arXiv:2603.23440v1 [math.QA] 24 Mar 2026

分次球面 skein 2+1-G-HQFT 和修正的 Turaev-Viro 不变量。

¨FRANCESCO COSTANTINO、NATHAN GEER、BENJAMIN HAIOUN 和 BERTRAND PATUREAU-MIRAND

Abstract. 对于群 G，我们提出色映射和 skein 模的 G-分次版本，并利用它们从 G-色范畴定义一个 2+1-G-HQFT。该构造适用于单位根处非受限量子群的表示，并恢复修正的 Turaev-Viro 三维不变量。

Contents

引言 2 结果 2 1. 预备知识 4 1.1. Pivotal 范畴 4 1.2.$\mathbb{K}$–范畴 4 1.3. G-分次 pivotal $\mathbb{K}$-范畴 5 1.4. Pivotal 范畴中理想上的 M-迹 5 1.5. 带色带状图的不变量 6 2. G-装饰配边 7 2.1. G-表示 7 2.2. G-装饰配边范畴 8 3.（分次）容许 skein 模 8 3.1. 容许 skein 模的定义 8 3.2. 容许 skein 模的一些性质 9 3.3. 分次可容许辫 skein 模的定义 11 3.4. 作为 skein 模的 G-表示 13 3.5. 有限维性 14 $\widetilde{4}$. 群胚 $\mathbf{Cob}_e$ 16的表示 $\widetilde{4.1}$. G-装饰曲面的容许 skein 模 $16\widetilde{4.2}$. 群胚 $\mathbf{Cob}_e$ $17\widetilde{4.3}$. $\mathbf{Cob}_e$ $18\widetilde{4.4}$. $\mathbf{Cob}_e$ 在 $\mathcal{S}$ 21中的表示 5. G-色度范畴 24 5.1. 分次色度映射与范畴 24 5.2. G-色范畴示例 27 5.3. G-色度范畴的容许 skein 模 29 6. 三维 G-HQFT 32 6.1. Juh´asz 对配边范畴的表示 32 6.2. G-装饰把手 35 6.3. 手柄映射与手柄消去 36

6.4. 主要结果 38 7. 与修正的 Turaev-Viro 不变量的关系 41 7.1. 从 skein G-HQFT 得到的 TV 流形不变量 41 7.2. 修正的 Turaev-Viro 不变量 42 参考文献 45

Introduction

拓扑量子场论（TQFT）由 Atiyah [Ati88]公理化为从（$n+1$）维 cobordism 范畴到向量空间范畴的对称幺半函子。在三维情形中，一个基本例子是 Turaev–Viro拓扑量子场论，它由半单球面张量范畴构造而成 [TV92, BW99]。该理论为三流形不变量提供了一种态和模型，并在各种背景下得到了广泛研究。在过去二十年里，将 Turaev–Viro 型理论推广到非半单球面型范畴方面取得了重大进展，相关例子参见： [AG20, CGPT20, GP13, GPT11]。

量子拓扑中的 skein理论方法是一个相关研究方向。skein 模为流形中由嵌入图生成的空间提供代数模型，并满足局部关系。最具影响力的例子之一是曲面的 Kauffman skein代数，由 Przytycki [Prz91, Prz99]和 Turaev [Tur91]分别独立引入。其定义采用了源自 Jones多项式，或等价地源自 Kauffman括号的关系。尽管这种构造本质上是组合性的，却蕴含着深刻的几何和代数信息，并已得到广泛研究；例如参见 [BW11, BFK99, DKS25, FKL19, GJS23]。

近来，编织理论技术已被应用于非半单框架，并由此构造出拓扑量子场论，参见 [GKP22, CGHP23, CGP23, CGPV23, BH26, Hai25, MSWY26]。可容许 skein 模也被重新诠释为所谓 ansular 函子在 [MW24b]中的像。这一理论的主要工具之一，是 pivotal 范畴中理想上的修正迹。在 [CGPV23]中，人们引入了与此类理想相关联的容许 skein 模，并用它们构造了“非紧”（$2+1$）维拓扑量子场论（即定义在配边范畴上的拓扑量子场论，其中每个连通分支的入边界均非空）。本文旨在将这些结果推广到 G-分次情形，其中 G 是一个不一定为阿贝尔群的群。

在进一步详细讨论之前，我们先回顾一下，拓扑量子场论的另一种自然延拓来自同伦精化。Turaev 引入了同伦量子场论（HQFT）的概念；在这种理论中，流形和配边都配备到一个固定目标空间的映射，参见 [Tur00, Tur10, TV12, TV14, TV17, SV23]。当目标空间是 Eilenberg–MacLane空间 $K(G,1)$ 时，这种结构相当于用（非交换的）G值上同调类标记流形，由此得到 G-HQFT 的概念。这类理论与 G-分次张量范畴密切相关，并为带有同伦数据的量子不变量提供了自然框架。

结果。 本文的主要目标是发展与非半单G分次范畴相关的编织理论构造的分次版本，并

利用它来构造 $(2+1)$ 维 G-HQFT（见定义 2.4）。我们的结果可归纳为三个主要主题。

首先，我们提出容许 skein 模的 G-分次类比。这是将 [DST24] 的主要结果推广到非半单和非有限情形，所采用的技术则大不相同。对于配备理想的 G-分次挠性范畴，我们定义由带状图生成的 skein 模，其着色遵循分次数据。由此得到的分次 skein 模带有映射类群的自然作用，并且与分次相容。值得注意的是，这些分次容许 skein 模最早见于 [CGP23]，是对 [CGPV23] 中引入的容许 skein 模的推广。然而，审稿人建议应结合相应的拓扑应用来介绍容许 skein 模，因此我们重新组织了这些结果的呈现方式，不再发表 [CGP23]，而是将其中的结果及其相应的拓扑应用纳入本文和 [CGPV23]。特别是，我们在此详细介绍 G-分次结果，因为该工作不会在其他地方发表。粗略地说，G-分次 skein 模定义在“装饰曲面”上，即三元组 $(\Sigma,\ \rho,\ Y)$，其中 $Y\subset\Sigma$ 是非空的基点集，且 $\rho\colon \pi_1(\Sigma,\ Y)\to \mathrm{G}$ 是群胚的态射（见定义 2.1）。这些数据等价于一个配备平凡化 $\pi^{-1}(Y)\xrightarrow{\sim} Y\times \mathrm{G}$ 的局部平坦 G-丛 $E\xrightarrow{\pi}\Sigma$。我们在定理 4.12 中描述规范等价和改变平凡化对这些 skein 模的非平凡作用：

定理 （定理 4.12 的部分重述）。对于$\sim$ $\sim\Sigma=(\Sigma,\rho,Y)$ 与 $\Sigma'=(\Sigma,\rho',Y')$ 之间的任意等价（如定义*4.2*所述），都存在$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$一个规范同构，将 $\mathcal{S}(\Sigma)$ 与 $\mathcal{S}(\Sigma')$ 联系起来。

其次，我们引入 skein 理论 TQFT 构造所需代数结构的分次版本。具体而言，我们在每个分次分量中定义色映射的概念，并用它们来表述 G-色范畴的概念。这是一种 G-有限球面范畴，配备了射影对象理想上的非退化修正迹，并且在每个次数 $g\in$G 上都有一个色映射，见定义 5.5 和 5.7。以下是一个核心结构性结果：

定理 (命题 5.9)。若 $\mathscr{C}$ 是带有修正迹 t 的 G-有限球面范畴，则 $\mathscr{C}$ 是 G-分次色范畴，当且仅当 $\mathscr{C}_1$ 是色范畴。

特别地，若 $\mathscr{C}$ 是按 [EGNO15] 的意义定义的张量范畴，且为 G-有限球面范畴，则它是 G-分次色范畴。

第三，也是最重要的一点，我们利用这些结构构造（$2+1$）维同伦量子场论：

定理 (定理 6.7)。对于任意 G-色范畴 $\mathscr{C}$，G-分次编织模 $\mathcal{S}$ 是一个有限维 G-*HQFT* 在非紧致 G-装饰协边范畴上的向量空间。此外，与协边对应的线性映射由复合与把手分解对应的显式线性映射得到。

特别地，通过在每个分支中去掉一个三维球，上述定理给出了带有平坦 G-丛的闭三维流形的不变量（见推论 6.8）。

该构造依赖于 Juh´asz [Juh18] 建立的配边范畴的生成元与关系表示的一个部分分次版本。

最后，我们说明，该框架适用于量子代数中出现的重要张量范畴族。特别地，当 $\mathscr{C}$ 是一个单位根处的非限制量子群的表示范畴，并配备其自然分次时，所得理论为 [GPT11] 和 [GP13] 的 3-流形修正的 Turaev-Viro 不变量提供了一种更简单的延拓，使其成为完整的 G-分次拓扑量子场论（参见定理 7.1）。这为这些不变量提供了 HQFT 诠释，也展现了本文所发展的分次 skein 理论方法的有效性。

1. 预备知识

1.1. 挠性范畴。 设 $\mathscr{C}$ 是一个严格幺半范畴，其张量积为 $\otimes$，单位对象为 $\mathbb{1}$。记号 $V \in \mathscr{C}$ 表示 V 是 $\mathscr{C}$ 中的一个对象。

范畴 $\mathscr{C}$ 若具有对偶态射，则称为挠性范畴

$$\overleftarrow{\mathrm{coev}}_V : \mathbb{1} \to V \otimes V^*, \qquad \overleftarrow{\mathrm{ev}}_V : V^* \otimes V \to \mathbb{1},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{coev}}_V : \mathbb{1} \to V^* \otimes V, \qquad \overrightarrow{\mathrm{ev}}_V : V \otimes V^* \to \mathbb{1}$$

其满足相容条件（例如参见 [BW99、GKP13、Mal95]）。特别地，态射 $f\colon V \to W$ in $\mathscr{C}$ 的左对偶和右对偶 $f^*\colon W^* \to V^*$ 相同：

$$\begin{aligned} f^* &= (\overleftarrow{\mathrm{ev}}_W \otimes \mathrm{Id}_{V^*})(\mathrm{Id}_{W^*} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{V^*})(\mathrm{Id}_{W^*} \otimes \overleftarrow{\mathrm{coev}}_V) \\ &= (\mathrm{Id}_{V^*} \otimes \overrightarrow{\mathrm{ev}}_W)(\mathrm{Id}_{V^*} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{W^*})(\overrightarrow{\mathrm{coev}}_V \otimes \mathrm{Id}_{W^*}). \end{aligned}$$

若范畴 $\mathscr{C}$ 是带状的，则它是幺半范畴、辫结构范畴，并具有满足相容条件的扭结（例如参见 [GP18]）。

1.2. $\mathbb{K}$–范畴。 设 $\mathbb{K}$ 为一个域。$\mathbb{K}$–加性范畴是一个加性[1]范畴 $\mathscr{C}$，其 Hom 集是 $\mathbb{K}$–向量空间，且态射的复合是 $\mathbb{K}$-双线性的。幺半 $\mathbb{K}$–加性范畴是一个幺半范畴 $\mathscr{C}$，其中 $\mathscr{C}$ 是一个 $\mathbb{K}$–加性范畴，且态射的张量积是$\mathbb{K}$-双线性的。$\mathbb{K}$–加性范畴是

（1）局部有限，若其 Hom 集是有限维的；（2）本质小，若它等价于某个子范畴，且该子范畴的对象和态射构成一个集合。

定义 1.1. 一个幺半 $\mathbb{K}$-范畴 是一个本质小、局部有限的幺半 $\mathbb{K}$-加性范畴，满足自同态集$_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}) = \mathbb{K}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{1}}$。一个刚性 $\mathbb{K}$-范畴 是一个具有刚性结构的幺半 $\mathbb{K}$-范畴。

若恒等映射 $_V = 0$，则 $\mathbb{K}$–加性范畴中的对象 V 称为零对象。若一个范畴的所有对象都是零对象，则称该范畴为零范畴。若 $\mathbb{K}$-加性范畴 $\mathscr{C}$ 中任意对象的恒等映射都可经由 W 的有限个副本的有限直和 $W^{\oplus n}$ 分解，则该范畴中的对象 W 称为 $\mathscr{C}$ 的生成元。

[1]定义容许 skein 模并不严格需要加性，但很容易证明，一个范畴的容许 skein 模等于其加性完备化的容许 skein 模。

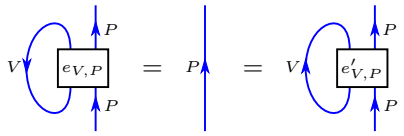


FIGURE 1. 态射 $e_{V,P}$ 和 $e'_{V,P}$。

定义 1.2。 若任意非零态射到 $\mathbb{1}$ 都是满态射，且任意从$\mathbb{1}$出发的非零满态射都是同构，则称枢轴 $\mathbb{K}$-范畴$(\mathscr{C},\otimes,\mathbb{1})$ 为锐。

在锐的幺半对偶 $\mathbb{K}$-范畴中，两个非零对象的张量积非零。按照 [EGNO15] 的定义，张量范畴是锐的。

1.3. **G-分次幺半对偶 $\mathbb{K}$-范畴**。 设 $\mathscr{C}$ 是锐的幺半对偶 $\mathbb{K}$-范畴，G 是一个群。若存在一族 $\{\mathscr{C}_g\}_{g\in \mathsf{G}}$ 非零满子范畴，其对象称为齐次对象，并且满足以下条件，则称范畴 $\mathscr{C}$ 为 G-分次：

(1) $\mathscr{C}$ 的每个对象都是齐次对象的直和；(2) 若 $g_1,g_2\in \mathsf{G}$， $V_1\in\mathscr{C}_{g_1}$ 且 $V_2\in\mathscr{C}_{g_2}$，则 (a) 若 $\mathscr{C}$ 中的某个对象与 V_1 同构，则它是 $\mathscr{C}_{g_1}$ 中的对象；(b) $V_1\otimes V_2\in\mathscr{C}_{g_1g_2}$；(c) 若 $g_1\neq g_2$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V_1,V_2)=\{0\}$。

根据定义可得 $\mathbb{1}\in\mathscr{C}_1$。此外，对于 $V\in\mathscr{C}_g$，有 $V^*\in\mathscr{C}_{g^{-1}}$。若$V$非零，则 g 由 V 唯一确定，并称为其次数。

1.4. **pivotal 范畴中理想上的 M-迹**。 设 $\mathscr{C}$ 为一个 pivotal $\mathbb{K}$–范畴。这里我们回顾 $\mathscr{C}$中理想上的 m-迹的定义，更多详情请参见[GKP13、GPV13]。我们称 $\mathscr{C}$ 的一个理想 为一个满子范畴 $\mathcal{I}$，它是 $\mathscr{C}$ 的

对张量积封闭： 若 $V\in\mathcal{I}$ 且 $W\in\mathscr{C}$，则 $V\otimes W$ 和$W\otimes V$ 是 $\mathcal{I}$的对象。

对收缩封闭： 若 $V\in\mathcal{I}$、 $W\in\mathscr{C}$ 且存在态射$f\colon W\to V$、 $g\colon V\to W$，使得 $gf=\mathrm{Id}_W$，则 $W\in\mathcal{I}$（我们称 W 是 V的直缩 ）。例如， $\mathscr{C}$ 中投射对象构成的满子范畴 Proj 是一个理想。

注记 1.3。 由于理想的交仍是理想，因此我们可以将包含一组对象的最小理想定义为由这些对象生成的理想。

给定由 V 生成的理想中的一个对象 V $\mathscr{C}$，它是所有对象 U 的集合，其中这些对象是某个 $W,X\in\mathscr{C}$对应的 $W\otimes V\otimes X$ 的直缩。

引理 *1.4*。设 $\mathscr{C}$ 是一个锐的幺半对偶 $\mathbb{K}$-范畴，且 V 是一个非零对象，则由 V 生成的理想包含由 $\mathscr{C}$中的投射对象构成的理想 *Proj*。此外，若 P是 $\mathscr{C}$中的一个投射对象，则存在态射 $e_{V,P}\in$自同态集$_{\mathscr{C}}(V^*\otimes P)$ 和 $e'_{V,P}\in$自同态集$_{\mathscr{C}}(V\otimes P)$，使得 $ptr^L_{V^*}(e_{V,P})=ptr^L_V(e'_{V,P})=Id_P$（图示解释见图 *1*）。

证明。 令 $\mathcal{I}$为由 V生成的理想。由于 V不为零，因此 $\overrightarrow{\mathrm{ev}}_V\colon V\otimes V^*\to\mathbb{1}$是一个满态射，故对于每个投射对象 P，态射 $\overrightarrow{\mathrm{ev}}_V\otimes\mathrm{Id}_P$:

$V \otimes V^* \otimes P \to P$是一个满态射，因此它可分裂。这表明，对于某个 $W \in \mathscr{C}$（明确地说， $W = V^* \otimes P$）， P是 $V \otimes W$的一个直缩，因此 Proj $\subset \mathcal{I}$。

现在设 $f\colon P \to V \otimes W$和 $g\colon V \otimes W \to P$满足 $\mathrm{Id}_P = g \circ f$。然后令 $e_{V,\,P} = (\mathrm{Id}_{V^*} \otimes g) \circ (\overrightarrow{\mathrm{coev}}_{V^*} \otimes \mathrm{Id}_P) \circ (\overrightarrow{\mathrm{ev}}_{\,V} \otimes \mathrm{Id}_W) \circ (\mathrm{Id}_{V^*} \otimes f)$。对对偶运用两次“蛇形”（或“之字形”）关系，可得 $\mathrm{ptr}^{L}_{V^*}(e_{V,\,P}) = g \circ f = \mathrm{Id}_P$。$e'_{V,\,P}$的证明类似。□

一个右（分别为左）偏迹是 $f \in$ 自同态集$_{\mathscr{C}}(U \otimes W$上的态射

$$\mathrm{ptr}^{W}_{R}(f) = (\mathrm{Id}_U \otimes \overrightarrow{\mathrm{ev}}_W)(f \otimes \mathrm{Id}_{W^*})(\mathrm{Id}_U \otimes \overleftarrow{\mathrm{coev}}_W) \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(U),$$

$$\text{resp. } \mathrm{ptr}^{U}_{L}(f) = (\overleftarrow{\mathrm{ev}}_U \otimes \mathrm{Id}_W)(\mathrm{Id}_{U^*} \otimes f)(\overrightarrow{\mathrm{coev}}_U \otimes \mathrm{Id}_W) \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(W).$$

理想 $\mathcal{I}$上的右 m-迹 是一族线性函数 $\{\mathrm{t}_V\colon$ 自同态集$_{\mathscr{C}}(V) \to \mathbb{K}\}_{V \in \mathcal{I}}$，满足：

循环性： 若 $U, V \in \mathcal{I}$和 $f\colon V \to U$, $g\colon U \to V$是 $\mathscr{C}$中的任意态射，则 $\mathrm{t}_V(gf) = \mathrm{t}_U(fg)$。

右偏迹性质： 若 $U \in \mathcal{I}$, $W \in \mathscr{C}$, $f \in$ 自同态集$_{\mathscr{C}}(U \otimes W)$ then $\mathrm{t}_{U\otimes W}(f) = \mathrm{t}_U(\mathrm{ptr}^{W}_{R}(f))$.

$\mathcal{I}$上的左m-迹 是由线性函数 $\{\mathrm{t}_V\colon \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(V) \to \mathbb{K}\}_{V \in \mathcal{I}}$组成的族，该族具有循环性并满足

左偏迹性质： 若 $U \in \mathcal{I}$, $W \in \mathscr{C}$, $g \in$ 自同态集$_{\mathscr{C}}(W \otimes U)$ 则 $\mathrm{t}_{W\otimes U}(g) = \mathrm{t}_U(\mathrm{ptr}^{W}_{L}(g))$.

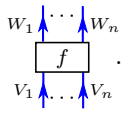
理想上的m-迹 是同时也是左m-迹的右 m-迹。

定义 1.5. $\mathcal{I}$ 上的m-迹t 是非退化的，如果对任意 $V \in \mathcal{I}$，由 $x \otimes y \mapsto \mathrm{t}(x \circ y)$ 定义的配对$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}, V) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, \mathbb{1}) \to \mathbb{K}$ 是非退化的。球形范畴（在 $\mathbb{K}$上）是一个锐的球形 $\mathbb{K}$-范畴，其理想Proj 投射对象上存在非退化的m-迹。

注意，在球形范畴中，Proj 上任意非零的 m-迹必定是非退化的（参见 [GP25, 推论 4.3.44]）。

1.5. **带色带状图的不变量**。设 $n = 2$ or 3，且 $\mathscr{C}$为一个幺半范畴。若 $n = 3$，我们假设 $\mathscr{C}$ 是带状的。接下来，我们回顾 $\mathscr{C}$–带色带状图的定义，详情参见 [Tur94]。

$\mathscr{C}$中的态射 $f\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$可以用一个盒和箭头表示，这些箭头称为券片，见右侧的图：



所有券片都有顶面和底面，在我们的图示中，它们就是券片的水平边。我们所说的定向流形 Σ中的带状图，是指嵌入在 Σ 中的定向紧曲面，它分解为若干基本部分：带、环带和券片（见 [Tur94]），并且是某个定向图的加厚。特别地，图中位于 Int $\Sigma = \Sigma \setminus \partial\Sigma$的顶点会加厚为券片。一个 $\mathscr{C}$–着色带状图，是指其（加厚后的）边由 $\mathscr{C}$的对象着色、券片由 $\mathscr{C}$的相容态射着色的带状图。券片底部边的颜色决定该态射的源对象，顶部边的颜色则决定其目标对象。

要求 Σ 中的 $\mathscr{C}$–着色带状图与 $\partial\Sigma$ 的交为空，或仅由价数 1 的顶点组成。当 Σ 是曲面时，该带状图就是图的一个管状邻域。

令 $\mathrm{Rib}^n_{\mathscr{C}}$ 为 $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,1]$ 中由 $\mathscr{C}$着色的带状图所构成的范畴，并令

$$\mathsf{F}:\mathrm{Rib}^n_{\mathscr{C}}\to\mathscr{C}$$

为通过 Penrose 图形演算与 $\mathscr{C}$ 相关联的 Reshetikhin–Turaev 函子，参见例如 [GPV13、Tur94、GP25]。

令 $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ 为球面 S^n 中所有 $\mathscr{C}$着色带状图构成的类，这些图是某个 (1,1) 带图 T_V 的辫闭包，其开放边以对象 $V\in\mathcal{I}$着色。给定 $\mathcal{I}$ 上的一个 m-迹 t，我们可以将 F 重正规化为一个不变量

$$\mathsf{F}':\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\to\mathbb{K}\ \text{given by}\ \mathsf{F}'(L)=\mathsf{t}_V(\mathsf{F}(T_V)) \tag{1}$$

其中 T_V 是任意一个闭包为 $L\in\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ 的 (1,1) 带图。m-迹的性质意味着 F' 是 L 的同痕不变量，见 [GPV13]。

2. G-decorated cobordisms

我们引入一个专为研究 3-流形的特征簇而设计的协边范畴；等价地说，它用于研究 3-流形上的平坦 G-丛的模空间。

2.1. G-表示。 若 X 是一个非空的局部道路连通拓扑空间，且 $Y\subset X$ 是其子集，则基本群胚 (X,Y) 是一个群胚（即所有态射都是同构的小范畴），其对象集为 Y，态射则是从 Y 中一点到另一点的路径的同伦类（同伦固定端点）。按照 Whitehead [Whi78]，的记法，这样一条路径 γ 是从 $\gamma(1)$ 到 $\gamma(0)$ 的态射。这样定义使复合与通常的路径拼接相容（即 $\gamma\circ\gamma'$ 是先经过 γ 再经过 γ' 的路径）。若 γ 是从 $q=\gamma(1)$ 到 $p=\gamma(0)$ 的态射，我们记作 $\gamma:p\rightsquigarrow q$。当 Y 是 X 中的单点 $*$ 时，$\pi_1(X,Y)=\pi_1(X,\{*\})$ 就是通常的基本群。

定义 2.1. 连通拓扑空间 X在基点集 Y 下的 G-表示集为

$$\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Groupoid}}(\pi_1(X,Y),\mathsf{G})$$

若 Y 非空，

$$\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,\emptyset)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(\pi_1(X,\{*\}),\mathsf{G})/\mathsf{G}$$

若 Y 为空，其中 $*$ 是 X 的任意基点，群 G通过共轭作用作用于 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Group}}(\pi_1(X,\{*\}),\mathsf{G})$。若 X 不连通，我们定义

$$\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y)=\prod_{X_0\in\pi_0(X)}\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X_0,Y\cap X_0)\ .$$

按照约定，$\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(\emptyset,\emptyset)$ 是一个单元素集。

若 $X\subset X'$和 $Y\subset Y'$，则存在限制映射 $\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X',Y')\to\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y)$。注意，当基点集增大时，表示总能延拓：若 $Y\subset Y'$，限制映射 $\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y')\to\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y)$ 是满射。此外，$\mathsf{G}^Y=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y,\mathsf{G})$ 在 $\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y)$ 上有一个左作用，定义如下

$$(\varphi.\rho)(\gamma)=\varphi(\gamma(0))\rho(\gamma)\varphi(\gamma(1))^{-1}$$

对于 $\varphi\in\mathsf{G}^Y$ 和 $\rho\in\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y)$。

引理 2.2。设 X 是一个道路连通拓扑空间，且 $Y \subset X$ 满足$\mathrm{card}(Y) = n \in \mathbb{N}^*$。设 Γ 是映射到 X 中的有根有向树，其顶点为Y，根为 $y_0 \in Y$。那么存在一个集合的同构

$$\mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,Y) \to \mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(X,\{y_0\}) \times \mathsf{G}^{\Gamma_1}$$

其中 Γ_1 是 $n-1$ 的有向边集合。

证明。图 Γ 为每一对基点 y、$y' \in Y$ 给出一条优选路径 $\gamma_{y、y'}$： $y \rightsquigarrow y'$，它由 Γ_1 的边连接而成。于是，从 y_1 到 y_2 的任意路径 $\sigma_0 \in \pi_1(X、Y)$ 都可写作 $\sigma_0 = \gamma_{y_1、y_0}(\gamma_{y_0、y_1}\sigma_0\gamma_{y_2、y_0})\gamma_{y_0、y_2}$，其中 $\gamma_{y_0、y_1}\sigma\gamma_{y_2、y_0} \in \pi_1(X、y_0)$；而 σ_0 与 σ_1 之间的任意同伦 $\{\sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ 都共轭于 $\pi_1(X、y_0)$ 中的一个关系 $\gamma_{y_0、y_1}\sigma_t\gamma_{y_2、y_0}$。□

2.2. **G-装饰配边范畴**。G-装饰曲面是一个三元组 (Σ, Y, ρ)，其中 Σ 是一个闭曲面（即无边界的光滑紧致定向曲面），Y 是 Σ的有限基点集，且 Σ的每个连通分支中至少有一个基点，并且 $\rho \in \mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(\Sigma, Y)$ 是一个 G-表示。

一个G-装饰三维流形 $\widetilde{M}$ 是一个（可能带边界的）紧致定向三维流形M，配有基点集 $Y \subset \partial M$ 以及一个表示 $\rho \in \mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(M, Y)$，且其在边界上的限制给出一个 G-装饰曲面 $(\partial M, Y, \rho|_{\partial M})$。

一个 G-装饰配边 $\widetilde{M} = (M, Y, \rho) : (\Sigma_-, Y_-, \rho_-) \to (\Sigma_+, Y_+, \rho_+)$ 是由一个 G-装饰三维流形 (M, Y, ρ)、两个 G-装饰曲面 (Σ_-, Y_-, ρ_-)、(Σ_+, Y_+, ρ_+)，以及一个保向微分同胚 $f\colon \Sigma_+ \sqcup (-\Sigma_-) \xrightarrow{\sim} \partial M$组成的数据，满足 $Y_\pm = Y \cap f(\Sigma_\pm)$，且 $\rho_\pm$ 是 $\rho \circ f$ 在 $(\Sigma_\pm, Y_\pm)$ 上的限制。G- 装饰配边之间的微分同胚 $\psi\colon (M, Y, \rho) \to (M', Y', \rho')$ 是一个保向微分同胚 $\psi\colon M \to M'$，它在边界上诱导恒等映射，且满足 $\psi^*(\rho') = \rho$。

两个 G-装饰余边的复合，是沿它们共有的 G-装饰曲面将二者粘合起来，赋予所得对象由范坎彭定理给出的唯一表示，并擦去共有曲面中的基点。

定义 2.3。 G-装饰 (2+1)-配边的范畴 $\widetilde{\boldsymbol{Cob}}$ 是一个范畴，其对象是G-装饰曲面，态射是 *G*-装饰配边的微分同胚类。它是一个对称幺半范畴，其张量积为不交并。

定义 2.4。 三维 G-*HQFT* 是一个对称幺半函子

$$\mathcal{Z} : \widetilde{\boldsymbol{Cob}} \to \mathrm{Vect} \ .$$

3. (Graded) admissible skein modules

本节回顾并改编未发表手稿[CGP23] 中的内容，该手稿讨论（分次）容许 skein 模。这些模通过施加额外的代数约束，将经典 skein 模推广而来。我们将对其定义和基本性质作一番自成体系的阐述。

3.1. **容许 skein 模的定义**。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有理想 $\mathcal{I}$的幺半范畴 $\mathbb{K}$。设 M 是一个维数为 $n = 2$ 或 3 的定向流形。本文中的所有流形均为定向流形；若考虑三维流形的 skein 模，则要求 $\mathscr{C}$ 为带状范畴。

在 M 中的 $\mathcal{I}$–容许带状图是一个 M 中的 $\mathscr{C}$–颜色带状图，其中 M 的每个连通分支都至少包含一条由 $\mathcal{I}$中的对象着色的边。

在 M 中的一个盒 是保向嵌入 $f\colon \mathbb{R}^{n-1}\times[0,1]\to M$。

定义 3.1。给定 $T_1, T_2, \dots, T_m$ 个位于 M 和 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ 中的带状 $\mathscr{C}$-图，若线性组合 $a_1T_1+a_2T_2+\cdots a_mT_m$ 是一个 $\mathcal{I}$-缠结关系 （在 M 中），则存在一个盒 $f\colon \mathbb{R}^{n-1}\times[0,1]\to M$，使得

(1) $f^{-1}(T_i)$ 对所有 $i=1,\dots,m$ 都表示 $\mathrm{Rib}^n_{\mathscr{C}}$ 中的一个态射；(2) 在盒外， T_i's 相同：

$$T_i \cap \big(M \setminus f(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,1])\big) = T_j \cap \big(M \setminus f(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,1])\big)$$

对所有 $i,j=1,\dots,m$,

(3) $T_i\cap\big(M_0\setminus f(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,1])\big)$ 有一条 $\mathcal{I}$ 着色边，其中 M_0 是包含该盒的 M 的连通分支；$(4)\sum_{i=1}^m a_i\mathsf{F}(f^{-1}(T_i)) = 0$ 位于 $\mathscr{C}$ 中。

我们称两个形式线性组合是 $\mathcal{I}$-编织等价 的，若它们的差是若干 $\mathcal{I}$-缠结关系之和。当 $\mathcal{I}=\mathscr{C}$ 我们将 $\mathscr{C}$-缠结关系称为缠结关系，并将 $\mathscr{C}$–编织等价称为编织等价。

现在给出本小节的主要定义。

定义 3.2. 将容许 skein 模 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 定义为闭$\mathcal{I}$–容许带状图在 M 中的 $\mathbb{K}$–张成，并模去 $\mathcal{I}$–缠结关系的张成。将一个skein 定义为表示容许 ***skein*** 模中某个元素的带状 $\mathscr{C}$-图。

由于 $\mathscr{C}$ 本质小，因此 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$总是一个集合；事实上，在编织等价下，我们可以用 $\mathscr{C}$中其同构类的一个固定代表元替换任意颜色。注意，由于这些 skein 没有边界顶点，它们实际上嵌入在 M的内部。注意，同痕的 skein 是 $\mathcal{I}$–编织等价的。

3.2. **容许 skein 模的一些性质**。本小节讨论的部分性质在本文其他地方并未使用，但它们本身具有独立的研究价值，并应用于相关工作。其中若干结果最初发表于未出版的手稿 [CGP23], 中；为求完整并便于日后查阅，我们在此记录这些结果。

令 Emb_n^{surj}为一个范畴，其对象是定向的 n维流形，态射是保向嵌入 $M\hookrightarrow N$ 的同痕类，且诱导映射 $\pi_0(M)\to\pi_0(N)$ 为满射。

命题 3.3。设 $n\in\{2,3\}$，并假设当 $n=3$ 时 $\mathscr{C}$ 是带状的。则

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}} : (\mathrm{Emb}_n^{surj}, \sqcup) \to (\mathrm{Vec}, \otimes)$$

是一个对称幺半函子。特别地，若 $n=2$，它们给出曲面映射类群的表示。

证明。若 $f\colon M\to N$ 是一个在连通分支上满射的嵌入，且 $T\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$，则 $f(T)\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(N)$是 $\mathcal{I}$-容许的，因为 T是 $\mathcal{I}$-容许的。此外，编织关系在 f 下的像仍是编织关系。□

命题 3.4。设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是枢纽 $\mathbb{K}$–范畴。设 $G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是一个严格枢纽函子（见 [TV17, 第 1.7 节。5]），并设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个理想。设 $\mathcal{J}$ 是

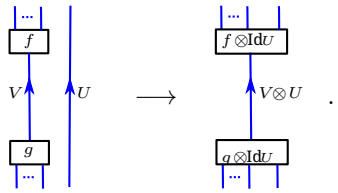
由 $G(\mathcal{I})$ 的对象生成的 $\mathscr{D}$ 的理想。函子 G 诱导出一个自然变换 $G_*\colon \mathcal{S}_{\mathcal{I}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{J}}$。

证明。 显然，一个 $\mathcal{I}$–容许的图的像是一个 $\mathcal{J}$-容许的图。此外，应用 G 会将 $\mathcal{I}$-编织关系变换为 $\mathcal{J}$-编织关系；事实上，$\mathrm{F}_{\mathscr{D}} \circ G_* = G \circ \mathrm{F}_{\mathscr{C}}\colon \mathrm{Rib}^n_{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}$，并且如果盒子的补集中包含一条颜色为 $\mathcal{I}$ 的边，那么应用 G_* 后，盒子的补集中就包含一条颜色为 $\mathcal{J}$ 的边。□

命题 3.5。 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 由带状图生成，其中每条边都由 $\mathcal{I}$ 中的一个对象着色。

证明。 通过添加恒等券，很容易看出 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 由这样的带状图生成：每条边都连接两个不同的券。接着，我们可以对颜色不属于 $\mathcal{I}$ 的边数进行归纳。

利用缠结关系，我们可以将一条颜色为 V 且靠近一条颜色为 $U \in \mathcal{I}$ 的边替换为一条颜色为 $V \otimes U \in \mathcal{I}$ 的边，并按下图所示改变券片：



注意，模去与邻近 V 着色边的券片周围的缠结关系后，我们总可以假设它相对于券片的位置如上图所示。□

命题 3.6. 设 $n = 2$ *or* 3，并假设当 $n = 3$ 时 $\mathscr{C}$ 是带状的。设 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是 $\mathscr{C}$ 的理想。若 Σ 是一个 $(n-1)$-流形，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma \times I)$ 是一个结合代数；当 $\mathcal{I} = \mathscr{C}$ 时，它是含幺的。此外，若 M 是一个 n-流形，且 $i\colon \Sigma \hookrightarrow \partial M$ 是一个反定向（分别为保定向）嵌入，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Sigma \times I)$ 上的左（分别为右）模。最后，当 $n = 3$ 时，我们有 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 同构于 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma \times I)$。

证明。 我们给出 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma \times I)$ 的代数运算。设 $T, T' \subset \Sigma \times [0,1]$ 是带状图。我们可以分别将 T 和 T' 视为 $\Sigma \times [0,1]$ 和 $\Sigma \times [1,2]$ 中的图。于是，$T \cdot T'$ 是在 $\Sigma \times [0,2] \simeq \Sigma \times [0,1]$ 中通过粘合 $\Sigma \times [0,1]$ 和 $\Sigma \times [1,2]$ 得到的带状图 $T \cup T'$。

我们断言，此运算给出了一个良定义的结合积。事实上，如果 T和 T'是 $\Sigma \times I$ 中的 $\mathcal{I}$-容许的图，那么 $T \cdot T'$也是如此。此外，如果T'和 T''在盒 B中通过 $\mathcal{I}$-编织关系相关，则 $T \cdot T'$和 $T \cdot T''$在同一个不与 T相交的盒 B 中是$\mathcal{I}$-skein 等价的。该运算显然是结合的。如果 $\mathcal{I} = \mathscr{C}$，那么 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma \times I)$具有一个单位元，该单位元由一条颜色为 1 的边和两个颜色为 $\mathrm{Id}_{\mathbb{1}}$的券组成的图给出。

设 $i\colon \Sigma \hookrightarrow \partial M$ 是一个反定向嵌入。那么 i 诱导出一个映射

$$j : \Sigma \times [0,1] \sqcup M \to \Sigma \times [0,1] \cup_{i \times \{1\}} M \simeq M$$

在纽结模层面上，它诱导出

$$\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Sigma \times [0,1]) \otimes \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M) \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M),$$

由 $[\alpha]\cdot[\beta]=[j(\alpha)\sqcup j(\beta)]$ 给出，其中 α 和 β 分别是 $[\alpha]\in\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Sigma\times[0,1])$ 和 $[\beta]\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 的代表。注意， $j(\alpha)\sqcup j(\beta)$ 是 M 中一个 $\mathcal{I}$-容许的图。如果 β 和 β' 满足一个 $\mathcal{I}$-缠结关系，那么 $j(\alpha)\sqcup j(\beta)$ 与 $j(\alpha)\sqcup j(\beta')$ 是 $\mathcal{I}$-skein 等价的。此外，如果 α 和 α' 满足由盒 $B\subset\Sigma\times[0,1]$ 给出的 $\mathcal{J}$-缠结关系，那么 $j(\alpha)\sqcup j(\beta)$ 与 $j(\alpha')\sqcup j(\beta)$ 是 $\mathcal{I}$-相关的，因为 $j(\beta)$ 在 $j(B)$ 之外有一条 $\mathcal{I}$-着色边。因此，我们得到了所声称的良定义作用。如果 M 在 $i(\Sigma)$ 上诱导的定向为正，则右作用可用 $j\colon\Sigma\times[0,1]\sqcup M\to\Sigma\times[0,1]\cup_{i\times\{0\}}M\simeq M$ 类似地证明。

对于最后的陈述，设 $n=3$，则 Σ 是一个通过映射 $p\colon\Sigma\hookrightarrow\Sigma\times\{1/2\}\subset\Sigma\times[0,1]$ 自然嵌入 3-流形 $\Sigma\times[0,1]$ 中的曲面。设 T 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 中的一个编织。赋值 $T\mapsto p(T)$ 给出 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma\times[0,1])$ 中的一个编织，以及从 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 到 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma\times[0,1])$ 的一个映射。该映射的逆映射如下给出。设 T' 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma\times I)$ 中的一个编织。存在带状图 T' 到 $\Sigma\times\{1/2\}$ 的一个正规投影，其中所有交都是横截点。可将每个交叉点替换为一个由 $\mathscr{C}$ 的编织装饰的券，从而得到 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 中的一个编织。□

接下来，我们回顾圆盘和球面的编织与 m-迹之间的一种解释，该解释见于 [CGPV23, Theorem 2.4.]。

定理 3.7. 设 $\mathscr{C}$ 为一个幺半范畴，且 $\mathcal{I}$ 为 $\mathscr{C}$的一个理想。那么

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)^*\cong\{right\ m\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\}\cong\{left\ m\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\}$$

$$and\quad\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^2)^*\cong\{m\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\}$$

其中 D^2 和 S^2 分别为 *2*-圆盘和 *2*-球面。

以下结果是上一条定理的推论；它最初见于未发表的手稿 [CGP23], ，我们在此证明它，以便其能够正式发表。

推论 3.8. 设 $\mathscr{C}$ 为一个带状范畴，且 $\mathcal{I}$ 为 $\mathscr{C}$的一个理想。那么

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(B^3)^*\cong\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^3)^*\cong\{m\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\}$$

其中 B^3 和 S^3 分别为三维球和三维球面。

证明。 我们将证明 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)$同构于 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(B^3)$，然后根据 [GPV13，备注9] ，由于在带状范畴中每个右 m-迹都是一个 m-迹，因此由定理 3.7即可推出该推论。

D^2 到 B^3 的包含映射诱导出一个态射 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)\to\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(B^3)$。其逆映射定义为：将 B^3 中的任意带状图发送到 D^2 中处于一般位置的投影，其中我们用一个由编织着色的券替换每个交叉。任意两个这样的投影都可通过 Reidemeister 型移动相互联系，而这些移动在 D^2中属于辫 skein 等价。最后， B^3 中的 skein 关系可以经过同伦变形投影为 D^2中的 skein 关系。□

3.3. **分次容许 skein 模的定义**。 如上，设 $n=2$ 或 3，G 为一个群，且 $\mathscr{C}$为一个锐 G-分次的丢番图 $\mathbb{K}$–范畴。如果 $n=3$，我们假设 $\mathscr{C}$ 是带状的，并且 G 是交换的。

将 G 的离散范畴 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$ 定义为对象是 G 的元素且唯一的态射是恒等态射的范畴。$\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$ 上的严格幺半结构由 $g\otimes h=gh$ 给出，而枢轴结构由 $g^*=g^{-1}$ 给出，且所有（余）求值态射都是 1 的恒等映射。如果 G 是阿贝尔群，我们

赋予 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$ 对称编织 $g\otimes h\to h\otimes g$，该编织由 $gh=hg$ 的恒等映射给出，从而使 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$ 成为带状范畴。

这个范畴不是 $\mathbb{K}$–加性的，但我们仍然可以如下讨论其与一个 n-流形 M 相关联的纽结模：令 $\mathcal{S}_{\mathscr{D}_{\mathsf{G}}}(M)$表示所有 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-着色图对缠结关系取商所得的集合。这里，如果两个图在一个球之外相同，并且在球内取值为相同的态射，则称它们 skein 等价。需要注意的是，将$\mathcal{S}_{\mathscr{D}_{\mathsf{G}}}(M)$称为模是术语上的滥用，因为它实际上只是一个集合。

引理3.9。 如果G 是阿贝尔的，那么将一个 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-着色编织映射到相应的、系数取自G 的 1-循环的同调类，会诱导出一个双射

$$\mathcal{S}_{\mathscr{D}_{\mathsf{G}}}(M)\simeq H_1(M;\mathsf{G})\ .$$

当 G 不是阿贝尔群时，上述引理促使我们将纽结模$\mathcal{S}_{\mathscr{D}_{\mathsf{G}}}(M)$称为带有 G 系数的 M 的“非交换 H_1”。请注意，与交换情形不同，这个带有非交换系数的 H_1 不是一个群。

定义3.10. 我们记 $H_1(M;\ \mathsf{G}):=\mathcal{S}_{\mathscr{D}_{\mathsf{G}}}(M)$。

定义3.11. $\mathscr{C}$-着色图 T 若存在一个具有相同底层带状图的 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-着色图 $h_T\in H_1($ $M;\ \mathsf{G})$，使得 T 的每条边 e都赋有一个齐次对象 $\mathscr{C}$，且其 $g\in$次 *G*-分次由 h_T 中 e 的颜色给出，则称其为齐次的 。图 h_T称为 T的次数 。

命题 3.12. 设 M 为一个 n-流形。我们有 $\mathbb{K}$-向量空间的如下分解：

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)=\bigoplus_{h\in H_1(M;\mathsf{G})}\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M)$$

其中， $\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M)$ 是由次数为 h的齐次 $\mathcal{I}$–容许图 M 张成的 $\mathbb{K}$-空间。

证明。 我们先证明映射 $\omega:\bigoplus_{h\in H_1(M;\mathsf{G})}\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M)\ \to\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$的满射性，即每个 $\mathcal{I}$–容许图都与齐次 $\mathcal{I}$–容许图的线性组合 skein 等价。若 $V\in\mathscr{C}$，则 G-分次的定义意味着存在有限多个齐次对象 V_i 使得 $V=\oplus V_i$。此外，若 $V\in\mathcal{I}$，则每个 V_i 都属于 $\mathcal{I}$，因为 V_i 是 V的直缩。设 $p_i:\ V\to V_i$和 $j_i:\ V_i\to V$为投影和包含映射，使得 $\mathrm{Id}_V=\sum_i j_i\circ p_i$。

如果一个编织包含一条由 $V\in\mathcal{I}$ 着色的边，那么通过应用 $\mathcal{I}$-编织关系，我们可以将该边的一小段子弧替换为弧的形式和，其中每条弧都包含两个分别标记为 j_i 和 p_i 的券片，因为 $\mathrm{Id}_V=\sum_i j_i\circ p_i.$。然后，对由 j_i 和 p_i 标记的券片分别进行同痕变形，我们可以通过 $\mathcal{I}$-编织关系将它们“吸收”到边端点处的券片中。对所有非齐次边重复这一论证，我们得出：任意编织都与由齐次对象着色的图的线性组合 $\mathcal{I}$-编织等价。对于这样一个由齐次对象着色的图 T，如果某个券片由一个非零态射着色，这意味着其源对象和目标对象 $\mathscr{C}$ 是次数相同的齐次对象。因此，如果 T 在容许 skein 模中不为 0，将每个对象替换为其在 G 中的次数，并将每个态射替换为恒等映射，就得到一个 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-着色，这意味着 T 是齐次的。

现在来讨论 ω 的单射性，也就是说，我们将证明， $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 中的任意 skein 关系，都是若干 skein 关系之和，且每个 skein 关系所涉及的图都具有相同的

齐次次数。设 $\sum_{i=1}^{k} c_i T_i = 0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 是与盒 B 相关的一个 skein 关系。与上文一样，我们可以将 T_i 拆分为图的线性组合，使这些图在 B 之外是齐次的。通过这一过程，在某个同空间 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V_-, V_+)$ 中成立的恒等式 $\sum_i c_i \mathsf{F}(T_i \cap B) = 0$，会拆分为许多与直和项 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V_-, V_+)$ 对应的恒等式。因此，skein 关系 $\sum_{i=1}^{k} c_i T_i = 0$ 是若干 skein 关系之和，其中涉及的所有图在 B 之外都是齐次的。于是问题归结为所有 T_i 在 B 之外都是齐次的 skein 关系情形。现在，若 T 和 T' 是任意两个在盒 B 之外相同的齐次图，则有 $h_T = h_{T'}$，因为它们都等价于这样的 $\mathscr{D}_G$-图：其中的盒 B 被替换为一个以恒等态射着色的券。因此，在盒内应用上文的满射性论证，即可得到一个齐次图的线性组合，且这些图的次数都相同。□

3.4. G-表示作为一个 skein 模。 现在我们想要将 G-表示与上文用于定义齐次图的 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-着色图进行比较。我们将看到，曲面的容许 skein 模实际上由基本群到 G 的表示集合分级。

定义 3.13。 设 Σ 是一个定向连通曲面，$Y \subset \Sigma$ 是一个有限的基点集；设 γ 是一条浸入 Σ 的路径，其端点位于 Y 中；再设 T 是 Σ 中一个不与 Y 相交的 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-着色图。假设 γ 与 T 横截，具体来说，γ 仅沿边与 T 横截相交。γ 与 T 的交是以下有序乘积

$$[\gamma \cap T]_{\mathsf{G}} := \prod_{i=1}^{n} [\gamma \cap e_i]_{\mathsf{G}} \in \mathsf{G}$$

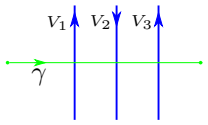
其中 $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ 是 γ 与 T 的有序交点集（按路径 γ 排序，见图 *2*），e_i 是 T 的边在 x_i 邻域内的一段，使得在每个交点 x_i 处，我们设定 $[\gamma \cap e_i]_{\mathsf{G}} = g^{\varepsilon}$，其中 $g \in \mathsf{G}$ 是 T 的边在交点处的颜色，而 ε 是交点的符号。

此交仅取决于 γ 在 $\pi_1(\Sigma, Y)$ 中的同伦类，因为 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$ 中的券片均为恒等态射。它仅取决于 $T \in H_1(\Sigma \smallsetminus Y; \mathsf{G})$ 的类，因为 skein关系发生在球内，而通过对 γ 施加同痕即可避开该球。

命题 3.14。 设 Σ 是闭的，且 $Y \subset \Sigma$ 是有限个基点的集合，每个连通分支至少包含一个基点。交配对诱导出一个双射

$$\begin{array}{ccc} [-\cap -]_{\mathsf{G}} : H_1(\Sigma \smallsetminus Y; \mathsf{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Rep}_{\mathsf{G}}(\Sigma, Y) \\ T & \mapsto & [-\cap T]_{\mathsf{G}} \end{array} .$$

证明。 可以按如下方式构造其逆映射。设 $\rho \in \pi_1(\Sigma, Y)$ 是一个 G-表示。选取 Σ 的一个理想三角剖分，其 0-胞腔为 Y，任意定向其边，并令 T 为该三角剖分的对偶 1-骨架；定向 T 的边，使三角剖分的边相对于 Σ 的定向与 T 正向相交。除至多有两个基点的 $\Sigma = S^2$ 外，理想三角剖分均存在；后者可单独处理。T 的一条边与理想三角剖分的一条边 γ 相交，我们将其视为 $\pi_1(\Sigma, Y)$ 的一个元素。我们用 $\rho(\gamma) \in \mathsf{G}$ 为这条边着色。我们将图 T 的顶点加厚为券，并以一个



$V_1 \in \mathscr{C}_{g_1}, V_2 \in \mathscr{C}_{g_2}, V_3 \in \mathscr{C}_{g_3},$
$[\gamma \cap T]_{\mathscr{C}} = V_1 \otimes V_2^* \otimes V_3,$
$[\gamma \cap T]_{\mathsf{G}} = g_1 g_2^{-1} g_3.$

FIGURE 2. 路径 γ 与编织 T相交的示例。

恒等态射着色（所有可能的做法都编织等价）。我们将由此得到的编织记为 $T_\rho \in H_1(\Sigma \setminus Y; \mathsf{G})$。

显然，对于理想三角剖分的每条边 γ，我们有 $[\gamma \cap T_\rho]_{\mathsf{G}} = \rho(\gamma)$，因为按构造只有一个交点。这些边生成 $\pi_1(\Sigma, Y)$，因此 $[- \cap T_\rho]_{\mathsf{G}} = \rho$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathsf{G}}(\Sigma, Y)$ 的元素。反过来，$\Sigma \setminus Y$直缩到 T，因此 $H_1(\Sigma \setminus Y; \mathsf{G})$ 的每个元素 T' 都 skein 等价于一个底层图为 T 的元素。对于 T 的每条边，都存在理想三角剖分的一条边 γ 与之相交（且仅与之相交）一次。因此，$T_{[-\cap T']_{\mathsf{G}}}$与 T'具有相同的颜色。□

注 3.15. 还可以证明存在一个双射 $H_1(\Sigma;\mathsf{G}) \simeq \mathrm{Rep}_{\mathsf{G}}(\Sigma, \emptyset)$，不过本文不会用到这一事实。

将上述定义的交配对推广到 $\mathscr{C}$-图会很有用。

定义 3.16. 设 γ 是一条浸入路径，其端点位于 Y 中，并与齐次的 $\mathscr{C}$-图 T 横截相交，且不与 Y 相交，其中 Σ 是一个定向曲面。我们将 $\mathscr{C}$-交定义为 γ与 T的有序（张量）乘积

$$[\gamma \cap T]_{\mathscr{C}} = \bigotimes_{i=1}^{n} [\gamma \cap e_i]_{\mathscr{C}} \tag{2}$$

其中 γ 仅在边 e_1、$\ldots e_n$ 处相交，依此顺序；当 γ 与 T 的一条定向边 e 的一段相交，且该边段被 $\mathscr{C}$ 中次数为 g 的对象 V 着色时，我们定义 $[\gamma \cap e]_{\mathscr{C}} = V^{\varepsilon}$，其中 ε 是交点符号 $\gamma \cap e$，并约定 $V^{+1} = V$ 和 $V^{-1} = V^*$。见图 2。

显然，$[\gamma \cap T]_{\mathscr{C}}$是 $\mathscr{C}_{[\gamma \cap T]_{\mathsf{G}}}$和 $[\gamma \cap T]_{\mathsf{G}} = [\gamma \cap h_T]_{\mathsf{G}}$的一个对象，其中 h_T是 T的次数。

3.5. **有限维性**。 在本小节中，$\mathscr{C}$是一个锐的枢轴 G-分次 $\mathbb{K}$–范畴（令 G 为平凡群即可涵盖非分次范畴的情形）。设 Σ 为一个曲面。

定义 3.17。 若 $\mathscr{C}$ 的理想 $\mathcal{I}$ 对每个 $g \in \mathsf{G}$，其子范畴 $\mathcal{I} \cap \mathscr{C}_g$ 都有一个生成元 V_g，则称该理想为分次有限。

回忆一下，根据命题 3.12，我们有 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma) = \bigoplus_{h \in H_1(\Sigma;\, \mathsf{G})} \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma)$。

命题 3.18。 设 Σ为一个边界非空的紧致连通曲面，则对于每个分次有限理想 $\mathcal{I} \subset \mathscr{C}$ 和每个 $h \in H_1(\Sigma;\, \mathsf{G})$，都有维数$_{\mathbb{K}}\, \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma) < \infty$。

证明。 设 Y 是一组位于 Σ 边界上的基点。注意，$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma \setminus Y) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 且 $H_1(\Sigma \setminus Y; \mathsf{G}) = H_1(\Sigma; \mathsf{G})$。存在一组互不相交的简单弧 c_1，$\ldots c_k$，它们适当地嵌入在 Σ 中，端点位于 Y，并且使得 $\Sigma \setminus (c_1 \sqcup \ldots \sqcup c_k)$ 是一个圆盘。若 $T \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 是次数为 $h \in H_1(\Sigma, \mathsf{G})$ 的齐次元素，则经同痕后，我们可以假设它与每个 c_i 横截相交，并且通过

命题 3.5，所有边的颜色均为 $\mathcal{I}$。于是，将与每个 c_i 相交的所有边融合后， T 与一个每个 c_i 至多相交一次的图 skein 等价；设 $h_i = [c_i \cap T]_{\mathsf{G}} = [c_i \cap h]_{\mathsf{G}}$ 为这种交的次数， V_{h_i} 为 $\mathcal{I} \cap \mathscr{C}_{h_i}$ 的一个生成元。于是，对每个 c_i 应用一次缠结关系后，我们可以将 T 替换为若干图的线性组合，其中每个图都通过一条颜色为 V_{h_i} 的单边与 c_i 相交。我们可以将这些图分别表示为图的线性组合，其中每个图都包含一个由圆盘 $\Sigma \setminus (c_1 \sqcup \cdots \sqcup c_k)$ 中 $\mathrm{Hom}(1, V_{h_1} \otimes \cdots \otimes V_{h_k})$ 的态射装饰的券。因此，我们刚刚证明了 $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}(1, V_{h_1} \otimes \cdots \otimes V_{h_k}) < \infty$. □

命题 3.19. 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个理想，则集合 $\mathsf{G}_{\mathcal{I}} = \{g \in \mathsf{G} : \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathscr{C}_g}\}$ 是 G 的一个子群，其中 $\mathcal{I}_{\mathscr{C}_g}$ 是由 $\mathscr{C}_g$ 的所有对象生成的理想。

证明。首先，由于由 $\mathbb{1} \in \mathscr{C}_1$ 生成的理想是 $\mathscr{C}$，故 $1 \in \mathsf{G}_{\mathcal{I}}$。设 $g, g' \in \mathsf{G}_{\mathcal{I}}$ 且 $V \in \mathcal{I}$，则 $V \in \mathcal{I}_{\mathscr{C}_{g'}}$ 是某个 $U \in \mathscr{C}$ 的直缩，其中 $U \otimes W'$，而 $W' \in \mathscr{C}_{g'}$ 意味着 V 也是 $(V \otimes V^* \otimes U) \otimes W'$ 的直缩（使用 $\overleftarrow{\mathrm{coev}}_V$ 和 $\overleftarrow{\mathrm{ev}}_V$）。因此，我们可以假设 $U \in \mathcal{I}$；但此时，对某个 $U' \in \mathscr{C}$， $U \in \mathcal{I}_{\mathscr{C}_g}$ 是 $U' \otimes W$ 的直缩，而 $W \in \mathscr{C}_g$ 意味着 V 是 $U' \otimes (W \otimes W') \in \mathcal{I}_{\mathscr{C}_{gg'}}$ 的直缩。因此， $gg' \in \mathsf{G}_{\mathcal{I}}$。对左张量积作类似论证可得 $g'g \in \mathsf{G}_{\mathcal{I}}$。最后，利用由对偶给出的范畴等价，若 $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathscr{C}_g}$，则 $\mathcal{I} = \mathcal{I}^* \subset (\mathcal{I}_{\mathscr{C}_g})^* = \mathcal{I}_{\mathscr{C}_{g^{-1}}}$，因此 $(\mathsf{G}_{\mathcal{I}})^{-1} = \mathsf{G}_{\mathcal{I}}$。□

定理 3.20。设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个分次有限理想。假设 G 是阿贝尔群，或者 $\mathsf{G} = \mathsf{G}_{\mathcal{I}}$。设 Σ 是一个无边界的紧致定向曲面，那么对每个 $h \in H_1(\Sigma; \mathsf{G})$，都有 维数$_{\mathbb{K}} \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma) < \infty$。

证明。选取基点 $Y \subset \Sigma$，每个连通分支各取一个。 Σ 中的任意图都可以同伦变形为与 Y 不相交，因此我们有满射

$$\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma \smallsetminus Y) \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma) \quad \text{and} \quad \pi_{\mathsf{G}} : H_1(\Sigma \smallsetminus Y; \mathsf{G}) \to H_1(\Sigma; \mathsf{G}).$$

˜映射 $\pi_{\mathcal{I}}$ 将次数为 h 的齐次编织映到次数为˜$\pi_{\mathsf{G}}(h)$的齐次编织。因此我们有一个满射

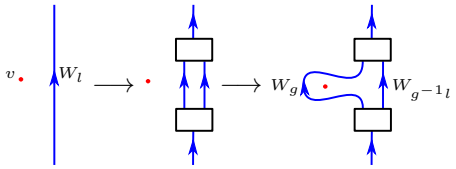
$$\bigoplus_{\tilde{h} \in \pi_{\mathsf{G}}^{-1}(h)} \mathcal{S}^{\tilde{h}}_{\mathcal{I}}(\Sigma \smallsetminus Y) \twoheadrightarrow \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma).$$

根据命题 3.18，这个和式中的每个直和项都是有限维的，但直和项可能有无穷多个。如果 G 是阿贝尔群，映射 π_{G} 是同构，因此只有一个直和项；结论得证。否则，任取一个优选提升 $\tilde{h} \in \pi^{-1}{}_{\mathsf{G}}(h)$，也就是说，以某种方式将 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-图 h 同伦变形为与 Y˜不相交。我们将证明，从单个直和项 $\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma \smallsetminus Y)$ 到 $\to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 的映射是满射，从而证明该结论。

考虑任意其他的 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$，$\tilde{h}' \in \tilde{\pi}^{-1}{}_{\mathsf{G}}(h)$，并令 T' 属于 $\mathcal{S}$ 的形式，h' 是一个与 h 相关的 $\mathscr{D}_{\mathsf{G}}$-图，其方式是将 h的有限条边滑动穿过 Y上的一个点。如果一条由 $g \in \mathsf{G}$着色的边穿过点 $v \in Y$，那么，假设 T' 中 v附近存在一条 $W_l \in \mathcal{I} \cap \mathscr{C}_l$ 着色的边，我们对 T' 应用下图所示的编织等价，其中图中的券片表示 W_l 作为.....的直缩

$W_g \otimes W_{g^{-1}l}$ 这些之所以存在，是因为根据我们的假设， $l \in \mathsf{G}_{\mathcal{I}} = \mathsf{G}$:

(3)



˜新编织与 Y不相交，且在 $\Sigma \smallsetminus Y$中的次数为 h，这表明 T' 属于 $\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma \smallsetminus Y)\tilde{}$ 的像 $\to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$。证明至此完成。□

定理 3.21。 设G 为阿贝尔群，且 $\mathcal{I}$ 是锐带状G-分次范畴 $\mathscr{C}$的分次有限理想。设 M 为一个无边界的紧致定向三维流形。那么对于每个 $h \in H_1(M;\mathsf{G})$，都有维数$_{\mathbb{K}}\, \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M) < \infty$。

证明。设 S 是3-流形 M的一个特殊脊，也就是说， S 是一个二维多面体，满足：1） $M \setminus S \simeq B^3$；2）其1-骨架 sing(S)不含圆形分支（同构于 S^1）；3） S\sing(S)是不交并的圆盘 B^2，称为脊的区域。于是，任何不与 sing(S)相交的1-循环 $z \in Z_1(M,$ G), 都是唯一二维上余圈 $z^* \in Z^2(S,$ G)的庞加莱˙对偶。我们在 S 的每个区域中固定一个带框点，并固定一个由以下部分构成的图 T：盒 B 中一个与 S不相交的券、 $M \setminus (S \cup B) \simeq S^2 \times]0$中的一条辫子、 $1[$ 以及区域上的点。固定一个表示 h 的1-循环，并将 S 上的对偶二维上余圈称为 h^*。我们用 $\mathcal{I}_g$ 的一个生成元 V_g 为 T 的每条边着色，其中 g 由 h^* 在该边所交区域上的取值给出。用态射 f填充 T的券，我们得到一个编织 $T_f \in \mathcal{S}^h(M)$。我们断言映射$f \mapsto T_f$ 是满射，这将证明 $\mathcal{S}^h(M)$的有限维性。事实上，给定 $\mathcal{S}^h(M)$中的一个编织，我们可以先假设每个区域都与T' 的一条边相交，且该边的颜色属于 $\mathcal{I}$。接着，若 S 的一个二维上余圈 z^* 是 T'的次数的庞加莱˙对偶，则 $z^* - h^*$ 是由 sing(S)的边支撑的上余边界的G-线性组合。利用类似于(3)的关系（此时 v 表示 sing(S)的一条边），我们可以修改 z^*，使得 $z^* = h^*$。最后，将与同一区域相交的边融合起来，可以看出 T' 等价于一个与 S 相交的编织：交叠方式如 T，并且颜色相同，为 V_g （因为 V_g 是 $\mathscr{C}_g \cap \mathcal{I}$的一个生成元）。通过 $M \setminus S$中的同痕，我们现在可以变形 T'，使其在盒 B外与 T 成为相同的辫子。最后， B中的一个缠结关系将 T'化为某个 T_f。□

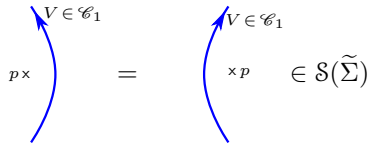
˜4. Representation of the groupoid $\mathbf{Cob}_e$

4.1. G-装饰曲面的容许 skein 模。 现在我们转而定义与 G-装饰曲面相关联的向量空间。这些向量空间可以视为将 [DST24] 的构造推广到非半单且非有限的情形。它们将是第6节的 G-HQFT 分配给 G-装饰曲面的向量空间。

定义 4.1. 设 $\mathscr{C}$ 为一个锐 G-分次 *pivotal* $\mathbb{K}$–范畴，Proj为其投射对象理想。设 $\Sigma = (\Sigma, Y, \rho)$ 为一个 G-装饰曲面。由命题 *3.14*，存在唯一的 $h \in H_1(\Sigma \smallsetminus Y)$ 满足 $[h \cap -]_{\mathsf{G}} = \rho(-)$。回忆一下，带 *puncture* 曲面 $\mathcal{S}_{\mathsf{Proj}}(\Sigma \smallsetminus Y)$ 的容许 *skein* 模按 $H_1(\Sigma \smallsetminus Y)$分次。我们将G-装饰曲面的容许 skein 模

$$\mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}) = \mathcal{S}^h_{\mathsf{Proj}}(\Sigma \setminus Y)/\{transparency\ relations\}$$

定义为带 *puncture* 曲面的容许 *skein* 模对透明关系 取商所得，其中颜色为平凡度的边可以穿过任意基点：



这里，基点记作 p，并以叉号表示。

本节旨在证明定理 4.12，该定理特别指出， $\mathcal{S}(\Sigma)$ 的同构类只取决于 ρ 在 $\mathrm{Rep}_G(\Sigma,\emptyset)$ 中的像。粗略地说，该定理是构造拓扑量子场论的准备步骤，因为它允许我们详细处理配边范畴的一个子群胚，其中包括自由改变基点并对态射作共轭。

4.2. **群胚 $\mathbf{Cob}_e$**。以下是 G-装饰配边的例子：
(1) 平凡圆柱 $C_{\Sigma,Y,\rho}\colon(\Sigma,Y,\rho)\to(\Sigma,Y,\rho)$ 是配备表示 $\rho\circ\pi$ 的圆柱 $\Sigma\times[0,1]$，其中 $\pi\colon\Sigma\times[0,1]\to\Sigma$ 是投影。(2) 对于 G-装饰曲面 (Σ,Y,ρ) 和 $\varphi\in G^Y$，规范圆柱是 G-装饰配边 $C^{\varphi}_{\Sigma,Y,\rho}\colon(\Sigma,Y,\rho)\to(\Sigma,Y,\varphi.\rho)$；对于 $*\in Y$，路径 $*\times[0,1]$ 从 $*\times0$ 到 $*\times1$ 在表示$\pi_1(\Sigma\times[0,1],Y\times\{0,1\})$ 下的像是 $\varphi(*)^{-1}\in G$。如果 $\varphi_1,\varphi_2\in G^Y$，则有$C^{\varphi_2}_{\Sigma,Y,\rho}\circ C^{\varphi_1}_{\Sigma,Y,\rho}\simeq C^{\varphi_2\varphi_1}_{\Sigma,Y,\rho}$。$C^{\varphi}_{\Sigma,Y,\rho}$ 的支撑是 φ 的支撑，即集合 $\{y\in Y\colon\varphi(y)\neq1\}$。(3) 限制圆柱由平凡圆柱通过忘记源曲面或目标曲面中的某些基点得到：若 Y_1,Y_2 是 Σ 的有限子集，且它们可以有交，并且 $\rho\in\mathrm{Rep}_G(\Sigma,Y_1\cup Y_2)$，则 $R_{\Sigma,Y_1,Y_2,\rho}\colon(\Sigma,Y_1,\rho_{|(\Sigma,Y_1)})\to(\Sigma,Y_2,\rho_{|(\Sigma,Y_2)})$ 是配备表示 $\rho\circ\pi$ 的圆柱 $\Sigma\times[0,1]$，其中 $\pi\colon\Sigma\times[0,1]\to\Sigma$ 是投影。

定义4.2。若一个G-装饰协边 $M:\Sigma\to\Sigma'$ 连接两个具有相同底层曲面的G-装饰曲面 $\Sigma=(\Sigma,Y,\rho)$ 和 $\Sigma'=(\Sigma,Y',\rho')$，且其底层协边经一个在边界上为恒等映射的微分同胚映至平凡配边 $\Sigma\times[0,1]$，则称其为G-装饰曲面的G等价 。此时，G-装饰曲面 Σ 和 Σ' 称为等价。

等价可以视为从$\mathbf{Cob}$到通常的配边范畴$\mathbf{Cob}$ 的遗忘函子的“核”。显然，规范圆柱和限制柱是G-装饰曲面的等价。

注4.3. 需要特别强调的是，映射柱并非G装饰曲面之间的等价：若 $f\colon(\Sigma,Y,\rho)\to(\Sigma,Y,\rho)$ 是一个不同于恒等映射的微分同胚，那么，根据上述定义，边界参数化由 $\mathrm{Id}\sqcup f$ 给出的平凡圆柱并非等价。

定义4.4. 令$\mathcal{C}ob_e$ 为$\mathcal{C}ob$ 的子范畴，它具有相同的对象，且其映射均为G装饰曲面之间的等价。

下面的命题表明，$\mathbf{Cob}_e$ 是由规范变换圆柱和限制圆柱生成的群胚。

命题 4.5. </style}两个G-装饰曲面 $\Sigma = (\Sigma, Y, \rho)$ 和 $\Sigma' = (\Sigma, Y', \rho')$ 等价，当且仅当 ρ 和 ρ' 在 $\mathrm{Rep}_G(\Sigma, \emptyset)$ 中的限制相等。此外，G-装饰曲面之间的等价由规范变换圆柱和限制圆柱生成。

证明。G-装饰曲面的等价显然是一种等价关系，并且与不交并相容。因此，只需考虑连通曲面的情形。

令 $y_0 \in \Sigma \setminus (Y \cup Y')$, $Y_0 = Y \sqcup \{y_0\}$, $Y_0' = Y' \sqcup \{y_0\}$, $\sigma = \{y_0\} \times [0,1] : (y_0, 0) \rightsquigarrow (y_0, 1)$, 并分别选取 ρ, ρ' 到 (Σ, Y_0) 和 (Σ, Y_0') 的延拓 ρ_0, ρ_0'。

若存在一个等价 $(\Sigma \times [0,1], Y \times \{0\} \sqcup Y' \times \{1\}, \rho'')$，那么通过与限制柱 $R_{\Sigma, Y_0, Y, \rho_0}$ 及 $R_{\Sigma, Y', Y_0', \rho_0'}$ 前后复合，也存在一个等价 $(\Sigma \times [0,1], Y_0 \times \{0\} \sqcup Y_0' \times \{1\}, \rho'')$。于是，对任意环路 $\gamma \in \pi_1(\Sigma, y_0)$，有 $\rho_0(\gamma) = \rho''(\gamma \times \{0\}) = \rho''(\sigma(\gamma \times \{1\})\sigma^{-1}) = \rho''(\sigma)\rho_0'(\gamma)\rho''(\sigma)^{-1}$。因此，$\rho_0$ 和 ρ_0' 在 $\mathrm{Rep}_G(\Sigma, \emptyset)$ 中的限制相同，故 ρ 和 ρ' 的限制也相同。

反之，假设存在 $g \in G$，使得 $\rho_0'(\gamma) = g\rho_0(\gamma)g^{-1}$, $\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma, y_0)$。则 (Σ, Y_0, ρ_0) 与 (Σ, Y_0', ρ_0') 之间的一个等价为 $R_{\Sigma, \{y_0\}, Y_0', \rho'} \circ C^{\varphi}_{\Sigma, \{y_0\}, \rho} \circ R_{\Sigma, Y_0, \{y_0\}, \rho_0}$ 其中 $\varphi(y_0) = g$。□

4.3. Cob 的表示。 若 $\varphi : Y \to G$, $Y \subset Y' \subset \Sigma$ 我们仍将 φ 称为 φ 到 Y' 的延拓，其在 $y \in Y' \setminus Y$ 上由 $\varphi(y) = 1_G$ 定义。我们使用简化记法 $J_\varphi = C^{\varphi}_{\Sigma, Y', \rho_0}$。

命题 4.6。 任意一个 $\widetilde{e} = (\Sigma \times [0,1], Y, \rho_0)$，介于两个由 G 装饰的曲面 $\Sigma_1 = (\Sigma, Y_1, \rho_1)$ 和 $\Sigma_2 = (\Sigma, Y_2, \rho_2)$ 之间的等价，都可以唯一地写成

$$\widetilde{e} = J_\varphi \circ R(Y_1, Y_2, \rho)$$

作为一个支撑在 $Y_1 \cap Y_2$ 上的规范圆柱 J_φ 与限制圆柱 $R(Y_1, Y_2, \rho)$ 的复合。

证明。只需考虑连通曲面的情形。我们如下定义 $\rho \in \mathrm{Rep}_G(\Sigma, Y_1 \cup Y_2)$:

对任意 $\gamma : y \rightsquigarrow y' \in \pi_1(\Sigma, Y_1 \cup Y_2)$,

(1) 若 $y, y' \in Y_1$，则 $\rho(\gamma) = \rho_0(\gamma_{11}) = \rho_1(\gamma)$，其中 $\gamma_{11}(t) = (\gamma(t), 0)$; (2) 若 $y \in Y_1$, $y' \in Y_2 \setminus Y_1$，则 $\rho(\gamma) = \rho_0(\gamma_{12})$，其中 $\gamma_{12}(t) = (\gamma(t)\ t)$; (3) 若 $y \in Y_2 \setminus Y_1$, $y' \in Y_1$，则 $\rho(\gamma) = \rho_0(\gamma_{21})$，其中 $\gamma_{21}(t) = (\gamma(t)\ 1-t)$; (4) 若 $y, y' \in Y_2 \setminus Y_1$，则 $\rho(\gamma) = \rho_0(\gamma_{22}) = \rho_2(\gamma)$，其中 $\gamma_{22}(t) = (\gamma(t), 1)$。

接下来我们声称，ρ 是 $\mathrm{Rep}_G(\Sigma, Y_1 \cup Y_2)$ 中定义良好的表示。事实上，注意到如果 $\gamma'' = \gamma \circ \gamma' \in \pi_1(\Sigma, Y_1 \cup Y_2)$，那么存在 $i, j, k \in \{1, 2\}$，使得 $\rho(\gamma) = \rho_0(\gamma_{ij})$，$\rho(\gamma') = \rho_0(\gamma'_{jk})$，且 $\rho(\gamma'') = \rho_0(\gamma''_{ik})$，其中 $\gamma''_{ik} \simeq \gamma_{ij} \circ \gamma'_{jk}$。（换言之：$\Sigma$ 中每条端点位于 Y_i 和 Y_j 中的有向路径 γ，都可以规范地映射到 $\Sigma \times [0,1]$ 中一条形如 γ_{ij} 的路径。于是 ρ 是 ρ_0 沿此映射的拉回。）因此，$\rho(\gamma'') = \rho(\gamma)\rho(\gamma')$，且 ρ 是一个表示。

现在，对于 $y \in Y_1 \cap Y_2$，令 $\gamma_y : (y,\ 0) \rightsquigarrow (y,\ 1)$ 为由 $\gamma_y(t) = (y,\ t)$ 定义的路径，并令 $\varphi : Y_1 \cap Y_2 \to G$ 由 $\varphi(y) = \rho_0(\gamma_y)^{-1}$ 给出。回想一下，我们仍将 $\varphi : Y_2 \to G$ 称为 $\varphi : Y_1 \cap Y_2 \to G$ 经 1_G 的延拓。现在我们证明

$$\widetilde{e} \simeq J_\varphi \circ R(Y_1, Y_2, \rho).$$

若 $y,\ y'\in Y_2$ 且 $\gamma\colon y\rightsquigarrow y'$ 是 Σ 中的一条路径，则 $\rho(\gamma)=\rho_0(\gamma_{ij})$，其中 $(i,\ j)$ 取决于 $y,\ y'$ 是否属于 Y_1。特别地，$\gamma_{11}=\gamma_y\circ(\gamma\times\{1\})\circ\gamma_{y'}^{-1}$, $\gamma_{12}=\gamma_y\circ(\gamma\times\{1\})$, $\gamma_{21}=(\gamma\times\{1\})\circ\gamma_{y'}^{-1}$ 和 $\gamma_{22}=\gamma\times\{1\}$。无论如何，$\rho(\gamma)=\varphi(y)^{-1}\rho_2(\gamma)\varphi(y')=(\varphi^{-1}.\rho_2)(\gamma)$，并且

$$R(Y_1,Y_2,\rho):(\Sigma,Y_1,\rho_1)\to(\Sigma,Y_2,\varphi^{-1}.\rho_2).$$

最后，令 $y_0\in Y_1\times\{0\}$。G-装饰余边 $\widetilde{e}$ 和 $J_\varphi\circ R(Y_1,\ Y_2,\ \rho)$具有相同的源和目标；它们在 $\pi_1(\Sigma\times[0,1],\ y_0)\simeq\pi_1(\Sigma,\ y_0)$ 上与 ρ_1 重合，并且在一棵由从 y_0 到 Y 中任意其他点的路径构成的树上重合。因此，根据引理 2.2，它们是同一个表示。

这也证明了唯一性，因为对于 $y\in Y_1\cap Y_2,\ \varphi(y)$ 必须是表示 ρ_0 对 γ_y^{-1} 的像，而 $R(Y_1,\ Y_2,\ \rho)=J_{\varphi^{-1}}\circ\widetilde{e}$。□

引理 *4.7.* 对于固定的 *G*-装饰曲面 $\Sigma=(\Sigma,Y_0,\rho_0)$、$\Sigma_1=(\Sigma',Y_1,\rho_1)$、$\Sigma_2=(\Sigma',Y_2,\rho_2)$，设 $C_1=(M,Y_1,\rho_1)\colon\Sigma\to\Sigma_1$ 和 $C_2=(M,Y_2,\rho_2)\colon\Sigma\to\Sigma_2$ 是两个 *G*-装饰配边，其中 ρ_1、ρ_2 在 $\rho_0\in\mathrm{Rep}_G(M,Y_0)$ 上有相同的限制。则存在唯一的曲面等价 $\widetilde{e}\colon\Sigma_1\to\Sigma_2$，使得 $C_2=\widetilde{e}\circ C_1$。

证明。一般情形可由 M 连通的情形轻易推出，本证明中我们假设属于这种情形。接着，若 $\Sigma=\emptyset$，我们固定通过从 M 的内部移去一个小三维球而得到的 $\dot{M}=M\setminus B^3$，在$\dot{M}$的 2-球面上取一个基点 y_0，并选择 ρ_1,ρ_2 的延拓 $\dot{\rho}_1,\dot{\rho}_2$，使得 $(\dot{\rho}_1)_{|(\dot{M},\{y_0\})}=(\dot{\rho}_2)_{|(\dot{M},\{y_0\})}$。这表明只需考虑 $Y_0\neq\emptyset$ 的情形。然后我们固定一个基点 $y_0\in Y_0$。

令 $Y_3\subset\Sigma'$ 为一个集合，使其在每个连通分支中恰有一个点，并任取将 $(\rho_0)_{|\pi_1(\Sigma',\emptyset)\to G}$ 限制后的延拓 $\rho_3\in\mathrm{Rep}_G(\Sigma',Y_3)$。根据命题 4.5，G-装饰曲面 Σ_1 和 Σ_2 等价于 $\Sigma_3=(\Sigma',Y_3,\rho_3)$，且存在等价 $\widetilde{e}_i\colon\Sigma_i\to\Sigma_3$，其中 $i=1,2$。因此，只需证明存在唯一的等价 $\widetilde{e}'\colon\Sigma_3\to\Sigma_3$，使得 $\widetilde{e}_2\circ C_2=\widetilde{e}'\circ\widetilde{e}_1\circ C_1$；于是所需的等价为 $\widetilde{e}=(\widetilde{e}_2)^{-1}\circ\widetilde{e}'\circ\widetilde{e}_1$。故只需考虑 $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3$ 的情形，以下我们假设此条件成立。

对于任意 $y\in Y_3$，令 $\gamma_y\colon y_0\rightsquigarrow y$ 为 M 中的一条路径，并定义 $\varphi\colon Y_3\to G$，使得$\varphi(y)=\rho_2(\gamma_y)^{-1}\rho_1(\gamma_y)$。根据命题 4.6，若等价 $\widetilde{e}\colon\widetilde{\Sigma}_3\to\widetilde{\Sigma}_3$ 存在，则它是一个规范圆柱，$\widetilde{e}=\widetilde{C}^{\psi}_{\Sigma',Y_3}$。于是，$\gamma_y$ 中的路径在$\widetilde{e}$下对应于复合 $\widetilde{e}\circ C_1$（即它与该复合同伦），也就是 C_1 中的 γ_y 与 $\widetilde{e}$中的 $y\times[0,1]$ 的复合。这就迫使 $\rho_2(\gamma_y)=\rho_1(\gamma_y)\psi(y)^{-1}$ 成立，且 $\psi=\varphi$ 是唯一的。反过来，令 $\widetilde{e}=C^{\varphi}_{\Sigma',Y_3}$，则 $\widetilde{e}\circ C_1$ 和 C_2 的表示在 $\pi_1(M,Y_0)$ 以及 $\{\gamma_y\}_{y\in Y_3}$中的每条路径上都一致，因此根据引理 2.2，它们相等，且 $\widetilde{e}\circ C_1=C_2$。这证明了 $\widetilde{e}$的存在性和唯一性。

□

引理 4.8。 范畴 $\boldsymbol{Cob}_e$ 是由规范变换和限制柱生成并满足以下关系的群胚：

(1) $J_{\varphi_1}\circ J_{\varphi_2}=J_{\varphi_1\varphi_2}$，对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in G^Y$，(2) $R(Y_1,Y_2,\rho)\circ J_\varphi=J_{\varphi_{|Y_2}}\circ R(Y_1,Y_2,\varphi^{-1}\cdot\rho)$，对任意 $\varphi\in G^{Y_1}$，若 $Y_2\subset Y_1$，(3) $R(Y_2,Y_3,\rho_{|Y_2})\circ R(Y_1,Y_2,\rho)=R(Y_1,Y_3,\rho)$，若 $Y_3\subset Y_2\subset Y_1$，(4) $R(Y_2,Y_1,\rho)=R(Y_1,Y_2,\rho)^{-1}$，若 $Y_2\subset Y_1$，(5) $R(Y_1\cup Y_2,Y_2,\rho)\circ R(Y_1,Y_1\cup Y_2,\rho)=R(Y_1,Y_2,\rho)$。

在关系式 *(1)* 和 *(2)* 中，假设映射可以复合，且等式两边具有相同的源和目标。

证明。我们证明这些关系成立。首先，只需考虑连通曲面 Σ 的情形。由引理 2.2 可知，连通 G-装饰曲面之间的等价由其源和目标，以及任意一条从源的基点到目标的基点的路径在表示下的像唯一确定。在所有关系 (1)–(5) 中，两边具有相同的源和目标。因此，要证明这些关系成立，只需检查它们在一条选取得当的路径 γ_{12} 上的表示相同。关系 (1) 已经得到证明。对于关系 (2)，对于任何被映到 $\varphi(y)^{-1}$ 的 $y \in Y_2$，我们可以选取 $\gamma_{12}(t) = (y, t)$。对于关系 (3)，对于任何被映到 1 的 $y \in Y_3$，我们可以选取 $\gamma_{12}(t) = (y, t)$。对于关系 (4) rewitten$R(Y_1, Y_2, \rho)R(Y_2, Y_1, \rho) = \mathrm{Id}$，对于任何被映到 1 的 $y \in Y_2$，我们可以选取 $\gamma_{12}(t) = (y, t)$。对于关系 (5)，我们在 Σ 中选取一条路径 $\gamma\colon y_1 \in Y_1 \rightsquigarrow y_2 \in Y_2$；然后令 $\gamma_{12}(t) = (\gamma(t)\ t)$，它与 $\gamma_1(t) = (y_1, t/2)$ 和路径 $\gamma_2(t) = (\gamma(t)\ \frac{1+t}{2})$ 的连接同伦；关系 (5) 两边的 γ_{12} 的像均为 $\rho(\gamma)$。因此，所有关系都成立。

现在我们证明这组关系是完备的。首先，关系 (1) 和 (3) 表明 $J_{y \mapsto 1_G}$ 和 $R(Y, Y, \rho)$ 是恒等映射，因为它们既是幂等元又是同构。

此外，关系 (4) 表明，当 $Y_2 \subset Y_1$ 时，$R(Y_1, Y_2, \rho)$ 和 $R(Y_2, Y_1, \rho)$ 互为逆同构。于是，对于一般的 Y_1，Y_2，我们有：

$$\begin{aligned} R(Y_1, Y_2, \rho) &\overset{(5)}{=} R(Y_1 \cup Y_2, Y_2, \rho) R(Y_1, Y_1 \cup Y_2, \rho) \\ &\overset{(4)}{=} (R(Y_1 \cup Y_2, Y_1, \rho) R(Y_2, Y_1 \cup Y_2, \rho))^{-1} \overset{(5)}{=} R(Y_2, Y_1, \rho)^{-1}. \end{aligned}$$

接下来，我们可以将关系 (2) 推广为

$$R(Y_1, Y_2, \rho) \circ J_{\varphi_{|Y_1}} = J_{\varphi_{|Y_2}} \circ R(Y_1, Y_2, \varphi^{-1} \cdot \rho), \tag{2'}$$

对于任意 $\varphi\colon Y_1 \cup Y_2 \to G$。事实上，关系 (5) 允许将 $R(Y_1, Y_2, \rho)$ 分解为$R(Y_1 \cup Y_2, Y_2, \rho) \circ R(Y_1, Y_1 \cup Y_2, \rho)$，随后关系 (2) 描述了规范生成元如何与这些限制交换。

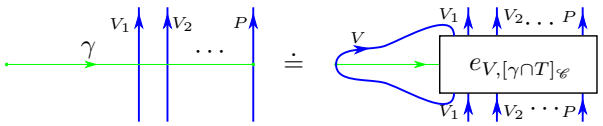
要证明这组关系是完备的，只需证明两个标准形元素（即命题 4.6 中的形式）的乘积可以利用这些关系化为其标准形。设 $\varphi = \varphi_1 \varphi_2\colon Y_2 \to G$，其中 φ_1 的支撑包含于 $Y_1 \cap Y_2$，且 φ_2 的支撑包含于 $Y_2 \setminus Y_1$；由关系 (1) 和 (2')，我们有

$$J_\varphi R(Y_2, Y_1, \rho) = J_{\varphi_1} R(Y_2, Y_1, \varphi_2 . \rho),$$

这是一个标准形。令 J_i 为规范生成元，R_i 为限制柱。于是由关系式 (2')，乘积 $J_1 R_1 J_2 R_2$ 可化简为形式 $J_1 J_3 R_3 R_2$。因此，只需证明两个限制的乘积可化为其标准形；这样我们就可以写成 $R_3 R_2 = J_4 R_4$，而任何乘积 $J_1 J_3 J_4 R_4$都可以利用 (1) 化为其标准形。

首先，如果 $Y_\cup := Y_1 \cup Y_3 \subset Y_2$，那么我们有

$$\begin{aligned} R(Y_2, Y_3, \rho) R(Y_1, Y_2, \rho) &\overset{(3)}{=} R(Y_\cup, Y_3, \rho) R(Y_2, Y_\cup, \rho) R(Y_\cup, Y_2, \rho) R(Y_1, Y_\cup, \rho) \\ &\overset{(4)}{=} R(Y_\cup, Y_3, \rho) R(Y_1, Y_\cup, \rho) \overset{(5)}{=} R(Y_1, Y_3, \rho). \end{aligned} \tag{R6}$$



如果 $V \in \mathscr{C}$ 和 γ 是与编织 T 横截的路径，并且终止于由投射对象 P 着色的 T 的一条边的左侧，那么上述缠结关系在 γ的管状邻域内，会在 $\gamma(0)$处生成一条由 V 着色的边。这里 $Q = [\gamma \cap T]_{\mathscr{C}}$是一个投射对象，而 $e_{V,\ Q}$ 是引理 1.4 中的态射。除非 T 的颜色为零，否则 Q不为零。

FIGURE 3. 局部创建一条由 V 着色的边。

考虑乘积 $R(Y_2,\ Y_1,\ \rho') \circ R(Y_1,\ Y_2,\ \rho)$，其中 $Y_2 \subset Y_1$。则存在φ： $Y_1 \to \mathsf{G}$，使得 $\rho' = \varphi \cdot \rho$。于是，

$$R(Y_2,\ Y_1,\ \rho')R(Y_1,\ Y_2,\ \rho) = R(Y_2,\ Y_1,\ \varphi.\rho)R(Y_1,\ Y_2,\ \rho)$$
$$\overset{(2')}{=} J_{\varphi_{|Y_2}} R(Y_2, Y_1, \rho)R(Y_1, Y_2, \rho) = J_{\varphi_{|Y_2}}. \qquad (R7)$$

现在，如果 $Y_2 \subset Y_\cap := Y_1 \cap Y_3$，则有

$$\begin{aligned} R(Y_2, Y_3, \rho')R(Y_1, Y_2, \rho) &\overset{(3)}{=} R(Y_\cap, Y_3, \rho')R(Y_2, Y_\cap, \rho')R(Y_\cap, Y_2, \rho)R(Y_1, Y_\cap, \rho) \\ &\overset{(R7)}{=} R(Y_\cap, Y_3, \rho')J_\varphi R(Y_1, Y_\cap, \rho) \text{ for some } \varphi : Y_2 \to \mathsf{G} \\ &\overset{(2')}{=} J_\varphi R(Y_\cap, Y_3, \rho'')R(Y_1, Y_\cap, \rho); \end{aligned}$$

由于 ρ 和 ρ'' 在 $Y_\cap = Y_1 \cap Y_3$上一致，因此存在到 $Y_\cup = Y_1 \cup Y_3$的唯一延拓，该延拓在 Y_1上限制为 ρ，在 Y_3上限制为 ρ''。于是 $R(Y_\cap, Y_3, \rho'')R(Y_1, Y_\cap, \rho) = R(Y_\cup, Y_3, \rho)R(Y_\cap, Y_\cup, \rho)$ $R(Y_\cup, Y_\cap, \rho)R(Y_1, Y_\cup, \rho) = R(Y_1, Y_3, \rho)$，从而我们推出第八个关系（$R8$）： $R(Y_2, Y_3, \rho')R(Y_1, Y_2, \rho) = J_\varphi R(Y_1, Y_3, \rho)$，当 $Y_2 \subset Y_1 \cap Y_3$时。最后，对于任意 Y_1、Y_2、Y_3，我们有

$$\begin{aligned} &R(Y_2,\ Y_3,\ \rho')R(Y_1,\ Y_2,\ \rho) \\ &\overset{(5)}{=} R(Y_2 \cup Y_3, Y_3, \rho')R(Y_2, Y_2 \cup Y_3, \rho')R(Y_1 \cup Y_2, Y_2, \rho)R(Y_1, Y_1 \cup Y_2, \rho) \\ &\overset{(R8)}{=} R(Y_2 \cup Y_3, Y_3, \rho')J_\varphi R(Y_1 \cup Y_2, Y_2 \cup Y_3, \overline{\rho})R(Y_1, Y_1 \cup Y_2, \rho), \\ &\overset{(2'),(3)}{=} J_\varphi R(Y_2 \cup Y_3, Y_3, \overline{\rho}_{|Y_2 \cup Y_3})R(Y_1, Y_2 \cup Y_3, \overline{\rho}), \\ &\overset{(3),(R6)}{=} J_\varphi R(Y_1, Y_3, \overline{\rho}_{|Y_1 \cup Y_3}). \end{aligned}$$

至此，关系系统完整性的证明完成。 □

4.4. Cob 的表示$_e$ 于 $\mathcal{S}$。 我们假设 $\mathscr{C}$是一个尖锐 G-分次幺半对偶范畴。

命题 4.9。 设 (Σ, Y, ρ) 是一个 G-装饰曲面，并设 $\varphi \in \mathsf{G}^Y$。存在如下规范同构：

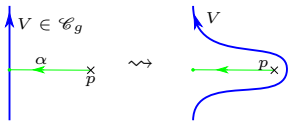
$$\varphi_* : \mathcal{S}(\Sigma, Y, \rho) \to \mathcal{S}(\Sigma, Y, \varphi.\rho),$$

其满足 $\varphi_* \circ \varphi'_* =$ （$\varphi\varphi'$）$_*$ 对于任意 φ、$\varphi' \in \mathsf{G}^Y$。

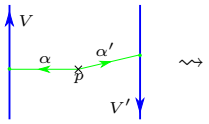
证明。 如果 $p \in Y$ 且 $g \in \mathsf{G}$，则令 $g^{\delta_p} \in \mathsf{G}^Y$ 在 $q \in Y$ 上定义为

$$g^{\delta_p}(q) = \begin{cases} g & \text{if } q = p, \\ 1_{\mathsf{G}} & \text{else.} \end{cases}$$

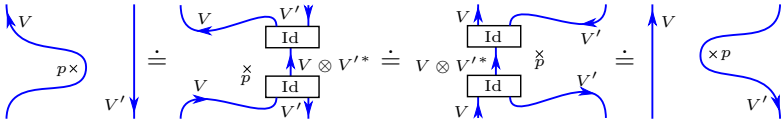
我们首先如下定义 $(g^{\delta_p})_*$ ： 若 T 是表示 $\mathcal{S}(\Sigma, Y, \rho)$ 中某个元素的编织，则称路径 α 为规范路径，如果 α 是一条从 p 到边 e 上某一点的路径，其中边 e 属于 T， $\alpha([0,1]) \cap T = \alpha(1)$，交是横截的，且 $[\alpha \cap e]_{\mathsf{G}} = g^{-1}$。首先，任何非平凡编织都与某个含有规范路径的编织 skein 等价。事实上，任何非平凡编织都与某个编织 skein 等价，该编织有一条靠近 p 的边，其颜色为次数 g 的非零对象（见图 3）。给定一个带有规范路径 α 的编织 T'，通过在 α 的管状邻域内修改 T'，使边 e 穿过基点，我们得到一个编织 $(T')_\alpha$。



我们断言，$(T')_\alpha$ 的类属于 $\mathcal{S}(\Sigma,\ Y,\ g^{\delta_p}.\rho)$，且与$\alpha$无关。事实上，若 α 和 α' 是两条仅在基点 p处相交的规范路径，则存在一列从$(T')_\alpha$到$(T')_{\alpha'}$的编织等价，如下所示:



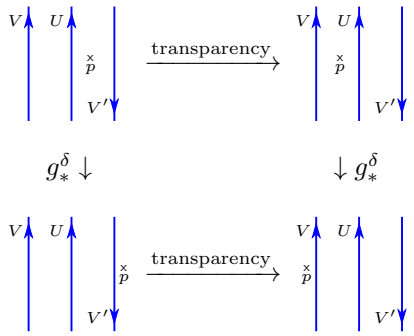
(4)



其中，中间的等价 $\doteq$是一个透明关系。现在我们假设通过归纳法，当 $\alpha \cap \alpha'$的横截交点少于 k个（包括 $\{p\}$）时，$(T')_\alpha = (T')_{\alpha'}$成立，并断言若 $\alpha \cap \alpha'$有 k个交点，则$(T')_\alpha = (T')_{\alpha'}$。事实上，令 α'' 为一条从 p 到 $\alpha' \cap T$ 的路径，它在从 p 到 $\alpha \cap \alpha'$ 的“最后一个点” q 的区间上与 α 相同；也就是说， q 是这样一点：连接 q 和 $\alpha' \cap T$ 的α' 的开子弧不与 α相交。稍微扰动后一条弧后， $\alpha' \cap \alpha''$ 和 $\alpha \cap \alpha''$ 都由少于 k 个点组成，因此根据归纳假设，我们有$(T')_\alpha = (T')_{\alpha''} = (T')_{\alpha'}$。

现在，如果 $\sum_i a_i T_i = 0 \in \mathcal{S}(\Sigma, Y, \rho)$ 是盒 B 中的一个编织关系，且该盒与 α 不相交，我们就可以在 B 之外进行相同的修改，并使用相同的规范路径，得到编织关系 $\sum_i a_i (T_i')_\alpha = 0 \in \mathcal{S}(\Sigma, Y, g^{\delta_p}.\rho)$。如果它与 α 相交，那么我们可以将 α 改为另一条不与 B 相交的路径，结论相同。最后，在基点 q 处由透明关系关联的两个编织，其像也由透明关系关联。当 $p \neq q$ 时这一点显然成立；而在.....的情况下

$p=q$，对于 $\mathscr{C}_1$ 中的 U 和 $V,V'\in\mathscr{C}_g$，我们有：



其中，最后一个透明关系涉及弦的融合，与等式（4）类似。因此，$T\mapsto(T')_{\alpha}$ 定义了映射 $(g^{\delta_p})_*$，显然它存在逆映射 $((g^{-1})^{\delta_p})_*$。由于该构造是局部的，显然若 $p\neq q$ 是不同的基点，则对于任意 $g,\ h\in\mathsf{G}$，$(g^{\delta_p})_*$ 与 $(h^{\delta_q})_*$ 可交换。这给出了 φ_* 的一个自然定义：$\prod_{p\in Y}\varphi(p)^{\delta_p}$。此外，$(g^{\delta_p})_*\circ(h^{\delta_p})_*=((gh)^{\delta_p})_*$，因为将一条由 $V\in\mathscr{C}_h$ 着色的边、再将一条由 $U\in\mathscr{C}_g$ 着色的边穿过基点p，与将一条由 $U\otimes V\in\mathscr{C}_{gh}$着色的边穿过该基点是 skein 等价的。这意味着定义中的最后一条陈述成立。□

命题 4.10。设(Σ,Y,ρ)和(Σ,Y',ρ')是G-装饰曲面，其中 $Y\subset Y'$和 $\rho\in\mathrm{Rep}_{\mathsf{G}}(\Sigma,Y)$ 是 $\rho'\in\mathrm{Rep}_{\mathsf{G}}(\Sigma,Y')$ 的限制。那么，包含映射 $\Sigma\setminus Y'\subset\Sigma\setminus Y$ 诱导一个同构

$$\mathcal{S}(\Sigma,Y',\rho')\to\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho).$$

证明。首先，映射 $\mathcal{S}(\Sigma\setminus Y',\rho')\to\mathcal{S}(\Sigma\setminus Y,\rho)$ 与投影$\mathcal{S}(\Sigma\setminus Y,\rho)\to\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho)$ 复合（回想一下，后一个模是将前一个模按透明关系取商得到的），该复合可经由 $\mathcal{S}(\Sigma,Y',\rho)$ 分解，因为额外的透明关系要么映为编织的同伦，要么映为 $\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho)$ 中的透明关系。因此，我们有一个映射 $f\colon\ \mathcal{S}(\Sigma,Y',\rho')\to\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho)$。只需证明，当 $Y'=Y\cup\{p_1\}$ 有唯一一个额外基点时，此映射是双射。设 $p_0\in Y$与 p_1位于 Σ 的同一连通分支中，固定一条从 p_0 到 p_1 且嵌入于 Σ 中的路径 γ，并令 $g=\rho'(\gamma)\in\mathsf{G}$。注意，$\rho'$ 由 ρ和 g唯一确定。为证明 f 是双射，我们如下构造 f 的逆映射f'。

设 T 是一个编织，表示 $\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho)$ 中的一个元素。若点 p_1 位于编织 T 的一条边上，我们就将 T 稍微移至 p_1 附近，得到一个编织 $T'\in\mathcal{S}(\Sigma\setminus Y')$（在 $\Sigma\setminus Y'$ 中，同痕意义下有两种可能）。设 $h=[\gamma\cap T']_{\mathsf{G}}$，则 T' 表示 $\mathcal{S}(\Sigma\setminus Y',((h^{-1}g)^{\delta_{p_1}}.\rho')$ 中的一个元素。于是，我们将 T 在 $f'(T)=((g^{-1}h)^{\delta_{p_1}})_*(T')$ 下的像定义为 f'。注意，当 $p_1\in T$ 时，T' 的两种可能由一个规范映射关联，且对应的 $f'(T)$ 的值相同。

这意味着 $f'(T)$ 是 $\mathcal{S}(\Sigma\setminus Y',\rho')$ 中定义良好的元素。此外，这也意味着，若 T' 和 T'' 是 $\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho)$ 中的两个编织，且它们通过一个微小的同痕相关，其中一条边穿过 p_1，那么 $f'(T')\doteq f'(T'')$。因此，$f'(T)\in\mathcal{S}(\Sigma,Y',\rho')$ 仅取决于 T 在 $\Sigma\setminus Y$ 中的同痕类。

显然，如果 T'和 T''是 $\mathcal{S}(\Sigma,\ Y,\ \rho)$ 中由透明关系关联的两个编织，那么 $f'(T')$ 和 $f'(T'')$ 也由透明关系关联。

最后，我们来证明， $\mathcal{S}(\Sigma \setminus Y,\ \rho)$ 中一个缠结关系在 f' 下的像，在 $\mathcal{S}(\Sigma,\ Y',\ \rho')$ 中为零。当缠结关系的盒不包含p_1 时，这一点显然成立，因为可以在盒外构造 f' 下的像。现在考虑一个盒中包含点 p_1 的缠结关系 $\sum_i a_i T_i$ 。考虑 $\Sigma\setminus Y$ 中一个将盒移离 p_1 的同痕。该同痕将编织 T_i 变为编织 T_i'，且 $f'(T_i) \doteq f'(T_i')$。于是 $\sum_i a_i f'(T_i) \doteq \sum_i a_i f'(T_i') \doteq 0 \in \mathcal{S}(\Sigma,\ Y',\ \rho')$，其中最后这个等价由第一种情形得出，因为 $\sum_i a_i T_i'$ 是一个远离 p_1 的缠结关系。

总之，我们定义了一个映射 $f'\colon\ \mathcal{S}(\Sigma,\ Y,\ \rho) \to \mathcal{S}(\Sigma,\ Y',\ \rho')$，它是 f 的逆映射，因此 f 是双射。□

定义 4.11。设 $R_{\Sigma,\ Y_1,\ Y_2,\ \rho}$ 是从 $(\Sigma、\ Y_1、\ \rho_1)$ 到 $(\Sigma、\ Y_2、\ \rho_2)$的限制圆柱。则我们定义限制映射 restrictionmap

$$r(\Sigma, Y_1, Y_2, \rho) = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathcal{S}(\Sigma, Y_1, \rho_1) \to \mathcal{S}(\Sigma, Y_2, \rho_2),$$

其中， $f_i\colon\ \mathcal{S}(\Sigma、\ Y_1 \cup Y_2、\ \rho) \to \mathcal{S}(\Sigma、\ Y_i、\ \rho_i)$ 是命题 *4.10* 中的同构。

定理 4.12。存在唯一的函子

$$\mathcal{S} : \widetilde{\boldsymbol{Cob}}_e \to \mathrm{Vect}$$

~ ~它将带有G装饰的曲面 Σ （见第 *2.2* 小节）映射到 $\mathcal{S}(\Sigma)$，将规范圆柱$C^{\varphi}_{\Sigma,\ Y,\ \rho}$映射到 φ_*，并将限制圆柱 $R_{\Sigma,\ Y_1,\ Y_2,\ \rho}$映射到限制映射 $r(\Sigma, Y_1, Y_2, \rho)$。

证明。 我们需要证明规范映射和限制映射满足引理 4.8 中类似的关系。关系 (1) 已在命题 4.9 中陈述。关系 (3) 仅表示可以按任意顺序去掉基点，而不改变结果。关系 (4) 和 (5) 直接由定义 4.11 得出。为了证明关系 (2)，只需考虑满足 $y \in Y_1$ 的规范函数 $\varphi = g^{\delta_y}$ 。需要区分两种情况。

如果 $y \notin Y_2$ ，那么在 y 处进行规范修改后，接着去掉基点y。但是，将编织的一条边穿过 y，然后去掉 y，得到的编织与直接去掉 y 所得的编织同痕。因此该关系成立。

若 $y \in Y_2$，则点 y 不会被限制映射消去，因此让编织的一条边穿过 y ，与抑制其他基点的操作可交换，反之亦然。□

5. G-Chromatic categories

5.1. **分次色映射与范畴**。设 $\mathscr{C}$ 是一个锐的 G-分次幺半 $\mathbb{K}$-范畴。回顾第 1.2 小节中给出的生成元定义。

定义 5.1。对于 $g \in \mathsf{G}$，次数为 g 的投射生成元是一个投射对象，且为 $\mathscr{C}_g$ 的投射对象子范畴的生成元。

引理 5.2。设 W_g 和 $W_{g'}$ 分别是次数为 g 和 g' 的投射生成元。那么 W_g^* 和 $W_g \otimes W_{g'}$ 分别是次数为 g^{-1} 和 gg' 的投射生成元。

证明。 若 $P \in \mathscr{C}_{g^{-1}}$ 是投射的，则 $P^* \in \mathscr{C}_g$ 是投射的，并且存在

$$f_i : P^* \to W_g \text{ and } g_i : W_g \to P^*$$

使得 $\mathrm{Id}_{P^*} = \sum_i g_i \circ f_i$。于是 $\mathrm{Id}^*_{P^*} = \sum_i f_i^* \circ g_i^*$，从而得到 $\mathrm{Id}_P = \sum_i \phi^{-1} \circ f_i^* \circ g_i^* \circ \phi$，其中 $\phi\colon\ P \to P^{**}$ 是枢轴结构。因此，W_g^* 是一个次数为 g^{-1} 的投射生成元。

若 $Q \in \mathscr{C}_{gg'}$ 是投射的，则 $W_g^* \otimes Q \in \mathscr{C}_{g'}$ 是投射的，因此存在 $f_i\colon W_g^* \otimes Q \to W_{g'}$ 和 $g_i\colon W_{g'} \to W_g^* \otimes Q$，使得 $\mathrm{Id}_{W_g^* \otimes Q} = \sum_i g_i \circ f_i$。然后令

$$f_i'' = (\mathrm{Id}_{W_g} \otimes f_i) \circ (\overleftarrow{\mathrm{coev}}_{W_g} \otimes \mathrm{Id}_Q) \text{ and } g_i'' = (\overrightarrow{\mathrm{ev}}_{W_g} \otimes \mathrm{Id}_Q) \circ (\mathrm{Id}_{W_g} \otimes e_{W_g,Q}) \circ (\mathrm{Id}_{W_g} \otimes g_i)$$

其中$e_{W_g,\ Q}$ 如引理 1.4 所述。然后

$$\sum_i g_i'' \circ f_i'' = (\overrightarrow{\mathrm{ev}}_{W_g} \otimes \mathrm{Id}_Q) \circ (\mathrm{Id}_{W_g} \otimes e_{W_g,Q}) \circ (\overleftarrow{\mathrm{coev}}_{W_g} \otimes \mathrm{Id}_Q) = \mathrm{ptr}^L_{W_g^*}(e_{W_g,Q}) = \mathrm{Id}_Q\,.$$

因此，$W_g \otimes W_{g'}$ 是次数为 gg'的投射生成元。 □

定义 5.3. G-有限球面范畴 是一个G-分次球面范畴 $\mathscr{C} = \bigoplus_{g\in \mathsf{G}} \mathscr{C}_g$，其中对每个 $g \in \mathsf{G}$，$\mathscr{C}_g$ 都有一个非零投射生成元。有限球面范畴 是分次群平凡的G-有限球面范畴。

设 $\mathscr{C}$ 是一个 G-有限球面范畴。注意，$\mathscr{C}_1$ 是一个有限球面范畴。设 t 是 Proj 上的非零迹。那么 t 是非退化的 （见定义 1.5）。给定一个对象 $P \in$Proj，令

(5)
$$\Omega_p = \sum_i x^i \otimes_{\mathbb{K}} x_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, \mathbb{1}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}, P) \text{ and } \Lambda_P = \sum_i x_i \circ x^i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, P)$$

其中 $\{x^i\}_i$ 和 $\{x_i\}_i$ 分别是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P,\ 1)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1,\ P)\}$ 的基，并且关于 m-迹 t 对偶，即 $\mathsf{t}_P(x_i \circ x^j) = \delta_{i,\ j}$。通过直接的线性代数计算可验证，$\Omega_P$ 和 Λ_P 与基的选择无关。

引理 5.4. 设 $P, Q \in$ Proj 和 $V \in \mathscr{C}$，且设 $f\colon P \to Q$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个态射。

(1) 对偶性：若 $\Omega_P = \sum_i x^i \otimes x_i$，则

$$\Omega_{P^*} = \sum_i (x_i)^* \otimes (x^i)^* \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P^*, \mathbb{1}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}, P^*).$$

(2) 自然性：若 $\Omega_P = \sum_i x^i \otimes x_i$ 且 $\Omega_Q = \sum_j y^j \otimes y_j$，则

$$\sum_i x^i \otimes (f \circ x_i) = \sum_j (y^j \circ f) \otimes y_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, \mathbb{1}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}, Q).$$

(3) 旋转：若 $\Omega_{P\otimes V} = \sum_i z^i \otimes z_i$ 则 $\Omega_{V\otimes P} = \sum_i \widetilde{z}^i \otimes \widetilde{z}_i$

其中

$$\widetilde{z}^i = \overrightarrow{\mathrm{ev}}_V (\mathrm{Id}_V \otimes z^i \otimes \mathrm{Id}_{V^*})(\mathrm{Id}_{V\otimes P} \otimes \overleftarrow{\mathrm{coev}}_V)$$

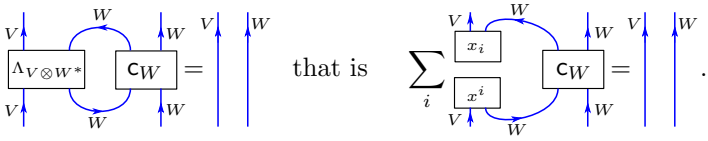
and

$$\widetilde{z}_i = (\mathrm{Id}_{V\otimes P} \otimes \overrightarrow{\mathrm{ev}}_V)(\mathrm{Id}_V \otimes z_i \otimes \mathrm{Id}_{V^*})\ \overleftarrow{\mathrm{coev}}_V\ .$$

证明。 对偶性和旋转性质源于我们应用的变换会将对偶基映到对偶基。自然性可通过对等式两边应用 $\mathsf{t}_P(x_k \circ\ ) \otimes \mathsf{t}_Q(\ \ \circ y^\ell)$ 来验证：这样便归结为 m-迹 t 的循环性质 $\mathsf{t}_Q(f \circ x_k \circ y^\ell) = \mathsf{t}_P(x_k \circ y^\ell \circ f)$。□

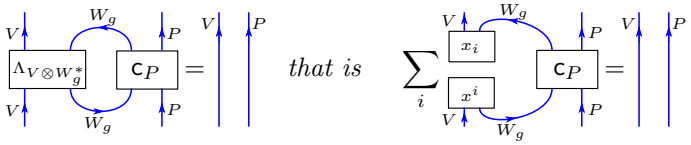
回忆一下，在 $\mathscr{C}_1$ 中，投射生成元 W 的色映射是一个映射 $\mathsf{c}_W \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(W \otimes W)$，满足对所有 $V \in \mathscr{C}$ 都有以下等式：

(6)



定义 5.5. 对于 $\mathscr{C}_g$ 的投射生成元 W_g，基于 $P \in$ 的 Proj 的次数 g 色映射 是一个态射 $\mathsf{c}_P \in$ 自同态集$_{\mathscr{C}}(W_g \otimes P)$，满足

(7)



对任意 $V \in \mathscr{C}_g$，其中 $\{x_i\}_i$ 和 $\{x^i\}_i$ 是关于 m-迹的任意对偶基。

引理 5.6. 若 $\mathscr{C}$ 具有一个基于 $P \in$ Proj 、针对投射生成元 W_g的次数为 $g \in$G 色映射 c_P，则对于任意 $Q \in$ Proj 以及任意 $\mathscr{C}_g$的投射生成元 W'_g，存在一个基于 Q 、针对投射生成元 W'_g的色映射 c_Q 。

证明。 设 $W_g \xrightarrow{\alpha_i} W'_g$和 $W'_g \xrightarrow{\beta_i} W_g$是一族态射，使得$\sum_i \beta_i\alpha_i = \mathrm{Id}^{W_g}$。 则

$$\mathsf{c}_Q = \sum_i (\alpha_i \otimes \overrightarrow{\mathrm{ev}}_P \otimes \mathrm{Id}_Q) \circ (\mathsf{c}_P \otimes e_{P,Q}) \circ (\beta_i \otimes \overleftarrow{\mathrm{coev}}_P \otimes \mathrm{Id}_Q)$$

是所需的色映射，其中 $e_{P,Q}$ 如引理 1.4 所述 □

定义 5.7. *A* G-色范畴 是一个配备了作用于 Proj 上的非退化修正迹 t 的 G-有限球面范畴，并且每个次数 $g \in$G都存在一个色映射。

由 $\mathsf{c}_{W_h \otimes P}$ 和 $e'_{W_h,P}$的定义可直接得出下述结论的证明：

引理 5.8. 设 $\mathscr{C}$ 是一个 G-有限球面范畴，其投射生成元为 W_g和 W_h，分别位于次数 g 和 h。若 $\mathsf{c}_{W_h\otimes P}$ 是基于 $W_h \otimes P$、对应于 W_g 的色映射，则 $\mathsf{c}_P = (\mathrm{Id}^{W_g} \otimes e'_{W_h,P}) \circ \mathsf{c}_{W_h\otimes P}$是基于 P、对应于 $W_g \otimes W_h$的色映射，其中 $e'_{W_h,P}$ 如引理 *1.4* 所述。

命题 5.9. 若 $\mathscr{C}$ 是一个带有修正迹t的G-有限球面范畴，则$\mathscr{C}$ 是一个G-分次色范畴，当且仅当 $\mathscr{C}_1$ 是一个色范畴。

证明。 根据定义，如果 $\mathscr{C}$ 是一个 G-分次色范畴，那么 $\mathscr{C}_1$ 就是一个色范畴。反过来，假设 $\mathscr{C}_1$ 是一个色范畴。令 $P \in$为 Proj，并令 W_g为次数为 $g \in$ G 的投射生成元。那么 $W_g \otimes W_g^*$是次数为 1 的投射生成元，因此由引理 5.6，存在一个基于 $W_g \otimes P$、针对$W_g \otimes W_g^*$的色映射。于是引理 5.8 表明，存在一个基于 P、次数为 g、针对生成元$W_g \otimes W_g^* \otimes W_g$的色映射。□

注 5.10。 设 $\mathscr{C}$ 是一个G-有限球面范畴，其中 $\mathscr{C}_1$ 按照 [EGNO15]的意义是一个有限张量范畴。由 [CGPV23] 可知，它具有一个色映射。因此，该推论表明 $\mathscr{C}$ 是一个G-分次色范畴。

GPT09、GP13] 中采用了一种基于泛半单范畴的不同风格的"G-有限球面"概念，用以构造重整化的 Turaev-Viro 不变量：

定义 5.11. 相对于X 的相对 G-有限球面范畴 $\mathscr{C}$，是一个锐G-分次范畴，且除一个小子集X $\subset$ G外，在每个次数上都是有限半单的：

(1) X $\subset$G，$\mathsf{X}^{-1}=\mathsf{X}$；(2) 对任意 $g_1,\dots g_n\in$G，G $\not\subset\bigcup_i g_i$X；(3) 对任意 $g\in$ G \X，范畴 $\mathscr{C}_g$是有限半单的。具有 $g\notin$X 的$\mathscr{C}_g$ 的简单对象称为一般简单对象。(4) 在Proj上存在非零修正迹。(5) 存在一个取值于 $\mathbb{K}$ 的函数b ，定义在一般简单对象上，在同构类上为常数，并且对任意 $\{g_1,g_2,g_1g_2\}\subset$ G \ X以及任意简单对象 $V\in\mathscr{C}_{g_1g_2}$，

$$\mathsf{b}(V^*)=\mathsf{b}(V)=\sum_{V_1\in S_{g_1},V_2\in S_{g_2}}\mathsf{b}(V_1)\mathsf{b}(V_2)\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}(V,V_1\otimes V_2)),$$

其中， S_g 是 $\mathscr{C}_g$中简单对象的同构类代表元集合。

例如，非限制量子群在奇数阶单位根处的权模范畴是相对 G-有限球形范畴（见第 5.2 小节）。

命题 5.12。 按照定义 *5.11*，一类相对 G-有限球形范畴是按照定义 *5.7* 的G-有限球形范畴。

证明。 注意，对于一般的 $g\in\mathsf{G}\setminus\mathsf{X}$， $\mathscr{C}_g$是半单的，因此 Proj $\cap\mathscr{C}_g=\mathscr{C}_g$。所以，在一般次数 g下， $W=\bigoplus_i S_i$ 是一个投射生成元（其中 S_i 表示 $\mathscr{C}_g$的简单对象的同构类）。对于 $\mathsf{d}(S_i)=\mathsf{t}_{S_i}(\mathrm{Id}_{S_i})$，直接验证可知，$\mathsf{c}_P=\oplus_i\,\mathsf{d}(S_i)\,\mathrm{Id}_{S_i}\otimes\mathrm{Id}_P$是基于 P的 W的色映射。□

5.2. **G-染色范畴示例**。 设 ℓ为奇数，使得$\ell\geq 2$ （若 $\mathfrak{g}=G_2$，则 $\ell\notin 3\mathbb{Z}$ ）。设 $\mathfrak{g}$ 为秩为 n 、维数为 $2N+n$ 的有限维复单李代数，具有以下结构：

（1）嘉当子代数 $\mathfrak{h}$；（2）由单根 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subset\mathfrak{h}^*$构成的根系；（3）嘉当矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n}$；（4）正根集合 Δ^+ ，其中含有 N 个正根；（5）根格 $L_R=\bigoplus_i\mathbb{Z}\alpha_i\subset\mathfrak{h}^*$；（6）定义在 L_R 的实张成空间上的标量积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ ，其矩阵为 $DA=(\langle\alpha_i,\ \alpha_j\rangle)_{ij}$，其中 $D=$为diag(d_1，.....，d_n)，且所有 d_i 中的最小值为 1。

嘉当子代数有一组基 $\{H_i\}_{i=1\cdots n}$，由 $\alpha_i(H_j)=a_{ji}$ 确定，而 $\mathfrak{h}^*$ 的对偶基是 $\mathfrak{h}^*$ 的基本权基，它生成权格 L_W。令 $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha\in L_W$。

对于 $x \in \mathbb{C}$ 和 $k,\ l \in \mathbb{N}$，我们采用以下记号：

$$\xi^x = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi x}{\ell}}, \quad \{x\}_\xi = \xi^x - \xi^{-x}, \quad \{k\}_\xi! = \{1\}_\xi \{2\}_\xi \cdots \{k\}_\xi, \quad \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_\xi = \frac{\{k\}_\xi!}{\{l\}_\xi! \{k-l\}_\xi!}.$$

对于每个具有 $L_R \subset L \subset L_W$ 的格 L，都存在一个与之关联的 非限制量子群，它包含 L 的群环：定义 $U_\xi^L\mathfrak{g}$ 为由生成元 K_β、X_i、X_{-i}（其中 $\beta \in L$、$i = 1$、.....、n）生成的 $\mathbb{C}$-代数，其关系为

$$K_0 = 1, \quad K_\beta K_\gamma = K_{\beta+\gamma}, \quad K_\beta X_{\sigma i} K_{-\beta} = \xi^{\sigma\langle\beta,\alpha_i\rangle} X_{\sigma i}, \tag{8}$$

$$[X_i, X_{-j}] = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{\xi^{d_i} - \xi^{-d_i}}, \tag{9}$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{\xi^{d_i}} X_{\sigma i}^k X_{\sigma j} X_{\sigma i}^{1-a_{ij}-k} = 0, \text{ if } i \neq j \tag{10}$$

其中 $\sigma = \pm 1$。Drinfeld 和 Jimbo 考虑与 $L = L_R$ 对应的量子群。代数 $U_\xi^L\mathfrak{g}$ 是一个霍普夫代数，其余乘法为 Δ，余单位为 ϵ，对极 S 定义如下

$$\begin{aligned}
&\Delta(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes K_{\alpha_i}, \quad \Delta(X_{-i}) = K_{\alpha_i}^{-1} \otimes X_{-i} + X_{-i} \otimes 1, \\
&\Delta(K_\beta) = K_\beta \otimes K_\beta, \qquad \epsilon(X_i) = \epsilon(X_{-i}) = 0, \qquad \epsilon(K_{\alpha_i}) = 1, \\
&S(X_i) = -X_i K_{\alpha_i}^{-1}, \qquad S(X_{-i}) = -K_{\alpha_i} X_{-i}, \qquad S(K_\beta) = K_{-\beta}.
\end{aligned}$$

对于 Δ^+ 的一个固定凸序 $\beta_* = (\beta_1、\ldots\ldots、\beta_N)$，递归地定义 $U_\xi^L\mathfrak{g}$ 中的凸根向量集 $(X_{\pm\beta})_{\beta\in\beta_*}$（参见 [CP95]的第 8.1 和 9.1 节）。代数 Z_0 是由以下元素生成的子代数

$$X_{\pm\beta}^\ell \text{ and } K_\gamma^\ell \text{ for all } \beta \in \Delta^+, \gamma \in L.$$

它是 $U_\xi^L\mathfrak{g}$的中心子霍普夫代数，并且 $U_\xi^L\mathfrak{g}$是秩为 ℓ^{2N+n}[L的自由 Z_0-模：L_R]。若一个 $U_\xi^L\mathfrak{g}$-模作为 Z_0-模是有限维半单的，则称其为权模。于是令 $\mathscr{C}$ 为权模范畴。

$U_\xi^L\mathfrak{g}$中的元素 $\phi = K_{2\rho}^{1-\ell}$满足 $S^2(x) = \phi x \phi^{-1}$。由此可知，$U_\xi^L\mathfrak{g}$是枢轴霍普夫代数，而权模范畴 $\mathscr{C}$ 是球形的枢轴 $\mathbb{C}$-范畴；详情参见 [GP13]。这里，对偶态射 $\overleftarrow{\mathrm{ev}}$ 和$\overleftarrow{\mathrm{coev}}$ 是标准的求值与余求值，而 $\overrightarrow{\mathrm{ev}} = \overleftarrow{\mathrm{ev}} \circ \tau \circ (\phi \otimes 1)$ 和 $\overrightarrow{\mathrm{coev}} = \tau \circ (\phi^{-1} \otimes 1) \circ \overleftarrow{\mathrm{coev}}$，其中 τ 是翻转。

令 $\mathrm{G} = \mathrm{Hom}^{\mathrm{algebra}}(Z_0, \mathbb{C})$，则 $\mathscr{C}$ 是一个尖锐 G-分次范畴，其中 $\mathscr{C}_g$ 是由模组成的满子范畴 V，满足任意 $z \in Z_0$ 都通过标量$g(z)$作用于 V。Z_0 的余乘法在 G 上诱导出群结构，已知该群同构于某个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通李群的泊松-李对偶；令 G′ 为一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通复李群，且 T 为 $\mathfrak{h}$ 在指数映射下的像。设 L 是指数映射 $h \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi h}$ 的核的对偶格，并令 B^+、B^- 分别为 G′ 的正、负 Borel 子群，且 $\pi\colon\ B^+ \times B^- \to T$ 为两个投影 $B^\pm \to T$的乘积。那么 G 同构于 π的核。

命题 5.13。权 $U_\xi^L\mathfrak{g}$-模的范畴 $\mathscr{C}$ 是一个 G-色彩范畴。

证明。根据 [GP18，定理 5], 该范畴是 G-球面的，再根据 [CGPV23]，$\mathscr{C}_1$ 是一个染色张量范畴，因此根据命题 5.9，它是一个 G-色范畴。□

请注意，非限制量子群 $U_\xi^L\mathfrak{g}$ 具有更多结构：量子余伴随作用（见 [DKP92]）以及全纯编织（见 [KR05、KR05a、BGPR20、McP20、McP21、MR25]），而我们在构造中并未利用这些结构。

5.3. **G-色范畴的容许 skein 模**。设 $\mathscr{C}$ 是一个 G- 色范畴，且 $\mathcal{I}$ =Proj。

现在我们将引入一种记号——“G-着色红圈”，它们之后将表示在曲面上进行的手术。正如我们马上就会看到的，它们实际上只是占位符：每个包含若干 G-着色红圈的图，都由前述意义下容许 skein 的一个良定义 skein 等价类表示。因此，原则上我们可以在论述中省略红圈，但它们对证明非常方便。

定义 5.14. 连通曲面 Σ中的双色图，是一个容许的 $\mathscr{C}$-着色图 $T \subset \Sigma$ 与有限个两两不交的定向圆圈（称为“红圈”）的不交并；每个圆圈都以某个元素 $g \in$G 装饰，且与 T 及 Σ的基点不相交。不交并曲面 $\sqcup\Sigma_i$ 中的双色图，是指在每个 Σ_i中各取一个双色图。我们称红圈的并为 T 的“红色部分”，称其在 T 中的补集为“蓝色部分”；若红色部分为空，则称T 为单色。

根据定义，对于 Σ 的每个连通分支，双色图 T 中至少有一个红色圆与该分支的至少一个区域相邻，而该区域包含一条由投射对象着色的弦。由此递推，可应用以下操作：

定义 5.15 (双色图的容许 skein 类)。 设 $T \subset \Sigma$ 为一个双色图。其 ***skein*** 等价类，记作 $[T] \in \mathcal{S}(\Sigma)$，是从 T 出发，经过以下任意有限序列的修改后得到的任一单色图的可容许编织等价类：

- 对一个红色圆应用图 *4* 所示的两种“红转蓝”修改之一
- 在不与红色部分相交的盒内，对 T 的蓝色子图施加容许的编织关系。

根据以下命题，前述定义与所有选择无关：

命题 5.16。 双色图 T 的 ***skein*** 等价类 $[T] \in \mathcal{S}(\Sigma)$ 定义良好。

证明。 只需对连通的 Σ证明该命题。我们将按红圈的数量 n 进行归纳法证明。对于 $n = 0$，无须证明。假设该命题对包含至多 n个红圈的双色图成立，并设 T是一个包含 $n + 1$ 个红圈的双色图。

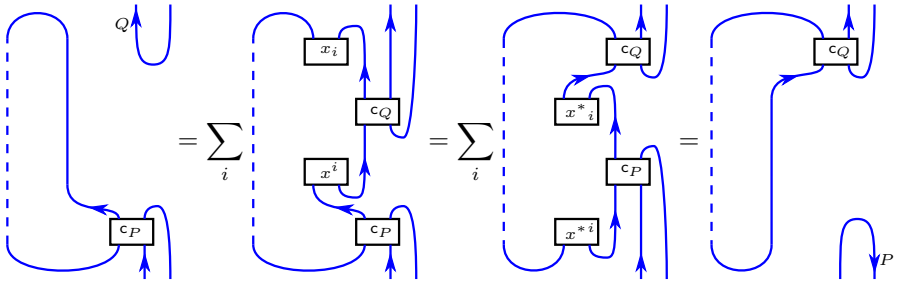
为了减少红圈的数量，需要对 T 应用红到蓝修改；因此，需要通过一条嵌入在 $\Sigma \setminus R$ 中的路径 α，将 T 中由某个射影颜色着色的一条边（记为 e）连接到一个红圈（记为 c），其中 R 是红色部分，且路径的一端位于 e 上，另一端位于 c 上。不过一般而言， α 与 T 横截，并且在内部与其有限多条边相交，除去 c 和 e。沿 α 的一般化红到蓝 移动，是由以下可容许的缠结关系复合而成：融合所有与 α 相交的蓝色线股（包括 e，因此所得颜色是射影的，因为 Proj 是一个理想），然后应用

对由此得到的图应用红到蓝修改，利用 α 使新的射影颜色靠近 c。我们将所得的双色图记为 T_α （这种略显滥用的记法省略了修改中所用生成元和染色态射的选择）。

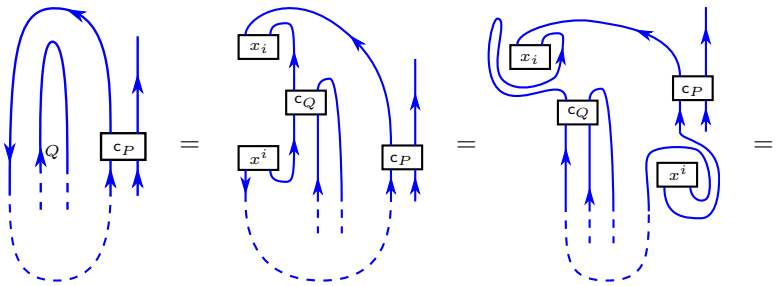
显然， T_α 在不改变其与 T的交的同痕下，仅取决于 α 。因此，若 α 和 α' 是如上所述分别连接边e （分别为 e'）与红色圆 c （分别为 c'）的两条弧，那么经过小幅同痕扰动后，我们可以假设它们横截相交，且交点数有限，记为 m。我们断言， T_α 和 T'_α 的可容许编织等价类相等（根据归纳假设，这些类都有定义，因为 T_α 和$T_{\alpha'}$ 都含有 m个红圈）。

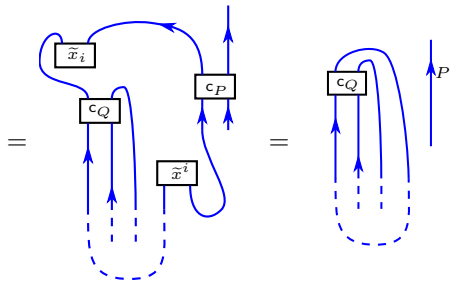
为证明这一断言，我们对 m使用归纳法。若 $m = 0$ α 和 α' 不相交，则分两种情况讨论。若 $c \neq c'$ ，那么只需沿 α' 对 T_α应用广义红到蓝修改，即可得到 T_α 与（T_α）$_{\alpha'}$ skein 等价。然而（T_α）$_{\alpha'}$ =（$T_{\alpha'}$）$_\alpha$ （因为 α 和 α' 不相交），而后者通过沿 α应用广义红到蓝修改，与（$T_{\alpha'}$） skein 等价。

如果 $c = c'$，令 P（分别为 Q）表示对所有与 α（分别与 α'）相交的蓝边进行融合操作后得到的颜色；令 W_g， W'_g为 $\mathscr{C}_g$的投射生成元，并选取一个基于 P、在 W_g 处的色映射 c_P，以及一个基于 Q 、在 W'_g处的色映射 c_Q 。需要考虑两种子情况。首先，如果这两处修改是在红色曲线的同一侧进行的，那么



其中， $x^*{}_i$和 x^{*i}是通过 $x^{*i} = (x_i)^* \circ (\phi_{W'_g} \otimes \mathrm{Id}^{W_g^*})$和$x^*{}_i = (\phi^{-1}_{W'_g} \otimes \mathrm{Id}^{W_g^*}) \circ (x^i)^*$ 得到的对偶基（回忆一下， ϕ_X: $X \to X^{**}$ 是枢轴结构）。这里，第一个和第三个等式由 (7) 得出，第二个等式则由券的同痕变形并应用引理 5.4 的对偶性得出。其次，如果在红色曲线的两侧分别进行修改，那么（默认求和）：





其中， $\widetilde{x}_i$ 和 $\widetilde{x}^i$ 是根据引理 5.4 的旋转性质，由 x_i 和 x^i 得到的对偶基。在这种情况下，双色图T_α 和 $T_{\alpha'}$ 的可容许编织等价类相等。注意，上述两种红到蓝修改分别对应图 4 的两种不同版本：在一种修改中，对应红色圆的蓝色弦的方向为一个方向，颜色为 W_g；在另一种情况下，方向相反，颜色为 $W_g^* = W_{g^{-1}}$。

对 m 使用归纳法，现假设我们已证明：对于每个 α， α'，若它们横截相交至多 m 次，则有 $[T_\alpha] = [T_{\alpha'}]$；并设 α， α' 是如上所述的两条弧，它们恰好横截相交 $m+1$ 次。

我们声称存在另一条弧，记作 β，嵌入于 $\Sigma \setminus R$ 中，它连接一条蓝边 e''（可能与 e 或 e' 重合）和一个红色圆 c''（可能与 c 或 c' 重合），并且与 T、α 和 α' 横截，且满足 $\mathrm{card}(\alpha \cap \beta) \leq m$ 和 $\mathrm{card}(\alpha' \cap \beta) \leq m$。由此即可完成证明，因为根据归纳假设，我们将有 $[T_\alpha] = [T_\beta] = [T_{\alpha'}]$。为构造 β，令 α_0 为 α 的子弧，它由包含 $q = \alpha \cap c$ 的 $\alpha \setminus \alpha'$ 连通分支构成，并令 $p \in \alpha \cap \alpha'$ 为它的另一个端点。于是弧 β 是 α_0 与 α' 中连接 p 和 e' 的子弧的连接。显然，可以对 β 作同伦变形，使 β 与 α' 不相交，并且与 α 至多相交 m 次（对应于 $(\alpha \cap \alpha') \setminus \{p\}$）。□

根据命题 5.16，我们现在可以绘制包含红圈（带定向且经 G-着色）的编织图，而这些图在 $\mathcal{S}(\Sigma)$ 中代表定义良好的类。它们满足一系列关系，概述如下：

命题 5.17. $[T] = [T']$ 若 T' 由 T 经过以下某种变换得到：

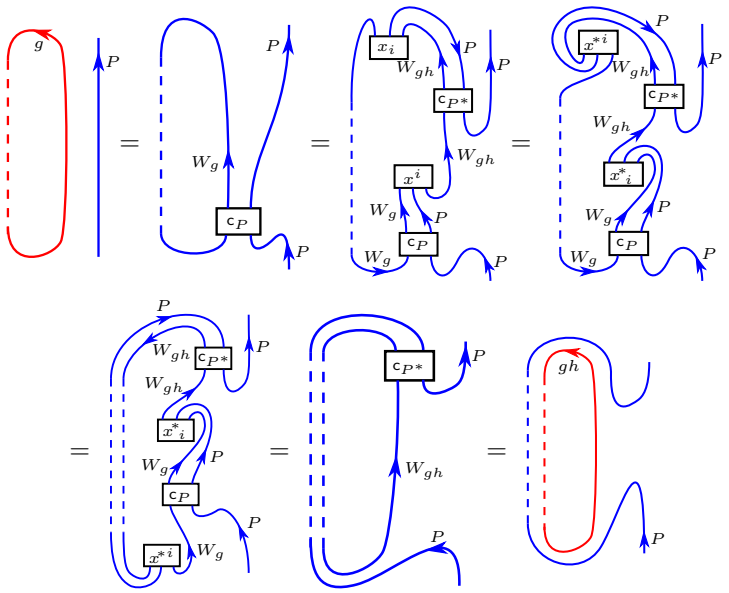
(1) 取逆关系：将一个经 g-着色的红色圆的定向反转，同时将其颜色改为 g^{-1}，见图 *5*。(2) 透明关系（也包括红边为 1-着色的情况）。(3) 滑移关系： T 的一条蓝边可以如图 *6* 所示滑过一个经 g-着色的红色圆。

证明。 关于求逆的不变性直接来自图 4 中两种红到蓝变换的定义。事实上，根据图中的定义，在一个经 g-着色的红色圆左侧进行红到蓝变换，与对一个经 g^{-1}-着色且定向相反的红色圆右侧进行红到蓝变换完全相同。

关于透明关系，若一个红色圆的颜色为 $1 \in$G，那么经过红到蓝修改后，它就表示为一条颜色为 W_1、次数为 1 的边；根据蓝边的透明关系，这条边可以滑过

任意基点。随后撤销红到蓝修改，即可证明红圈的这一关系。

最后，滑移关系的证明如下：首先考虑这样的情况：我们要将一条由 $P \in$ Proj 着色、次数为 $h \in$G 的弦滑过一条红色曲线。此时有以下缠结关系：



其中， $x^*{}_i$ 和 x^{*i} 是由 $x^{*i} = (x_i)^* \circ (\phi_{W_{gh}} \otimes \mathrm{Id}^{P^* \otimes W_g{}^*})$ 和 $x^*{}_i = (\phi^{-1}_{W_{gh}} \otimes \mathrm{Id}^{P^* \otimes W_g{}^*}) \circ (x^i)^*$ 定义的对偶基（这里回顾一下， $\phi_X \colon X \to X^{**}$ 是枢轴结构）。接下来，考虑一般情况：我们要将一条由 $V \in \mathscr{C}$ 着色的弦滑过一条红色曲线。按照图 3 中的缠结关系，我们可以假设在由 V着色的弦旁边有一条由 $P \in \mathrm{Proj}_{\mathscr{C}}$ 着色的弦。插入由恒等态射着色的券片后，我们将想要滑动的由 V着色的弧替换为由 $V \otimes P \in \mathrm{Proj}_{\mathscr{C}}$ 着色的弧，然后将其滑过红色曲线。随后移除插入的券片，并将由 P着色的弦滑回原处，即可得到所需结果。□

6. The 3-dimensionalG-HQFT

6.1. Juh´asz 对配边范畴的表述。本节沿用 Juh´asz [Juh18], 的思路，介绍生成配边范畴 **Cob** 的初等配边。令 $n \in \mathbb{N}^*$ （我们尤其关注 $n = 2$ 情形，但会证明任意 n 下的命题 6.9）。回顾一下，**Cob** 的对象是闭的定向 n-流形，态射是（$n+1$）维配边的等价类。当两个配边等价时，我们记作 $C \simeq C'$ ；这表示它们之间存在一个微分同胚，且该微分同胚在边界上是恒等映射。

把手配边 $\mathsf{M}(\mathbb{S})$: $\Sigma \to \Sigma(\mathbb{S})$。
我们回顾通过粘接一个 $(n+1)$ 维的 index-k 把手而得到的协边，适用于 $k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$。设 Σ 是一个闭的定向 n 流形。 Σ 中的一个带框架的 $(k-1)$ 球面的反向定向嵌入

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^{k-1} : S^{k-1} \times D^{n-k+1} \hookrightarrow \Sigma \, .$$

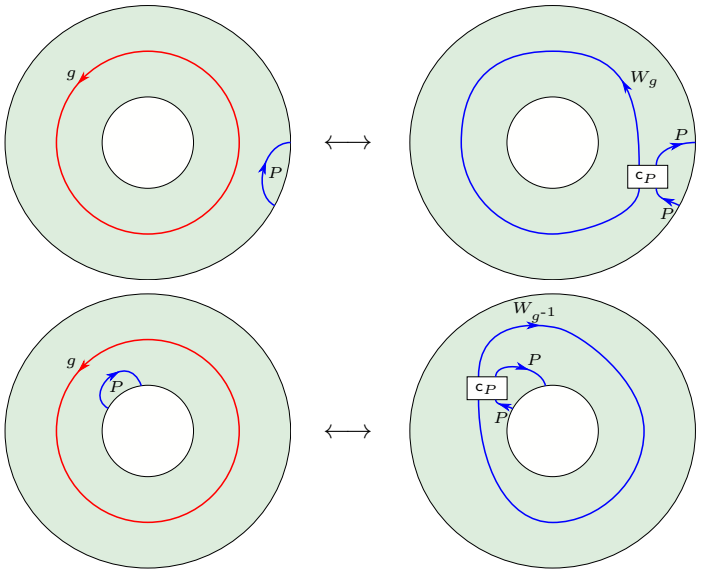


FIGURE 4. 色彩修正

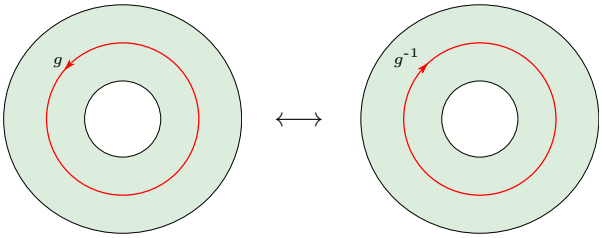


FIGURE 5. 反转红色圆的定向

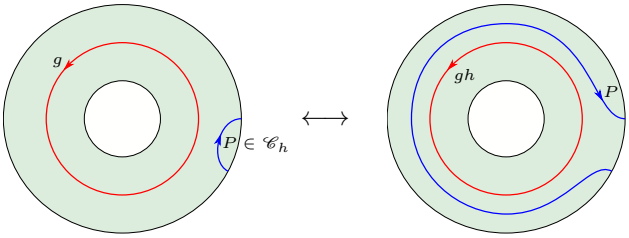


FIGURE 6. 在红色圆上滑动

然后，我们可以沿着 $\mathbb{S}$ 对 Σ 进行手术：移除 $\mathbb{S}$ 的像的内部，并粘入 $D^k \times S^{n-k}$，从而得到一个良定义的拓扑流形 $\Sigma(\mathbb{S})$。利用该球面的框架，可以赋予它典范光滑结构。

给定一个带框架的（$k-1$）球面 $\mathbb{S}$，我们用 $\mathsf{M}(\mathbb{S})$ 表示相应的光滑协边，它从 Σ 到 $\Sigma(\mathbb{S})$（在边界相对意义下，在微分同胚意义上唯一；例如参见 [Mil65b，定理 3.13]），其拓扑空间为

$$\mathsf{M}(\mathbb{S}) := (\Sigma \times [-1,1]) \cup_{\mathbb{S}\times\{1\}} (D^k \times D^{n-k+1}) : \Sigma \to \Sigma(\mathbb{S}). \tag{11}$$

注意，在 $k=0$ 的情形下，Σ 中的（-1）框架球面 $\mathbb{S}$ 是唯一的映射 $\emptyset \to \Sigma$。此时 $\Sigma(\mathbb{S}) = \Sigma \sqcup S^n$，且 $\mathsf{M}(\mathbb{S}) = \Sigma \times [-1,1] \sqcup D^{n+1}$。

映射柱 $\mathsf{C}(\psi)$: $\Sigma \to \Sigma'$。
对于两个闭定向 n-流形之间任意一个保定向微分同胚 $\psi : \Sigma \to \Sigma'$，$\psi$ 的映射柱是如下协边

$$\mathsf{C}(\psi) := \Sigma \times [0,1] : \Sigma \to \Sigma', \tag{12}$$

其中 $\Sigma \times \{0\}$ 通过 ψ与 Σ 相识别，$\Sigma \times \{1\}$ 通过 ψ与 Σ' 相识别。

Juh´asz 指出，由闭定向 n-流形中的带框架球面所标记的协边 $\{\mathsf{M}(\mathbb{S})\}_{\mathbb{S}}$，以及由保定向微分同胚所标记的映射柱 $\{\mathsf{C}(\psi)\}_{\psi}$，生成范畴$\mathbf{Cob}$，并给出了完整的一组关系：

(R1) 对于闭定向 n-流形之间可复合的微分同胚 ψ 和 ψ'，有关系 $\mathsf{C}(\psi \circ \psi') \simeq \mathsf{C}(\psi) \circ \mathsf{C}(\psi')$。此外，若 ψ: $\Sigma \to \Sigma$ 是一个与恒等映射同伦的微分同胚，则有关系 $\mathsf{C}(\psi) \simeq \mathrm{Id}_\Sigma \in$ 自同态集$_{\mathbf{Cob}}(\Sigma)$。

(R2) 设 ψ: $\Sigma \to \Sigma'$ 是闭定向 n-流形之间的保定向微分同胚，且 $\mathbb{S}$ 是 Σ中的一个带框架球面。考虑 Σ' 中的带框架球面 $\mathbb{S}' = \psi \circ \mathbb{S}$，并将诱导微分同胚记为 $\psi^{\mathbb{S}}$: $\Sigma(\mathbb{S}) \to \Sigma'(\mathbb{S}')$。则下图的交换性定义了一个关系：

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\mathsf{M}(\mathbb{S})} & \Sigma(\mathbb{S}) \\ {\scriptstyle \mathsf{C}(\psi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{C}(\psi^{\mathbb{S}})} \\ \Sigma' & \xrightarrow{\mathsf{M}(\mathbb{S}')} & \Sigma'(\mathbb{S}') \end{array}$$

（R3）设 $\mathbb{S}$，$\mathbb{S}'$ 是有向 n流形 Σ中的互不相交的带框架球面。那么 $\mathbb{S}$（分别地，$\mathbb{S}'$）也定义了一个带框架球面 $\mathbb{S}_{\mathbb{S}'}$，位于 $\Sigma(\mathbb{S}')$中（分别地，位于 $\mathbb{S}'_{\mathbb{S}}$（Σ）中）。注意 $\Sigma(\mathbb{S})(\mathbb{S}'_{\mathbb{S}}) = \Sigma(\mathbb{S}')(\mathbb{S}_{\mathbb{S}'})$，并将此 n流形记作 $\Sigma(\mathbb{S}, \mathbb{S}')$。下图的交换性定义了一个关系：

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\mathsf{M}(\mathbb{S})} & \Sigma(\mathbb{S}) \\ {\scriptstyle \mathsf{M}(\mathbb{S}')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{M}(\mathbb{S}'_{\mathbb{S}})} \\ \Sigma(\mathbb{S}') & \xrightarrow{\mathsf{M}(\mathbb{S}_{\mathbb{S}'})} & \Sigma(\mathbb{S}, \mathbb{S}') \end{array}$$

(R4) 设 $\mathbb{S}$ 是定向 n流形 Σ 中的一个带框架的 k 球面，$\mathbb{S}'$ 是 $\Sigma(\mathbb{S})$ 中的一个带框架的k'球面。若附着球面 $\mathbb{S}'(S^{k'} \times \{0\}) \subset \Sigma(\mathbb{S})$ 与带球面 $\{0\} \times S^{-k+1} \subset \Sigma(\mathbb{S})$ 横截地相交于一点，则存在一个微分同胚（在同痕意义下良定义）ϕ: $\Sigma \to \Sigma(\mathbb{S})(\mathbb{S}')$（参见 [Juh18，定义 2.17]），并且有以下关系：

$$\mathsf{M}(\mathbb{S}') \circ \mathsf{M}(\mathbb{S}) \simeq \mathsf{C}(\phi).$$

(R5) 对于定向 n流形 Σ中的每个带框架的 k 球面 $\mathbb{S}$，都有关系 $\mathsf{M}(\mathbb{S}) \sim \mathsf{M}(\bar{\mathbb{S}})$，其中带框架的 k 球面 $\bar{\mathbb{S}}$: $S^k \times D^{2-k} \hookrightarrow \Sigma$ 由 $\bar{\mathbb{S}}(x,y) = \mathbb{S}(r_{k+1}(x)\ r_{2-k}(y))$ 定义，适用于任意 $x \in S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ 和 $y \in D^{2-k} \subset \mathbb{R}^{2-k}$，其中 $r_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$。

可以修改这个表示，得到子范畴$\mathbf{Cob}'$的一个表示，其中每个配边的每个分支都有非空的源和非空的靶（见 [Juh18]）：为此，只需移除生成元 $\mathsf{M}(\mathbb{S})$，其中 $\mathbb{S}$ 是指标为 0 或 $n+1$ 的带框架的附着球面，并忽略涉及这些生成元的关系。

类似地，通过移除生成元 $\mathsf{M}(\mathbb{S})$（其中 $\mathbb{S}$ 是指标为 0 的带框架的附着球面），并忽略涉及这些生成元的关系，可以得到“非紧”配边范畴$\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$ 的一个表示，使得每个配边的每个分支都有非空的源（见 [CGPV23]）。

6.2. **G-装饰手柄**。 在本小节中，我们假设 $n = 2$，并描述 G-装饰的（$2+1$）-配边范畴$\mathbf{Cob}$的生成元。

映射柱 $\mathsf{C}(\psi) : \Sigma \to \Sigma'$。

If $\Sigma\Sigma'$和是 $\tilde{\mathsf{G}}$-装饰曲面，且 ψ 是 G-装饰曲面之间的同构，因此 $\psi(Y) = Y'$ 和 $\psi_* \rho = \rho'$，于是它诱导出一个 G-装饰配边$\mathsf{C}(\psi)$，该配边由 $\mathsf{C}(\psi)$ 配备唯一的 G-表示 ρ_{C} 给出。此表示与边界相容，并且满足 $\rho_{\mathsf{C}}(\{y\} \times [0,1]) = 1$，对每个 $y \in Y$均成立。

标准 G-装饰柄配边。
现在我们来定义 G-装饰柄附着。G-装饰柄配边 C 是一个 G-装饰配边，其底层配边是$\mathbf{Cob}$中的柄配边。我们从中区分出一类标准 G-装饰柄配边，它们的源与靶中的基点满足一些相容性条件。记 $1 \in S^{k-1} \subset D^k$ 为 $\mathbb{R}^k$ 的标准基中的第一个单位向量，-1 为其对跖元素，其中 $k \geq 1$。

定义 *6.1.* 假设 $n = 2$ 且设 $\Sigma = (\Sigma, Y, \rho)$ 为一个 *G*-装饰曲面。设$\mathbb{S}$ 是 Σ 中的一个带框架的 $(k-1)$-球面，并且对于 $\varepsilon, \eta \in \{\pm\}$，令 $y_{\varepsilon\eta} = \mathbb{S}(\varepsilon \times \eta) \in \Sigma$。我们称 $\mathbb{S}$ 为 Σ 中的标准带框架 $(k-1)$-球面，当且仅当满足下列条件。在此情况下，我们定义手术后的 *G*-装饰曲面 $\Sigma(\mathbb{S}) = (\Sigma(\mathbb{S})\ Y(\mathbb{S})\ \rho(\mathbb{S}))$。对于 $k = 1$，还需要一些额外数据 $g \in G$。

若 $k = 0$：附着球面为空。我们不要求任何条件。令

$$\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}) := (\Sigma \sqcup S^2, Y \sqcup \{1\}, \rho)$$

其中我们已将 $\Pi_1(S^2, 1) \simeq *$ 识别为平凡群胚。

若 $k = 1$：附着球面由两个圆盘组成。我们要求 $Y \cap \mathbb{S} = \{y_{++}, y_{-+}\}$在每个圆盘上各为一点。对于任意元素 $g \in \mathsf{G}$，令

$$\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}, g) := (\Sigma(\mathbb{S}), Y, \rho(\mathbb{S}, g))$$

其中 $\rho(\mathbb{S}, g)$ 是唯一的 G-表示，它在两个圆盘 $\Pi_1(\Sigma, Y) \simeq \Pi_1(\Sigma \smallsetminus \mathbb{S}, Y) \to \Pi_1(\Sigma(\mathbb{S})\ Y)$ 的外部与 ρ 一致，并在路径 $\gamma = D^1 \times \{1\} \subseteq D^1 \times S^1 \subseteq \Sigma(\mathbb{S})$上的取值为 g。

若 $k = 2$：附着球面是一个环带。我们要求 $Y \cap \mathbb{S} = \{y_{++}, y_{+-}\}$，并且核 $\gamma = \mathbb{S}(S^1 \times \{1\}) \in \Pi_1(\Sigma, Y)$ 的取值为 $\rho(\gamma) = 1 \in \mathsf{G}$。我们设

$$\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}) := (\Sigma(\mathbb{S}), Y, \bar{\rho})$$

其中 ρ 是 $\Sigma(\mathbb{S})$ 上唯一的 G-表示，它在$\Sigma \smallsetminus \mathbb{S}$上与 ρ 一致。它定义良好，因为 $\rho(\gamma) = 1$。

若 $k = 3$**：** 附着球面是一个2-球面，因此 $\Sigma = \Sigma' \sqcup S^2$。我们要求$Y \cap \mathbb{S} = \{y_+\}$。我们设

$$\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}) := (\Sigma', Y \cap \Sigma', \rho|_{\Sigma'}) \ .$$

在所有这些情形下，我们定义 G-装饰的 k-柄附着3-协边

$$\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}) := (\mathsf{M}(\mathbb{S}), \rho_{\mathsf{M}}) : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{\Sigma}(\mathbb{S})$$

其中，ρ_{M} 是与边界相容且满足$\rho_{\mathsf{M}}(\{y\} \times [0,1]) = 1$ 的唯一 G-表示，对每个 $y \in Y \cap (\Sigma \smallsetminus$ 内部$(\mathbb{S}))$ 均成立。对于 $k = 1$，当我们需要强调其对 $g \in \mathsf{G}$ 之选择的依赖时，将其记作$\widetilde{\mathsf{M}(\mathbb{S}, g)}$。

我们将看到，映射柱、标准 G-装饰柄配边$\widetilde{\ }$以及 G-装饰曲面之间的等价生成 $\mathbf{Cob}$。

6.3. **手柄映射与手柄消去**。

定义 6.2。 设 $\widetilde{\Sigma}$ 为一个 G-装饰曲面， $\mathbb{S}$： $S^2 \hookrightarrow \Sigma$ 一个标准附着$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$*2*-球面，而 $\mathsf{M}(\mathbb{S})$： $\Sigma \to \Sigma(\mathbb{S})$ 为定义 *6.1* 中的标准 G-装饰 *3*-手柄附着。记作 $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}' \sqcup S^2$。

该 3-手柄映射 是如下线性映射：

$$\mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S})) : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}' \sqcup S^2) & \to & \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}') \\ T \sqcup T' & \mapsto & \mathsf{F}'(T') \cdot T \end{array}$$

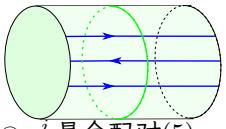
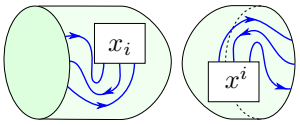
由对来自(1)的 S^2 中的可容许骨架的不变量进行计算得到。

定义 6.3。 设 $\widetilde{\Sigma}$为一个 G-装饰曲面， $\mathbb{S}$： $S^1 \times D^1 \hookrightarrow \Sigma$一个标准带框$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$*1*-球面，而 $\mathsf{M}(\mathbb{S})$： $\Sigma \to \Sigma(\mathbb{S})$ 为定义 *6.1* 中的标准 G-装饰 *2*-手柄附着。记作 $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}' \underset{S^1 \times S^0}{\cup} S^1 \times D^1$ 和 $\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}) = \widetilde{\Sigma}' \underset{S^1 \times S^0}{\cup} D^2 \times S^0$。

2-手柄映射 是线性映射：

$$\mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S})) : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}) & \to & \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S})) \\ T & \mapsto & T' \end{array}$$

其中，假设 T 与 $\mathbb{S}$ 的核横截相交，并且具有下方所示的标准形式； T' 则是从 T 中移除 $T \cap S^1 \times D^1$ ，再将其替换为下方 $D^2 \times S^0$ 中的编织后得到的。

$T =$  $\mapsto \quad T' = \sum_i$ 

.

其中 $\sum_i x_i \otimes x^i$ 是余配对(5)。

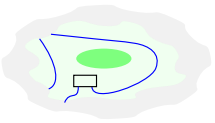
原则上，这个映射取决于我们如何将 T 同伦变形为与 $\mathbb{S}$的核横截，以及如何为交点选定次序。然而，根据引理 5.4（2）和（3），可以将任意券滑过切割态射，并改变线性序而保持循环序不变。因此，这个映射是良定义的。此外，根据引理 5.4（1），它在反转附着球面时保持不变。

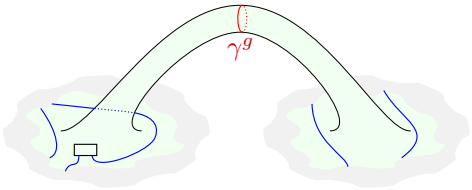
定义 6.4。 设 $\widetilde{\Sigma}$ 为一个由 G装饰的曲面， $\mathbb{S}: S^0 \times D^2 \hookrightarrow \Sigma$ 为标准的带框架 *0*-球面， $g \in \mathsf{G}$ 为任意元素，且 $\mathsf{M}(\mathbb{S}, g): \Sigma \to \Sigma(\mathbb{S}, g)$ 为定义 *6.1* 中的标准 G-装饰 *1*-柄附着。记 $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}' \underset{S^1 \times S^0}{\cup} D^2 \times S^0$ 和 $\Sigma(\mathbb{S}, g) = \Sigma' \underset{S^1 \times S^0}{\cup} S^1 \times D^1$。我们将 $\gamma = S^1 \times \{0\} \subseteq \Sigma(\mathbb{S}, g)$ 记作余核，并将曲线 γ 记作由 g着红色的 γ^g 。

1-柄映射是线性映射：

$$\mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S})): \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}) & \to & \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S})) \\ T & \mapsto & T \cup \gamma^g \end{array}$$

其中假设 T 与 $\mathbb{S}$ 不相交，因此给出 $\Sigma' \subseteq \Sigma$（$\mathbb{S}$， g）中的一个编织，而 γ 是一个 g着色的红色圆，它被解释为图 *4* 中的一个编织。从图形上看，我们得到：

$T =$ 

$\mapsto T' \cup \gamma^g =$ 

同样，原则上这个映射取决于我们如何将 γ 变为蓝色，以及如何将T 同伦至与 $\mathbb{S}$ 不相交。图 5 中的滑动关系表明，任意两个这样的同伦通过命题 5.17(3)给出等价结果。两种将γ 变为蓝色的方式通过命题 5.16给出等价结果。因此，这个映射定义良好。此外，根据命题 5.17(1)，反转附着球面的方向并如图 6 所示将 g 换成 g^{-1}，该映射保持不变。

1-柄与 2-柄的消去。 设 $\mathbb{S}^0$ 是 $\widetilde{\Sigma}$ 中的标准带框 0-球，且 $\mathbb{S}^1$ 是 $\widetilde{\Sigma}$（$\mathbb{S}^0$）中的标准带框 1-球，并且它与 $\mathbb{S}^0$相消。

未装饰的手柄附着相消，即它们复合后得到某个微分同胚 $\psi: \Sigma \to \Sigma$（$\mathbb{S}^0$）（$\mathbb{S}^1$）的映射柱，该微分同胚在 Σ中的一个球之外是恒等映射。根据我们对 G-装饰曲面的标准手柄附着的要求，这一结论在 G-装饰配边层面也成立：

$$\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^1) \circ \widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^0, g) \simeq \widetilde{M_\psi} \ .$$

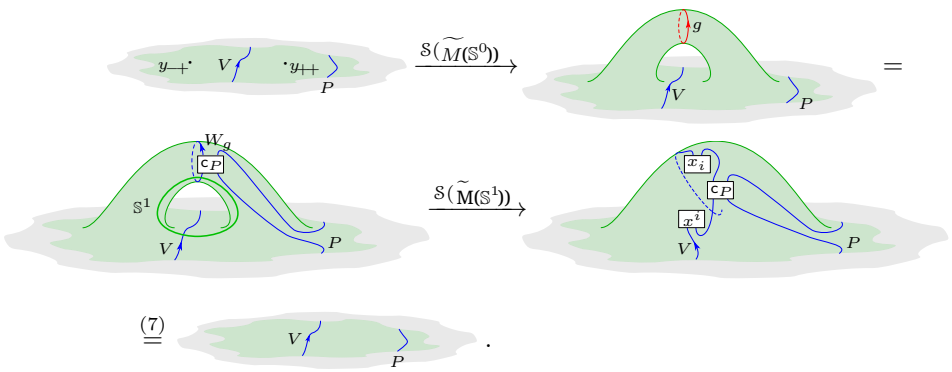
命题 6.5。 对于上述一对相消的 *1*-柄与 *2*-柄，编织柄映射满足手柄消去关系：

$$\mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^1)) \circ \mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^0, g)) = \mathcal{S}(\widetilde{M_\psi})$$

作为线性映射相等 $\mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}) \to \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}^0)(\mathbb{S}^1))$。

证明。 给定 $\mathcal{S}(\Sigma \setminus (Y \cup \mathbb{S}^0))$ 中的一个编织，我们可以假设它与 $\mathbb{S}^1$的圆相交于唯一一条由某个 $V \in \mathscr{C}_g$着色的边。注意， V 的次数由以下条件确定： $\mathbb{S}^1$ 是一个标准的 G-装饰柄附着，并且附着在

一个在 ρ 下取值为 1 的圆上。于是，由色映射的定义关系可得结论，即:



其中，在最后一个等式中，我们省略了微分同胚 ψ 。 □

2-柄与3-柄的消去设 $\widetilde{\Sigma}$为一个 G-装饰曲面， $\mathbb{S}^1$ 为 $\widetilde{\Sigma}$ 中的标准带框1-球面，$\mathbb{S}^2$ 为 $\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}^1)$ 中的标准带框2-球面，并且该球面与 $\mathbb{S}^1$相消。

未装饰的手柄附着会相消，即它们复合后得到某个微分同胚 $\psi : \Sigma \to \Sigma(\mathbb{S}^1)(\mathbb{S}^2)$ 的映射柱；该微分同胚在 Σ 中某个球之外为恒等映射。根据我们对 G- 装饰曲面的标准手柄附着的要求，G-装饰配边复合后得到这个映射柱与一个限制圆柱的复合 e ，该限制圆柱忘掉附着 2-球面上的基点:

$$\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^2) \circ \widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^1) \simeq \widetilde{M_\psi} \circ e \ .$$

命题6.6. 对于上述一对相消的标准 *2*-柄和 *3*-柄配边，编织柄映射满足手柄消去关系:

$$\mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^2)) \circ \mathcal{S}(\widetilde{\mathsf{M}}(\mathbb{S}^1)) = \mathcal{S}(\widetilde{M_\psi}) \circ \mathcal{S}(e)$$

作为线性映射 $\mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}) \to \mathcal{S}(\widetilde{\Sigma}(\mathbb{S}^1)(\mathbb{S}^2))$。

证明。 这由 $\Omega_P = \sum_i x^i \otimes x_i$ 作为修正迹 t_P 的余配对的定义关系推出；也就是说，在发生手柄消去的圆盘中，编织是一条弦，其上有一个颜色为 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}, P)$ 的唯一券，而它映射为同一个编织，只是券的颜色变为 $\sum_i \mathsf{t}_P(f \circ x^i) x_i$；这是 f，因为 $\sum_i x^i \otimes x_i$ 是一个余配对。□

6.4. 主要结果。设$\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$ 是$\mathbf{Cob}$的子范畴，由底层协边属于$\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$的 G-装饰配边构成。

定理 6.7。设 $\mathscr{C}$ 是一个G-色范畴。那么存在唯一的非紧G-*HQFT*

$$\mathcal{S} : \widetilde{\boldsymbol{Cob}^{\mathrm{nc}}} \to \mathrm{Vect}$$

它将一个G-装饰曲面 Σ 映射到 $\mathcal{S}(\Sigma)$，将一个规范圆柱 $C^{\varphi}_{\Sigma,\, Y,\, \rho}$ 映射到 φ_*，将一个限制圆柱 $R_{\Sigma,\, Y_1,\, Y_2,\, \rho}$ 映射到限制映射 $r(\Sigma, Y_1, Y_2, \rho)$，将一个映射圆柱 C_ψ 映射到映射 ψ_*，并将每个标准柄附着映射到第*6.3*节的手柄映射。

推论 *6.8.* 假设 $\mathscr{C}$ 上的修正迹 t 在相差一个标量的意义下唯一。令M 为一个闭三维流形，且 $\rho\colon \pi_1(M) \to G$ 为一个模共轭表示。定义 $\hat{} M = M \setminus B^3$，固定 $* \in \partial \hat{} M$，并任意将 ρ 延拓为 $\hat{}\rho\colon \pi_1(\hat{} M, *) \to G$。则$\mathcal{S}(\hat{} M, \hat{}\rho, *) = \mathcal{S}(M, \rho)\mathrm{F}'$，其中某个标量 $\mathcal{S}(M, \rho) \in \mathbb{K}$ 与 $\hat{}\rho$ 和 $*$的选择无关。

证明。由于根据定理 3.7，t 是唯一的，我们有 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{S}(S^2, \hat{}\rho, *)) = 1$。此外，如果 $e\colon (S^2, \hat{}\rho, *) \to (S^2, \hat{}\rho', *)$ 是一个等价，则 $\mathrm{F}' \circ \mathcal{S}(e) = \mathrm{F}'$，因为根据修正迹的标准性质，如果 T 和 $T' \subset S^2$ 相差一个穿过 $*$ 的边的同痕，则 $\mathrm{F}'(T) = \mathrm{F}'(T')$。□

我们将在本小节的其余部分证明定理 6.7。

以下论述实质上源自 [Juh18], ，尽管其并未以这种形式陈述。为方便读者，我们回顾其证明；关于更强论述的详细证明，另见 [Syt25] 。

回顾第6.1小节中范畴 $\mathbf{Cob}$ （分别为 $\mathbf{Cob}'$、$\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$）的（$n+1$）-协边的表示。若 w 是生成元中的一个词，我们用 $|w|$ 表示相应的 $n+1$-协边。于是，形式为 $w \simeq w'$ 的关系（R1）—（R5）中的每一个都定义了一个微分同胚，它是协边 $|w| \xrightarrow{\sim} |w'|$之间的等价。我们称这样的微分同胚为$\boldsymbol{Cob}$ （分别为$\mathbf{Cob}'$、$\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$）的关系微分同胚。

命题 6.9. 设 $n \in \mathbb{N}^*$，并考虑第*6.1*小节中范畴$\boldsymbol{Cob}$（分别为 $\boldsymbol{Cob}'$、$\boldsymbol{Cob}^{\mathrm{nc}}$）的($n+1$)-协边的表示（请注意，在此命题中，协边没有G-装饰）。设 w_1、w_2 为生成元中的词，$|w_1|$、$|w_2|$ 为相应的 $n+1$-协边。任意微分同胚$D\colon |w_1| \to |w_2|$，都可在边界上为恒等映射的同痕意义下，表示为$\boldsymbol{Cob}$ （分别为$\boldsymbol{Cob}'$、$\boldsymbol{Cob}^{\mathrm{nc}}$）的关系微分同胚序列。

证明。用于呈现配边范畴的核心思想是，将配边 W 写成柄附着的复合，与为该配边配备一个 Morse函数 f类似。柄附着对应于临界点。因此，可以将改变手柄分解理解为改变 Morse函数，而后者可通过 Cerf理论得到充分理解。

实际上，Morse函数本身并不足以提供所需的全部数据。在 [Juh18] 中，作者讨论了 Morse数据，它由一个 Morse函数 f、一个伪梯度向量场 v 以及一组切割值 b组成。若要使 Morse 数据与手柄分解完全等价，还必须增加最后一项数据：每个临界点附近的一个坐标图 ϕ，在其中 f 具有标准形式 $f = \sum_{i=1}^{k} -x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$，且 $v = \mathrm{grad}\ f$。

由于是由生成元复合而得，配边 $W_i := |w_i|$ 自带此类 Morse 数据，即一个 Morse函数 f_i 、一个伪梯度向量场 v_i、一组切割值 b_i 以及临界点附近的标准坐标图 ϕ_i。分别将这些 Morse 数据记为 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 。

现在，考虑微分同胚 $D\colon |w_1| \to |w_2|$。我们可以将 D 视为一个两步过程。首先，我们有一个保持 Morse 数据的微分同胚 $D\colon (W_1, \mathcal{F}_1) \to (W_2, D_*\mathcal{F}_1)$，其中 $D_*\mathcal{F}_1 = (f_1 \circ D^{-1}, D_*v_1, b_1, D \circ \phi_1)$ 是在 D作用下传输的 Morse 数据 $\mathcal{F}_1$。然后，我们有一条 Morse 数据路径 $(W_2, D_*\mathcal{F}_1) \to$

$(W_2, \mathcal{F}_2)$。 [Juh18] 的关系（见第6节第6.1小节）实际上分为两类：由保持 Morse 数据的微分同胚诱导的关系，以及由 Morse 数据路径诱导的关系。

按照 [Juh18, 定理 1.7], 的证明可知，保持 Morse 数据的微分同胚 $D : (W_1, \mathcal{F}_1) \to (W_2, D_*\mathcal{F}_1)$ 是通过反复应用关系 (R2) 和关系 (R1) 的第一种情形导出的。另一方面，根据构造，由 Morse 数据路径产生的关系会导出 W_2上的一个微分同胚，它与恒等映射同痕。

如 [Juh18], 中所述，不含 0-柄的 Morse 数据之间的路径始终可以避开 0-柄，而该微分同胚由非紧关系微分同胚导出。同样，避开 0 和 $n+1$-柄即可得到$\mathbf{Cob}'$ 的相应结果。□

引理 6.10。若 C_1, C_2 是指标为$k \in \{1, 2, 3\}$ 且带有 $\left|\widetilde{C}_1\right| = \left|\widetilde{C}_2\right|$ 的标准 G-装饰柄附着，或者它们是与同一组微分同胚相关联的映射柱；并且若 e, e' 是G-装饰曲面的等价，且满足$\sim \quad \sim \quad \sim C_2 = e' \circ C_1 \circ e$，则 $\mathcal{S}(C_2) = \mathcal{S}(e') \circ \mathcal{S}(C_1) \circ \mathcal{S}(e)$。

证明。只需考虑 $\left|\widetilde{C}_1\right|$ 连通的情形。首先可以看出，C_2 由 C_1 和 e唯一确定；继而根据引理 4.7, e' 由 e唯一确定。在 C_1 的情形下：$(\Sigma, Y, \rho) \to (\Sigma', \psi(Y)\ \rho \circ \psi^{-1})$ 是 ψ 和 $e = J_\varphi \circ R(\Sigma, Z, Y, \rho)$ 的映射柱，因此 C_2 必须是从 $(\Sigma, Z, \varphi^{-1}.\rho_{|Z})$ 出发的ψ的映射柱，而 e' 由关系 $C_1 \circ J_\varphi \circ R(\Sigma, Z, Y, \rho) = J_{\varphi\circ\psi^{-1}} \circ R(\Sigma', \psi(Z)\ \psi(Y)\ \rho \circ \psi^{-1}) \circ \widetilde{C}_2$确定。由于 $\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)_* \circ r(\Sigma', \psi(Z)\ \psi(Y)\ \rho \circ \psi^{-1}) = \mathcal{S}(\psi) \circ \varphi_* \circ r(\Sigma, Z, Y, \rho) \circ \mathcal{S}(\psi^{-1})$，结论得证。

If $\widetilde{C}_1$ 是一个指标 3 柄， e' 是平凡的；这是因为映射 $\mathcal{S}(C_1) = \mathrm{F}' : \mathcal{S}(S^2, Y, \rho) \to \mathbb{K}$ 可分解为经由 $\mathrm{F}' : \mathcal{S}(S^2) \to \mathbb{K}$ 的映射，且与装饰变更所关联的映射无关。

When是一个指标 1 或 2 柄，我们可以将其源和目标中的基点集 Y 在中识别出来。结论由此得出，因为 $\mathcal{S}(C_1)$ 与附着球面之外一个基点的删除相交换，并且对任意 $(y, g) \in Y \times \mathsf{G}$，都与 $(g^{\delta_y})_*$ 相交换。若该点位于附着球面之外，或若 $k = 2$, 最后这一点显然成立。对于 $k = 1$ 和 $y = y_\pm$，这是将一个次数为g 的带色弦从红色圆上滑过的结果（见图 6）。□

定理 *6.7* 的证明。 设 $\widetilde{C}$ 是一个 G-装饰协边，且满足 $\left|\widetilde{C}\right| = C$。选择将 C 分解为$\mathbf{Cob}$生成元乘积的分解。在各生成元之间插入恒等圆柱，并在切片曲面上放置若干基点，使每个生成元都是标准的。选择将表示 C 提升到这组新的基点上的提升。由此得到 C 的 G-装饰生成元分解。

$$\widetilde{C} = e_n \circ \widetilde{C}_n \circ e_{n-1} \circ \cdots \circ e_1 \circ \widetilde{C}_1 \circ e_0$$

其中， e_i 是 G-装饰曲面的等价，而 C_i 是标准的 G-装饰生成元。

我们首先断言， $\mathcal{S}(e_n) \circ \mathcal{S}(C_n) \cdots \mathcal{S}(C_1) \circ \mathcal{S}(e_0)$与基点的选择以及 C的表示的提升无关。事实上，设$\sim \quad \sim \quad \sim$ $C = e'_n \circ C'_n \circ e'_{n-1} \circ \cdots \circ e'_1 \circ C'_1 \circ e'_0$是另一个分解。根据引理 4.7,

并对 $k = 1, \dots, n$ 使用归纳法，可知存在唯一的 G-装饰曲面等价 e_k'' 使得 $e_k \circ \widetilde{C}_k = e_k'' \circ (e_k' \circ \widetilde{C}_k' \circ (e_{k-1}'')^{-1})$。特别地，将引理 4.7 的唯一性应用于 C 可得 $e_n'' = \mathrm{Id}$。于是，由引理 6.10 可知 $\mathcal{S}(\widetilde{C}_k) = \mathcal{S}(e_k^{-1} \circ e_k'' \circ e_k') \circ \mathcal{S}(\widetilde{C}_k') \circ \mathcal{S}((e_{k-1}'')^{-1})$。由于 $\mathcal{S}$ 在 $\widetilde{\mathbf{Cob}_e}$ 上具有函子性，因此这意味着

$$\mathcal{S}(e_k) \circ \mathcal{S}(\widetilde{C}_k) = \mathcal{S}(e_k'') \circ (\mathcal{S}(e_k') \circ \mathcal{S}(\widetilde{C}_k')) \circ \mathcal{S}(e_{k-1}'')^{-1},$$

并通过复合，$\left(\prod_k \mathcal{S}(e_k) \circ \mathcal{S}(\widetilde{C}_k)\right) \circ \mathcal{S}(e_0) = \left(\prod_k \mathcal{S}(e_k') \circ \mathcal{S}(\widetilde{C}_k')\right) \circ \mathcal{S}(e_0')$。

若 $f\colon \widetilde{C_1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{C_2}$ with $h_i : |w_i| \to C_i$ 是 C_i 的分解，且它是 $\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$ 的生成元中一个词 w_i 的实现，那么 $h_2^{-1} \circ f \circ h_1 : |w_1| \xrightarrow{\sim} |w_2|$ 可以实现为 $\mathbf{Cob}^{\mathrm{nc}}$ 中一系列关系。假设该关系是 C_i 与 C_{i+1} 之间的手柄消去。利用同伦的映射柱以及 Juh´asz 关系 (1) 和 (2)，我们可以假设带框架的柄生成元附着球面的相对位置允许我们选择基点和~ ~表示，使得 e_i 是恒等映射，并且 C_{i+1}, C_i 是标准的 G-装饰~ ~柄附着。于是，根据命题 6.5、6.6，$\mathcal{S}(C_{i+1}) \circ \mathcal{S}(C_i)$ 是与 G-装饰曲面 $C_{i+1} \circ C_i$ 的等价相关联的映射~ ~。

因此 仅取决于 G-装饰配边 C 的等价类。□

7. Relation with the modified Turaev-Viro invariant

设 $\mathscr{C}$ 是相对于 X 的 G-有限球面范畴，如定义 5.11 所述。

7.1. 由 skein G-HQFT 构造的 TV 流形不变量。 设 Γ 是一个有限图，其顶点集 Γ_0 非空，并嵌入在闭连通三维流形 M 中。令 $\rho \in \mathrm{Rep}_G(M, \Gamma_0)$。我们称三元组 (M, Γ, ρ) 为 TV 流形。在 [GPT09 中，GP13], 根据 $\mathscr{C}$ 定义了 TV 流形的一个微分同胚不变量。

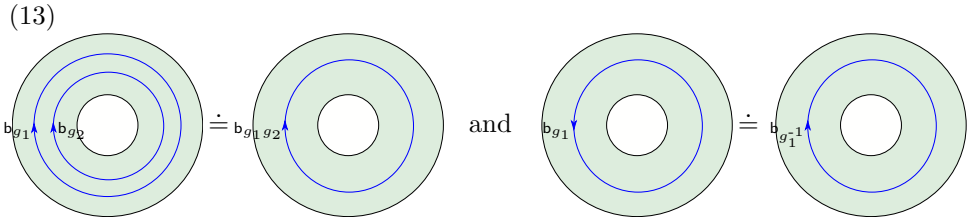
否则，利用分次 skein G-HQFT，我们如下定义 TV 流形的不变量：

首先，若 $g \in G \setminus X$，则定义对象的形式线性组合

$$\mathsf{b}_g = \sum_{V_i} \mathsf{b}(V_i) V_i,$$

其中，求和遍历 $\mathscr{C}_g$ 的简单对象同构类的一组代表。于是，只要 g_1，g_2，$g_1 g_2 \notin X$，便有如下环带中的 Proj-skein 关系：

(13)



这提供了一种将 b_g 对 $g \in X$ 的定义扩展为 $\mathsf{b}_h \otimes \mathsf{b}^{h^{-1}g}$ 的方法，该方法独立于 $h \in G \setminus (X \cup gX)$。

接下来，设 (M,Γ,ρ) 是一个 TV 流形，且 Σ 是 Γ 在 M 中的闭管状邻域 $N(\Gamma)\simeq\Gamma\times D^2$ 的边界。我们固定 Σ 上的基点集 $Y=\Gamma_0\times\{1\}$。然后，通过限制表示 ρ，我们得到一个带有通向空集的协边的 G-装饰曲面：

$$(M\setminus N(\Gamma),\rho):(\Sigma,Y,\rho)\to\widetilde{\emptyset}.$$

对于配备任意定向的每条边 e，我们得到 G 中的一个元素，由 $g_e=\rho(e)$ 定义；并得到一条简单曲线 $m_e\subset\Sigma$，它是 e 的一条定向子午线，我们用 b_{g_e} 为其着色。这给出一个编织 $\Gamma_{\mathsf{b}}\in\mathcal{S}(\Sigma,\ Y,\ \rho)$。注意，根据公式（13），改变编织的定向不会影响 Γ_{b} 在 $\mathcal{S}(\Sigma,\ Y,\ \rho)$ 中的类。

定理 7.1。设 (M,Γ,ρ) 是一个 *TV* 流形，且 $\Gamma_{\mathsf{b}}\in\mathcal{S}(\Sigma,Y,\rho)$ 如上所述。则有

$$\mathsf{TV}(M,\Gamma,\rho)=\mathcal{S}(M\setminus N(\Gamma))(\Gamma_{\mathsf{b}}).$$

该定理的证明见下一小节。

7.2. **修正的 Turaev-Viro 不变量**。在 [GPT11 中，GP13], 利用额外选择的基本数据，从 $\mathscr{C}$ 定义了一个 TV 流形不变量：$\mathscr{C}$ 的一组基本数据由以下内容构成

(1) 一族有限集 $\{I_g\}_{g\in\mathsf{G}}$，并且对于每个 $g\in\mathsf{G}\setminus\mathsf{X}$，$\{V_i\}_{i\in I_g}$ 是 $\mathscr{C}_g$ 中简单对象的同构类代表元族；(2) $I=\bigcup_{\mathsf{G}\setminus\mathsf{X}}I_g$ 上的一个对合 $i\mapsto i^\star$，以及 $\mathscr{C}$ $\{w_i$ 中的一族同构：$V_i\to(V_{i^\star})^*\}_{i\in I}$，满足：对于任意 $i\in I$，$w_{i^\star}=(w_i)^*\circ\phi_{V_{i^\star}}$，其中 ϕ_V：$V\to V^{**}$ 是枢轴结构。

令 $H^{j_1,\ j_2\ \ j_n,\ldots,,,i_n}_{i_1,i_2}=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V_{i_1}\otimes V_{i_2}\otimes\cdots\otimes V_{i_n},V_{j_1}\otimes V_{j_2}\otimes\ldots\otimes V_{j_n})$。利用 $\mathscr{C}$ 的枢轴结构和同构 $\{w_i\}_{i\in I}$，可得到与修正迹给出的配对相容的典范同构：

$$H_{i,j,k}\simeq H_{k,i,j}\simeq H_{j,k,i}\simeq H^{k^\star,j^\star,i^\star}\simeq H^{j^\star,i^\star,k^\star}\simeq H^{i^\star,k^\star,j^\star}$$
$$\simeq H^{k^\star}_{i,j}\simeq H^{j^\star}_{k,i}\simeq H^{i^\star}_{j,k}\simeq H^{k^\star,j^\star}_{i}\simeq H^{j^\star,i^\star}_{k}\simeq H^{i^\star,k^\star}_{j}$$

通过这一同构归纳系统识别所有这些空间，从而可以定义重数空间 $H(i,\ j,\ k)$，它在循环置换意义下仅取决于 $(i,\ j,\ k)$。修正迹给出的配对诱导出一个非退化配对 $H(i,\ j,\ k)\otimes H(k^\star,\ j^\star,\ i^\star)\to\mathbb{K}$

不变量 $\mathsf{TV}(M,\Gamma,\rho)$ 通过对 TV 流形 (M,Γ,ρ) 作一个 H-三角剖分来计算：所谓 M 的三角剖分 $\mathcal{T}$，是指 M 上的光滑 Δ-复形结构（如 [Hat02] 中所述）。粗略地说，Δ-复形结构是由一组互不相交的单形构成的商空间，通过识别其中某些面得到。具体而言，$\mathcal{T}$ 中单形的内部嵌入于 M，但它们的面未必彼此不同，而且两个不同的单形可能在多个面上相交。若 $\mathcal{T}$ 中的任一单形都嵌入于 M，则称 $\mathcal{T}$ 为拟正则。这等价于要求 $\mathcal{T}$ 中任意一条边的两个端点是 $\mathcal{T}$ 中不同的顶点。设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}^1_\Gamma$ 的一组无向边。令 $\Phi:\vec{\mathcal{T}}^1\to\mathsf{G}$ 为定义在有向边上的映射。若 $\Phi(\vec{\mathcal{T}}^1)\subset\mathsf{G}\setminus\mathsf{X}$，则称 Φ 是容许的。于是，若 $(\mathcal{T},\mathcal{T}^1_\Gamma,\Phi)$ 是 (M,Γ,ρ) 的一个 H- 三角剖分，则

(1) $\mathcal{T}$是 M 的拟正则三角剖分，(2) $\mathcal{T}^1_\Gamma$ 的边
的并集是 Γ,

(3) Γ 的顶点集 Γ_0 是 $\mathcal{T}$的顶点集 $\mathcal{T}^0$ 的子集，(4) 图 Γ 是哈密顿的，即 $\mathcal{T}^0$ 的每个顶点都与 $\mathcal{T}^1_\Gamma$的一条边相邻，(5) 函数 Φ 可延拓为 $\mathsf{Rep}_G(M,\ \mathcal{T}^0)$ 的一个表示，其在 $\mathsf{Rep}_G(M,\ \Gamma^0)$ 上的限制等于 ρ。

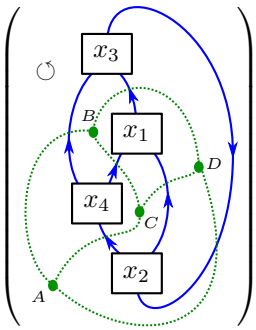
特别是，最后一点意味着：如果 $\Phi(\overrightarrow{AB})\Phi(\overrightarrow{BA}) = 1$若 $\overrightarrow{AB}$和 $\overrightarrow{BA}$在 $\vec{\mathcal{T}}^1$中是同一条边但定向相反，并且 $\Phi(\overrightarrow{AB})\Phi(\overrightarrow{BC})\Phi(\overrightarrow{CA}) = 1$对于 $\mathcal{T}^2$ 中任意一个以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$为边的三角形 ABC。

如果 $(\mathcal{T},\ \mathcal{T}^1_\Gamma,\ \Phi)$ 是 $(M,\ \Gamma,\ \rho)$ 的一个 H-三角剖分，则 Φ 的一个态 φ 是一个映射 $\varphi:\vec{\mathcal{T}}^1 \to I$，它将 $\mathcal{T}$ 的有向边映射到 I，并满足 $\varphi(e) \in I_{\Phi(e)}$ 和 $\varphi(-e) = \varphi(e)^\star$。$\Phi$ 的态集合 $\mathsf{St}(\Phi)$ 是有限的。

若 $f = ABC$是三角剖分中的一个定向面，则我们为其关联重数模 $H(\vec{f},\varphi) = H(i,j,k)$，其中 $i = \varphi(\overrightarrow{AB})$，$j = \varphi(\overrightarrow{BC})$，$k = \varphi(\overrightarrow{CA})$。$(f,\varphi)$ 的余配对是元素 $\Omega_{f,\varphi} \in H(i,j,k) \otimes H(k^\star,j^\star,i^\star)$，它关于 m-迹的配对为对偶。注意，$H(k^\star,j^\star,i^\star) = H(-\vec{f},\varphi)$。

若 $T = ABCD$ 是 $\mathcal{T}$ 中正向定向的一个 3-单形，其四个面 $\vec{f}_1 = BCD$，$\vec{f}_2 = ADC$，$\vec{f}_3 = ABD$，$\vec{f}_4 = ACB$根据边界规则继承定向。我们将元素 $|T|_\varphi$关联给 $(T,\ \varphi)$，它属于 $\bigotimes_{i=1}^4 H(\vec{f}_i,\varphi)^* = \left(\bigotimes_{i=1}^4 H(\vec{f}_i,\ \varphi)\right)^*$，该元素由下图所示的图 G在 T 的边界中的像给出；该边界在拓扑上是一个定向二维球面：

$$|T|_\varphi : (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) \mapsto$$



其中，边的颜色由 $[\vec{e} \cap G]_{\mathscr{C}} = V_{\varphi(\vec{e})}$给定。这个标量不依赖于四个顶点 A，B，C，D的顺序选择，模去偶置换。

$(M,\ \Gamma,\ \rho)$ 的修正的 Turaev-Viro 不变量是以下标量 $\mathsf{TV}(M,\ \Gamma,\ \rho) = \mathsf{TV}(\mathcal{T},\ \mathcal{T}^1_\Gamma,\ \Phi)$:

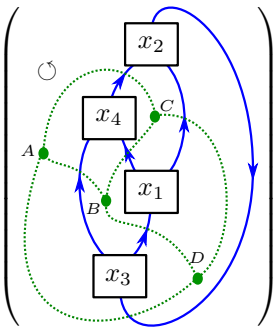
$$(14)\quad \sum_{\varphi\in \mathsf{St}(\Phi)} \left(\prod_{e\in\mathcal{T}^1_\Gamma} \mathsf{b}(V_{\varphi(\vec{e})})\right) \times \left(\prod_{e\in\mathcal{T}^1\setminus\mathcal{T}^1_\Gamma} \mathsf{d}(V_{\varphi(\vec{e})})\right) \times \left(\bigotimes_{T\in\mathcal{T}^3} |T|_\varphi\right) \left(\bigotimes_{f\in\mathcal{T}^2} \Omega_{\vec{f},\varphi}\right),$$

其中 $\mathcal{T}^1$ 是 $\mathcal{T}$ 的边集，$\mathcal{T}^2$ 是其 2-单形集，$\mathcal{T}^3$ 是其 3-单形集；求和中的元素 $\vec{e}$ 和 f 分别表示赋予任意定向的边 e 和面 f。以下内容见 GPT11，定理 22,24,25] 和 GP13，定理 14,15,16]

定理 7.2。任意 *TV* 流形 (M,Γ,ρ) 都存在一个 H-三角剖分 $(\mathcal{T},\mathcal{T}^1_\Gamma,\Phi)$，且由公式 (14) 给出的标量 $\mathsf{TV}(\mathcal{T},\mathcal{T}^1_\Gamma,\Phi)$ 仅取决于 (M,Γ,ρ)的微分同胚类。

下文中，我们需要对 $\mathcal{T}$ 的单形进行一致定向。注意，若 $T^- = ABCD$ 是 $\mathcal{T}$ 中一个负向定向的 3- 单形（即 $ACBD$ 在 M 中是正向定向的），且 φ 是一个态，那么 $|T^-|_\varphi$（相差因子排列）是 $\bigotimes_{i=1}^4 H$ 的对偶中的一个元素（$\vec{f}_i$，φ），其中 $\vec{f}_1 = BDC$，$\vec{f}_2 = ACD$，$\vec{f}_3 = ADB$，$\vec{f}_4 = ABC$ 由下图 G 给出：

$$\left|T^-\right|_\varphi : (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) \mapsto = \mathrm{F}'$$



其中，边的颜色由 $[\vec{e} \cap G]_{\mathscr{C}} = V_{\varphi(\vec{e})}$ 给出。

我们在 $\mathcal{T}$ 的顶点集合 $\mathcal{T}^0$ 上固定一个全序。这诱导出 $\mathcal{T}$ 中任意单形的典范定向，特别是 $\mathcal{T}$ 中各边的典范定向。令 $n_3 = \mathrm{card}(\mathcal{T}_3)$ 表示 $\mathcal{T}$ 中四面体的数量。

令 $N(\mathcal{T}_1) \subset M$ 为 $\mathcal{T}$ 的 1-骨架的一个开管状邻域。令 Σ' 为其边界，Y' 为基点集，每个顶点附近各有一个基点。我们可以将 $(M \setminus N(\Gamma)\ \rho) : (\Sigma,\ Y,\ \rho) \to \emptyset$ 分解为

$$(\Sigma, Y, \rho) \xrightarrow{\widetilde{C}_0} (\Sigma, Y', \Phi) \xrightarrow{\widetilde{C}_1} (\Sigma', Y', \Phi) \xrightarrow{\widetilde{C}_2} ((S^2)^{\sqcup n_3}, Y'') \xrightarrow{\widetilde{C}_3} \emptyset.$$

~在上述复合中，第一个 G-装饰配边 C_0 是通过遗忘 $C_{\Sigma,\ Y',\ \Phi}$ 的基点而得到的限制圆柱。第二个 G-装饰配边 $\widetilde{C}_1$ 是通过粘接 Σ 一个 1-指标把手而得到的，每条边 $e \in \mathcal{T}^1 \setminus \mathcal{T}_\Gamma^1$ 对应一个。该 1-指标把手是边 e 的管状邻域，其定向取为上述典范定向 ~。第三个 G-装饰配边 C_2 是通过为三角剖分的每个面粘接 Σ' 一个 2-指标把手而得到的。其目标是由球面构成的 n_3 分量曲面，这些球面与 $\mathcal{T}$ 各四面体的边界平行，并且每个四面体的每个顶点附近都有 4 个基点。最后一个 G-装饰配边 C_3 则是用 3-指标把手（即三维球）填充这些 n_3 球面。

现在，我们将 G-HQFT $\mathcal{S}$应用于这一 G-装饰配边的复合，以计算 Γ_b的像。

我们首先利用（13）中的缀等价，将 Γ_b 修改为一个与之 skein 等价的图 Γ'_b，它位于 $\mathcal{S}(\Sigma, Y, \rho)$ 中；对于 $\mathcal{T}_\Gamma^1$的每条边 e，该图都包含一条以 $\mathsf{b}^{\Phi(\vec{e})}$ 着色的定向子午线（这里我们利用顶点的排序为 e 赋予典范定向 $\vec{e}$）。编织 Γ'_b 也表示 $\mathcal{S}(\Sigma, Y', \Phi)$ 中的一个元素，它是 $\mathcal{S}(C_0)$ 对 Γ_b 的像~。

映射 $\mathcal{S}$是在与~e 相关的 1-指标把手的带球面上添加一个红色圆，并用 $\Phi(e)$ 着色。由于 $\Phi(e) \notin$X，将这个圆变为蓝色的色彩变换只需将红色圆替换为一个蓝色圆，并用修改后的基尔比颜色 $\sum_{i \in I_{\Phi(e)}} \mathsf{d}(V_i) V_i$ 着色。将形式上的颜色按多重线性展开，

以及基尔比颜色，可得

$$\mathcal{S}(\widetilde{C}_1)(\Gamma'_{\mathsf{b}}) = \sum_{\varphi\in \mathrm{St}(\Phi)} \left(\prod_{e\in\mathcal{T}^1_\Gamma} \mathsf{b}(V_{\varphi(\vec{e})})\right) \times \left(\prod_{e\in\mathcal{T}^1\setminus\mathcal{T}^1_\Gamma} \mathsf{d}(V_{\varphi(\vec{e})})\right) \times \Gamma_\varphi,$$

其中， Γ_φ 是由 $\mathcal{T}$ 的边的定向子午线构成的图，这些边在 $\mathcal{S}(\Sigma,\ Y',\ \Phi)$中以 $V_{\varphi(-)}$ 着色。

$\widetilde{\ }$ $\vec{\ }$映射 $\mathcal{S}(C_2)$沿每个面 f_i切开曲面，并在两侧放入 $H(\vec{f_i},\ \varphi)$的对偶基。最后， $\mathcal{S}(\widetilde{C}_3)$用 F′ 对这些四面体图求值。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$因此， $\mathcal{S}(M\setminus N(\Gamma))(\Gamma_{\mathsf{b}})\ = \mathcal{S}(C_3)\mathcal{S}(C_2)\mathcal{S}(C_1)\mathcal{S}(C_0)(\Gamma_{\mathsf{b}})$由公式 (14) 的态和给出，这证明了定理 7.1。

References

[AG20] Cristina Ana-Maria Anghel 和 Nathan Geer。由量子 $\mathfrak{sl}$ 2|1 *J. Knot Theory Ramifications* 29 4 2050018, 47, 2020, ( )得到的修正 1705 03859 1 10 1142 0218216520500182 Turaev-Viro 不变量。, ( ): 。v。doi: 。/S 。[Ati88] Michael Atiyah。拓扑量子场论。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 68 68 175 186 1989 1988 10 1007 02698547 , ( ): – ( ), 。doi: 。/ BF 。[BFK99] Doug Bullock、Charles Frohman 和 Joanna Kania-Bartoszy´nska。理解 Kauffman 括号 skein 模。 *J. Knot Theory Ramifications* 8 3 265 277, , ( ): – 。 1999 10 1142 0218216599000183 doi: 。/S 。[BGPR20] Christian Blanchet、Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Nicolai Reshetikhin。全纯性编织、双 quandles，以及具有 SL $_2$ $\mathbb{C}$ *Selecta Math. (N.S.)* 26 2 19, 58, 2020, ( ) 平坦联络的链环 1806 02787 1 10 1007 00029 020 0545 0 的量子不变量。, ( ):第 号。v。doi: 。/s - - - 。[BH26] Jennifer Brown 和 Benjamin Ha¨ıoun。非半单情形下的 skein 范畴。 *Selecta Math. (N.S.)*, 32(34), 2026。doi:10.1007/s00029-026-01143-z。arXiv:2406.08956。[BW99] John W. Barrett 和 Bruce W. Westbury。球面范畴。 *Adv. Math.*, 143 2 357 375, 1999 10 1006 1998 1800 ( ): – 。doi: 。/aima. . . [BW11] Francis Bonahon 和 Helen Wong。曲面群在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中的表示的量子迹。 *Geom. Topol.*, 15(3):1569–1615, 2011。doi:10.2140/gt.2011.15.1569。[CGHP23] Francesco Costantino、Nathan Geer、Benjamin Ha¨ıoun 和 Bertrand Patureau-Mirand。来自非半单带状范畴的 skein (3+1 2023,)-拓扑量子场论，。 2306 03225 1 v。[CGP23] Francesco Costantino、Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand。容许 skein 模，2023, 2302.04493v1。[CGPT20] Francesco Costantino、Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Vladimir Tu- raev。幺模范畴中的 Kuperberg 和 Turaev-Viro 不变量。 *Pacific J.Math.*, 306(2):421–450, 2020, 1809.07991v2。doi:10.2140/pjm.2020.306.421。[CGPV23] Francesco Costantino、Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Alexis Vire- lizier。来自非半单球面范畴的非紧致 (2+1 2024,)-拓扑量子场论，。。 2302 04509 URL `https://arxiv.org/abs/2302.04509`。[CP95] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。 *A guide to quantum groups*。剑桥大学出版社，剑桥，1995。1994 年原版的修订重印本。[DKP92] C. De Concini、V. G. Kac 和 C. Procesi。量子余伴随作用。 *J. Amer. Math. Soc.* 5 1 151 189, 1992 10 2307 2152754 , ( ): – 。doi: 。/ 。[DKS25] Renaud Detcherry、Efstratia Kalfagianni 和 Adam S. Sikora。小三维流形的 Kauffman 括号 skein 模。 *Advances in Mathematics*, 467:110169, 2025 年 5 月。doi:10.1016/j.aim.2025.110169。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。 *Tensor categories* 205 *Mathematical Surveys and Monographs* , 第 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。doi:10.1090/surv/205。

[FKL19] Charles Frohman、Joanna Kania-Bartoszynska 和 Thang Lˆe。Kauffman 括号 skein 代数表示的唯一性。 *Invent. Math.*，215(2):609–650，2019。doi:10.1007/s00222-018-0833-x。[GJS 23] Sam Gunningham、David Jordan 和 Pavel Safronov。skein 模的有限性猜想。 *Invent. Math.*，232(1):301–363，2023。doi:10.1007/s00222-022-01167- 0。[GKP13] Nathan Geer、Jonathan Kujawa 和 Bertrand Patureau-Mirand。非半单范畴中的灵巧对象和迹函数。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，141 9 2963 4477 2978，2013，1106 3 10 1090 0002 9939 2013 11563 7 ( ): – 。v。doi: 。/S - - - - 。[GKP22] Nathan Geer、Jonathan Kujawa 和 Bertrand Patureau-Mirand。（非幺模）pivotal 范畴中的 M-迹。 *Algebr. Represent. Theory*，25 776，2022，1809 3 759 00499 2 10 1007 10468 021 10044 ( ): – 。v。doi: 。/s - - -y。[GP13] Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand。来自非受限量子群的拓扑不变量。 *Algebr. Geom. Topol.*，13(6):3305–3363，2013，1009.4120v3。doi:10.2140/agt.2013.13.3305。[GP18] Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand。量子群射影表示上的迹。 *Lett. Math. Phys.*，108(1):117–140，2018，1610.09129v1。doi:10.1007/s11005-017-0993-4。[GP25] Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand。借助修正迹研究量子拓扑：从半单到非半单。书稿准备中，2025。[GPT09] Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Vladimir Turaev。修正量子维数与重新归一化链环不变量。 *Compos. Math.*，145(1):196–212，2009。doi:10.1112/S0010437X08003795。[GPT11] Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Vladimir Turaev。修正的 $6j$ 3 228 2 1163 1202， 2011, -符号和-流形 0910 1624 2 10 1016 2011 06 015 不变量。 *Adv. Math.*，( ): – 。v。doi: 。/j.aim. . . . [GPV13] Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Alexis Virelizier。pivotal 范畴中理想上的迹。 *Quantum Topol.*，4(1):91–124，2013，1103.1660v2。doi:10.4171/QT/36。[Hai25] Benjamin Ha¨ıoun。Crane-Yetter 边界处的非半单 WRT，2025 年 3 月，2503.20905v1。doi:10.48550/ARXIV.2503.20905。[Hat02] Allen Hatcher。 *Algebraic topology*。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[Juh18] Andr´as Juh´asz。通过手术定义和分类拓扑量子场论。 *Quantum Topol.*，9 2 229 0668 6 10 4171 321，2018，1408 108 ( ): – 。v。doi: 。/QT/ 。[KR05] R. Kashaev 和 N. Reshetikhin。其补空间中带有平坦联络的辫状曲线不变量 mr2131015。载于 *Graphs and patterns in mathematics and theoreticalphysics*，第 73 卷 *Proc. Sympos. Pure Math.*，第 151–172 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。doi:10.1090/pspum/073/2131015。[KR05a] Rinat Kashaev 和 Nicolai Reshetikhin。单位根处量子 $\mathfrak{gl}_2$ 的编织。载于 *Noncommutative geometry and representation theory in mathematical physics*，第 391 卷 *Contemp. Math.*，第 183–197 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。doi:10.1090/conm/391/07329。[Mal95] G. Maltsiniotis。幺半范畴中的迹、对偶与纤维幺半范畴。 *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.*，( ): – 。[Mil65b] John Milnor。 *Lectures on the h-cobordism theorem*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1965。L. Siebenmann 和 J. Sondow 笔记。[McP21] Calvin McPhail-Snyder。链环的 $SL_2(\mathbb{C})$-全纯单值不变量，2105.05030v1。[McP20] Calvin McPhail-Snyder。链环的全纯单值不变量与非阿贝尔 Reide meister 扭率。 *Quantum Topology*，13(1):55–135，2022 年 3 月，2005.01133v3。doi:10.4171/QT/160。[MR25] Calvin McPhail-Snyder 和 Nicolai Reshetikhin。单位根处的循环 $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{sl}_2)$-模，以及补空间中带有平坦 $\mathfrak{sl}_2$ 联络的纽结不变量，2025，2509.02354。URL `https://arxiv.org/abs/2509.02354`。[DST24] Adrien DeLazzer Meunier、Christoph Schweigert 和 Matthias Traube。 G-等变 string-net 构造。 *Ann. Henri Poincaré*，25(1):297–345，2024。doi:10.1007/s00023-023-01314-0。arXiv:2304.00106。

[MSWY26] Lukas M¨uller、Christoph Schweigert、Lukas Woike 和 Yang Yang。通过非半单弦网构造 Drinfeld 中心的 Lyubashenko 模函子。 *Advances in Mathematics*，488:110770，12 2026，2312.14010v1。doi:https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110770。[MW24b] Lukas M¨uller 和 Lukas Woike。容许 skein 模与 ansular 函子：比较，2024，2409.17047。URL https://arxiv.org/abs/2409.17047。[Prz91] J´ózef H. Przytycki。3-流形的 skein 模。 *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*，39 1 2 91(-): –100，1991。[Prz99] J´ózef H. Przytycki。Kauffman 括号 skein 模基础。，( ): –66，1999。[SV23] K¨ur¸sat S¨özer 和 Alexis Virelizier。由交叉模分次的幺半范畴与三维同伦量子场论。 *Adv. Math.*，428:论文编号 109155，94，2023。doi:10.1016/j.aim.2023.109155。[Syt25] Filippos Ilarion Sytilidis。 *On surgery presentations of bordism bicategories*。博士论文，牛津大学，2025。[Tur00] V. Turaev。三维同伦场论与交叉群范畴。arxiv，math/0005291v1。[Tur91] Vladimir G. Turaev。曲面上环路泊松代数的 skein 量子化。*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24 6 635 704, 1991 http://www.numdam.( ): – 。URL 。org/item?id=ASENS_1991_4_24_6_635_0
[Tur94] V. G. Turaev。 *Quantum invariants of knots and 3-manifolds* 18 *De* ，卷。*Gruyter Studies in Mathematics* 1994 Walter de Gruyter & Co.，柏林，。[Tur10] Vladimir Turaev。 *Homotopy quantum field theory* 10 *EMS* ，卷。欧洲数 *Tracts in Mathematics* ¨ 2010 学会（EMS），苏黎世，。doi:10.4171/086。附录 5 由 Michael M¨uger 撰写，附录 6 和 7 由 Alexis Virelizier 撰写。[TV92] V. G. Turaev 和 O. Ya. Viro。3-流形的状态和不变量与量子 6*j*-符号。 *Topology*，31(4):865–902，1992。doi:10.1016/0040-9383(92)90015-A。[TV12] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。论三维同伦量子场论，I。 *Internat. J. Math.*，23(9):1250094，28，2012，1202.6292v2。doi:10.1142/S0129167X12500942。[TV14] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。论三维同伦量子场论 II：手术方法。 *Internat. J. Math.*，25 1450027，66，2014，1303 4 1331 1 10 1142 0129167 1450027 ( ): . v . doi: . /S X X . [TV17] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。 *Monoidal categories and topological field the-*
ory 322 *Progress in Mathematics* ¨ 2017 ，卷。Birkhauser/Springer，Cham，。doi:10.1007/978-3-319-49834-8。[Whi78] George W. Whitehead。 *Elements of homotopy theory* 61 *Graduate Texts* ，卷。*in Mathematics* 1978 Springer-Verlag，纽约-柏林，。

Institut de Mathématiques de Toulouse、 118 route de Narbonne、 Toulouse F-31062
Email address: francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Mathematics & Statistics、 Utah State University、 Logan、 Utah 84322、 USA*Email address*: nathan.geer@gmail.com

Institut de Mathématiques de Toulouse、 118 route de Narbonne、 Toulouse F-31062
Email address: benjamin.haioun@ens-lyon.fr

Univ Bretagne Sud, CNRS UMR 6205, LMBA, F-56000 Vannes, France
Email address: bertrand.patureau@univ-ubs.fr