha_{jk}\alpha_{ki}. \tag{14}$$

并令

$$\bar{\Omega}_{ijk} := \bar{\alpha}_{ij}\bar{\alpha}_{jk} + \bar{\alpha}_{ki}\bar{\alpha}_{ij} + \bar{\alpha}_{jk}\bar{\alpha}_{ki}. \tag{15}$$

表示 $H^\bullet$(FFM$_2$(($n+1$))) 中相应的上同调类。存在一个分次交换代数同构 [GS2]

$$(\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}})^*((n+1)) \simeq H^\bullet(\mathsf{FFM}_2((n+1))) = \frac{\mathbb{R}[\bar{\alpha}_{ij}]_{0\leq i\neq j\leq n}}{I},$$

其中， I 是自由分次交换代数 $\mathbb{R}[\bar{\alpha}_{ij}]$ 中由以下循环 *Arnold* 关系生成的理想,

$$\bar{\Omega}_{jkl} - \bar{\Omega}_{ikl} + \bar{\Omega}_{ijl} - \bar{\Omega}_{ijk} \equiv 0 \quad \forall i,j,k,l \in \{0,1,\ldots,n\},\ \#\{i,j,k,l\} = 4. \tag{16}$$

($\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$)* 中的余运算子结构由以下余合成给出,

$$\Delta_{I,J} : (\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}})^*(I) \longrightarrow (\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}})^*(I' \sqcup x') \otimes (\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}})^*(x'' \sqcup I''),$$

它们与集合 $I = \{0,1,\ldots,n+1\}$ 分解为非空子集 $I = I' \sqcup I''$的不交并相对应，而这些余合成完全由其在下列余生成元上的取值决定（见 [GS2]第 4.4 节）

$$\Delta_{I',I''}(\bar{\alpha}_{ij}) = \begin{cases} \bar{\alpha}_{ij} \otimes 1 & \text{if } i,j \in I' \\ 1 \otimes \bar{\alpha}_{ij} & \text{if } i,j \in I'' \\ \bar{\alpha}_{ix'} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\alpha}_{x''j} & \text{if } i \in I', j \in I'' \end{cases} \tag{17}$$

注意，这些余合成在 2-形式上诱导出以下余复合（1 5)

$$\Delta_{I',I''}(\bar{\Omega}_{ijk}) = \begin{cases} \bar{\Omega}_{ijk} \otimes 1 & \text{if } i,j,k \in I' \\ 1 \otimes \bar{\Omega}_{ijk} & \text{if } i,j,k \in I'' \\ \bar{\Omega}_{ijx'} \otimes 1 - (\bar{\alpha}_{ix'} - \bar{\alpha}_{jx'}) \otimes \bar{\alpha}_{x''k} & \text{if } i,j \in I', k \in I'' \\ 1 \otimes \bar{\Omega}_{x''jk} + \bar{\alpha}_{ix'} \otimes (\bar{\alpha}_{x''j} - \bar{\alpha}_{x''k}) & \text{if } i \in I', j,k \in I'' \end{cases} \tag{18}$$

4.2. 对偶余操作 ($\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}$)*。 在 §2 中，我们考察了一个循环算子 $\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}$ ，它配备了一个显式的循环运算子态射 (8)-(9)。它的对偶

$$(\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}})^* = \left\{(\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}((n+1)))^*\right\}_{n\geq 1}$$

是一个 Hopf 余歌剧，其中 ($\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}$)*(($n+1$)) 是由次数为 1 的形式变量 $\mathbb{K}[[\theta_{ij}]]$ 在域 $\mathbb{K}$ 上生成的自由分次交换代数

$$\theta_{ij} = \theta_{ji} \quad \forall i \neq j,\ i,j \in \{0,1,\ldots,n\}. \tag{19}$$

请注意，这里我们不 假设 θ_{ij} 满足循环 Arnold 关系 (16)-(14)。($\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}$)* 中的余合成在生成元上的定义为（参见 (17)）

$$\Delta_{I',I''}(\theta_{ij}) = \begin{cases} \theta_{ij} \otimes 1 & \text{if } i,j \in I' \\ 1 \otimes \theta_{ij} & \text{if } i,j \in I'' \\ \theta_{ix'} \otimes 1 + 1 \otimes \theta_{x''j} & \text{if } i \in I', j \in I'' \end{cases} \tag{20}$$

接下来我们考察它的超图扩张。

4.3. 一个辅助的循环 Hopf 余运算子 $co\mathcal{BVH}gra$。 考虑一族分次交换代数

$$co\mathcal{BVH}gra = \{co\mathcal{BVH}gra(n+1)\}_{n\geq 1},$$

其中 $co\mathcal{BVH}gra(n+1)$ 是由次数为 1 的形式变量 (20) 以及次数为 2 的形式变量 Θ_{ijk} 生成的自由分次交换代数 $\mathbb{K}[[\theta_{ij}, \Theta_{ijk}]]$ ，这些变量满足以下反对称条件

$$\Theta_{ijk} = -\Theta_{jik} = -\Theta_{ikj} \quad \forall i,j,k \in \{0,1,\ldots,n\}. \tag{21}$$

注意，我们不假设生成元 θ_{ij} 和 Θ_{ijk} 之间存在任何关系（如式 (14) 所示）。

4.3.1. 引理。 $\mathbb{S}$-模 $co\mathcal{BVH}gra$ 关于在生成元上由式 *(20)* 和（参见式 *(18)*）给出的余合成构成一个循环 *Hopf* 余歌剧。

$$\Delta_{I',I''}(\Theta_{ijk}) = \begin{cases} \Theta_{ijk}\otimes 1 & \text{if } i,j,k\in I' \\ 1\otimes\Theta_{ijk} & \text{if } i,j,k\in I'' \\ \Theta_{ijx'}\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes\theta_{x''k} & \text{if } i,j\in I', k\in I'' \\ 1\otimes\Theta_{x''jk}+\theta_{ix'}\otimes(\theta_{x''j}-\theta_{x''k}) & \text{if } i\in I', j,k\in I'' \end{cases} \tag{22}$$

证明。我们需要验证生成元 Θ_{ijk} 的余结合恒等式，即对于有限集 I 分解为三个子集的不交并时，将公理 (2) 和 (3) 应用于生成元 Θ_{ijk} 的情形

$$I = I'\sqcup I''\sqcup I''',\quad \#I'\geq 2,\ \#I''\geq 2,\ \#I'''\geq 2.$$

显然

$$\Phi^L_{I',I'',I''}(\Theta_{ijk}) = \Phi^R_{I',I'',I''}(\Theta_{ijk}) = \begin{cases} \Theta_{ijk}\otimes 1\otimes 1 & \text{if } i,j,k\in I', \\ 1\otimes\Theta_{ijk}\otimes 1 & \text{if } i,j,k\in I'' \\ 1\otimes 1\otimes\Theta_{ijk} & \text{if } i,j,k\in I'''. \end{cases}$$

若 $i,\ j\in I', k\in I''$，则同样有如下等式

$$\Phi^L_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}) = (\Delta_{I',I''\sqcup y'}\otimes \mathrm{Id})(\Theta_{ijk}\otimes 1) = (\Theta_{ijx'}\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes\theta_{x''k})\otimes 1$$

and

$$\begin{aligned}\Phi^R_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}) &= (1\otimes\Delta_{I''\sqcup y',I'''})(\Theta_{ijx'}\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes\theta_{x''k}) \\ &= (\Theta_{ijx'}\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes\theta_{x''k})\otimes 1.\end{aligned}$$

若 $i,\ j\in I', k\in I'''$，则有

$$\begin{aligned}\Phi^L_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}) &= (\Delta_{I',I''\sqcup y'}\otimes\mathrm{Id})(\Theta_{ijy'}\otimes 1-(\theta_{iy'}-\theta_{jy'})\otimes\theta_{y''k}) \\ &= \Theta_{ijx'}\otimes 1\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes\theta_{x''y'}\otimes 1 \\ &\quad -(\theta_{ix'}\otimes 1+1\otimes\theta_{x''y'}-\theta_{jx'}\otimes 1-1\otimes\theta_{x''y'})\otimes\theta_{y''k} \\ &= \Theta_{ijx'}\otimes 1\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes(\theta_{x''y'}\otimes 1+1\otimes\theta_{y''k}),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\Phi^R_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}) &= (1\otimes\Delta_{I''\sqcup y',I'''})(\Theta_{ijx'}\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes\theta_{x''k}) \\ &= \Theta_{ijx'}\otimes 1\otimes 1-(\theta_{ix'}-\theta_{jx'})\otimes(\theta_{x''y'}\otimes 1+1\otimes\theta_{y''k})\end{aligned}$$

也就是说，此时余结合条件同样成立。类似地，可以验证 $j,\ k\in I'''$ 和 i 属于 I' 或 I'' 时的条件。

还需检查最复杂情形下的条件，即当 $i\in I'$、$j\in I''$ 和 $k\in I'''$ 时。我们有

$$\begin{aligned}\Phi^L_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}) &= (\Delta_{I',I''\sqcup y'}\otimes\mathrm{Id})(\Theta_{ijy'}\otimes 1-(\theta_{iy'}-\theta_{jy'})\otimes\theta_{y''k}) \\ &= 1\otimes\Theta_{x''jy'}\otimes 1+\theta_{ix'}\otimes(\theta_{x''j}-\theta_{x''y'})\otimes 1-(\theta_{ix'}\otimes 1+1\otimes\theta_{x''y'}-1\otimes\theta_{jy'})\otimes\theta_{y''k}\end{aligned}$$

这恰好得出与下面的计算相同的结果，

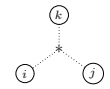
$$\begin{aligned}\Phi^R_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}) &= (1\otimes\Delta_{I''\sqcup y',I'''})(1\otimes\Theta_{x''jk}+\theta_{ix'}\otimes(\theta_{x''j}-\theta_{x''k}) \\ &= 1\otimes\Theta_{x''jy'}\otimes 1-1\otimes(\theta_{x''y'}-\theta_{jy'})\otimes\theta_{y''k}+\theta_{ix'}\otimes(\theta_{x''j}\otimes 1-\theta_{x''y'}\otimes 1-1\otimes\theta_{y''k}) \\ &= \Phi^L_{I',I'',I'''}(\Theta_{ijk}).\end{aligned}$$

证明完成。 □

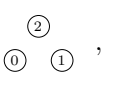
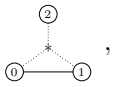
4.4. 超图的循环拟运算。与上述余运算子对偶的循环拟运算，

$$\mathcal{BVH}gra := (co\mathcal{BVH}gra)^*,$$

可用带标记的白色顶点以及两种类型超边的超图给出一种简洁的组合描述，

the dual of $\Theta_{ijk} \to$  , the dual of $\theta_{ij} \to$,

即三价超边和二价超边。遵循 **§3.1** 中的约定，我们将二价超边简称为 边，并在图示中将其画成实线线段；三价超边的旗标则画成虚线线段。例如，

 $\in \mathcal{BVH}gra((2))$,  ,  , $\in \mathcal{BVH}gra((3))$.

每条超边的每个旗标都赋予上同调次数 -1，而其 $*$-顶点赋予次数 $+1$；每条实边的次数为 -1。$\mathcal{BVH}gra$ 中的每个超图都配备一个定向，其定义为对边、旗标和 $*$-顶点进行排序（在置换及相应符号意义下）。连接到超图 Γ 的顶点 $_i$ 上的边集（分别为旗标集）记为 $E_i(\Gamma)$（分别为 $F_i(\Gamma)$）。

这类超图的代数运算式复合

$$\begin{array}{rccc} {}_i\circ_j: & \mathcal{BVH}gra((n+1)) \otimes \mathcal{BVH}gra((m+1)) & \longrightarrow & \mathcal{BVH}gra((m+n)) \\ & \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 & \longrightarrow & \Gamma_1 \ {}_i\circ_j \ \Gamma_2 \end{array}$$

定义为（参见 **§2.7** 和 **3.2**）：删除白色顶点 $_i \in \Gamma_1$ 和 $_j \in \Gamma_2$，然后 (i) 将它们的旗标和边重新连接到对方的顶点上；(ii) 将连接到被删除顶点上的某些边粘合成新的超边。更确切地说，

$$\Gamma_1 \ {}_i\circ_j \ \Gamma_2 = \sum_{z,s_1,s_2} \sum_{I'\sqcup I''} \sum_{J'\sqcup J''} \sum_{\substack{f_i: F_i(\Gamma)\to (V(\Gamma_2)\setminus \textcircled{j}) \\ f_j: F_j(\Gamma)\to (V(\Gamma_1)\setminus \textcircled{i})}} \Gamma(z, s_1, s_2, I'\sqcup I'', J'\sqcup J'', f_i, f_j)$$

其中

(i) 右侧的第一项求和遍历所有可能的映射 $f_i: F_i(\Gamma) \to (V(\Gamma_2)\setminus \textcircled{j})$ 和 $f_j: F_j(\Gamma) \to (V(\Gamma_1)\setminus \textcircled{i})$，

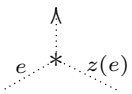
(ii) 求和 $\sum_{I'\sqcup I''}$ 和 $\sum_{J'\sqcup J''}$ 遍历附着于 $_i$ 和 $_j$ 的边集的所有可能分解，

$$E_i = I'\sqcup I'', \quad E_j = J'\sqcup J'' \text{ with } \#I'' = \#J''$$

(iii) 求和 $\sum_{z,s_i,s_j}$ 遍历所有可能的双射 $z: I'' \to J''$ 以及所有可能的映射 $s_i: I' \to (V(\Gamma_2) \setminus \textcircled{j})$ 和 $s_j: J' \to (V(\Gamma_1) \setminus \textcircled{i})$。

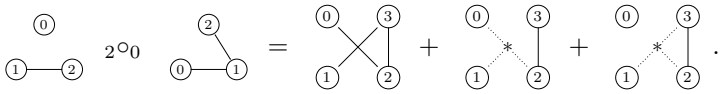
超图 $\Gamma(z, s_1, s_2, I'\sqcup I'', J'\sqcup J'', f_i, f_j)$ 是通过擦除 Γ_1 和 Γ_2 中的白色顶点 $_i \in \Gamma_1$ 和 $_j \in \Gamma_2$ 而得到的，并且

(i) 按照映射 f_i（分别为 f_j）的规定，将来自 F_i（分别为 F_j）的旗标连接到 Γ_2（分别为 Γ_1）的白色顶点；(ii) 按照映射 s_i（分别为 s_j）的规定，将来自 I'（分别为 J'）的边连接到 Γ_2（分别为 Γ_1）的白色顶点；(iii) 将边 $e \in I''$ 的悬垂端点与对应边 z（e）的悬垂端点粘合，$\in J''$ 并将它们作为一个新超边的两个旗标，

 orientated as $e \wedge z(e) \wedge$ new flag $\wedge$ $*$-vertex,

然后，对第三个“悬挂”旗标以所有可能的方式附接到 Γ_1 和 Γ_2 的其余白色顶点上求和。

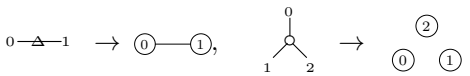
例如，



拟运算 $\mathcal{G}ra_2^{\mathfrak{c}}$ 不是 $\mathcal{BVH}gra$ 的子拟运算；尽管如此，我们仍有一个定义良好的循环运算子态射

$$f : \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \mathcal{BVH}gra \tag{23}$$

其在生成元上的定义与之前的公式相同，

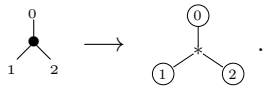


(24)

4.5. $\mathcal{BVH}gra$**的扭曲扩张**。拟运算 $\mathcal{BVH}gra$ 配备了一个循环运算子态射

$$f : \mathcal{L}ie_3 \longrightarrow \mathcal{BVH}gra$$

其在生成元上的定义为（参见引理 **3.2.1**）

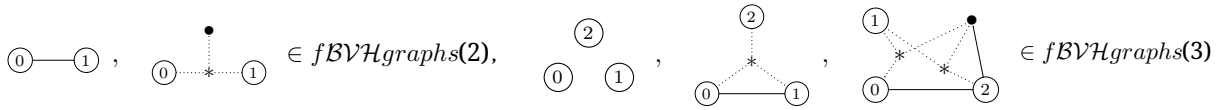


因此，拟运算 $\mathcal{BVH}gra$ 可以通过循环版本的 Thomas Willwacher 扭曲自函子（ $\mathcal{H}gra$ 在 **§3.5** 中的扭曲与此非常类似）扭曲为一个微分分次循环算子

$$f\mathcal{BVH}graphs = \{f\mathcal{BVH}graphs((n+1))\}_{n\geq 1}$$

使用 Thomas Willwacher 扭曲自函子 [W1] 的循环版本。

根据定义， $f\mathcal{BVH}graphs((n+1))$ 是一个由所谓的可容许超图 Γ在域 $\mathbb{K}$ 上张成的 $\mathbb{S}_{(n+1)}$-模；这些超图有两种类型的超边（虚线和实线），与 $\mathcal{BVH}gra$ 的情况完全相同，也有两种类型的顶点（黑色和白色）；以下是几个例子，



更确切地说，若一个超图 Γ满足以下条件，则称其为可容许

(i) Γ 恰有 $n+1$ 个白色顶点，其标记取自集合 $((n+1))$；这些顶点的上同调次数为零。**(ii)** Γ 可以有未标记的黑色顶点；这些顶点的上同调次数为 3，其集合记为 $V_\bullet(\Gamma)$。**(iii)** Γ 可以有连接不同白色顶点的实边，也可以有连接白色顶点与黑色顶点的实边；黑色顶点之间不允许有边[4]； Γ 的边集记为 $E(\Gamma)$；每条边的次数为 -1。

(iv) Γ 可以具有与 $\mathcal{BVH}gra$情形中完全相同类型的超边，



要求每条超边至少有一个旗标连接到白色顶点，即不允许出现以下形式的超边



(25)

（更好的理解方式是，我们对由至少含有一条此类超边的超图生成的算子理想取商）。 Γ 的超边集合记作$V_*(\Gamma)$；星形顶点的次数为 $+1$，而其旗标的次数各为 -1 。

[4]“黑色顶点之间没有边”这一条件，更好的理解方式如下：暂且考虑一个更大的循环拟运算 $ff\mathcal{BVH}graphs$ ，其中允许存在这样的边，然后注意到，黑色顶点之间有边的超图构成一个算子理想。对该理想取商，恰好得到 $f\mathcal{BVH}graphs$。

(v) Γ 的每个黑色顶点（若有）都可以通过由边或旗标组成的连续路径与至少两个白色顶点相连。

(vi) 每个可容许超图 Γ 都带有定向 $or(\Gamma)$，其定义为对边、旗标、 $*$-顶点和黑色顶点进行排序，并将置换及相应的符号视为等价；即

$$or(\Gamma) \in \det E(\Gamma) \otimes \det(Fl(\Gamma)) \otimes \det V_*(\Gamma) \otimes \det V_\bullet(\Gamma).$$

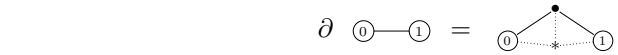
因此， Γ 的上同调次数为

$$|\Gamma| = 3V_\bullet(\Gamma) - 2V_*(\Gamma) - E(\Gamma).$$

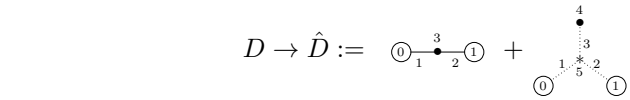
请注意，目前我们尚未对容许超图 Γ 中顶点的价数作任何限制。

$f\mathcal{BVH}graphs$ 中的循环歌剧代数结构是对 $\mathcal{BVH}gra$中相应结构的显然扩展；唯一的区别在于，在复合 $\Gamma_1 \circ_i \Gamma_2$ 下，附着于白色顶点（例如 $i \in \Gamma_1$ ）的旗标现在不仅可以连接到 Γ_2 中的白色顶点，也可以连接到 Γ_2 中允许的黑色顶点（即不属于禁用子图 (25) 的黑色顶点）；类似地，将 Γ_1和 Γ_2 中的边粘合成一条新超边时产生的悬挂旗标，现在可以连接到所有允许的顶点，而不仅限于白色顶点。

4.6. 微分。循环拟运算 $f\mathcal{BVH}graphs$ 同时包含 $\mathcal{BVH}gra$ 和 $\mathcal{H}graphs_3$ 作为循环子模演算。此外，$\mathcal{H}graphs_3$ 中的微分 $\partial = \delta_\bullet + D$ 由 (13) 给出，并自然延拓为 $f\mathcal{BVH}graphs$中的微分 ∂。然而，该微分不保持包含关系 $\mathcal{BV}^c \to f\mathcal{BVH}graphs$，因为

$$\partial$$  $$\neq 0.$$

我们通过如下方式修改引理 **3.5.1** 中的超图 D ，从而扭曲微分 ∂ ws,

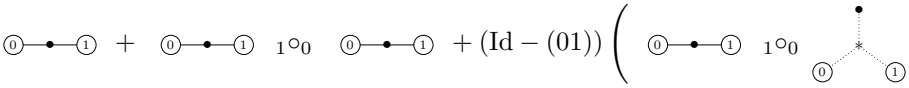
$$D \to \hat{D} :=$$ 

在第一个直和项中，定向定义为 $1 \wedge 2 \wedge 3$；在第二个直和项中，定向定义为 $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5$。ˆˆ 该超图满足 (01)$D = -D$ ，因此确实定义了 $f\mathcal{BVH}graphs$ 的一个导子。

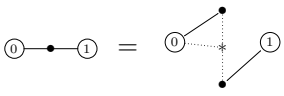
ˆ**4.6.1. 引理**。 超图 $D \in f\mathcal{BVH}graphs$ 满足方程

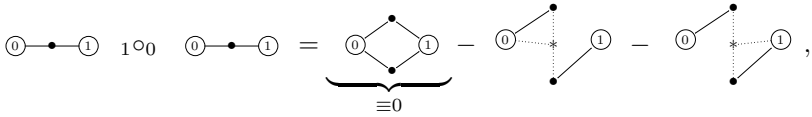
$$\delta_\bullet \hat{D} + \hat{D} \circ_{1\circ 0} \hat{D} = 0$$

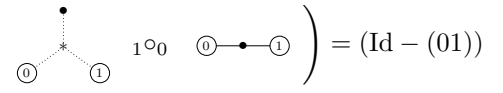
证明。 鉴于引理 **3.5.1**，只需证明

$$\delta_\bullet$$ 

其中，符号 (01) 表示作用于其右侧超图的白色顶点上的置换。我们使用定向相同的超图，得到

$$\delta_\bullet$$ 



$$(\mathrm{Id} - (01))$$ 

在最后三行中，我们使用了容许超图的黑色顶点之间没有实边这一假设（这也是作出该假设的主要原因）。上述公式推出了命题。□

因此，循环拟运算 $f\mathcal{BVH}graphs$ 上由下式给出的 1 次导子

$$\delta\Gamma = \delta_\bullet\Gamma + \hat{D}(\Gamma) \tag{26}$$

是 $f\mathcal{BVH}graphs$ 中的微分。下面更详细地描述它： δ 完全由其对超图 $\Gamma \in f\mathcal{BVH}graphs((n+1))$ 中黑色顶点和白色顶点的作用决定，

$$\delta\Gamma = \underbrace{\sum_{v\in \mathsf{V}_\bullet(\Gamma)} \delta_v\Gamma}_{\delta_\bullet\Gamma} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}\delta_i^*\Gamma}_{\delta_*\Gamma} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}\delta_i^{(1)}\Gamma}_{\delta^{(1)}\Gamma} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}\delta_i^{(2)})\Gamma}_{\delta^{(2)}\Gamma} \tag{27}$$

其中

(i) δ_v 对顶点 v 的作用完全类比于 (12)，即首先将 v 拆分如下

$$\delta_v : \bullet \longrightarrow \frac{1}{2} \tag{28}$$



然后重新 将之前附着在 v 上的旗标和边重新分配到新生成的两个黑色 k
顶点上，按任意 所有可能的方式[5]。

(ii) 运算 δ_i^* 将白色顶点 i分裂

$$\delta_i^* : (i) \longrightarrow$$



并以所有可能的方式，将先前附着于i 的旗标和边重新分配到i与新生成的黑色顶点之间。

(iii) 运算 $\delta_i^{(2)}$ （上标 (2) 表示它会生成两条实边）通过如下方式作用于白色顶点 i，将 i 分裂

$$\delta_i^{(2)} : (i) \longrightarrow$$



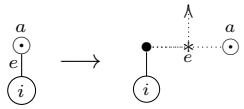
然后对先前附着于 i 的边和旗标在 i 与新生成的黑色顶点之间进行所有可能的合法重新附着，并对其求和。

(iv) 运算 $\delta_i^{(1)}$ 仅当 i 至少附着一条实边时才会非平凡地作用于 i；若 E_i表示附着于 i 的实边集合，则有

$$\delta_i^{(1)} = \sum_{e\in E_i} \delta_{i,e}^{(1)},$$

其中算子 $\delta_{i\,e}^{(1)}$ 的图示如下：

$$\delta_{i,e}^{(1)} :$$

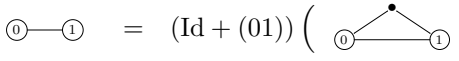


它的具体作用如下：

•(i) $\delta_{(1)\ i,\ e}$ 将图 i 代入白色顶点 i，并对所有可能的重新附着求和：将所有边（ e除外！）以及先前附着在 i 上的旗标重新附着到 i 与新创建的黑色顶点上；(ii) 暂时将 e附着到新创建的黑色顶点上，然后立即将其改为带有一个“悬挂”旗标的超边；(iii) 对该悬挂旗标（在上图中显示为虚线箭头）附着到 Γ 的所有允许顶点（包括顶点 i）的情况求和。

[5]在这幅图以及其他图中，新生成的“悬挂”旗标或“悬挂”边表示对其与 Γ 的其他顶点之间所有可能的合法附着方式求和。

例如，

$$\delta$$  $$= (\mathrm{Id} + (01))\Big($$  $$\Big) = 0,$$

$$\delta\Big($$  $$\Big) = 0,$$

这意味着如下结论

4.7. 命题。 存在一个微分分次循环算子之间的态射

$$F : \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow f\mathcal{BVH}graphs \tag{29}$$

其在生成元上的定义由公式 *(24)* 给出。

这个态射不是拟同构，右侧有许多"错误的"上同调类，我们将在下文详细讨论。

4.8. 黑色顶点的价数。 显然，由所有黑色顶点的价数均为 ≥ 3 的超图生成的 $f\mathcal{BVH}graphs$ 子空间构成一个循环子拟运算。一个值得注意的事实是，它在微分下封闭。

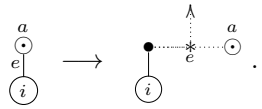
4.8.1. 引理。 由所有黑色顶点（若存在）均至少为三价的超图生成的 $f\mathcal{BVH}graphs$ 子空间在微分 δ 下封闭。

证明。 假设 $\Gamma \in \mathcal{BVH}graphs$ 没有价数为 < 3的黑色顶点。我们来证明 $\delta\Gamma$ 也没有价数为 < 3的黑色顶点。

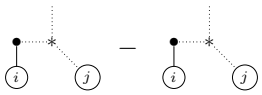
仿照引理**3.4.1** 中的论证，很容易看出 $\delta\Gamma$ 不可能包含单价黑色顶点。
由于定理**3.4.2**证明中的一项计算， $\delta\Gamma$ 不可能包含没有边附着的二价黑色顶点（这类顶点只能成对出现，并彼此抵消）。类似地， $\delta\Gamma$ 也不可能包含只有 边附着的二价黑色顶点——这类顶点只能具有以下形式



因此它们只能来自全微分的部分 $\delta^{(2)}$ ；所以这类二价顶点总是成对出现，一个来自 $\delta_i^{(2)}$ $\textcircled{i}$，另一个来自 $\delta_j^{(2)}$ $\textcircled{j}$，并彼此抵消。
剩下需要检查的是 $\delta\Gamma$不包含恰有一个旗标和一条边附着的二价黑色顶点 v 。这条边连接 v 和某个白色顶点，比如 i 。这类顶点可以作为直和项出现在 

$$\delta_{i,e}^{(1)} :$$  .

如果顶点 a 是白色的，即 $a = \textcircled{j}$ 那么这类项总是成对出现，

$$(\delta_i^{(2)} + \delta_j^*)(\ldots \textcircled{i}\!\!-\!\!\textcircled{j} \ldots) = \ldots +$$  $$+ \ldots$$

并且彼此抵消。如果顶点 a 是黑色的，即 $a = \bullet$，那么这些二价顶点也会与将 $\delta_\bullet$ 作用于 a所得的类似项相互抵消。证明完毕。□

鉴于上述引理，从现在起我们假设微分分次循环算子 $f\mathcal{BVH}graphs$ 由超图生成，且这些超图没有一价或二价黑色顶点。

5. 微分分次余操作 $f\mathcal{BVH}graphs^*$ 与循环 Arnold 关系

5.1. 对偶余操作。令

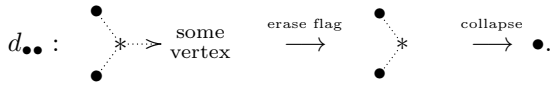
$$f\mathcal{BVH}graphs^* = \{f\mathcal{BVH}graphs((n+1))^*\}_{n\geq 1}$$

设其为上一节所引入的拟运算 $\mathcal{BVH}graphs$ 的对偶微分分次循环余操作。因此$f\mathcal{BVH}graphs((n+1))^*$ 是由超图生成的微分分次向量空间，其中有带标签的 $n+1$ 白色顶点以及若干无标签黑色顶点，并满足：(i) 不存在仅连接黑色顶点的边或超边；(ii) 每个黑色顶点至少为三价，且可通过由边或旗标组成的连续路径连接到至少两个白色顶点。 $f\mathcal{BVH}graphs((n+1))^*$ 中的微分 d 由四部分组成（参见（26））

$$d = d_{\bullet\bullet} + d_{\bullet\circ} + d^{(1)}_{\bullet\circ} + d^{(2)}_{\bullet\circ} \tag{30}$$

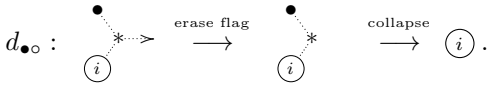
其中

(i) $d_{\bullet\bullet}$ 作用于由超边 $*$ 连接的黑色顶点的无序对（v', v''）：从 $*$ 中删除其与某个其他顶点相连的唯一旗标，然后将剩余的两个旗标及其顶点 v' 和 v'' 合并为一个黑色顶点，



更确切地说， $d_{\bullet\bullet}(\Gamma)$ 是对这类三元组（$v', v'', *$）求和。

(ii) $d_{\bullet\circ}$作用于三元组（ i, $\bullet$, $*$），其由白色顶点 i 和黑色顶点 $\bullet$ 组成，二者由超边 $*$ 相连。操作如下：删除 $*$ 中未与 i 或 $\bullet$ 相连的唯一旗标，然后将剩余的两个旗标连同黑色顶点 $\bullet$ 一并收缩到白色顶点 i 上，

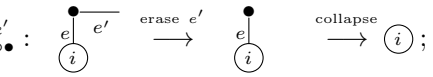


更确切地说， $d_{\bullet\circ}(\Gamma)$是对这类三元组 (i, $\bullet$, $*$) 求和。注意，如果顶点 i 和 $\bullet$ 也由一条边相连，则将 $d_{\bullet\circ}$ 对三元组 (i, $\bullet$, $*$)的作用设为零（因为我们的超图中不允许出现自环）。

(iii) $d^{(2)}_{\circ\bullet}$作用于由一个白色顶点和一个黑色顶点 $\bullet$ 构成的三元组 (i, $\bullet$, e)，二者由一条边e 连接，且与 $\bullet$ 相连的所有边构成的集合 $E(\bullet)$的基数为 ≥ 2。于是

$$d^{(2)}_{\circ\bullet} = \sum_{\substack{e'\in E(\bullet)\\ e'\neq e}} d^{e'}_{\circ\bullet}$$

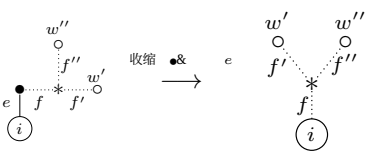
其中， $d^{e'}_{\circ\bullet}$ 通过擦除边 e' ，然后将 $\bullet$ 和 e收缩到白色顶点 i 上，作用于超图 Γ ，



更确切地说， $d^{(2)}_{\bullet\circ}(\Gamma)$是对这类三元组 (i, $\bullet$, e) 求和。

(iv) $d^{(1)}_{\circ\bullet}$作用于由一个白色顶点通过一条边 e 连接到一个黑色顶点 $\bullet$，且某个旗标 f附着于 $\bullet$所组成的四元组（ i, $\bullet$, e, f）上。设 f'和 f''是拥有旗标 f的超边 $*$的另外两个旗标，并设 w'和 w''分别表示 Γ中旗标 f'和f''所附着的黑色或白色顶点（它们不可能同时为黑色）。于是, $d^{(1)}_{\circ\bullet}$对这样的四元组（ i, $\bullet$, e, f）的作用是先将顶点 $\bullet$ 和边 e 收缩为 i ，

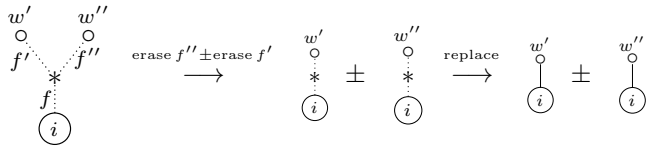
(31)



,

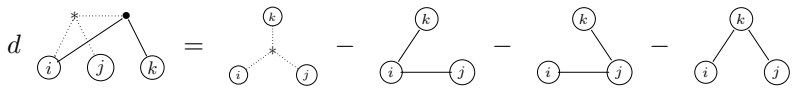
然后通过擦除 f'生成两个超图中的一个，通过擦除 f''生成另一个，最后按照图示将每个直和项中剩余的虚线区间替换为一条实边，

(32)



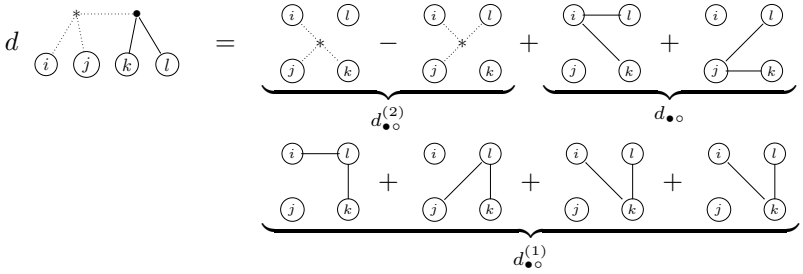
要理解 d 的作用，最好考察具体的例子。

5.1.1. 示例。我们有

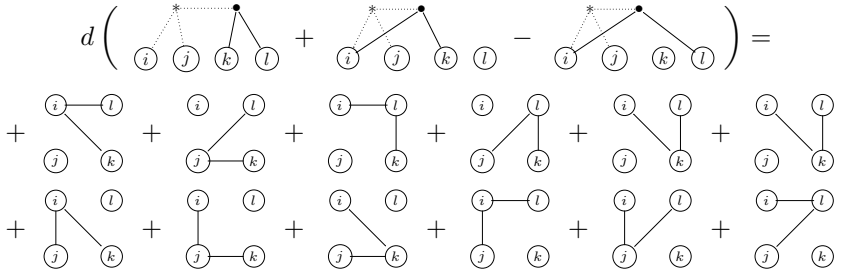


忽略左边的 d-恰当项，这恰好是关系(14)的组合实现；我们在定义超图上的循环拟运算结构时，心中隐含的正是这一关系（它带有正确的符号，即图中省略的超图诱导定向是正确的）。

5.1.2. 示例。我们有



5.1.3. 循环 Arnold 关系。结合前两个例子的结果，我们得到等式（这里略去超图的定向，因此下面的公式仅在符号意义下成立）



它在上同调层面恰好给出了 $\bar{\alpha}_{ij}$ of $H^\bullet$(FFM$_2$) 的生成元的组合实现所满足的循环 Arnold 关系 (16)-(14)。

6. 从 $f\mathcal{BVH}graphs^*$ 到 FFM上的半代数 de Rham 代数$_2$

6.1. FFM上的德拉姆代数$_2$**.** 令

$$\Omega_{\mathsf{FFM}_2} = \{\Omega_{\mathsf{FFM}_2((n+1))}, d_{dR}\}_{n\geq 1}$$

为紧化模空间 FFM$_2$($(n+1)$) [KS, HLTV, GS2] 上半代数微分形式所构成的微分分次代数的 $\mathbb{S}$-模；其上同调 $H^\bullet(\Omega_{\mathsf{FFM}_2})$ 恰好是循环余歌剧 $(\mathcal{BV}^!)^*$。对于任意 $i,\ j \in ((n+1))$，都有一个投影

$$p_{ij} : \mathsf{FFM}_2((n+1))^0 \longrightarrow \mathsf{FFM}_2((2))$$

它来自紧化空间 $\mathsf{FFM}_2((n+1))$ 的大开胞 $\mathsf{FFM}_2((n+1))^0$，该投影会忘掉除标记为 i 和 j 的点以外所有带框点。由于 $\mathsf{FFM}_2((2))$ 可识别为圆 S^1，因此可以定义一个半代数1-形式

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} := \pi_{ij}^*(\mathrm{Vol}_{S^1}),\ \forall i \neq j,\ i,j \in \{0,1,\dots,n\},$$

在 $\mathsf{FFM}_2((n+1))^0$ 上作为 S^1 上归一化齐次体积形式 Vol_{S^1} 的拉回，$\int_{S^1}\mathsf{Vol}_{S^1} = 1$。此形式可良好地延拓到 $\mathsf{FFM}_2((n+1))^0$，的实紧化 $\mathsf{FFM}_2((n+1))$，我们利用它在 $\mathsf{FFM}_2((3)) \simeq S^1 \times S^1 \times S^1$ 上构造 S^1- 基本 2- 形式 (14)，进而在任意满足 $n \geq 2$ 的 $\mathsf{FFM}_2((n+1))$ 上构造该形式。这两个微分形式，α_{ij} 和 Ω_{ijk}，就是我们在下文用来构造从 $(f\mathcal{BVH}graphs)^*$ 到 Ω_{FFM_2} 的适当态射的传播子。

6.2. 仿射坐标系中的传播子。 利用射影群 $PGL(2,\ \mathbb{C})$ 在 $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \sqcup \infty$ 中带框点上的作用，可以将标记为（例如）0 的点固定在 ∞，并将该点处的切向射线固定为与经过 ∞ 的实大圆 $\mathbb{R}$ 相切。这个技巧将

$$\mathsf{FFM}_2((n+1)) \simeq \mathsf{FM}_2(n) \times (S^1)^n \tag{33}$$

其中 $\mathsf{FM}_2(n)$ 是构形空间的标准 Fulton-MacPherson 紧化

$$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}) := \frac{i : [n] \hookrightarrow \mathbb{C}}{\mathbb{R}^+ \ltimes \mathbb{R}^2}$$

由复平面中 n个不同点组成，$\mathbb{C}$ 并对仿射群作用取商。利用这一识别可得到 [GS2] 传播子 [GS2],的如下仿射表示

$$\alpha_{ij} = \eta_i + \eta_j - 2\omega_{ij}$$

因此

$$\Omega_{ijk} = \eta_i\eta_j + \eta_k\eta_i + \eta_j\eta_k + 2\omega_{ij}(\eta_i - \eta_j) + 2\omega_{ki}(\eta_k - \eta_i) + 2\omega_{jk}(\eta_j - \eta_k) + 4(\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{ki}\omega_{ij} + \omega_{jk}\omega_{ki}) \tag{34}$$

其中 η_i 是在识别（33）中 S^1 的第 i 个副本上的归一化为 1 的齐次体积形式，并且

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2\pi} dArg(z_i - z_j),$$

$H^\bullet(\mathsf{FM}_2(n)$ 的一个生成元。注意，根据（非循环）Arnold关系，以下组合

$$\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{ki}\omega_{ij} + \omega_{jk}\omega_{ki} = d\beta_{ijk}$$

是 $\mathsf{FM}_2(n)$ 上的一个 d-恰当 2-形式，因此在对闭半代数簇的边界 进行积分时可以忽略。

6.3. 限制　　在边界层上的限制。 拓扑歌剧 FFM_2中的循环复合　　，

$$_i\circ_j : \mathsf{FFM}_2((n+1)) \times \mathsf{FFM}_2((m+1)) \longrightarrow \mathsf{FFM}_2((m+n))$$

对任意分解 $((m+n)) = I' \sqcup I''$，诱导出拉回映射

$$\Delta_{I',I''} : \Omega_{f\underline{\mathcal{M}}_{m+n}} \longrightarrow \Omega_{f\underline{\mathcal{M}}_{I'\sqcup x'} \times f\underline{\mathcal{M}}_{I''\sqcup x''}} \tag{35}$$

这些映射限制在传播子 α_{ij}（因而也限制在 Ω_{ijk}）上时，由公式 (17)（分别由公式 (18)）给出，因为它们经过单射分解因子化

$$\begin{array}{rccc} i: & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((I'\sqcup x'))} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\mathsf{FFM}_2((I''\sqcup x''))} & \longrightarrow & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((I'\sqcup x')) \times \mathsf{FFM}_2((I''\sqcup x''))} \\ & \omega_1 \otimes \omega_2 & \longrightarrow & \pi_1^*(\omega_1) \wedge \pi_2^*(\omega_2), \end{array}$$

其中 π_1 和 π_2 是笛卡尔积 $\mathsf{FFM}_2((I' \sqcup x'))$ $\times\mathsf{FFM}_2((I'' \sqcup x''))$各因子的典范投影。 [GS2] 中的引理 7.1 证明了

$$\Delta_{I',I''}(\alpha_{ij}) = \begin{cases} \pi_1^*(\alpha_{ij}) & \text{if } i,j \in I' \\ \pi_2^*(\alpha_{ij}) & \text{if } i,j \in I'' \\ \pi_1^*(\alpha_{ix'}) + \pi_2^*(\alpha_{x''j}) & \text{if } i \in I', j \in I'' \end{cases} \tag{36}$$

因此，对于 2 次传播子（参见式 (18)），有

$$\Delta_{I',I''}(\Omega_{ijk}) = \begin{cases} \pi_1^*(\Omega_{ijk}) & \text{if } i,j,k \in I' \\ \pi_2^*(\Omega_{ijk}) & \text{if } i,j,k \in I'' \\ \pi_1^*(\Omega_{ijx'}) - (\pi_1^*(\alpha_{ix'}) - \pi_1^*(\alpha_{jx'})) \wedge \pi_2^*(\alpha_{x''k}) & \text{if } i,j \in I', k \in I'' \\ \pi_2^*(\Omega_{x''jk}) + \pi_1^*(\alpha_{ix'}) \wedge (\pi_2^*(\alpha_{x''j}) - \pi_2^*(\alpha_{x''k})) & \text{if } i \in I', j,k \in I'' \end{cases} \tag{37}$$

6.4. 从$(\mathcal{BVH}graphs)^*$ 到FFM_2上的德拉姆代数的态射。给定任意 $\Gamma \in f\mathcal{BVH}graphs((n+1))^*$。对于任意实边 $e \in E(\Gamma)$，我们记其连接的两个顶点为 e', e''；类似地，对于星形顶点 $* \in V_*(\Gamma)$，我们记其连接的三个顶点为 v'_*, v''_*, v'''_*。考虑一个线性映射

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & (f\mathcal{BVH}graphs((n+1)))^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((n+\#V_\bullet(\Gamma)+1))} \\ & \Gamma & \longrightarrow & \Phi_{n+1}(\Gamma) := \bigwedge_{e\in E(\Gamma)} \alpha_{e'e''} \bigwedge_{*\in V_*(\Gamma')} \Omega_{v'_*v''_*v'''_*} \end{array} \tag{38}$$

1-形式的楔积以及 2-形式 $\Omega^{v'_*v''_*v'''_*}$中指标 v'_*, v''_*, v'''_*的排序，均按照 Γ的给定定向取定。存在一个半代数纤维化 [GS2]

$$\pi^\Gamma : \mathsf{FFM}_2((n+\#V_\bullet(\Gamma)+1)) \longrightarrow \mathsf{FFM}_2((n+1)) \tag{39}$$

它会遗忘所有黑色顶点。它诱导出一个良定义的分次向量空间的推前态射[KS, HLTV, GS2]

$$\begin{array}{rccl} \Omega_{n+1}: & f\mathcal{BVH}graphs((n+1))^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((n+1))} \\ & \Gamma & \longrightarrow & \Omega_\Gamma := \pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma)) \end{array}$$

得益于传播子的公式 (36)–(37)，这些映射与 $(\mathcal{BVH}graphs)^*$ 和 FFM_2 上的余运算结构相容，即下图

$$\begin{array}{ccccc} f\mathcal{BVH}graphs((n+m))^* & \xrightarrow{\Omega_{n+m}} & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((m+n))} & \xrightarrow{\Delta_{I',I''}} & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((I'\sqcup x'))\times\mathsf{FFM}_2((I''\sqcup x''))} \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_{I',I''}} & & & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ f\mathcal{BVH}graphs((I'\sqcup x'))^* \otimes f\mathcal{BVH}graphs((I''\sqcup x''))^* & \xrightarrow[\Omega_{n+1}\otimes\Omega_{m+1}]{} & & & \Omega_{\mathsf{FFM}_2((I'\sqcup x'))} \otimes \Omega_{\mathsf{FFM}_2((I''\sqcup x''))} \end{array} \tag{40}$$

对任意划分 $((m+n)) = I' \sqcup I''$ 为若干个非空子集，该图交换。

6.5. 定理。分次 $\mathbb{S}$-模之间的态射

$$\begin{array}{rccl} \Omega: & f\mathcal{BVH}graphs^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathsf{FFM}_2} \\ & \Gamma & \longrightarrow & \Omega(\Gamma) := \pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma)) \end{array} \tag{41}$$

保持微分不变。

证明。我们需要证明，对于任意超图 $\Gamma \in (f\mathcal{BVH}graphs)^*$，都有

$$\Omega(d\Gamma) = d_{DR}\Omega(\Gamma).$$

由于微分形式 $\Phi(\Gamma)$ 对任意 Γ都是闭的，逐纤维斯托克斯公式（见 [HLTV]中的命题 9 以及 [GS2]中的定理 6.2）推出

$$d_{DR}\Omega(\Gamma) = \pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma)) = \partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma)),$$

其中，$\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$表示沿纤维化（39）的边界进行推前。该边界由两种类型的极限构型组成：(B_1) $p \geq 2$ 个“黑色”带框点（即在 Γ中对应于黑色顶点的点）收缩为一个“黑色”点；(B_2) $q \geq 1$ 个“黑色”带框点收缩到基底 $\mathsf{FFM}_2((n+1))$中的某个“白色”点（对应于某个白色顶点 $i \in \Gamma$）。由于 $\Phi(\Gamma)$最终是1-形式 α_{ij}的楔积，因此应用 [GS2] 中的消失引理 6.5（而该引理又可由 [K1]中的 Kontsevich 消失引理 6.13 推得），可知对推前$\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$有贡献的唯一边界层，在 B_1 类型的边界分层情况下具有 $p = 2$，在 B_2类型的边界分层情况下具有 $q = 1$。这两种情况下，均在 $\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$中对一个二维子空间进行积分

该子空间位于 $\mathsf{FFM}_2((3)) = S^1 \times S^1 \times S^1$中，其中一个因子对应于极限构型中新创建节点处的切向射线，另外两个因子对应于正在收缩的带框点的切向射线；按 [GS2]中的记法，将它们记为 u 和 v 。当且仅当正在收缩的点 u和 v 在 Γ中由一条边 e 或一条超边连接时，该边界分层才会对推前 $\partial\pi_*(\Phi(\Gamma))$产生非零贡献；此外，容易看出，只有当形式为 $\omega_{uv} \wedge \eta_v$ 的微分2-形式作为因子出现在 $\Phi(\Gamma)$中时，它才可能对边界推前产生非零贡献：角传播子 ω_{uv} 负责在对应于极限构型中节点的边界因子 S^1 上积分，而 η_v 则通过在对应于 v处实射线的边界因子 S^1 上积分而产生贡献。接下来，我们考察一对带框点 u 和 v（ Γ的顶点）的所有可能的极限构型，它们可能对 $\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$产生贡献。

Option 1: 两个发生碰撞的点 u 和 v 在 Γ中都对应黑色顶点。在这种情况下， u 和 v 必须由超边 Ω_{uvk} 连接；其中旗标 k 连接到某个白色顶点 $_k$ ，而传播子 Ω_{uvk} 的仿射表示 (34) 确保这类极限构型确实会通过 Ω_{uvk}中的直和项 $\omega_{uv} \wedge (\eta_v - \eta_u)$产生非零贡献。因此，所有这类对 $\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$ 的贡献都可以归并为 $\Omega(d_{\bullet\bullet}\Gamma)$，也就是说，它们都对应于 $(f\mathcal{BVH}graphs)^*$中全微分 (30) 的部分 $d_{\bullet\bullet}$ 。

Option 2: 一个发生碰撞的点（例如 v）对应于 Γ中的一个黑色顶点，另一个发生碰撞的点 u对应于 Γ中的一个白色顶点 $_i$ ，且两者由一条超边连接。如果这两个顶点还由一条边相连，那么贡献为零；否则，2-形式 (34) 包含所需的直和项$\omega_{uv} \wedge \eta_v$ ，因此在这类边界层上积分为 1，从而产生对$\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$的贡献，而这些贡献恰好等于 $\Omega(d_{\bullet\circ}\Gamma)$。

Option 3: 一个塌缩点，例如 v，对应于 Γ中的一个黑色顶点；另一个塌缩点，例如 u，对应于 Γ中的一个白色顶点 $_i$ ，二者由一条边连接。这条边对边界层上的积分贡献因子ω_{uv} 。另一个所需因子 η_v 只能来自旗标，或来自连接到黑色顶点 v的其他边。这两种情况都可能出现，我们将分别讨论。

选项 *3a*: η_v 来自传播子 $\alpha_{vj} = \eta_v + \eta_j - 2\omega_{uj}$ ，该传播子对应一条连接v 与另一个白色顶点 $_j$ 的边。对推前 $\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$的相关贡献恰好等于 $\Omega(d^{(2)}_{\bullet\circ}\Gamma)$。

选项 *3b*: η_v 来自传播子 Ω_{vxy} ，它在极限$v \to {}_i$ 下连接 v 与其他一些顶点 $x,\ y$ 。这是最引人入胜的情况。我们可以重写 (34)，只保留以 η_v 为因子的项

$$\Omega_{vxy} = \eta_v(\eta_x - \eta_y - 2\omega_{vx} + 2\omega_{vy}) + \dots.$$

对标准形式 $\omega_{uv} \wedge \eta_v$ 进行积分后，在极限 $v \to {}_i$ 下，我们得到以下 1-形式的线性组合，

$$\alpha_{ax} - \alpha_{ay}$$

这恰好就是运算 (31)-(32) 的结果！因此，这类对 $\partial\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$ 的贡献恰好对应于 $\Omega(d^{(1)}_{\bullet\circ}\Gamma)$。证明完毕。

□

交换图 (40) 和上述定理推出了以下关于 FFM_2 上半代数链的拟运算 $Chains(\mathsf{FFM}_2)$ 的结果。

6.6. 命题。 存在一个微分分次循环算子之间的态射

$$\mathcal{F} : Chains(\mathsf{FFM}_2) \longrightarrow f\mathcal{BVH}graphs. \tag{42}$$

它将一条链 $g : \triangle \to \mathsf{FFM}_2$ 映射为 $f\mathcal{BVH}graphs$ 的生成元 Γ 上的和 $\sum_\Gamma (\int_\triangle g^*(\Omega_\Gamma))\Gamma$ 。

正如我们将在下一节中展示的，除非我们用一个“更小”的循环拟运算替换$f\mathcal{BVH}graphs$ ，否则这个态射 $\mathcal{F}$ 不可能是拟同构。

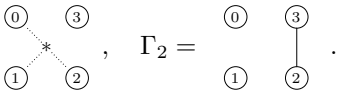
7. 森林的微分分次循环算子 $\mathcal{BVH}graphs$

7.1. $f\mathcal{BVH}graphs$**中的 Hopf 余歌剧结构**。对于任意生成元 $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \in f\mathcal{BVH}graphs^*(n)$，可以将它们的乘积 $\Gamma_1\cdot\Gamma_2 \in f\mathcal{BVH}graphs^*(n)$定义为它们的不交并，并按序列识别相应的白色顶点。例如，超图



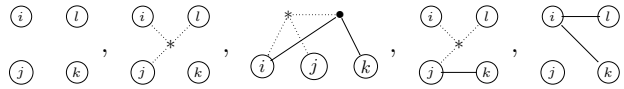
是 $\Gamma_1\cdot\Gamma_2$ 的乘积

$$\Gamma_1 = \quad , \quad \Gamma_2 = \quad .$$



微分和余算子复合保持该乘积，因此 $f\mathcal{BVH}graphs^*$ 是 dg 交换结合代数范畴中的微分分次循环算子（参见 [K2、SW]）。

如果删去所有白色顶点后，超图 $\Gamma\in f\mathcal{BVH}graphs^*$（或 $f\mathcal{BVH}graphs$）变为连通（或仍然连通），则称其为内部连通。例如，下面前三个超图都是内部连通的，

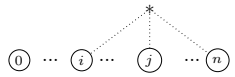


而最后两个不是。

7.2. 超边分类。 生成元 $\Gamma\in f\mathcal{BVH}graphs$ 的每条超边（如果存在）都属于以下某种树类型:

Type-0 超边按定义是与三个白色顶点相连的超边 ，

$$\text{type-0 hyperedge :} \quad , \quad 0\le i<j<n$$



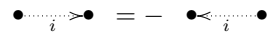
1 型超边 按定义是与两个黑色顶点以及唯一一个白色顶点相连的超边 $_i$，并带有 $i\in\{0,1,\dots,n\}$（小整数表示对其旗标的一种排序选择）

(43) $$\text{type-1 hyperedge :} \quad \equiv$$



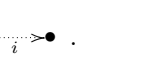
注意，微分的部分 $\delta_i^{(2)}$ 和 δ_i^* 在与 $_i$ 相连的旗标上作用平凡，因为我们取 ◯

- 对形如 $_*$ 的超边取商。因此，我们可以将这样的超边视为一条
- 由 i 虚线边 定向标记，如上图所示。根据以下符号规则，可以翻转这条虚线边的方向



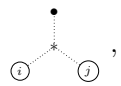
因此，图中我们完全不标示方向（默认已作出某种选择）。值得注意的是，在此记号下，全微分 δ 的部分 $\delta_\bullet\Gamma=\sum_{v\in V_\bullet(\Gamma)}\delta_v\Gamma$ 作用于黑色顶点时如下

$$\delta_v : v=\bullet \quad \to \quad \sum_{i=0}^{n} \quad .$$



*2*型超边 按定义是连接两个白色顶点和一个唯一黑色顶点的超边，

$$\text{type-2 hyperedge :} \quad , \quad i\neq j.$$



附着在白色顶点上的此类超边的旗标称为类型 *2* 旗标。

7.3. 命题。 微分分次循环算子 $f\mathcal{BVH}graphs$ 的分次非正，也就是说，对于任意 $\Gamma \in f\mathcal{BVH}graphs$，都有 $|\Gamma| \leq 0$。

证明。 $f\mathcal{BVH}graphs$ 中没有超边的内部连通图至多只能有一个带有 $m \geq 3$ 条边的单个黑色顶点。每个这样的图的上同调次数均为 $3 - m \leq 0$，因此该命题对这类图成立。

接下来考虑一个至少含有一条超边的连通超图 $\Gamma \in f\mathcal{BVH}graphs$。一般而言， Γ可以具有 (i) $n_k \geq 1$ 个恰好连接有 k 个旗标的黑色顶点，(ii) p 条 1 型超边，(iii) q条 2 型超边，以及至少 $2n_1 + n_2$ 条边，因为每个黑色顶点至少是三价的。我们有

$$2p + q = \sum_{k \geq 1} kn_k, \quad \#E(\Gamma) \geq 2n_1 + n_2.$$

and

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= 3(\sum_{k\geq 1} n_k) - 2(p+q) - \#E(\Gamma) \\ &\leq (\sum_{k\geq 1}(3-k)n_k) - q - 2n_1 - n_2 \\ &\leq \sum_{k\geq 4}(3-k)n_k - q \leq 0. \end{aligned}$$

命题得证。 □

7.4. 森林的微分分次子余代数。 我们将由超图 Γ 生成的微分分次循环子余代数 $\mathcal{BVH}graphs^* \subset f\mathcal{BVH}graphs^*$定义为：其内部连通分支均为树 （即它们不包含仅由超边的旗标构成的闭合路径）。根据上面的命题， $\mathcal{BVH}graphs^*$集中于非负次数。半代数德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{\mathsf{FFM}_2}$也具有相同性质。态射 (41) 限制为如下映射

$$\begin{array}{rccc} \Omega: & \widehat{\mathcal{BV}}\mathcal{H}graphs^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathsf{FFM}_2} \\ & \Gamma & \longrightarrow & \Omega(\Gamma) := \pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma)). \end{array} \tag{44}$$

这是微分分次交换代数之间的一个态射，

$$\Omega(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2) = \Omega(\Gamma_1) \wedge \Omega(\Gamma_2).$$

然而，它并非拟同构，因为某些超图类（包括表示非平凡上同调类的那些超图）经映射 Ω 映到零。

7.5. 定理。 若 $\Gamma \in \mathcal{BVH}graphs^*$ 是一个上同调次数为零且至少包含一个黑色顶点的内部连通超图，则 $\Omega(\Gamma) = 0$。

证明。 根据态射 (38)，与超图 Γ 对应的微分形式 Φ_Γ 是通过为后者的每条边指定如下传播子得到的：

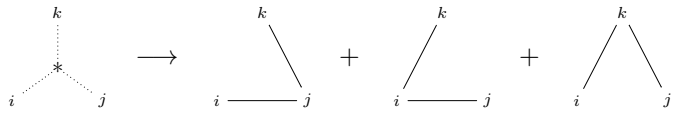
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2\pi} dArg(z_i - z_j),$$

并为每条超边指定如下传播子

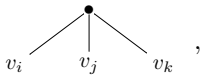
$$\Omega_{ijk} = \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{ki}\omega_{ij} + \omega_{jk}\omega_{ki}$$

从组合意义上说，后一种对应关系就是将 Γ 中的每条超边替换为如下图所示的边的线性组合（图中省略了边的排序）

(45)



如果 Γ 是任意一个具有如下形式的三价顶点的图



,

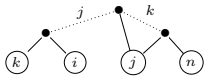
根据 ΓGS $= 0$ 中的引理 6.3(ii)，则 Ω( ]2]。 [GS2] 的作者通过以下方式证明这一断言：(a) 固定三个顶点 v_i， v_j， v_k ，三价黑色顶点通过实边分别连接到它们在黎曼球面上的 0 、 1 和 ∞ 位置；随后 (b) 注意到复共轭一方面是切圆丛的保定向微分同胚，另一方面却会反转每个传播子的符号

$$dArg(\overline{z_i - z_j}) = -dArg(z_i - z_j).$$

因此，对于任何包含如上图所示三价黑色顶点的图，积分 $\pi_*^\Gamma(\Phi(\Gamma))$ 的结果必为零。

$\widehat{\ }$任何带有 $|\Gamma| = 0$ 的内部连通树 $\Gamma \in \mathcal{BVH}graphs^*$ ，其黑色顶点都必须恰为三价，且超边（若有）只能是类型 1；下面是一个典型示例，

$$\Gamma = \quad , \quad |\Gamma| = 0.$$

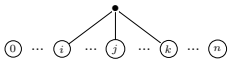


在映射 Ω 下，按照公式 (45) 对 Γ中的超边进行替换；不难看出，这种替换总会产生至少一个恰有三条实边相连的黑色顶点。因此，根据上述 [GS2]中的引理 6.3(ii)，Ω(Γ) 为零。□

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**7.6. 中未预期的上同调类** $\mathcal{BVH}graphs$。令 $\mathcal{BVH}graphs$ 为上述微分分次余操作 $\mathcal{BVH}graphs^*$ 的对偶微分分次循环算子。拟运算 $\mathcal{BVH}graphs$ 是由含有内部亏格的超图生成的微分分次理想对 $f\mathcal{BVH}graphs$取商所得。根据命题 **7.3**，微分分次循环算子$\frown$ $\frown\mathcal{BVH}graphs = \{\mathcal{BVH}graphs((n+1))\}_{n\geq 1}$ 集中在上同调次数为 ≤ 0的部分，且映射 (29) 诱导出以下微分分次循环算子之间的态射

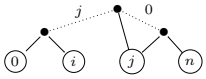
$$F : \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{BV}}\mathcal{H}graphs \tag{46}$$

由公式 (23) 在生成元上给出。
任何形如



, $\quad 0 \leq i < j < k \leq n$

$\widehat{\ }$是拟运算 $\mathcal{BVH}graphs$中的一个零次上同调类 。类似地，一些形如（在每条虚线边处按 IXH 关系取模定义的）三价超图



在 $H^0(\widehat{\mathcal{BV}}\mathcal{H}graphs)$ 中给出零次上同调类。所有这类超图在态射$\widehat{\ }$Ω下都消失。因此，为了得到正确结果，我们必须截去 $\mathcal{BVH}graphs$中的所有零次上同调类，接下来就要这样做。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**7.7.** $\mathcal{L}$即$_\infty$**代数的循环拟运算** ICH。 微分分次循环拟运算 $\mathcal{BVH}graphs$ 是一个霍普夫算子，也就是说，它是余代数范畴中的循环拟运算。令 ICH$((n+1))[1]$, $n \geq 1$ 为复形$\frown$ $\mathcal{BVH}graphs((n+1))$的子空间，该子空间由至少含有一条边或超边的内部连通超图张成。我们将其分解为

$$\widehat{\mathcal{BV}}\mathcal{H}graphs(n+1) = \left(\odot^\bullet(\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))[1]), \delta = \sum_{k\geq 1} \delta_k \right) \tag{47}$$

其中，对称张量代数中的常数直和项 1 对应于唯一一个具有 $n+1$ 个白色顶点且没有边和超边的图，



.

这些直和项

$$\delta_k : \odot^k(\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))[1]) \longrightarrow \widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))[1], \quad \forall k \geq 1, \tag{48}$$

完整的 $\widehat{\ }$l 微分表示 ICH((n + 1)) 上诱导的 $\mathcal{L}ie_\infty$ 复合。该集合

$$\widehat{\mathsf{ICH}} = \{\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))\}_{n\geq 1}$$

是 $\mathcal{L}ie_\infty$-代数范畴中的循环算子（参见 [SW]）。由于次数平移，分次空间$\widehat{\ }$ICH((n + 1)) 都集中在次数 $\leq +1$ 上，而所有"不需要的"上调同调类在 ICH((n + 1)) 中的次数均为$\frown$+1 （参见定理 **7.5**）。

$\widehat{\ }$**7.8. 截断 ICH。** 我们为任意 $n \geq 1$ 定义微分分次向量子空间,

$$\mathsf{ICH}((n+1)) \equiv \bigoplus_{i=-\infty}^{1} \mathsf{ICH}^i((n+1)) \quad \subset \quad \widehat{\mathsf{ICH}}((n+1)) \equiv \bigoplus_{i=-\infty}^{1} \widehat{\mathsf{ICH}}^i((n+1))$$

通过如下方式截断上述三价上调同调类,

$$\mathsf{ICH}^i((n+1)) := \widehat{\mathsf{ICH}}^i((n+1)) \ \ \forall i \leq -1, \quad \mathsf{ICH}^0((n+1)) := \mathsf{Ker}\,\delta_1 \subset \widehat{\mathsf{ICH}}, \quad \mathsf{ICH}^1((n+1)) := 0 \tag{49}$$

因此，根据定义，我们有

$$H^i(\mathsf{ICH}((n+1))) = H^i((\widehat{\mathsf{ICH}}(n+1))) \ \forall i \leq 0, \ \ H^1(\mathsf{ICH}((n+1))) = 0. \tag{50}$$

这一族

$$\mathsf{ICH} = \{\mathsf{ICH}((n+1))\}_{n\geq 1}$$

$\widehat{\ }$是 $\mathcal{L}ie_\infty$-代数范畴中的 ICH 微分分次循环子算子。

7.9. 主定义。 将 Chevalley 对称幺半函子应用于 $\mathcal{L}ie_\infty$代数的拟运算 ICH，我们得到一个微分分次循环子算子

$$\mathcal{BVH}graphs := \odot^\bullet(\mathsf{ICH}[1]) \subsetneq \odot^\bullet(\widehat{\mathsf{ICH}}[1]) = \widehat{\mathcal{BVH}}graphs$$

态射 $\widehat{\ }$微分分次循环歌剧的态射 (46) 可经由包含映射 $\mathcal{BVH}graphs \subset \mathcal{BVH}graphs$分解。 .

7.10. 主定理。 微分分次循环歌剧的态射

$$\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs \tag{51}$$

是一个拟同构。

我们将在下文第8—10节中分几步证明主定理，所用工具是拟同构（10）以及这样一个事实：无穷小带状辫的循环算子 $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}$ 包含自由李代数（如第2.8节所述）。我们的方法受到˘Severa-Willwacher 论文 [SW] 中附录B的启发，不过遗憾的是，我们这里的技术细节并没有那么简洁。

我们来陈述主定理的一些直接推论。

7.11. 对偶余操作 $\mathcal{BVH}graphs^*$ 以及 FFM_2 的形式性。 存在一个投影

$$\pi : \widehat{\mathcal{BVH}}graphs^* \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs^*$$

微分分次 循环余歌剧。主定理结合定理 **7.5** 可推出以下结果

$\widehat{\ }$**7.11.1. 推论。** *(41)* 中的映射 Ω： $\mathcal{BVH}graphs^* \to \Omega_{\mathsf{FFM}_2}$ 经由投影 π 分解，并诱导出微分分次代数之间的拟同构

$$\Omega : \mathcal{BVH}graphs^* \longrightarrow \Omega_{\mathsf{FFM}_2},$$

它与交换图 *(40)* 的相应版本相吻合。

此推论与命题**6.6** 共同推出以下结论

7.12. 推论。 存在一个微分分次循环算子态射

$$\mathcal{F} : Chains(\mathsf{FFM}_2) \longrightarrow \mathcal{BVH}graphs. \tag{52}$$

它是一个拟同构。

后一个推论与主定理 **7.10** 共同推出 FFM_2 作为拓扑循环模演算的形式性。

8. 内部连通超图的模演算

8.1. 从无穷小带状辫到ICH。令

$$\widehat{\mathsf{ICH}} = \{\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))\}_{n\geq 1}$$

为由分解（47）定义的 $\mathcal{L}ie_\infty$-代数的循环拟运算，且

$$\mathsf{ICH} = \{\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))\}_{n\geq 1}$$

为由截断（49）定义的其循环子模演算。

注意，超图 $\Gamma \in \mathsf{ICH}((n+1))$ 中白色顶点之间没有实边，除非 Γ 仅由白色顶点组成，且恰有一条这样的边；若该边连接标记为 i和 j的两个不同白色顶点，则用 γ_{ij} 表示单边图，例如：

$\gamma_{01} =$  , $\gamma_{12} =$ 

注意，所有这类图 γ_{ij}在 $\mathsf{ICH}(n+1)$ 中的上同调次数均为零，并表示 $H^0(\widehat{\mathsf{ICH}})$ 中的上同调类，

$$\delta\gamma_{ij} = 0, \ \ \forall\, i,j \in \{0,1,\dots,n\},\ i \neq j.$$

特别地，所有这类图 γ_{ij} 都属于 $\mathsf{ICH} \subset \mathsf{ICH}$。

回顾一下， $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}} = \{\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))\}_{n\geq 1}$ 表示无穷小带状辫的循环算子（参见 **§2.8** ）.

8.1.1. 命题。存在一个 $\mathcal{L}ie_\infty$-代数的循环运算子态射

$$g : \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \mathsf{ICH} \tag{53}$$

对每个 $n \geq 1$，在生成元上的定义如下

$$\begin{array}{rccl} g_{(n+1)}: & \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1)) & \longrightarrow & \widehat{\mathsf{ICH}}((n+1)) \\ & T_{AB} & \longrightarrow & \gamma_{AB} \ \ \forall A,B \in ((n+1)),\ A \neq B. \end{array} \tag{54}$$

证明。 我们需要验证，对于任意 $n \geq 1$ 和任意 $A, C, D \in ((n+1))$，都有

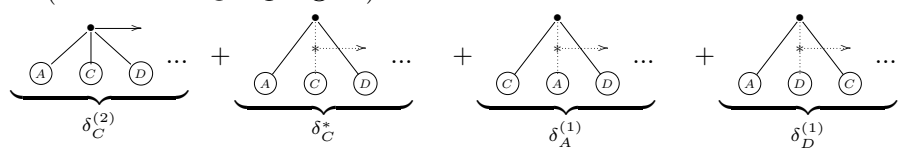
$$g(\sum_{B=0}^{n} [T_{AB}, T_{CD}]) = 0. \tag{55}$$

Case 1: $\#\{A,C,D\} = 3$。于是

$$0 \equiv \sum_{B=0}^{n} [T_{AB}, T_{CD}] = [T_{AC}, T_{CD}] + [T_{AD}, T_{CD}]$$

因此，只要 $g([T_{AC}, T_{CD}])$ 关于指标 A, C, D 反对称，所需的等式就成立。确实，

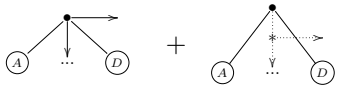
$g([T_{AC}, T_{CD}])$ $=$ $\widehat{\delta}\,($的 ICH 部分 $\ldots)$

$=$ 

其中，省略号表示孤立的白色顶点（如果有）。由此可知， $g([T_{AC}, T_{CD}])$ 关于 A, C, D 确实是反对称的，因此（55）在情况 1 中确实成立。

Case 2: $A = C$。那么

$$g\left(\sum_{B=0}^{n}[T_{AB}, T_{AD}]\right) = \quad + \quad = 0.$$



右侧的每一项都出现两次，且符号相反，因此条件 (55) 再次成立。命题得证。

□

8.2. 证明主定理的计划。考虑一个上链复形的循环算子

$$\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}[1]) = \{\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))[1])\}_{n\geq 1}$$

其中 $\odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))[1])$ 是李代数 $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))$ 的 Chevalley 复形。众所周知（参见 [S] 中的引理 1），存在一个循环算子之间的拟同构

$$G : \mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \odot^{\bullet}(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}[1])$$

它将 $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}}$ 的乘法生成元映射为 1，并将 BV 算子 Δ 映射为生成元 $T_{01} \in \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((2))[1]$（见 §2.8）。

将 G 与态射 (53) 复合，我们得到另一个微分分次循环算子态射 s

$$\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \xrightarrow{g\circ G} \odot^{\bullet}(\mathsf{ICH}[1]) = \mathcal{BVH}graphs$$

由此可得，如果态射 *(53)* 是 $\mathcal{L}ie_{\infty}$-代数的拟同构，那么诱导的映射$g \circ G$： $\mathcal{BV}^{\mathfrak{c}} \to \mathcal{BVH}graphs$ 也是拟同构，主定理**7.10** 随之得证。

因此，要证明主定理，只需证明态射 (53) 是拟同构。采用 $\mathcal{L}ie_{\infty}$-代数 ICH 及其复合来进行研究更为合适

$$\hat{g} : \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \mathsf{ICH} \hookrightarrow \widehat{\mathsf{ICH}} \tag{56}$$

As

$$H^{\bullet\leq 0}(\mathsf{ICH}) \equiv H^{\bullet\leq 0}(\widehat{\mathsf{ICH}})$$

Th态射 (53) 是拟同构，当且仅当下述定理成立。

8.3. 定理。映射 *(56)* 诱导出李代数循环运算子的一个同构

$$[\hat{g}] : \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}} \to H^0(\widehat{\mathsf{ICH}}).$$

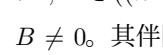
此外 $H^{\bullet<0}(\widehat{\ \ \mathsf{ICH}}) = 0$。

以上讨论的结论是：一旦证明定理**8.3**，主定理**7.10** 便立即得证。

9. 将定理 8.3 的证明归结为一个更简单的断言

9.1. $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))$**的"零顶点"滤过以及**$\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1))$。我们研究以下滤过，它们分别与 $\mathcal{L}ie_{\infty}$-代数态射两侧相容，

$$\begin{array}{rccl} \hat{g}_{n+1}: & \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}(n+1) & \longrightarrow & \widehat{\mathsf{ICH}}(n+1) \\ & T_{AB} & \longrightarrow & \gamma_{AB} = \quad \forall A, B \in ((n+1)),\ A \neq B, \end{array} \tag{57}$$



(i) 左侧按生成元数量构成的滤过 T_{AB}，其中包含 $A \neq 0$ 和 $B \neq 0$。其伴随分次李代数是通常的 Kohno-Drinfeld 李代数 t_n 与由 T_{0i}、$i \in [n]$ 张成的 n 维中心的直和；该李代数由 T_{ij}、$i,\ j \in [n]$ 生成，

$$gr\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}(n+1) = t_n \ \oplus \ \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}\langle T_{0i}\rangle.$$

(ii) 右侧的递减有界滤过定义如下:

$F_{-p}\widehat{\mathrm{ICH}}(n+1) :=$ 由满足条件 $||\Gamma|| \geq p$ 的超图 Γ 生成的 ICH$(n+1)$ 子空间,

其中

$||\Gamma|| =$(#条未连接到 0) $+$(#条未连接到 0) $-\#V_\bullet(\Gamma) - \#V_*(\Gamma)$。

将 $(gr\mathrm{ICH}\ d)$ 记为伴随分次复形。

态射 (5 7）同时保持两种滤过，从而得到伴随分次复形之间的态射

$$gr(\hat{g}_{(n+1)}):\ gr\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1)) \longrightarrow (gr\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1)), d), \tag{58}$$

其中左端假设微分为平凡微分。我们要通过对 n 作归纳法证明

$$H^{\bullet<0}((gr\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1)), d) = 0, \quad H^0((gr\widehat{\mathsf{ICH}}((n+1)), d) \simeq gr\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1)), \tag{59}$$

因为这将推出定理 **8.3**。

在 $gr\mathrm{ICH}(n+1)$ 中诱导的微分 d 是以下各项之和（参见（26））

$$d = d_\bullet + d^{(2)} = \sum_{v \in V_\bullet(\Gamma)} d_v + \sum_{i=1}^{n} d_i^{(2)}$$

其中 d_v 通过生成一条标记为零的虚线边来拆分黑色顶点 v （因为在一般公式（28）中，“悬挂”的旗标在 d_v 下必须附着于 $gr\mathrm{ICH}(n+1)$ 中的 0），

$$d_v(\bullet) = \sum \bullet \overset{0}{\cdots\cdots} \bullet\ . \tag{60}$$

微分 $d_i^{(2)}$ 作用于白色顶点 i 时，只有在 i 至少附着一个类型 2 旗标的情况下才非平凡,

$$d_i^{(2)}(\ i\ ) = \sum_{f \in Fl_i^2} \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ 0 & & i \end{tikzcd}, \tag{61}$$

其中 Fl_i^2 是附着于 i 的所有类型 2 旗标的集合。

全微分 (26) 的部分 δ^* 和 $\delta^{(1)}$ 在内部连通超图上作用平凡，否则它们会生成具有内部亏格的超图。

9.2. $gr\mathfrak{t}((n+1))$ **和** $gr\mathrm{ICH}((n+1))$。 回顾一下（见 §**2.8**），对每个 $n \geq 1$，李代数 $\mathfrak{t}^c((n+1))$ 都适合一个李代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{t}_n((n+1)) \longrightarrow \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1)) \longrightarrow \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n)) \longrightarrow 0$$

其中 $\mathfrak{t}_n((n+1))$ 是由元素 T_{An}、 $A \in 0$，1、……、 $n-1$ 生成的子空间。李子代数 $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}((n+1))$ 可识别为自由李代数 $\mathfrak{freeLie}\langle T_{0n},\ T_{1,\ n},\ \ldots\ldots,\ T_{n-1\,n}\rangle$ 对一个关系取商所得，该关系表明其总和

$$T_{0n} + T_{1n} + \ldots + T_{n-1\,n}$$

是中心的。因此，我们可以将伴随分次识别为以下李代数 ra

$$gr\mathfrak{t}_n(n+1) =\simeq \mathfrak{freeLie}\langle T_{1n}, T_{2n}, \ldots, T_{n-1,n}\rangle \ \oplus\ \mathbb{K}\langle T_{0n}\rangle, \quad \forall n \geq 1,$$

T_{0n} 为中心的元素。

类似地，令 $\mathrm{ICH}_n(n+1)$ 为由至少有一条边或一个旗标连接到顶点 n 的超图张成的子复形。我们有一个 $\mathcal{L}ie_\infty$ 代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathsf{ICH}}_n((n+1)) \longrightarrow \widehat{\mathsf{ICH}}((n+1)) \longrightarrow \widehat{\mathsf{ICH}}((n)) \longrightarrow 0.$$

态射 (58) 限制为以下伴随分次复形（事实上，是 $\mathcal{L}ie_\infty$-代数）之间的态射

$$\hat{g}_n(n+1) : \mathfrak{t}_n((n+1)) \longrightarrow \widehat{\mathsf{ICH}}_n((n+1)).$$

我们的下一个目的是证明以下

9.3. 定理。 态射 $gr(g_n(n+1))$ 诱导出李代数的同构，

$$H^0(gr\widehat{\mathsf{ICH}}_n((n+1))) \simeq gr\,\mathfrak{t}_n((n+1)) \simeq \mathfrak{free}\mathfrak{Lie}\langle T_{1n}, T_{2n}, \ldots, T_{n-1,n}\rangle \quad \oplus \quad \mathbb{K}\langle T_{0n}\rangle \quad \forall n \geq 1.$$

此外 $H^{\bullet<0}$（$gr\widehat{\ }\mathsf{ICH}_n$（（$n+1$））） $=0$ 对所有 $n \geq 1$均成立。

该定理推出等式（59），进而推出定理 **8.3**。这一结果的要点是

这一节的结论是一旦我们证明定理 **9.3**，主定理 **7.10** 便立即成立

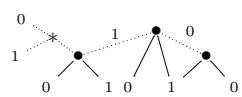
10. 定理 9.3 的证明

10.1. Step 1: the case $n = 1$. 这个可能的“最小”情形展示了研究一般情形时使用的一些技巧。复形 $gr\mathsf{ICH}_1(1+1)$ 分解为平凡的一维子复形的直和

$$gr\widehat{\mathsf{ICH}}_1(1+1) = \mathbb{K}\langle \ \textcircled{0}\!\!-\!\!\!-\!\!\textcircled{1} \ \rangle \quad \oplus \quad gr\widehat{\mathsf{ICH}}_1(1+1)'$$

$\widehat{\ }$及其补空间 $gr\mathsf{ICH}_1(1+1)'$，后者由至少含有一个黑色顶点的超图张成。我们需要证明 $gr\mathsf{ICH}_1(1+1)'$ 在非正次数上无环。

复形 $gr\mathsf{ICH}_1(1+1)'$ 由以下形式的无根且至少三价的树张成



$\in gr\mathsf{ICH}_1(1+1)'$

对于 More mally，$gr\mathsf{ICH}_1(1+1)'$ 的一个生成元是一棵树 T，其中至少有一个黑色顶点，并且该顶点满足 t

(i) T 的黑色顶点均至少为三价；(ii) T 的内部边（若有）均为以符号 0 或 1 装饰的虚线边（图示说明见 (43)）；(iii) T 的带标记的悬挂边要么是以集合 $\{0,1\}$ 中的数字装饰的实边，要么是 2 型超边，其类型 2 旗标以符号 0 和 1 装饰（这些超边可以理解为由指标对 (0，1) 标记的虚线毛发，如上图所示）。将标记为 1的 内部边称为坏边。

$\widehat{\ }$考虑按实边总数对复形 $gr\mathsf{ICH}_1(1+1)'$ 进行滤过，并令 $(E'_r,\ \partial_r)$ 为相应的（正则有界）谱序列。初始页 $(E'_0,\ \partial_0)$ 的微分为 $\partial_0 = \delta_\bullet$，它生成标记为零的内部边。生成元 T of E'_0 的坏内部边集合在微分 $d_\bullet$ 下保持不变（事实上，它在全微分 d 下也保持不变）。因此，复形 $(E'_0,\ d_\bullet)$ 分解为子复形的直和

$$(E'_0, d_\bullet) = \bigoplus_{N\geq 0}(C_N, d_\bullet),$$

其中 C_N 是由恰好包含 N 条坏内部边的图所张成的子复形 es.

$\tilde{\ }$对于每个 $N \geq 1$，我们可以考虑一个更大的复形 C_N，其中 (i) 坏内部边被区分开来（例如，对它们进行全序排列，或等价地，用自然数集合 $k \in [N]$中的元素标记），并且 (ii) 每条这样编号为 k 的内部边都被拆分成一对半边，并用某些符号加以区分，例如分别标记为 k' 和 k''，且各自赋予上同调次数 -1）。由于

$$C_N = \left(\tilde{C}_N\right)_{\mathbb{S}_N \rtimes (\mathbb{S}_2)^N},$$

根据马施克定理，我们有一个上同调群的同构

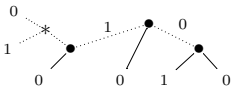
$$H^\bullet(C_N, d_\bullet) = \left(H^\bullet(\tilde{C}_N, d_\bullet)\right)_{\mathbb{S}_N \rtimes (\mathbb{S}_2)^N}.$$

$\tilde{\ }$将 C_N 生成元中的 N 坏内部边拆分为半边后，复形 C_N 分解为 $N+1\tilde{\ }$个连通分支，且微分 $\delta_\bullet$ 保持这一分解。因此，C_N 可识别为$\tilde{\ }$若干复形的无序张量积，其中每个复形都同构于由满足以下条件的无根树 T'' 张成的复形 $C_{connected}$:

(a) 所有 T'' 内部边（如果有）均标记为零，

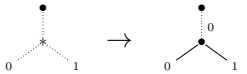
(c) T'' 的腿可以分为三 种类型，其中两种类型如上文 (iii) 所述，第三种类型是断裂的坏边中带有标记的一些半边。

因此，复形 C_0 以及 $\tilde{C}_{N\geq 1}$ 的每个张量因子 $C_{connected}$ 本质上同构于循环 $\mathcal{L}$即$_\infty$-拟运算，因此其上同调由模去 IHX-关系后的三价无根树生成。由此我们得出，下一页 $E_1' = H^\bullet(E_0',\ \delta_\bullet)$ 由如下形式的三价图生成



$\in E_1' = H^\bullet(E_0', \delta_\bullet)$

模去与每条标记为零的内部边相关联的 IHX-关系。 E_1' 中的微分 ∂_1 等于 $d^{(2)}$；它仅在来自 E_1' 的三价图的 2 型旗标上非平凡地作用，按如下方式改变它们

$d^{(2)}:$ 

因此，复形 $(E_1',\ \delta^{(2)})$ 可以识别为一个平凡复形与无序张量积 $\mathbb{K}[-1]\oplus\mathbb{K}$ 的张量积，其中这些无环二维复形的生成元已在上方用图示出。由此我们得出，上同调群 $H^\bullet(E_1',\ \delta^{(2)}) \simeq grH^\bullet(gr\widehat{\ }\mathsf{ICH}_1(1+1)')$ 若非零，则由不含 2 型超边且不含其三价黑色顶点的超图张成



每个这样的超图都处于上同调次数 $+1$，这意味着非正次数的上同调群 $H^{\bullet\leq 0}(gr\widehat{\ }\mathsf{ICH}_1(1+1))' = 0$消失。因此， $H^{\bullet<0}(gr\widehat{\ }\mathsf{ICH}_1(1+1)) = 0$，并且

$$H^0(gr\widehat{\mathsf{ICH}}_1(1+1)) = \mathbb{K}\langle\ \ \textcircled{0}\!\!-\!\!\textcircled{1}\ \ \rangle = \mathbb{K}\langle T_{01}\rangle$$

正如定理 **9.3** 在 $n=1$ 的情形下所述。

10.2. STEP 2: ACYCLCITY OF A "TYPE-0" SUBCOMPLEX. 我们研究 $(gr\mathsf{ICH}_n, d)$ 的一个子复形 C_{type0}（实际上是一个直和项 $\widehat{\ }$），它由 0 型超边生成。更确切地说，令 $C_{type0} = \sum_{i=-2}^{0} C^i_{type0}$ 为 ICH_n 的一个 $\mathbb{Z}$ 分次子空间，其定义如下:

$$C^{-1}_{type0} = \mathbb{K}\left\langle \gamma_{ijn} := \ \ \textcircled{0}\ \cdots\ \textcircled{i}\ \cdots\ \textcircled{j}\ \cdots\ \textcircled{n}\ ,\quad 0\leq i<j<n \right\rangle,$$

$$C^0_{type0} = \mathbb{K}\left\langle d^{(2)}_i\gamma_{ijn}, d^{(2)}_j\gamma_{ijn}, d^{(2)}_n\gamma_{ijn}\quad 0\leq i<j<n\right\rangle,$$

$$C^1_{type0} = \delta\left(C^0_{type0}\right) = \delta^{(2)}\left(C^0_{type0}\right)$$

10.2.1. 引理。 复形 C_{type0} 是无环的。

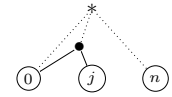
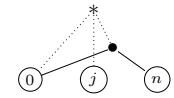
证明。 微分 d 在 C^{-1}_{type0} 上的作用显然是一个单射 $d:\ C^{-1}_{type0}\hookrightarrow C^0_{type0}$，因此要证明该引理，只需证明 $H^0(C_{type0}) = 0$。

复形 C_{type0} 分解为若干复形的直和

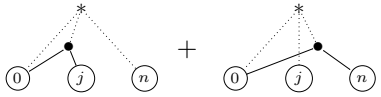
$$C_{type0} = \bigoplus_{0\leq i<j<n} C_{ijn}$$

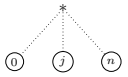
[6]来自 $\mathcal{L}ie_\infty(m+1)$ 的图的腿都标记为 *different* 整数，而在我们的情形中，腿的一些标签可以重复；这些重复的标签可以视为不同的标签，但随后在一个块中对称化（对应于一个白色顶点）。这种对称化与微分可交换，因此不会影响我们关于上同调群结构的主要结论。

我们需要考虑两种情况： $i=0$ 和 $i\neq 0$。在第一种情况下，我们有

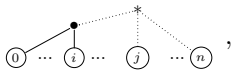
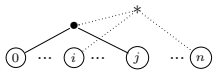
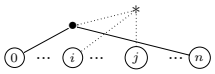
$$C^0_{ijn}=\mathbb{K}\Big\langle$$  ,  $\Big\rangle$,

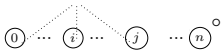
这个复形中唯一的 0 次圈是（对边和旗标作适当排序后的）总和



其恰好等于 d  。因此，每个复形 C_{0jn} 都是无环的。

在第二种情况下，有

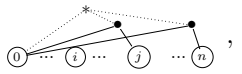
$$C^0_{ijn}=\mathbb{K}\Big\langle$$  ,  ,  $\Big\rangle$

同样，容易看出，0 次圈空间是一维的，且等于 $*d$  。因此，每个满足 $0<i<j<n$ 的复形 C_{ijn} 也都是无环的。□

$\widehat{\ }$复形 $gr\mathsf{ICH}_n$ 分解为复形的直和

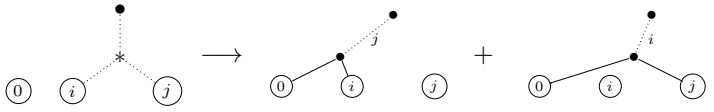
$$gr\widehat{\mathsf{ICH}}_n = C_{type0}\oplus\overline{\mathsf{ICH}}_n.$$

事实上，上述直和可能遇到的唯一障碍，或许来自$d^{(2)}(C^0_{type0})$中具有两个黑色顶点且内部虚线边标记为零的超图；原则上，这类超图可能是对补空间 ICH_n （作为分次向量空间）中的某个生成元应用 $d_\bullet$ 的结果，也就是说，将 ICH 中某个超图的黑色顶点拆分所产生的结果。不过，只要看一眼这些可能造成问题的超图，例如这个

 ,

就能确信这是不可能的，因为两个黑色顶点都各有一条边与 0 相连。接下来我们研究◯ 另一个直和项 ICH_n 。

10.3. STEP 3: REDUCING $\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))$ $n\geq 2$, TO A SMALLER QUASI-ISOMORPHIC SUBCOMPLEX. $\mathsf{ICH}_n((n+1))$中的微分 $d_\bullet$只会产生标记为零的虚线边（见（60））， 而 $d^{(2)}$ 作用于附着在某些白色顶点上的类型 2 旗标$_i$ 和 $_j$ 时，会产生标记为任意整数 $i\in\{1,2,\dots,n\}$ 的虚线边，其中 $0<i<j\leq n$

$(d^{(2)}_i+d^{(2)}_j)$  , $i>0, j>0.$

我们将上述公式左侧的这类2型超边标记为相应的一对不同的正 数（i, j），并称其为坏[7]。

如果一个超图 $\Gamma\in\mathsf{ICH}_n((n+1))$冗余，即它至少含有一条标记为 $j>0$ 的内部边，或至少含有一个坏超边，我们就称其为 $\Gamma\in\mathsf{ICH}_n((n+1))$。这类超图张成一个子复形 $\mathsf{ICH}_n((n+1))^{rednt}\subset\mathsf{ICH}_n((n+1))$，事实上它是一个直和项，

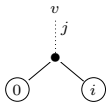
$$\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))=\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{rednt}\ \oplus\ \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice},$$

[7]注意，微分 $d^{(2)}$作用于非坏的2型超边（即那些有一个旗标
• •连接到0 的超边）时，只会生成标记为 *zero*, $d_{(2)\ i}$ 的虚线边：
* ⟶ ◯ • 。

其中，$\mathsf{ICH}_n((n+1))^{nice}$ 由这样的超图张成：其内部边（若有）全部标记为 0，且其 2型超边（若有）均有一条旗标与 $_0$ 相连。我们将在下文看到，这个复形可以理解为由普通图而非超图生成；从这个意义上说，它确实很理想。

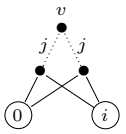
10.3.1. 引理。 复形 $\mathsf{ICH}_n((n+1))^{\overline{rednt}}$ 在非正次数上上同调平凡，即$H^{\bullet\leq 0}\mathsf{ICH}_n((n+1))^{rednt}=0$ 对任意 $n\geq \overline{2均}$成立。

证明。 我们称形如以下形式的三价黑色顶点为



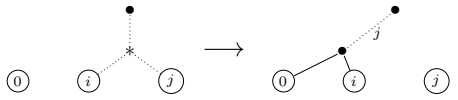
$$j>i>0,$$

指标为 (i,j) 的坏顶点。它通过一条带有 $j>i$ 的 j 标记虚线边连接到另一个黑色顶点 v；如果该黑色顶点 v 也是坏顶点（包括任意双指标 (i,j)），那么我们就得到一个上同调次数为 $+1$ 、与我们无关的内部连通超图。因此，我们可以假设每个坏 黑色顶点都通过其唯一一条 j 标记虚线边连接到一个非 坏黑色顶点 v 。出于对称性，黑色顶点 v 所连接的、指标相同为 (i,j) 的此类坏顶点不能多于 1 个，否则该超图恒等于零，



$$\equiv 0.$$

考虑按非坏黑色顶点的数量对 $\mathsf{ICH}_n((n+1))^{rednt}$ 进行滤过，并令 $(\mathcal{E}_r^{rednt},\ \partial_r)$ 为相应的谱序列。初始页 $(\mathcal{E}_0^{rednt},\ \partial_0)$ 的微分 ∂_0 仅在坏超边（如果存在）上非平凡作用，作用方式如下：生成一个坏黑色顶点



$$,\quad i<j.$$

微分保持 $\mathcal{E}_0^{rednt}$ 中非坏黑色顶点的数量，因此我们可以考虑一个更大的复形$\widehat{\mathcal{E}}_0^{rednt}$，它由那些将非坏黑色顶点区分开来的超图张成，例如用某些整数 $k\in\mathbb{N}$ 为它们标记。于是，每个坏黑色顶点都由其指标 $(i,\ j,\ k)$ 唯一确定，其中 $i<j$ 是其原始指标，k 是与之相连的唯一非特殊黑色顶点 v 的指标。利用三元组 $(i,\ j,\ k)$ 上的字典序，我们得到一个定义良好的最小坏顶点概念；将其称为极坏。接下来，考虑按非极坏黑色顶点的数量对 $\widehat{\mathcal{E}}_0^{rednt}$ 进行滤过。其伴随分次分解为直和

$$gr\widehat{\mathcal{E}}_0^{rednt}=A_0'\ \ \oplus\ \ C\otimes A_0''$$

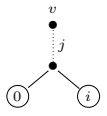
其中，A_0' 是由不含坏超边且不含黑色顶点的超图张成的平凡子复形，复形 C 是一个如下形式的二维无环复形



$$,\quad \text{the triple } (i,j,k) \text{ is minimal.}$$

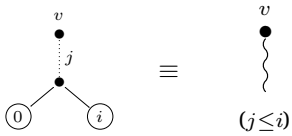
而 A_0'' 是一个平凡复形。由此可得，谱序列的下一页（$\mathcal{E}_1^{rednt},\ \partial_1$）等于$A_0'$，也就是说，它由不含坏超边和坏黑色顶点、但至少含有一条标记为 $j>0$的内部虚线边的超图生成。

接下来，考虑按实边数对 $(\mathcal{E}_1^{rednt},\partial_1)$ 进行滤过，并令 $(E_r\mathcal{E}_1^{rednt},\partial_{1r})$ 为相应的谱序列。在 $E_0\mathcal{E}_1^{rednt}$ 中诱导出的微分 ∂_{10} 就是 $d_\bullet$。从现在起，我们将与 v 相连的如下形式的子图理解为



$$,\ 0\leq j\leq i\leq n$$

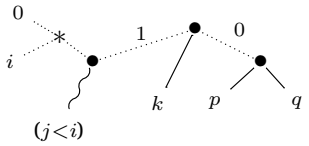
附着于 v 的一个波浪形腿，并用一对整数 $(j \le i)$ 标记，如下图所示，



$\forall\ 0 \le j \le i \le n.$

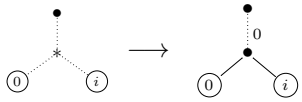
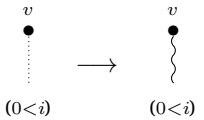
之所以可行，是因为诱导微分 ∂_{1r} 作用在这类子图上是平凡的，也就是说，它们保持不变。从现在起，上图左侧所示类型的 j 标记虚线内部边不再被视为内部边，而是被视为连接到黑色顶点上的波浪腿。

现在我们在 STEP 1 中采用完全相同的技巧：将所有标记为整数 $j > 0$ 的内部边拆成成对的新腿，实质上将所得的无序张量积无根树复形与循环 $\mathcal{L}$即$_\infty$ 复形对应起来，并得出结论：下一页（$E_1\mathcal{E}_1^{rednt},\ \partial_{11}$）由连通三价树张成（模去每条标记为零的内部边处的 IHX 关系）。这些树有三种类型的腿：标记为从 0 到 n 的整数的实线腿、由数对 $(0,\ j)$ 编号的 2 型非坏超边$j > 0$，以及标记为数对 $(j < i)$ 且 $j \ge 0$ 如图所示的波浪边



$\in E_1\mathcal{E}_1^{rednt}.$

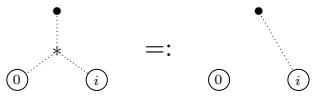
第 i nduced 微分 ∂_{11} 仅对非坏的 2 型超边产生非平凡作用，如下所示

$\partial_{11}:$  或者，使用另一种记号，$\partial_{11}:$ 

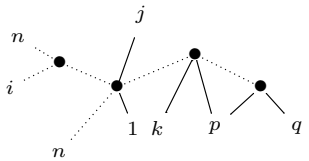
该作用只改变三价顶点的腿的装饰（“一条虚线 $(0,i)$-边变成一条波浪形 $(0,i)$-边”）；因此，谱序列的下一页也是最后一页 $E_2\mathcal{E}_1^{rednt} = H^\bullet(E_1\mathcal{E}_1^{rough}, \partial_{11})$ 由完全不含 2 型超边的三价超图生成；每个这样的超图的上同调次数都等于 $+1$。由此可知，所有非正次数的上同调群 $H^{\bullet\le 0}(\mathrm{ICH}_n((n+1))^{rednt})$ 均为零，从而证明了该引理。

□

10.4. STEP 4: COMPUTING THE COHOMOLOGY OF $\overline{\mathrm{ICH}_n((n+1))}^{nice}$. 回顾一下，$\mathrm{ICH}_n((\overline{n+1}))^{nice}$ 由超图 Γ 张成，其中虚线内部边（若有）都标记为 0，因此从现在起，我们在图示中省略这些标签；此外，Γ 的 2 型超边（若有）必须有一面旗标与 $_0$ 相连。我们将每个这样的 2 型超边视为一条虚线边，如图所示



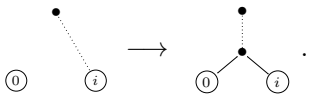
因此，今后我们将 $\overline{\mathrm{ICH}_n((n+1))}^{nice}$ 的生成元理解为普通的内部亏格零内部连通图，这类图有两种边：实边和虚线边；此外，每条内部边都是虚线边，并且没有虚线边连接到 $_0$，例如。



$\in \overline{\mathrm{ICH}_n}((n+1))^{nice}.$

这里，腿的标签表示与其相连的白色顶点。此复形中的微分为总和 $d = d_\bullet + d^{(2)}$，其中 $d_\bullet$ 如式 (60) 那样拆分黑色顶点，而 $d^{(2)}$ 仅作用于带标签的虚线腿，如下所示

所示

(62) 

只需证明定理

(63) $H^{\bullet<0}(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}) = 0, \quad H^0(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}) \simeq \mathfrak{freeLie}\langle T_{1n},\ T_{2n},\ \dots,\ T_{n-1,\ n}\rangle \oplus \mathbb{K}\langle T_{0n}\rangle \ \forall\, n \geq 2.$

连接到顶点 n 的实线边和虚线边总数 $N \geq 1$ 在微分 d 作用下保持不变，只有它们的类型可能在 d 的作用下从"虚线"变为"实线"。因此，复形分解为直和

$$\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice} = \bigoplus_{N\geq 1} \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_N$$

其中 N 是白色顶点 n 的总价数。 ◯

10.4.1. 情形 $N = 1$。存在一个短正合列

(64) $$0 \longrightarrow \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{solid} \longrightarrow \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{1} \longrightarrow \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{dotted} \longrightarrow 0,$$

其中，子复形 $\mathsf{ICH}_n(n+1)^{nice}_{solid}$ 由这样的图张成：其唯一的边 e_n 连接到 n，且为实线。微分在这条边上作用为零。因此，我们可以将 $\mathsf{ICH}_n(n+1)^{nice}_{solid}$ 的生成元理解为以实边 e_n 为根的有根树，其腿分为实线腿和虚线腿两种。实线腿标记为集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 中的整数，虚线腿标记为集合 $\{1,\dots,n-1\}$ 中的整数。

"Solid" subcase。考虑 $\mathsf{ICH}_n(n+1)^{nice}_{solid}$ 的滤过，滤过依据实边的数量定义，并令 $(E_r^{solid},\ \partial_r)$ 为相应的（正则且有界）谱序列。由于 $\partial_0 = \delta_\bullet$，且我们处理的是至少三价的有根树，复形 $(E_0^{solid},\ \partial_0)$ 同构于复形 $\mathcal{L}$ 即$_\infty$ 中的一个直和项。因此，下一页 $E_1^{solid} = H^\bullet(E_0^{solid},\ \partial_0)$ 在次数平移意义下同构于自由李超代数

$$E_1^{solid} \simeq \mathfrak{freeLie}\,\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\rangle\,, \quad |x_\bullet| = 0,\ \ |y_\bullet| = -1,$$

由 n 上同调次数为零的形式变量 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 生成（对应于附着在白色顶点上的实边），以及 $n-1$ 次数为 -1 的形式变量 $y_1, \dots, y_{n-1}$ 生成（对应于附着在白色顶点上的虚线边）。诱导的微分 $\partial_1 = d^{(2)}$ 对形式变量的作用如下（见（62））

$$\partial_1(x_k) = 0,\ \partial_1(y_i) = [x_0, x_i], \quad \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\},\ \forall i \in \{1,\dots,n-1\}.$$

我们断言，谱序列 $(E_r^{so\ i}, \partial_r)$ 在 $r = 2$处退化，

$$\begin{aligned} E_2^{solid} \simeq grH^\bullet(gr\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{solid}) &\simeq \frac{\mathfrak{freeLie}(x_0, x_1, \dots, x_n)}{([x_0,x_1],\dots,[x_0,x_n])} \\ &\simeq \mathfrak{freeLie}\,\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \ \oplus\ \mathbb{K}\langle x_0\rangle \end{aligned} \tag{65}$$

事实上，将消去定理（见第2章 §9、命题10及其在 [B] 中的推论）应用于生成元集合 $X := \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ 到不交并$x_0 \coprod (X \setminus x_0)$的分解，可得 $\mathfrak{freeLie}\,\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\rangle$ 的如下分次向量空间直和分解，

$$\mathfrak{freeLie}\,\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\rangle = \mathbb{K}\langle x_0\rangle \oplus \mathfrak{freeLie}\,\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \oplus \mathfrak{freeLie}'$$

其中 $\mathfrak{freeLie}'$ 是由以下生成元集合生成的自由李超代数的子空间，

$$\left\langle ad_{x_0}^{p_1}\cdot x_1, \dots, ad_{x_0}^{p_{n-1}}\cdot x_{n-1}, ad_{x_0}^{q_1}\cdot y_1, \dots, ad_{x_0}^{p_{n-1}}\cdot y_{n-1}\right\rangle_{p_1,\dots,p_{n-1},q_1,\dots,q_{n-1}\geq 0}$$

其中至少包含一个带有 x_0 的符号，或至少包含字母表 $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ 中的一个字母。将其中一些生成元重新记为如下形式

$$ad_{x_0}\cdot x_i =: z, \quad ad_{x_0}^p \cdot x_i =: ad_{x_0}^{p-1}\cdot z \quad \forall p \geq 1, i \in \{1, ..., n-1\}.$$

在这种记号下，微分 ∂_1 仅在直和项 $\mathfrak{freeLie}'$ 上非平凡地作用：它作为导子作用于 y-生成元，其作用为 $\partial_1 y_\bullet = z_\bullet$，而在所有其他生成元上作用为零。现在我们可以定义一个收缩

同伦 h，它在 $\mathfrak{freeLie}'$ 上作为导子，仅在新字母上非平凡地作用，其作用为 $h(z_\bullet) = y_\bullet$。对于 $\mathfrak{freeLie}'$ 的任意基元素 f，若其包含 a 个字母 $z_\bullet$ 和 b 个字母 $y_\bullet$，则有

$$(\partial_1 \circ h + h \circ \partial_1) f = (a+b) f.$$

由于 $a+b \geq 1$，我们得出子复形 $(\mathfrak{freeLie}',\ \partial_1)$ 是无环的。断言 (65) 得证。

由于复形 $\mathsf{ICH}_n((n+1))^{nice}_{solid}$ 的每个生成元的根边都是实边，同构 (65) 表明，直和项 $gr\mathsf{ICH}_n((n+1))^{nice}_{solid}$ 的上同调由无根三价图的等价类给出（模去每条虚线内边上的 IHX 关系），且其所有腿均为实边。每个这样的图的上同调次数为 $+1$，因此我们得出

$$H^{\bullet \leq 0}(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{solid}) = 0.$$

"Dotted" subcase。我们完全仿照前一个"实线"子情形处理这一子情形，也就是说，按照实边的数量对商运算子 $\mathsf{ICH}_n(n+1)^{nice}_{dotted}$ 进行滤过，并通过将谱序列 $(E_r^{dotted},\ \partial_r)$ 的元素识别为有根树来研究该谱序列。主要区别在于，此时根边是一条虚线边，连接到 n 而不是实边。这一区别对我们得出主要结论的论证没有影响，

$$E_2^{dotted} \simeq gr H^\bullet(gr\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{dotted}) \simeq \mathfrak{freeLie}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \ \oplus \ \mathbb{K}\langle x_0\rangle$$

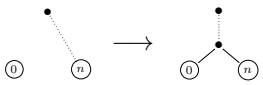
元素 x_0 是该李代数的中心元素。由于根边现在是虚线，向量空间 E_2^{dotted}现在集中在上同调次数零（而非像前一种情形那样集中在次数 $+1$）

$$H^0(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{dotted}) \simeq \mathfrak{freeLie}\langle T_{1n}, T_{2n}, \dots, T_{n-1,n}\rangle \ \oplus \ \mathbb{K}\langle T_{0n}\rangle \quad \forall\ n \geq 2.$$

Next 我们将证明，与短正合列 (64) 相关联的连接态射

$$C : H^0(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{dotted}) \to H^1(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{solid}),$$

为零。事实上，该连接态射由 $d_n^{(2)}$ 作用于 $H^0(\mathsf{ICH}_n((n+1))^{nice}_{dotted})$ 的图生成元中唯一的虚线边给出，如下所示



将这一作用等价地改写为上述对 E_2^{solid}与$\mathfrak{freeLie}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \ \oplus \ \mathbb{K}\langle x_0\rangle$ 的识别后，它由以下映射给出：

$$\begin{array}{rccc} C: & \mathfrak{freeLie}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \ \oplus \ \mathbb{K}\langle x_0\rangle & \longrightarrow & \mathfrak{freeLie}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \ \oplus \ \mathbb{K}\langle x_0\rangle \\ & f & \longrightarrow & [x_0, f] = 0 \end{array}$$

由于 x_0 为中心元素，该映射为零。因此我们得出

$$H^{\bullet \leq -1}(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_1) = 0, \quad H^0(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_1) = \mathfrak{freeLie}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \ \oplus \ \mathbb{K}\langle x_0\rangle.$$

一旦证明了以下结论，定理 **9.3** 的证明便告完成

$$H^{\bullet \leq 0}(\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_N) = 0 \quad \forall N \geq 2.$$

10.4.2. 情形 $N \geq 2$。考虑 $\mathsf{ICH}_n((n+1))^{nice}_N$ 的一个滤过

$$\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_N \equiv \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{0,N} \supset \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{1,N} \supset \dots \supset \overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{N,N}$$

其中 $\overline{\mathsf{ICH}}_n((n+1))^{nice}_{p\ N}$ 是由至少有 p 条实边连接到 n 的超图张成的子空间 $\bigcirc$.

令 $(E_r,\ \partial_r)$ 为相应的谱序列。在 $(E_0,\ \partial_0)$ 中诱导的微分为

$$\partial_0 = d_\bullet + \sum_{i=1}^{n-1} d_i^{(2)}.$$

按照上述"实心子情形"中的论证，我们得出下一页（$E_1,\ \partial_1$）由无根三价树张成，并且对每条内部边取模 IHX 关系。此类树的实线腿至少带有一个黑色顶点，其标记为集合 E_1 中的整数，而虚线腿（如果有）则全部仅标记为 。

这些树也可以等价地理解为如下形式的形式循环词

$$(x_n, f_1),\ \ (y_n, f_2),$$

其中

$$f_1, f_2 \in \mathfrak{freeLie}\left\langle x_0, x_1, \ldots, x_n, y_n\right\rangle / [x_0, x_{i<n}]$$

并且假设形式标量括号（, ）是分次对称的，并满足“杀形式”类型的恒等式，

$$([a_i, b_j], f) + (-1)^{|a_i||b_j|}(b_j, [a_i, f]) = 0,$$

对于任意的 $a_i, b_j \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n, y_n\}$ 以及上述任意李词 f。微分 ∂_1 以导子 $d_n^{(2)}$的方式作用于这些循环词中的字母 y_n： $y_n \to [x_0, x_n]$。当然，假设上述循环词（x_n, f_1）或（y_n, f_1）中的字母总数 x_n, y_n 恰好为 $N \geq 2$。由于“杀形式”类型的恒等式，分解为和式（x_n, f_1） + （y_n, f_2）并非唯一，例如

$$(x_n, [y_n, f]) = ([x_n, y_n], f) = -(y_n, [x_n, f]),$$

这对应于三价树无根这一事实——可以选择一条标记为 n 的实线腿作为根 x_n （然后立即得到一个相应的李词），也可以选择一条虚线腿 y_n 作为根（并得到另一个不同的李词）。

微分 ∂_1 在 E_1 中保持连接到白色顶点 i 且具有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 的实边数量；也就是说，它保持上述以循环词表示三价树时形式变量 x_i 且具有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 的数量。因此，我们将复形 (E_1, ∂_1) 分解为直和

$$(E_1, \partial_1) = (E_1^{\geq 1}, \partial_1) \oplus (E_1^0, \partial_1)$$

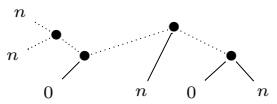
其中 $(E_1^{\geq 1}, \partial_1)$ 是由至少有一个字母 x_i 且具有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 的循环词张成的直和项。每个这样的循环词都可以表示为 (x_i, f) 的形式，因此我们得到复形的直和

$$(E_1^{\geq 1}, \partial_1) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \left(\mathfrak{freeLie}\left\langle x_0, x_i, x_{i+1} \ldots, x_{n-1}, x_n, y_n\right\rangle / ([x_0, x_{k<n}]), \partial_1 = d_n^{(2)}\right).$$

利用消去定理以及与前一种情况 $N = 1$ 中相同的收缩同伦 h，我们得出上述复形中每个直和项的每个上同调类都有一个循环代表元，它是若干李词的线性组合，且不含单个字母 y_n；用图来表示，这意味着上同调群 $H^\bullet(E_1^{\geq 1}, \partial_1)$ 由三价图（模去 IHX-关系）生成，这些图的所有 腿都是实线；所有这些图的次数均为 $+1$，因此我们得出

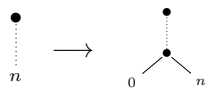
$$H^{\bullet \leq 0}(E_1^{\geq 1}, \partial_1) = 0.$$

第二个直和项（E_1^0， ∂_1）最好通过具有两个白色顶点 0 和 n 的三价图来理解。这个复形由以下形式的三价图（模掉 IHX 关系）张成：



.

这些图的虚线边只能连接到 n 白色顶点，而实边可以连接到 0 和 n。微分 $\partial_1 = d_n^{(2)}$对虚线边的作用如下：



因此，复形（E_1^0， ∂_1）是无环的。

定理**9.3** 的证明已完成。 □

References

[B] N. Bourbaki, 《李群与李代数》第一部分，Hermann，巴黎，1987 年（第 1–3 章）。[Br] S. Brun, *Homotopy derivations of the framed little discs operads*，预印本 arXiv:2006.10612（2020）。[CIW] R. Campos、N. Idrissi 和 T. Willwacher, *Configuration Spaces of Surfaces*，预印本 arXiv:1911.12281（2019）[G] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*，《数学物理通讯》159（1994），第 2 期，265-285。[GK] E. Getzler 和 M. M. Kapranov, *Cyclic operads and cyclic homology*。载于：《几何、拓扑与物理》，167–201，《几何与拓扑会议论文集讲义》IV，国际出版社，剑桥，马萨诸塞州，1995。[GS1] J. Giansiracusa 和 P. Salvatore, *Formality of the framed little 2-discs operad and semidirect products*。载于：《函数空间的同伦论及相关主题》。《当代数学》519。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010 年，第 115-121 页。[GS2] J. Giansiracusa 和 P. Salvatore, *Cyclic operad formality for compactified moduli spaces of genus zero surfaces*，《美国数学会会刊》364（2012），第 11 期，5881–5911。[HLTV] R. M. Hardt、P. Lambrechts、V. Turchin 和 I. Voli´c, *Real homotopy theory of semi-algebraic sets*，《代数与几何拓扑》11（2011），第 5 期，2477-2545。[KSV] T. Kimura、J. Stasheff 和 A. Voronov, *On operad structures of moduli spaces and string theory*，《数学物理通讯》171（1995），1-25。[KW] A. Khoroshkin 和 T. Willwacher, *Real models for the framed little n-disks operads*，《拓扑学杂志》（2025），DOI: 10 1112 70042 。/ topo。K M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*，《数学物理快报》66（2003），157-216。[K2] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*，《数学物理快报》48(1)（1999），351-772。[KS] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman, *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*。载于：1999 年 Moshe Flato 会议，第 I 卷（第戎），《数学物理研究》第 21 卷，第 255-307 页。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，2000。[LV] P. Lambrechts 和 I. Volic, *Formality of the little N-disks operad*，《美国数学会回忆录》230（2013），116 页。[LW] E. Lindell 和 T. Willwacher, *A(nother) model for the framed little disks operad*，《同调、同伦与应用》25(1)（2023），265-285。[SW] P. Salvatore 和 N. Wahl, *Framed discs operads and Batalin-Vilkovisky algebras*，《季刊数学杂志》54（2003），213-231。[S] P. ˇSevera, *Formality of the chain operad of framed little disks*，《数学物理快报》93（2010），第 1 期，29-35。[SW] P. ˇSevera 和 T. Willwacher, *Equivalence of formalities of the little discs operad*，《杜克数学杂志》160，第 1 期（2011），175-204。[T] D.E. Tamarkin, *Formality of Chain Operad of Small Squares*，《数学物理快报》66（2003），第 1-2 期，65-72。[W1] T. Willwacher, *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmueller Lie algebra*，《数学发明》200（2015），671-760。[W2] T. Willwacher, *Cyclic model for the dg dual of the BV operad*，预印本 arXiv:2311.09037（2023）[W3] T. Willwacher, *Cyclic operads through modules*，预印本 arXiv:2403.18399（2024）[W4] T. Willwacher，私人通信。

Sergei A. Merkulov、Faculty of Mathematics、The Higher School of Economics、Moscow
Email address: smerkulov25@gmail.com