arXiv:2603.23464v1 [math.LO] 24 Mar 2026

船山定理的新证明

Guram Bezhanishvili[1] 和 Wesley H. Holliday[2]

[1]新墨西哥州立大学[2]加州大学
伯克利分校

2026年3月24日

摘要

Funayama 证明了，一个格能够嵌入完备布尔代数，并且保持所有存在的并和交，当且仅当该格满足无限并分配律和无限交分配律。文献中已有这一经典结果的若干证明。在本文中，我们给出船山定理及其推广的一种全新且纯粹基于序理论的证明。

1 引言

由 Birkhoff（1937年）和 Stone（1938年）的经典结果可知，对于任意分配格 L，都存在一个将 L嵌入完备布尔代数的嵌入，并保持有限交和有限并，但不一定保持无限交和无限并。由此自然产生了一个问题：何时存在将 完备嵌入 到L 完备布尔代数中的完备嵌入，也就是说，保持所有已存在的交和并的嵌入。并非每个分配格都能完备嵌入完备布尔代数，因为正如冯·诺伊曼（1936年）所指出的，完备布尔代数满足无限并分配律和无限交分配律：

定义 1.1. 格 L 满足无限并分配性 (JID)，是指对每个已存在的并 $\bigvee S$ 和 $a \in L$，并 $\bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$ 也存在，且

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}.$$

无限交分配性（MID）以对偶方式定义。

虽然并非所有分配格都满足 JID 或 MID，但 Funayama（1959年，定理 6）证明，满足这些原理足以保证存在到某个完备布尔代数中的完备嵌入。

定理 1.2（Funayama 1959年）。对于任意格 L，存在从 L 到某个完备布尔代数的完备嵌入，当且仅当 L 满足 JID 和 MID。

Funayama 的证明很复杂。Grätzer（1971年，第 109 页）在假设 L 是完备的前提下，给出了定理1.2 的一个更易理解的证明，不过可以去掉完备性假设（参见 Bezhanishvili

关键词：并与交的无限分配律；精确交与并；到完备布尔代数的嵌入。**2020年数学主题分类：**06A06, 06A12, 06B23, 06D10, 06D22, 06E10。

等，2013）。证明的基本思路是，$\mathscr{B}L$的 L 布尔包络保留L 中所有已有的并，当且仅当 L 满足 JID；并且它保留所有已有的交，当且仅当 L满足 MID。对$\mathfrak{M}\mathscr{B}L$ 进行 $\mathscr{B}L$ 麦克尼尔完备化，即可完成证明，因为麦克尼尔完备化保留所有已有的并和交。

检查 Grätzer 的证明可知，JID（分别地，MID）等价于存在一个从该格嵌入到完备布尔代数中的 $(\wedge, \bigvee)$-嵌入（分别地，$(\vee, \bigwedge)$-嵌入），也就是说，这种嵌入保持所有有限交和已有的并（分别地，保持所有有限并和已有的交）。因此，船山定理可以改述如下。

定理 1.3. 对于任意格 L:

1. 存在一个将 L 嵌入完备布尔代数的 $(\wedge, \bigvee)$-嵌入，当且仅当 L 满足 JID；2. 存在一个将 L 嵌入完备布尔代数的 $(\vee, \bigwedge)$-嵌入，当且仅当 L 满足 MID；3. 存在一个

将 L嵌入完备布尔代数的完备嵌入，当且仅当 L满足 JID 和 MID

无点拓扑中，主要研究对象是满足 JID 的完备格，称为框架或*locale*（例如参见Picado 和 Pultr 2012）。假设 L 是完备的，定理1.3。1的反向蕴含表明，每个框架都同构于某个布尔框架的子框架。Isbell（1972）通过取 $\mathscr{N}L$的装配框架 L，再考察其布尔化 $\mathfrak{B}\mathscr{N}L$，最后指出$(\wedge, \bigvee)$-嵌入 $L \to \mathscr{N}L$ 可经由 $\mathfrak{B}\mathscr{N}L$ （另见 Johnstone 1982，第 53 页）。

尽管 Grätzer 和 Isbell 的证明不同，但如果 L 是完备的，那么 $\mathfrak{M}\mathscr{B}L$ 和 $\mathfrak{B}\mathscr{N}L$ 同构（Bezhanishvili 等，2013，定理 4.13）。该同构的证明运用了 Priestley 对偶，由此得到了船山定理的另一个直接证明（Bezhanishvili 等，2013，备注 4.7）。

本文给出了船山定理的又一个证明。这一新证明的主要特点如下:

- 该证明纯粹基于序理论。受 Allwein 和 MacCaull 对完备格的表示（2001年）启发，我们从给定的偏序集 P 构造出由 P 中的若干元素对组成的偏序，然后取该对偏序集的正则开代数。根据 Tarski 的一项经典结果（1937年），它是一个布尔代数。

- 我们的方法使得可以将定理1.3.1 推广到任意交半格，并将定理1.3.2 推广到任意并半格，所用概念为精确并与交（见定义2.1），同时也证明了 Funayama 的原始定理。

- 该证明不需要使用布尔包络和麦克尼尔完备化（Grätzer），也不需要使用框架组装和布尔化（Isbell）。此外，与使用 Priestley 对偶的证明不同，该证明不依赖选择公理，而后者依赖素理想定理。

- 另一方面，如果从分配格出发，我们所构造的完备布尔代数与 Grätzer 的完备布尔代数同构；如果从框架出发，则与 Isbell 的完备布尔代数同构。

- 我们的研究提出了两个自然问题（问题 2.7 和 3.8），留待今后研究。

2 构造

在介绍我们的主要构造之前，我们先回顾一下分配的并与交（麦克尼尔，1937 年）这一概念。我们沿用 Ball（1984）的说法，将其称为精确，并指出 Bruns 和 Lakser（1970 年）称一个集合为 S可容许，当且仅当它有精确的并。

定义 2.1。交半格 M 的子集 S 有精确的并，当且仅当 $\bigvee S$ 存在于 M 中，并且对于每个$a \in M$，$\bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$ 存在于 M中，且

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}.$$

对偶地，若并半格 J 的子集 存在精确交，则 $\bigwedge S$ 存在于 J 中，且对于每个 $a \in J$，$\bigwedge\{a \vee s \mid s \in S\}$ 存在于 J中，并且

$$a \vee \bigwedge S = \bigwedge\{a \vee s \mid s \in S\}.$$

给定交半格 M, M'以及嵌入 e: $M \to M'$，如果对于任意子集 $S \subseteq M$，只要 S 存在精确并，就有.....，则称 e保留所有已存在的精确并

$$e\left(\bigvee S\right) = \bigvee\{e(s) \mid s \in S\}.$$

对于 并半格之间的嵌入 e 若要保留所有已存在的精确交，其定义取对偶形式 .

现在我们证明第一个主要结果。

定理 2.2（交半格上的 Funayama 定理）. 对于任意偏序集 P，存在一个嵌入 e，将 P 嵌入完备布尔代数，使得:

1. e 保持所有已存在的有限交;
2. 若 P 是交半格，则 e保持所有已存在的精确并。

证明。 我们不妨假设 P 包含多于一个元素；否则它要么是单元素布尔代数，此时可令 e 为恒等嵌入，要么是空偏序集，此时可令 e 为空嵌入，嵌入到单元素布尔代数中。此外，由于每个偏序集都可以在必要时通过添加最大元和/或最小元嵌入到有界偏序集中，且这会保持所有已存在的交和并，以及交和并的精确性，因此不妨假设 P 有界。我们将其最小元记为 0，最大元记为 1。

令 $\leq$表示 P的序，定义（X_P，$\sqsubseteq$）如下:

1. $X_P = \{(a, b) \in P^2 \mid a \not\leq b\}$;
2. $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ 当且仅当 $a \leq c$ 且 $b \geq d$。

注意，$\sqsubseteq$是一个偏序，其最大元为 (1，0)。给定 $x \in X_P$，令

$$\Downarrow x = \{y \in X_P \mid y \sqsubseteq x\} \text{ and } \mathcal{D}(X_P) = \{U \subseteq X_P \mid \text{ for all } x \in U, \Downarrow x \subseteq U\}.$$

注意，$\mathcal{D}(X_P)$ 是 X_P 上的下集拓扑。$U \subseteq X_P$ 的内部和闭包运算定义为

$$\Box U = \{x \in X_P \mid \Downarrow x \subseteq U\} \text{ and } \Diamond U = \{x \in X_P \mid \Downarrow x \cap U \neq \varnothing\},$$

分别。因此，该拓扑的正则开集是不动点，满足 $\Box\Diamond$ 运算，其中$\Box\Diamond U = \{x \in X_P \mid \Downarrow x \subseteq \Diamond U\}$。我们将正则开集代数记为

$$\mathbf{B}P = (\{\Box\Diamond U \mid U \in \mathcal{D}(X_P)\}, \subseteq)$$

并且注意，根据 Tarski 的一项结果（1937年）（例如，参见 Givant 和 Halmos 2009年，第 10 章），它是一个完备布尔代数。回顾一下，在 $\mathbf{B}P$ 中，交是交集，并由 $\bigsqcup\{U_i \mid i \in I\} = \Box\Diamond\bigcup\{U_i \mid i \in I\}$ 给出。现在考虑映射 $e\colon\ P \to \mathbf{B}P$ 定义如下

$$e(a) = \begin{cases} \Box\Diamond\Downarrow(a,0) & \text{if } a \neq 0 \\ \varnothing & \text{otherwise} \end{cases}.$$

我们将证明，e 是 P 到 $\mathbf{B}P$ 中的所需嵌入。如果 P 是通过在原偏序集 P^- 中添加新的最大元和/或最小元得到的，那么 e 在 P^- 上的限制就是 P^- 到某个完备布尔代数中的所需嵌入。

首先，我们证明 e 是一个偏序集嵌入。为证明 e 是保序的，假设 $a \leq b$。若 $a = 0$，则 $e(a) = \varnothing \subseteq e(b)$。否则，由 $a \leq b$ 可得 $(a, 0) \sqsubseteq (b, 0)$，因此 $\Box\Diamond\Downarrow(a, 0) \subseteq \Box\Diamond\Downarrow(b, 0)$，所以 $e(a) \subseteq e(b)$。接下来，我们证明 e 是反序的。事实上，若 $a \not\leq b$，则 $(a, b) \in X_P$，且 $(a, b) \in \Box\Diamond\Downarrow(a, 0)$，因为对于每个 $(x, y) \in X_P$，若 $(x, y) \sqsubseteq (a, b)$，则 $x \leq a$ 且 $y \geq b$，所以 $x \leq a$ 且 $y \geq 0$，从而 $(x, y) \sqsubseteq (a, 0)$。另一方面，我们断言 $(a, b) \notin e(b)$。若 $b = 0$，则显然成立，因为 $e(0) = \varnothing$，因此不妨设 $b \neq 0$。我们必须证明 $(a, b) \notin \Box\Diamond\Downarrow(b, 0)$，也就是说，$\Downarrow(a, b) \not\subseteq \Diamond\Downarrow(b, 0)$。特别地，$(a, b) \in \Downarrow(a, b)$，因为 $(a, b) \sqsubseteq (a, b)$；但我们断言 $(a, b) \notin \Diamond\Downarrow(b, 0)$。因为若 $(x, y) \sqsubseteq (a, b)$，则 $x \leq a$ 且 $y \geq b$。因此，$x \not\leq b$，否则 $x \leq y$，这与 $(x, y) \in X_P$ 矛盾。于是 $(x, y) \not\sqsubseteq (b, 0)$。

现在我们证明第 1 部分中的 e 保持有限交。首先注意到

$$e(1) = \Box\Diamond\Downarrow(1, 0) = \Box\Diamond X_P = X_P.$$

对于非空有限交，设 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \neq 0$。根据定义，$e(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = \Box\Diamond\Downarrow(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n, 0)$。我们声称

$$\Box\Diamond\Downarrow(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n, 0) = \Box\Diamond\Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Box\Diamond\Downarrow(a_n, 0).$$

首先，对于 $x \in P$ 的 $\downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\}$，注意到由于 $\downarrow(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = \downarrow a_1 \cap \cdots \cap \downarrow a_n$，可得 $\Downarrow(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n, 0) = \Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Downarrow(a_n, 0)$。然后由于 $\Box\Diamond$ 对有限交满足分配律，

$$\Box\Diamond\Downarrow(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n, 0) = \Box\Diamond(\Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Downarrow(a_n, 0)) = \Box\Diamond\Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Box\Diamond\Downarrow(a_n, 0).$$

接下来，设 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 0$，因此 $e(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = \varnothing$。我们证明 $e(a_1) \cap \cdots \cap e(a_n) = \varnothing$。事实上，如果对某个 i 有 $a_i = 0$，那么根据 e 的定义即可得证，因此设对每个 i 都有 $a_i \neq 0$。由于 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 0$，我们有 $\Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Downarrow(a_n, 0) = \varnothing$，所以

$$\Box\Diamond\Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Box\Diamond\Downarrow(a_n, 0) = \Box\Diamond(\Downarrow(a_1, 0) \cap \cdots \cap \Downarrow(a_n, 0)) = \Box\Diamond\varnothing = \varnothing.$$

对于第 2 部分，我们假设 P 是交半格。为了证明 e 保留所有精确并，任取一个具有精确并的 $S \subseteq P$。若 $\bigvee S = 0$，则 $S = \varnothing$ 或 $S = \{0\}$。无论哪种情况，$\bigsqcup\{e(s) \mid s \in S\} = \varnothing$，因为 $e(0) = \varnothing$。因此 $e(\bigvee S) = e(0) = \varnothing = \bigsqcup\{e(s) \mid s \in S\}$。假设 $\bigvee S \neq 0$。不失一般性，可假设 $0 \notin S$。那么，为了证明 $e(\bigvee S) = \bigsqcup\{e(s) \mid s \in S\}$，我们必须证明

$$\Box\Diamond\Downarrow\left(\bigvee S, 0\right) = \bigsqcup\{\Box\Diamond\Downarrow(s, 0) \mid s \in S\}.$$

根据 $\bigsqcup$ 在 $\mathbf{B}P$ 中的定义，我们有

$$\bigsqcup\{\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s\in S\} = \Box\Diamond\bigcup\{\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s\in S\} = \Box\bigcup\{\Diamond\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s\in S\}.$$

因此，只需证明

$$\Box\Diamond\Downarrow\left(\bigvee S,0\right) = \Box\bigcup\{\Diamond\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s\in S\}. \tag{1}$$

从右向左的包含关系显然成立：对于每个 $s\in S$，都有 $(s,\ 0)\sqsubseteq(\bigvee S,\ 0)$，因此 $\Box\Diamond\Downarrow(s,\ 0)\subseteq\Box\Diamond\Downarrow(\bigvee S,\ 0)$。由于这对所有 $s\in S$ 都成立，我们有 $\bigcup\{\Box\Diamond\Downarrow(s,\ 0)\mid s\in S\}\subseteq\Box\Diamond\Downarrow(\bigvee S,\ 0)$，这意味着 $\Box\Diamond\bigcup\{\Box\Diamond\Downarrow(s,\ 0)\mid s\in S\}\subseteq\Box\Diamond\Box\Diamond\Downarrow(\bigvee S,\ 0)$，从而 $\Box\bigcup\{\Diamond\Box\Diamond\Downarrow(s,\ 0)\mid s\in S\}\subseteq\Box\Diamond\Downarrow(\bigvee S,\ 0)$。

对于 (1) 中从左到右的包含关系，设 (a,b) 属于左侧。为证明 (a,b) 属于 (1) 的右侧，任取 $(a',b')\sqsubseteq(a,b)$。由于 $(a,b)\in\Box\Diamond\Downarrow(\bigvee S,0)$，存在 $(a'',b'')\sqsubseteq(a',b')$，使得 $(a'',b'')\in\Downarrow(\bigvee S,0)$，即 $a''\leq\bigvee S$。由于 $\bigvee S$ 是一个精确并，我们有 $a''=a''\wedge\bigvee S=\bigvee_{s\in S}(a''\wedge s)$。由于 $a''\not\leq b''$，可知存在某个 $s\in S$，使得 $a''\wedge s\not\leq b''$。现在我们断言 $(a''\wedge s,b'')\in\Box\Diamond\Downarrow(s,0)$。否则，存在 $(a_s,b_s)\sqsubseteq(a''\wedge s,b'')$，使得 $\Downarrow(a_s,b_s)\cap\Downarrow(s,0)=\varnothing$。因此，$(a_s\wedge s,b_s)\notin X_P$，这意味着 $a_s\wedge s\leq b_s$。由于 $(a_s,b_s)\sqsubseteq(a''\wedge s,b'')$，我们有 $a_s\leq a''\wedge s$，因而 $a_s\leq s$；结合 $a_s\wedge s\leq b_s$，可得 $a_s\leq b_s$，矛盾。因此，$(a''\wedge s,b'')\in\Box\Diamond\Downarrow(s,0)$；再结合 $(a''\wedge s,b'')\sqsubseteq(a',b')$，可得 $(a',b')\in\Diamond\Box\Diamond\Downarrow(s,0)$。所以，$(a,b)$ 属于 (1) 的右侧。

□

注记 2.3。如引言中所述，证明定理 $(X_P,\ \sqsubseteq)$ 中的构造 2.2受到 Allwein 和 MacCaull（2001年，第 207 页）对完备格的表示的启发；另见 Holliday 2021年 的定理 2.7 和Massas 2023年的定义 2.5。该表示在 Bezhanishvili 和 Holliday 2019年的定理 4.32 中被专门用于框架；该定理受到 Fairtlough 和 Mendler（1997年）所发展的宽松逻辑语义的启发。关系 $\sqsubseteq$ 恰好是 $\geq_2$ 在 Bezhanishvili 和 Holliday 2019年的定理 2.7 中的关系。

对偶化定理 2.2，我们得到如下结论。

定理 2.4（并半格上的 Funayama 定理）。对于任意偏序集 P，都存在一个将 P 嵌入到完备布尔代数中的嵌入 e，使得：

1. e 保留所有已有的有限并；
2. 若 P 是并半格，则 e 保留所有已有的精确交。

证明。与定理 2.2 的证明一样，不妨假设 P 有界。令 P^∂为 P的对偶偏序集。令 e^∂为在定理 2.2 的证明中构造的从 P^∂到完备布尔代数 $\mathrm{B}(P^\partial)$ 的嵌入。于是 e^∂ （i）保留有限交，并且（ii）在 P^∂是交半格时保留所有已有的精确并。因此，e^∂是从 P到 $\mathrm{B}(P^\partial)$ 的对偶 $(\mathrm{B}(P^\partial))^\partial$ 的嵌入，它（a）根据（i）保留有限并，且（b）在 P 是并半格时保留所有已有的精确交；在这种情况下，P^∂ 是交半格，故（ii）适用。

□

注 2.5. 偏序集 X_P和 X_{P^∂}通过映射 f同构，该映射定义为 $f(a,b)=(b,a)$。注意，$a\not\leq b$当且仅当 $b\not\leq^\partial a$，因此 f是从 X_P到X_{P^∂}的良定义双射。要证明它是序同构，只需注意

$$\begin{aligned}(a,b)\sqsubseteq_{X_P}(c,d) &\iff a\leq_P c \text{ and } b\geq_P d\\ &\iff c\leq_{P^\partial} a \text{ and } d\geq_{P^\partial} b\\ &\iff (b,a)\sqsubseteq_{X_{P^\partial}}(d,c).\end{aligned}$$

由此可得$\mathbf{B}P\,\mathrm{i}$　　同构于$\mathbf{B}(P^\partial)$，因而根据布尔代数的自对偶性，也同构于$(\mathbf{B}(P^\partial))^\partial$。

尽管备注 2.5指出，定理 2.2 和 2.4 不能直接结合起来，得到一个从格到完备布尔代数、同时保持精确并与精确交的嵌入，因为我们无法假设 $f[e(a)] = e^\partial(a)$。[1] 然而，假设具有分配性后，我们能够证明 e保持所有精确并与精确交。

定理 2.6（分配格的 Funayama 定理）。对于任意分配格 L，存在一个嵌入 e，将 L 嵌入完备布尔代数，并保持所有精确并与精确交。

证明。我们从定理2.2证明的结尾继续，但现在假设 P 是一个分配格。为了证明 e 保持精确交，考虑任意一个 $S \subseteq P$，它具有精确交。首先，假设 $\bigwedge S \neq 0$。那么，为了证明 $e(\bigwedge S) = \prod\{e(s) \mid s \in S\}$，我们必须证明

$$\Box\Diamond\Downarrow\left(\bigwedge S, 0\right) = \bigcap\{\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s \in S\}.$$

对于从左到右的包含，对每个 $s \in S$，由于 $\bigwedge S \leq s$，我们有 $(\bigwedge S, 0) \sqsubseteq (s,0)$，因此$\Box\Diamond\Downarrow(\bigwedge S, 0) \subseteq \Box\Diamond\Downarrow(s,0)$。所以，$\Box\Diamond\Downarrow(\bigwedge S, 0) \subseteq \bigcap\{\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s \in S\}$。

对于从右到左的包含，假设 $(x,y) \in \bigcap\{\Box\Diamond\Downarrow(s,0) \mid s \in S\}$。为了证明 $(x,y) \in \Box\Diamond\Downarrow(\bigwedge S, 0)$，考虑任意的 $(x',y') \sqsubseteq (x,y)$。反设 $(x',y') \notin \Diamond\Downarrow(\bigwedge S, 0)$，即 $\Downarrow(x',y') \cap \Downarrow(\bigwedge S, 0) = \varnothing$。那么 $(x' \wedge \bigwedge S, y') \notin X_P$，所以 $x' \wedge \bigwedge S \leq y'$因此

$$\begin{aligned} y' &= y' \vee \left(x' \wedge \bigwedge S\right) \\ &= (y' \vee x') \wedge \left(y' \vee \bigwedge S\right) \quad \text{by distributivity} \\ &= (y' \vee x') \wedge \bigwedge_{s \in S} (y' \vee s) \quad \text{since } \bigwedge S \text{ is an exact meet.} \end{aligned}$$

由于 $x' \not\leq y'$，可推出 $x' \not\leq \bigwedge_{s\in S}(y' \vee s)$，因此存在某个 $s \in S$ 使得 $x' \not\leq y' \vee s$。现在，$(x',\ y' \vee s) \sqsubseteq (x,\ y)$，而结合 $(x,\ y) \in \bigcap\{\Box\Diamond\Downarrow(s,\ 0)$，可推出 $(x',\ y' \vee s) \in \Diamond\Downarrow(s,\ 0)$。因此存在某个 $(x_s,\ y_s) \sqsubseteq (x',\ y' \vee s)$，使得 $(x_s,\ y_s) \sqsubseteq (s,\ 0)$。但这样便有 $x_s \leq x' \wedge s \leq y' \vee s \leq y_s$，矛盾。

接下来假设 $\bigwedge S = 0$。则 $e(\bigwedge S) = e(0) = \varnothing \subseteq \prod\{e(s) \mid s \in S\}$。对于反向包含，我们断言 $\prod\{e(s) \mid s \in S\} = \varnothing$。如果 $0 \in S$，则这是显然的，因为 $e(0) = \varnothing$。因此反设 $0 \notin S$。进一步假设，为了导出矛盾，$(x,\ y) \in \prod\{e(s) \mid s \in S\}$，于是 $(x,\ y) \in \bigcap\{\Box\Diamond\Downarrow(s,\ 0) \mid s \in S\}$。由于 $\bigwedge S = 0$，我们有 $x \wedge \bigwedge S \leq y$。然后，完全按照上面的方式推导出矛盾，只需将 x' 替换为 x，并将 y' 替换为 y。 □

定理 L 2.6 中的分配性是否必要，是一个我们留待讨论的问题。　　n.

问题 2.7。是否存在一个非分配格 L，使得不存在将 L嵌入完备布尔代数、且保持所有有限交、所有精确并和所有精确交的嵌入?

现在，我们可以将船山定理直接作为定理 2.6的推论得出。

推论 2.8（Funayama）。对于任意格 L，L 可以嵌入到某个完备布尔代数中，当且仅当 L 同时满足 JID 和 MID。

[1]事实上，令 P为在四元布尔代数上方添加一个新顶元所得的结果，那么 P^∂就是在四元布尔代数下方添加一个新底元所得的结果。于是，其中 a是 P的一个原子，可以验证 $f[e(a)] \neq e^\partial(a)$。

证明。 如引言中所述，从左到右的方向显然成立，因为冯·诺伊曼（1936年）指出，完备布尔代数满足 JID 和 MID。对于从右到左的方向，若 L 同时满足 JID 和 MID，则每个存在的并与交都是精确的。由于 L 是一个格，所有非空有限子集都有精确交与并。因此， L 是分配的。现在应用定理 2.6。

□

3 与麦克尼尔完备化的联系

给定一个格 L，令 $e: L \to \mathbf{B}L$ 为定理 2.2证明中给出的嵌入。[2] 由于 $\mathbf{B}L$ 是一个布尔代数，像 $e[L]$ 生成 $\mathbf{B}L$的一个布尔子代数，记作 $\mathscr{B}L$。

注 3.1。 我们有意沿用相同的记号 $\mathscr{B}L$，就像我们在第 1 节中表示分配格 L 的布尔包络时所用的记号一样。这是因为，如果 e 是从分配格 L 到布尔代数 B的格嵌入，那么由 B 生成的子代数 $e[L]$同构于 L的布尔包络（参见，例如，Balbes 和 Dwinger 1974年，第 V.4 节）。

一个自然的问题是， $\mathscr{B}L$ 与 $\mathbf{B}L$有什么关系。回想一下，布尔代数的麦克尼尔完备化B 在同构意义下可描述为一个完备布尔代数 $\mathfrak{M}B$ 以及一个布尔嵌入 $h\colon B \to \mathfrak{M}B$，满足 $h[B]$ 在 $\mathfrak{M}B$中稠密；也就是说，对于每个非零 $x \in \mathfrak{M}B$，都存在一个非零$y \in h[B]$ 使得 $y \leq x$ （见 Sikorski 1969年，第 153 页）。因此，如果 B 是完备布尔代数 C的子代数，那么 C 同构于 B 的麦克尼尔完备化，当且仅当 B 是 C的稠密子代数。

命题 3.2 **.** 对于任意分配格 L,$\mathbf{B}L$ 同构于 $\mathscr{B}L$的麦克尼尔完备化 .

证明。只需证明 $\mathscr{B}L$ 在 $\mathrm{B}L$中稠密。考虑一个非空的 $U \in \mathrm{B}L$，因此存在某个 $(c,d) \in U$。令 e 为在定理 2.2 和 2.6 的证明中使用的从 L 到 $\mathrm{B}L$ 的嵌入。由于 $(c,d) \in X_L$ 且因此$c \not\leq d$，我们有 $e(c) \not\subseteq e(d)$，所以 $e(c) \wedge \neg e(d) \neq \varnothing$。我们断言 $e(c) \wedge \neg e(d) \subseteq U$。由于 $(c,d) \in U \in \mathrm{B}L$，我们有 $\Box\Diamond\Downarrow(c,d) \subseteq U$，因此只需证明 $e(c) \wedge \neg e(d) \subseteq \Box\Diamond\Downarrow(c,d)$。假设 $(w,v) \in e(c) \wedge \neg e(d)$。为证明 $(w,v) \in \Box\Diamond\Downarrow(c,d)$，任取 $(w',v') \sqsubseteq (w,v)$，于是 $w' \leq w$且 $v \leq v'$。我们必须找到一个 $(w'',v'') \sqsubseteq (w',v')$，使得 $(w'',v'') \sqsubseteq (c,d)$。由于 $(w,v) \in e(c) = \Box\Diamond\Downarrow(c,0)$，我们有 $(w',v') \in \Diamond\Downarrow(c,0)$，因此存在某个 $(w'',v'') \sqsubseteq (w',v')$，使得 $(w'',v'') \sqsubseteq (c,0)$。由此可得 $w'' \leq c \wedge w'$且 $w'' \not\leq v'' \geq v'$，所以 $w'' \not\leq v'$，进而 $c \wedge w' \not\leq v'$。由于 $(w,v) \in \neg e(d) = \neg\Box\Diamond\Downarrow(d,0)$，我们有 $d \wedge w \leq v$，因为否则 $(d \wedge w, v) \sqsubseteq (w,v)$ 且 $(d \wedge w, v) \in \Downarrow(d,0) \subseteq \Box\Diamond\Downarrow(d,0)$。于是，给定 $d \wedge w \leq v$、 $w' \leq w$和 $v \leq v'$，我们有 $d \wedge w' \leq v'$。为证明 $c \wedge w' \not\leq d \vee v'$，反设 $c \wedge w' \leq d \vee v'$。那么，利用第二个等式中的分配性， $c \wedge w' = (c \wedge w') \wedge (d \vee v') = (c \wedge w' \wedge d) \vee (c \wedge w' \wedge v')$。但由于 $d \wedge w' \leq v'$ 且 $c \wedge w' \wedge v' \leq v'$，可得 $c \wedge w' \leq v'$，这与我们上文推导出的$c \wedge w' \not\leq v'$ 矛盾。因此， $c \wedge w' \not\leq d \vee v'$，所以 $(c \wedge w', d \vee v') \in X_L$。此外，$(c \wedge w', d \vee v') \sqsubseteq (w',v')$ 且 $(c \wedge w', d \vee v') \sqsubseteq (c,d)$。因此，我们可以取 $(w'',v'') = (c \wedge w', d \vee v')$。这就完成了对 $(w,v) \in \Box\Diamond\Downarrow(c,d)$ 的证明，从而也证明了 $e(c) \wedge \neg e(d) \subseteq \Box\Diamond\Downarrow(c,d)$，这表明 $\mathscr{B}L$ 在 $\mathrm{B}L$中稠密。

□

由命题 3.2 可知，对于分配格，我们的构造与 Grätzer 的构造同构；对于完备 Heyting 代数，它与 Isbell 的构造同构（回顾第 1 节）。然而，对于非分配格，无法保证$\mathbf{B}L$ 是 $\mathscr{B}L$的麦克尼尔完备化，以下例子展示了这一点。该例使用了图 M_3 1左侧所示的格。

事实 3.3。 $\mathscr{B}M_3$ 是$\mathbf{B}M_3$ 的真子代数。

[2]在本节中，不失一般性，我们假设 L 有界，且 $0 \neq 1$；理由见定理 2.2 的证明。

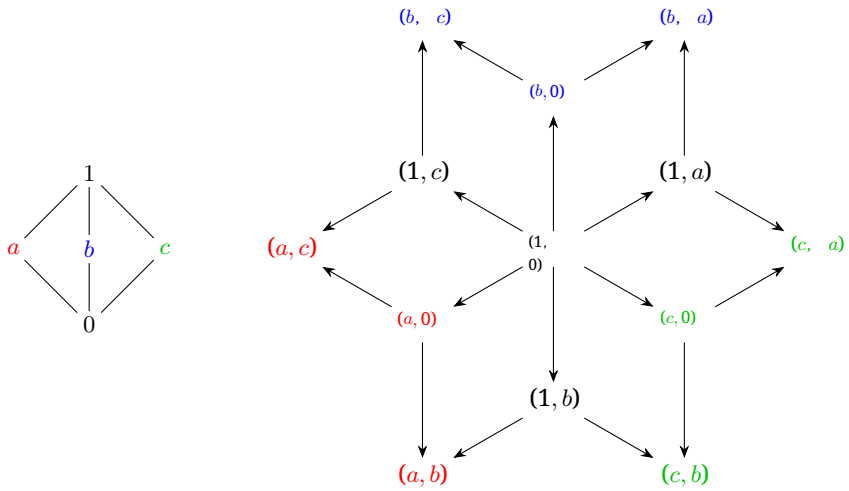


图 1：格 M_3（左）和 X_{M_3}（右）。从 $(x,\ y)$ 指向 $(x',\ y')$ 的箭头表示 $(x',\ y') \sqsubseteq (x,\ y)$。节点的颜色表示嵌入 $e\colon\ M_3 \to \mathbf{B}M_3$。

证明。我们证明 $\{(a,b)\} \in \mathbf{B}M_3 \setminus \mathscr{B}M_3$。首先，我们证明 $\{(a,b)\} \in \mathbf{B}M_3$。为此，只需证明 $\{(a,b)\} = \Box\Diamond\Downarrow(a,b)$。为此，考虑图 1，其中展示了 M_3（左）和 X_{M_3}（右）。注意，$\{(a,b)\}$ 是一个 $\sqsubseteq$-下集。要证明它是一个 $\Box\Diamond$-不动点，任取 $(x,y) \notin \{(a,b)\}$，于是 $x \neq a$ 或 $y \neq b$。我们将证明，在这两种情况下，都存在一个 $(x',y') \sqsubseteq (x,y)$，使得对于所有 $(x'',y'') \sqsubseteq (x',y')$，都有 $(x'',y'') \notin \{(a,b)\}$。若 $x \neq a$，则 $x = 1$ 或 $x \in \{b,c\}$。若 $x = 1$，则令 $(x',y') = (b,y)$（若 $y \neq b$），否则令 $(x',y') = (c,b)$。另一方面，若 $x \in \{b,c\}$，则令 $(x',y') = (x,y)$。现在假设 $x = a$，于是 $y \neq b$。那么 $y = 0$ 或 $y = c$。在这两种情况下，都令 $(x',y') = (a,c)$。

为了证明 $\{(a,b)\} \notin \mathscr{B}M_3$，我们首先断言 $e(a) = \{(a,0),(a,b),(a,c)\}$，其中 e 是将 M_3 嵌入 $\mathbf{B}M_3$ 的嵌入，该嵌入用于定理 2.2 和 2.6 的证明，因此 $e(a) = \Box\Diamond\Downarrow(a,0)$。注意，$\Downarrow(a,0) = \{(a,0),(a,b),(a,c)\}$。我们断言 $\Downarrow(a,0)$ 是一个 $\Box\Diamond$-不动点。考虑任意的 $(x,y) \notin \Downarrow(a,0)$，于是 $x = 1$ 或 $x \in \{b,c\}$。接着，运用与上一段类似的推理，可知存在一个 $(x',y') \sqsubseteq (x,y)$，使得对于所有 $(x'',y'') \sqsubseteq (x',y')$，都有 $(x'',y'') \notin \Downarrow(a,0)$。

接下来，我们证明 $\neg e(a) = \{(b,0),(b,a),(b,c),(c,0),(c,a),(c,b),(1,a)\}$。将右侧称为 Y。显然，对于所有 $(x,y) \in Y$，$\Downarrow(x,y) \cap e(a) = \varnothing$，因此 $(x,y) \in \neg e(a)$。还要注意，

$$X_{M_3} \setminus Y = \{(a,0),(a,b),(a,c),(1,b),(1,c),(1,0)\},$$

并且对于每个 $(x,\ y) \in X_{M_3} \setminus Y$，都存在某个 $(x',\ y') \in e(a)$，使得 $(x',\ y') \sqsubseteq (x,\ y)$，因此 $(X_{M_3} \setminus Y) \cap \neg e(a) = \varnothing$。这就完成了对 $\neg e(a) = Y$ 的证明。

根据对 b 和 c 的对称推理，我们可以计算 $M_3 \setminus \{0,1\}$ 中所有元素及其否定的 e-像：

$$e(a) = \{(a,0),(a,b),(a,c)\}; \qquad \neg e(a) = \{(b,0),(b,a),(b,c),(c,0),(c,a),(c,b),(1,a)\};$$

$$e(b) = \{(b,0),(b,a),(b,c)\}; \qquad \neg e(b) = \{(a,0),(a,b),(a,c),(c,0),(c,a),(c,b),(1,b)\};$$

$$e(c) = \{(c,0),(c,a),(c,b)\}; \qquad \neg e(c) = \{(a,0),(a,b),(a,c),(b,0),(b,a),(b,c),(1,c)\}.$$

注意到 $e(a) \subseteq \neg e(b) \cap \neg e(c)$，$e(b) \subseteq \neg e(a) \cap \neg e(c)$，$e(c) \subseteq \neg e(a) \cap \neg e(b)$，以及 $\neg e(a) \cap \neg e(b) \cap \neg e(c) = \varnothing$。由于 $\mathscr{B}M_3$ 中的每个元素都是若干交的并，其中每个交都包含 $x \in \{a,b,c\}$ 的 $e(x)$ 或 $\neg e(x)$，

$\mathscr{B}M_3$ 的每个原子都是这样的交。由前面提到的包含关系可知， $e(a)$、 $e(b)$和 $e(c)$是仅有的原子。[3] 接着，由于 $\{(a,b)\}$ 是 $e(a)$ 的真子集，因此可得 $\{(a,b)\} \notin \mathscr{B}M_3$。 □

注 3.4. $\mathbf{B}M_3$ 有 6 个原子，即图 1 中"雪花"的六个点： $\{(a,b)\}$, $\{(a,c)\}$,$\{(b,a)\}$, $\{(b,c)\}$, $\{(c,a)\}$, 以及 $\{(c,b)\}$。因此，$\mathbf{B}M_3$ 有 $2^6 = 64$ 个元素。

由于有限布尔代数的麦克尼尔完备化（同构于）其本身，作为事实 3.3 的直接推论，我们得到以下结论。

命题 3.5. $\mathbf{B}M_3$ 不同构于 $\mathscr{B}M_3$ 的麦克尼尔完备化。

另一方面，存在一些非分配格 L使得 $\mathbf{B}L$ 同构于 $\mathscr{B}L$ 的麦克尼尔完备化。一个例子是 N_5，如图 2左侧所示，其中 $\mathbf{B}N_5$ 由 $e[N_5]$生成。

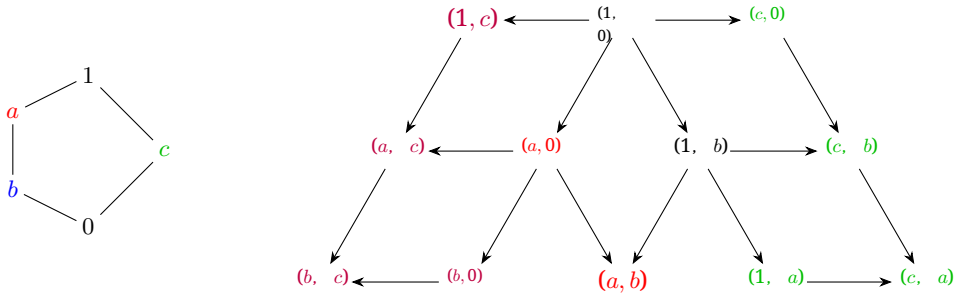


图 2：格 N_5 （左）和 X_{N_5} （右）。从 (x,y) 指向 (x',y') 的箭头表示 $(x',y') \sqsubseteq (x,y)$。节点的颜色表示嵌入 $e\colon N_5 \to \mathbf{B}N_5$，其中紫色的点对属于 e 对 a和 b 的像的交集。

事实 3.6. $\mathbf{B}N_5 = \mathscr{B}N_5$.

证明。 偏序集 X_{N_5} 显示在图2的右侧。直接计算可知，以下每个集合都是 $\Box\Diamond$-不动点 $\mathcal{D}(X_{N_5})$:

$$S_1 = \varnothing; \qquad S_5 = \{(a,b),(c,0),(c,a),(c,b),(1,a),(1,b)\};$$
$$S_2 = \{(a,b)\}; \qquad S_6 = \{(a,0),(a,b),(a,c),(b,0),(b,c),(1,c)\};$$
$$S_3 = \{(a,c),(b,0),(b,c),(1,c)\}; \qquad S_7 = \{(a,c),(b,0),(b,c),(c,0),(c,a),(c,b),(1,a),(1,c)\};$$
$$S_4 = \{(c,a),(c,0),(c,b),(1,a)\}; \qquad S_8 = X_{N_5}.$$

其中 e 是 N_5 到 $\mathbf{B}N_5$ 的嵌入，在定理 2.2 和 2.6的证明中使用，我们有

$$e(a) = S_6,\ e(b) = S_3,\ \text{and } e(c) = S_4.$$

我们断言，除了 $S_1, \ldots, S_8$ 之外，不存在其他 $\Box\Diamond$-不动点。每个 $\Box\Diamond$-不动点都必须是一个 $\sqsubseteq$-下集，因此它要么是 $\varnothing$，要么至少包含一个极小点，即 (b,c) 、 (a,b) 和 (c,a) 。从左到右考察这些极小点，推理如下:

[3]因此， $\mathscr{B}M_3$ 是一个含 8 个元素的布尔代数，由项目符号列表中的 6 个元素以及 $\varnothing$和 X_{M_3}组成。

情形 1：$\min U = \{(b,c)\}$。已知 $(b,c) \in U$，我们有 $S_3 \subseteq U$，因为对于每个 $(x,y) \in S_3$ 和 $(x',y') \sqsubseteq (x,y)$，都有 $(b,c) \sqsubseteq (x',y')$。此外，已知 $(a,b) \notin U$ 和 $(c,a) \notin U$，我们有 $U \subseteq S_3$，因为对于任意 $(x,y) \in X_{N_5} \setminus S_3$，都有 $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ 或 $(c,a) \sqsubseteq (x,y)$。因此，$U = S_3$。

情况 2：$\min U = \{(a,\ b)\}$。那么 $U = S_2$，因为对于任意 $(x,\ y) \in X_{N_5} \setminus S_2$，我们都有 $(b,\ c) \sqsubseteq (x,y)$ 或 $(c,\ a) \sqsubseteq (x,\ y)$。

情况 3：$\min U = \{(c,\ a)\}$。于是，按照与 情况 1 中对称的推理 $U = S_4$。

情况 4：$\min U = \{(b,c),(a,b)\}$。鉴于 $(b,c) \in U$ 且 $(a,b) \in U$，我们有 $(a,0) \in U$，因为对于任意 $(x',y') \sqsubseteq (a,0)$，我们都有 $(b,c) \sqsubseteq (x',y')$ 或 $(a,b) \sqsubseteq (x',y')$；由此可得 $S_6 \subseteq U$。此外，鉴于 $(c,a) \notin U$，我们有 $U \subseteq S_6$，因为对于任意 $(x,y) \in X_{N_5} \setminus S_6$，都有 $(c,a) \sqsubseteq (x,y)$。因此，$U = S_6$。

情形 5：$\min U = \{(b,c),(c,a)\}$。然后，$S_7 = S_3 \cup S_4 \subseteq U$，推理与情形 1 和情形 3 中类似。此外，$U \subseteq S_7$，因为对于每个 $(x,y) \in X_{N_5} \setminus S_7$，都有 $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$。因此，$U = S_7$。

情形 6：$\min U = \{(a,b),(c,a)\}$。然后，按照与情形 4中对称的推理，$U = S_{5}$.

情形 7：$\min U = \{(b,c),(a,b),(c,a)\}$。那么显然 $U = X_{N_5}$。

按包含关系排序时，S_1，.....，S_8 构成 8 元布尔代数 $\mathbf{B}N_5$。那么，由于 $e[N_5]$ 有 5 个元素，由 $e[N_5]$ 生成的$\mathbf{B}N_5$ 的布尔子代数 $\mathscr{B}N_5$ 必定就是$\mathbf{B}N_5$ 本身。 □

由此立即得到以下结论。

命题 3.7. $\mathbf{B}N_5$ 同构于 $\mathscr{B}N_5$的麦克尼尔完备化。

前述命题之间的对比引出了以下问题。

问题 3.8. 刻画满足以下条件的格类 L ： $\mathbf{B}L$ 同构于 $\mathscr{B}L$的麦克尼尔完备化。

致谢

感谢 Mamuka Jibladze 进行了富有助益的讨论，这些讨论促成了本文的撰写。

参考文献

Gerard Allwein 和 Wendy MacCaull。盖尔范德量子格逻辑的克里普克语义。《逻辑研究》，68：173–228，2001年。网址：https://doi.org/10.1023/A:1012495106338。

Raymond Balbes 和 Philip Dwinger。分配格。密苏里大学出版社，密苏里州哥伦比亚市，1974年。

Richard N. Ball。分配柯西格。《代数通论》，18(2)：134–174，1984年。网址：https://doi.org/10.1007/BF01198525。

Guram Bezhanishvili 和 Wesley H. Holliday。直觉主义逻辑的语义层级。《数学探究》，30(3):403–469，2019年。网址https://doi.org/10.1016/j.indag.2019.01.001。

Guram Bezhanishvili、David Gabelaia 和 Mamuka Jibladze。重新审视船山定理。《代数通论》，70:271–286，2013年。网址 https://doi.org/10.1007/s00012-013-0247-y。Garrett Birkhoff。集合环。《杜克数学杂志》，3(3):443–454，1937年。网址 http://doi.org/ 10.1215/S0012-7094-37-00334-X。G. Bruns 和 H. Lakser。半格的内射包。《加拿大数学通报》，13(1):115–118，1970 年。网址 https://doi.org/10.4153/CMB-1970-023-6。Matt Fairtlough 和 Michael Mendler。命题松弛逻辑。《信息与计算》，137(1):1–33，1997年。网址 https://doi.org/10.1006/inco.1997.2627。Nenosuke Funayama。将无限分配格完全同构地嵌入布尔代数。《名古屋数学杂志》，15:71–81，1959年。网址 https://doi.org/10.1017/ S0027763000006681。Steven Givant 和 Paul Halmos。《布尔代数导论》。施普林格，纽约，2009年。网址 https://doi.org/10.1007/978-0-387-68436-9。George Grätzer。《格论：基本概念与分配格》。多佛出版公司，纽约州米尼奥拉，1971年。Wesley H. Holliday。通往完备格的三条道路：序、相容性与极性。《代数通论》，82(2):第26号论文，2021年。网址 https://doi.org/10.1007/s00012-021-00711-y。John R. Isbell。空间的无原子部分。《斯堪的纳维亚数学》，31:5–32，1972年。网址 https://doi. org/10.7146/math.scand.a-11409。Peter T. Johnstone。《Stone空间》，《剑桥高等数学研究》第3卷。剑桥大学出版社，剑桥，1982年。H. M. MacNeille。偏序集。《美国数学学会会刊》，42:416–460，1937年。网址 https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1937-1501929-X。Guillaume Massas。B-框架对偶性。《纯粹与应用逻辑年刊》，174(5):103245，2023年。网址 https: // doi.org/10.1016/j.apal.2023.103245。Jorge Picado 和 Aleš Pultr。《框架与locale：无点拓扑》。《数学前沿》。Birkhäuser，巴塞尔，2012年。网址 https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0154-6。Roman Sikorski。《布尔代数》，第25卷。施普林格出版社，纽约，第3版，1969年。M. H. Stone。分配格与布劳威尔逻辑的拓扑表示。《数学与物理学推广杂志》，67(1):1–25，1938年。网址 http://doi.org/10.21136/CPMF.1938.124080。Alfred Tarski。关于可加与可乘的集合体及集合函数。《华沙科学学会会议报告，第三部：数学与物理科学》，30:151–181，1937年。John von Neumann。连续几何讲义。普林斯顿的油印讲义。后以《连续几何》为名由普林斯顿大学出版社于1960年再版，原作于1936年。