arXiv:2603.23545v1 [math.SP] 16 Mar 2026

共形值域的椭圆值域定理

GYULA LAKOS

Abstract. 共形值域（或实 Davis–Wielandt 壳）是 Davis–Wielandt 壳的一种特殊平面投影，可视为数值域的双曲版本；也就是说，它是一个“值域”，可以解释为渐近闭双曲平面的子集。本文阐释复矩阵的椭圆值域定理在共形值域中的对应形式。若在渐近闭双曲平面的 Beltrami–Cayley–Klein（BCK）模型中考察共形值域（该模型看起来恰似欧几里得平面上的闭单位圆盘，边界点即为渐近点），则可得：复矩阵的共形值域是 BCK 模型中的一个可能退化的椭圆圆盘，但它必须避开特殊渐近点 (0，1)。从双曲平面的综合（即“内在解释的”）几何角度来看，这些集合对应于 h-椭圆盘的极限对象，但会“避开”特殊渐近点 (0，1)。这里的‘h’表示该对象是从双曲几何的角度来解释的。更具体地说，若复矩阵 2×2 A 是正规矩阵，则其在 BCK 模型中的共形值域是一个可能退化的线段，其端点对应于特征值（忽略共轭）。在渐近闭双曲平面的综合几何中，这可能是一个 h-点、一个h-渐近点、一条 h-线段、一条渐近闭 h-半直线，或一条渐近闭 h-直线。若复矩阵 2×2 A 非正规，则其在 BCK 模型中的共形值域呈椭圆盘形（也包括圆盘）。在渐近闭双曲平面的综合几何中，这可能是一个 h-椭圆盘（若 A有非实特征值；若为重特征值或共轭特征值，则是圆形，否则为通常情形）、一个 h-椭圆抛物圆盘（若 A 有一个实特征值和一个非实特征值）、一个 h-距离带（若 A 有两个不同的实特征值），或一个 h-极限圆盘（若 A 有两个相等的实特征值）。无论如何，渐近点对应于实特征值，而从综合几何角度理解的焦点对应于特征值（忽略共轭）。我们还给出了与值域相关的度量数据，并讨论了数值域、Davis–Wielandt 壳和共形值域各自的椭圆值域定理之间的比较。

Introduction

数值域。设 $\mathfrak{H}$是一个复希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$（对第一个变量线性，对第二个变量共轭线性）； $|\mathbf{x}|_2=\sqrt{\langle\mathbf{x},\ \mathbf{x}\rangle}$。若 A 是 $\mathfrak{H}$上的线性算子，则其数值域（最早由 Toeplitz [39], Hausdorff [19], 研究，参见 Gustafson、Rao [17]）定义为

$$\mathrm{W}(A)=\left\{\left(\frac{\mathrm{Re}\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}{|\mathbf{x}|_2^2},\frac{\mathrm{Im}\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}{|\mathbf{x}|_2^2}\right)\ :\ A\mathbf{x}=\mathbf{y},\ \mathbf{x}\neq 0\right\}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：15A60，次要分类：51M10。

Key words and phrases. Davis–Wielandt 壳、数值域、算子的共形域、双曲几何、初等解析几何。

这是 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集，通常可与 $\mathbb{C}$ 等同视之（其中任意一点均可出现）。

共形值域。类似的构造由共形值域给出，或者换个名称，称为实戴维斯–维兰德壳（名称取自 [29], ，稍后会解释）。实际上，我们给出两种变体（它们之间的关系很快就会说明）：

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A) = \left\{ \left(\frac{\mathrm{Re}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}{|\mathbf{x}|_2^2}, \frac{|\mathbf{y}|_2^2}{|\mathbf{x}|_2^2} \right) : A\mathbf{x} = \mathbf{y},\, \mathbf{x} \neq 0 \right\},$$

and

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A) = \left\{ \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}{|\mathbf{y}|_2^2 + |\mathbf{x}|_2^2}, \frac{|\mathbf{y}|_2^2 - |\mathbf{x}|_2^2}{|\mathbf{y}|_2^2 + |\mathbf{x}|_2^2} \right) : A\mathbf{x} = \mathbf{y},\, \mathbf{x} \neq 0 \right\}.$$

这里，$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 将是 $H^{2-}{}_{\mathrm{pCK}} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq z\}$ 的子集，而 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 将是 $H^{2-}{}_{\mathrm{BCK}} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\} \setminus \{(0,1)\}$ 的子集（这些集合中可以出现任意点）。点 $(x_{\mathrm{pCK}}, z_{\mathrm{pCK}}) \in \mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 和 $(x_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}) \in \mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 可以通过典范对应相互转换

$$\begin{bmatrix} x_{\mathrm{BCK}} \\ z_{\mathrm{BCK}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{\mathrm{pCK}} + 1} \begin{bmatrix} 2\,x_{\mathrm{pCK}} \\ z_{\mathrm{pCK}} - 1 \\ z_{\mathrm{pCK}} + 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} x_{\mathrm{pCK}} \\ z_{\mathrm{pCK}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - z_{\mathrm{BCK}}} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{BCK}} \\ 1 + z_{\mathrm{BCK}} \\ 1 - z_{\mathrm{BCK}} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

可以看出，这些转换是由射影变换实现的。

将 $H^{2-}{}_{\mathrm{BCK}}$ 增补点 $(0,1)$ 是有益的，从而

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A) \subset \overline{H}^2_{\mathrm{BCK}} \equiv \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

根据射影转写 (1)，这相当于在 $H^{2-}{}_{\mathrm{pCK}}$ 中增补理想点 $\infty_{\langle 0,1\rangle}$ （方向为 $\langle 0,1\rangle$的理想点）。这样便得到

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A) \subset \overline{H}^2_{\mathrm{pCK}} \equiv \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq z\} \cup \{\infty_{\langle 0,1\rangle}\}.$$

这里，共形值域中从不取这些额外点，但增补后的基集 $H^2{}_{\mathrm{BCK}}$ 和 $H^2{}_{\mathrm{pCK}}$ 可以自然地赋予一种几何学：

$\overline{H}^2{}_{\mathrm{BCK}}$ **和** $\overline{H}^2{}_{\mathrm{pCK}}$ **作为渐近闭双曲平面的模型**。这里，普通的 h点是指位于基集内部的点，渐近 h点是指位于基集边界上的点。渐近闭合的 h直线，就是与基集内部相交的普通直线和基集的交集。普通的 h直线是去掉其渐近 h点后的渐近闭合 h直线（即普通直线与基集内部的非空交集）。这里，自然映射是射影 h共线变换，即保持基集不变的环境射影空间共线变换在基集（可能是其内部）上的限制。（这些映射将普通的 h点映为普通的h点，并将渐近 h点映为渐近 h点。）我们将简单地（而且事实上并无不妥地）称这些映射为 h共线变换。由贝尔特拉米–凯莱–克莱因距离可在普通的 h点上诱导出一种共线变换不变的自然（对行家而言，即“$k = 1$”） h度量。该 h度量可按如下规定扩展到渐近闭合情形，成为一个 $[0, +\infty]$值度量：渐近点到任意其他点的距离为 $+\infty$。如此，我们便在 $H^2{}_{\mathrm{BCK}}$上得到渐近闭双曲平面的贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型，并在 $H^2{}_{\mathrm{pCK}}$上得到渐近闭双曲平面的抛物型凯莱–克莱因模型。（下文中，记号 $H^2{}_{\mathrm{BCK}}$ 和 $H^2{}_{\mathrm{pCK}}$ 均指相应的几何学。）这些模型的几何学是同构的，因为简单的投影变换（参见（1））将它们联系起来。

将它们联系起来。限制在普通 h点上时，我们得到双曲平面的贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型和抛物型凯莱–克莱因模型，其中 h等距变换与 h共线变换相同。关于双曲几何的简要介绍，尤其是贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型，可参见Berger [2]。抛物型凯莱–克莱因模型只是通过射影等价得到的一种变体。（关于射影方法的原始且详尽的论述，参见 Klein [26], [27], [28]。）现在我们可以说，共形值域的取值属于渐近闭双曲平面。目前尚不那么清楚的是，双曲几何对于共形值域的行为是否确实具有基础性作用。共形值域的基本性质可以直接建立（参见 [29]），不过我们在此采取的策略是利用有关.....的已知信息

Davis–Wielandt 壳层。这是一个相当经典的对象，参见 Wielandt [44],[45]; Davis [6], [7], [9]; Li、Poon、Sze [32]; Lins、Spitkovsky、Zhong [35]。对我们而言， [6]和[7] 很有用。若 A 是 $\mathfrak{H}$上的线性算子，则其 Davis–Wielandt 壳层定义为

$$\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A) = \left\{ \left(\frac{\mathrm{Re}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{x}|_2^2}, \frac{\mathrm{Im}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{x}|_2^2}, \frac{|\mathbf{y}|_2^2}{|\mathbf{x}|_2^2} \right) \,:\, A\mathbf{x} = \mathbf{y},\, \mathbf{x} \neq 0 \right\},$$

or

$$\mathrm{DW}_{\mathrm{BCK}}(A) = \left\{ \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y}|_2^2 + |\mathbf{x}|_2^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y}|_2^2 + |\mathbf{x}|_2^2}, \frac{|\mathbf{y}|_2^2 - |\mathbf{x}|_2^2}{|\mathbf{y}|_2^2 + |\mathbf{x}|_2^2} \right) \,:\, A\mathbf{x} = \mathbf{y},\, \mathbf{x} \neq 0 \right\}.$$

Here

$$\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A) \subset \overline{H}^3_{\mathrm{pCK}} = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq z\} \cup \{\infty_{\langle 0,0,1 \rangle}\},$$

and

$$\mathrm{DW}_{\mathrm{BCK}}(A) \subset \overline{H}^3_{\mathrm{pCK}} = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

$\mathcal{H}^3$ BCK 和 $\neg\mathcal{H}^3$ pCK 同样可以视为渐近闭合双曲空间的模型。因此，集合 $\mathrm{DW}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 和 $\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 可解释为双曲空间渐近闭合 BCK 模型和 pCK 模型的子集。在 BCK 模型与 pCK 模型之间，存在（对我们而言）由下式给出的典范对应：

$$\begin{bmatrix} x_{\mathrm{BCK}} \\ y_{\mathrm{BCK}} \\ z_{\mathrm{BCK}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{\mathrm{pCK}} + 1} \begin{bmatrix} 2\,x_{\mathrm{pCK}} \\ 2\,y_{\mathrm{pCK}} \\ z_{\mathrm{pCK}} - 1 \\ z_{\mathrm{pCK}} + 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} x_{\mathrm{pCK}} \\ y_{\mathrm{pCK}} \\ z_{\mathrm{pCK}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - z_{\mathrm{BCK}}} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{BCK}} \\ y_{\mathrm{BCK}} \\ 1 + z_{\mathrm{BCK}} \\ 1 - z_{\mathrm{BCK}} \end{bmatrix}; \tag{2}$$

BCK 模型中的 (0，0，1) 对应于 pCK 模型中的 $\infty_{\langle 0,\ 0,\ 1 \rangle}$（尽管后面这些点不会出现在关于线性算子的壳层中）。

值域之间的关系。可以看出，Davis–Wielandt 壳是数值域和共形值域的共同推广。或者换言之，数值域和共形值域都是 Davis–Wielandt 壳的特定投影：我们看到，$\mathrm{W}(A)$ 可以通过在 $\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 的点中省略第三个坐标得到，因此数值域是 Davis–Wielandt 壳 $\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 的“垂直”投影。如果我们将投影视为把第三个坐标设为 0，那么用双曲几何的术语来说，这就是从未取到的渐近点 $\infty_{\langle 0,\ 0,\ 1 \rangle}$ 到特定渐近切平面 $z_{\mathrm{pCK}} = 0$的投影。另一方面，$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 可以通过在 $\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 的点中省略第二个坐标得到，因此相应的共形值域也是 Davis–Wielandt 壳的投影。如果我们将投影视为把第二个坐标设为 0，那么用双曲几何的术语来说，这就是到特定渐近闭双曲平面 $y_{\mathrm{pCK}} = 0$ 的双曲正交投影。同样

关于 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 和 $\mathrm{DW}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 之间的关系也可以这样说。事实上，只要 A 有界，数值域和共形值域之间还有更直接的关系。我们将实双矩阵（更像是一种 $3/2$ 倍数）定义为

$$\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A) = \frac{A + A^*}{2} + \mathrm{i}A^*A. \tag{3}$$

于是容易看出

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A) = \mathrm{W}\left(\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)\right). \tag{4}$$

因此，计算数值域的更高级方法，例如 Kippenhahn [24] / [25] 的方法，也可用于计算共形值域。（参见 [29]，其中对此有更直接的讨论。）然而，关系式 (4) 看似“简单”，实则有些误导；就共形值域的基本性质而言，Davis–Wielandt 壳将更为重要。（另一个缺点是，当 A 为无界或多值线性算子时，关系式 (4) 并不适用，不过本文不会讨论这类情形。）反过来说，Davis–Wielandt 壳也可视为数值域某些性质的基础，参见 Davis [8]的凸性论证；这是最简单的论证之一，可与德克尔 / Halmos [18]的论证相提并论。）

模型的选择。我们看到，就 Davis–Wielandt 壳和共形值域而言，BCK 模型与 pCK 模型可以等效使用。由于它与 $\mathrm{W}(A)$ 的关系简单，$\mathrm{DW}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 是线性代数界描述 Davis–Wielandt 壳的自然选择（参见 Horn、Johnson [20]）。然而，从理论角度看，为了识别某些对称性，$\mathrm{DW}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 是更方便的选择；此外，除了笼统提到由于射影不变性，基集的选择有一定自由度之外，几乎没有几何学文献讨论 pCK 模型。因此，我们将采用 BCK 模型作为主要选择。不过，只要说明如何从射影模型进行规范转换，也可以使用渐近闭双曲空间或平面的任何其他模型。在 [29], 中，共形值域最初被定义为 $\mathrm{CR}(A) \equiv \mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Ph}}(A)$，即 Poincar´e 半平面模型中的实 Davis–Wielandt 壳。（该模型最初也由贝尔特拉米构造，但通过 Poincar´e 的工作才广为人知。为求简便，我们也采用惯用术语。）“共形值域”这一名称源于它在 Poincar´e 半平面模型中的特殊呈现方式和表现；除此之外，它只是“实 Davis–Wielandt 壳”的同义表达。不熟悉双曲几何的人可能会认为，只使用一个模型会更不容易令人困惑。事实并非如此。不同模型各有优势。技术上可以只用一个模型，但这样不利于理解。在某些地方，我们可以作出适用于多个模型的陈述，此时用“$*$”代替模型，得到 $\mathrm{DW}_*(A)$ 或 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(A)$，表示该陈述（至少部分）与模型无关。如果陈述采用综合双曲意义，则可以完全省略“$*$”。可能是渐近 h 的点 $\boldsymbol{x}$，理解为一组相容的 $\boldsymbol{x}_*$；$\boldsymbol{x}_{\mathrm{pCK}}$ 是它在 pCK 模型中的坐标元组，等等。

椭圆值域定理的背景。对于数值域和共形值域而言，最简单但并非完全平凡的情形是，A 是一个复 2×2 矩阵。在这种情况下，数值域可由著名的椭圆值域定理从几何上加以描述。该定理指出，$\mathrm{W}(A)$ 是一个焦点为 A的特征值、长半轴和短半轴为 $s^{\pm}$ =的椭圆盘（可能退化）$\sqrt{\frac{U_A \pm |D_A|}{2}}$，以及半焦距

距离 $s^{\mathrm{f}} = \sqrt{|D_A|}$（其中数值 U_A 和 $|D_A|$ 在第 3.A 小节中定义）。关于各种证明（详略不一），可参见 Toeplitz [39]（1918年）、Murnaghan [37], Donoghue [10], Horn、Johnson [20],Gustafson、Rao [17], Li [31], 。然而，对于 [30]，我们有所保留。实数情形可参见 Johnson [22]，关于解析几何方程的推导可参见 Uhlig [40]（当 $s^- > 0$时会出现这种情况，此时 A 是非正规矩阵）。不过请注意，椭圆值域定理的要点在于其几何解释。我们不禁会想，关于共形值域是否也存在类似的椭圆值域定理。答案确实是肯定的：

一般情形下的定性椭圆值域定理。容易证明，对于复矩阵 2×2 A，Davis–Wielandt 壳 $\mathrm{DW}^{\mathrm{pCK}}(A)$ 或 $\mathrm{DW}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 是一个可能退化的椭球（见 Davis [7], 定理 10.1）。这已经是一种椭圆值域定理。由此立即可知，数值域 $\mathrm{W}(A)$ 是一个可能退化的椭圆盘。此外，这也意味着共形值域 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 和 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A)$（从欧几里得视角看）是可能退化的椭圆盘。或者，根据通常的椭圆值域定理和式（4），$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 是一个可能退化的圆盘；通过射影变换，$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 也如此。在这种最宽泛的定性层面上，椭圆值域定理相当平凡。因此，任何有趣的论述都应包含更精确的信息（在本文中指度量和焦点方面的信息）。可以证明，A 是正规矩阵，当且仅当 $\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)$ 是正规矩阵。因此，$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 和 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 退化（即为一个点或一条线段），当且仅当 A 是正规矩阵。然而，关于焦点性质，并没有明显的结论可以推及共形值域。在非正规情形下，$A \mapsto \mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)$ 甚至不保留任何方向上的抛物性。但关键在于，共形值域和 Davis–Wielandt 壳应当从双曲几何的角度来诠释。Davis–Wielandt 壳与数值域大不相同，但其椭圆值域定理与数值域的情形颇为相似。共形值域的椭圆值域定理比数值域的情形略为复杂。这可以归因于在我们的双曲圆锥曲线中，渐近点也可以充当焦点。除此之外，两者非常相似。唯一不同寻常之处在于，我们必须考虑双曲平面上的圆锥曲线，这是一个稍显晦涩的话题。尽管如此，对双曲圆锥曲线的研究早于对数值域的研究：

一般双曲圆锥曲线。对双曲圆锥曲线的系统研究显然始于 Story [38]（1882年），这是一部相当严肃的著作。此后，Killing [23]（1885年）、D'Ovidio [11], [12], [13]（1891年）、Barbarin [1]（1901年）、Liebmann [33]（1902年）、Massau [36]（1905年）、Liebmann [34]（1905年）和 Coolidge [5]（1909年）都讨论了双曲圆锥曲线。V¨or¨os [41] / [42]（1909/10年）对圆锥曲线进行了非常详细的研究。因此可以说，到1910年，双曲圆锥曲线已得到相当充分的研究；不过，上述文献并非都同样容易获取。（关于二次曲面的相关研究，可见 Barbarin [1], Coolidge [4]（1903年）、Bromwich [3]（1905年）、Coolidge [5], 和 V¨or¨os [43]（1912年）。）Fladt [14], [15], [16]进一步讨论了双曲圆锥曲线分类的数值方面。对于非双曲几何专家而言，Izmestiev [21] 的论述或许是很好的入门读物。（对我们来说，[21]第6.4节将很重要。不过，对于真正对双曲圆锥曲线感兴趣的人来说，Story [38] 大概是绕不开的。）归根结底，h-圆锥曲线最简单的定义方式，是将其定义为射影模型（即 pCK 或 BCK）中的圆锥曲线。这样，它们便具有与欧几里得情形相似的综合描述（本质上是焦点描述）和性质。尽管如此，若要求读者具备大量关于双曲圆锥曲线的预备知识，恐怕过于乐观

因此，尽管我们列出了若干参考文献，仍会以这样的方式组织论述：熟悉双曲圆锥曲线（循环除外）固然有所帮助，但并非必需。

所需预备知识。就本文而言，只需对双曲几何有基本了解，掌握到圈这一层次即可，例如 Berger [2], 中的介绍就足够了。（当然，也有几种非常出色的基于模型的论述。）读者还应能够辨认 BCK 模型中的一些双曲对称。（这基本上只需注意到，BCK 模型的欧几里得对称也是 h-共线变换。）除此之外，我们仅引用 Davis [6], [7]关于 Davis–Wielandt 值域的三条基本论述；因此，读者也不必特别熟悉 Davis–Wielandt 值域。

关于圈的提示。双曲平面上的圈可以直接用h-共线变换来定义：若 P 是一个普通的 h-点，则外部普通 h-点 E 在保持 P 不动的 P- h共线变换下的轨道，是一个以 P 为中心且经过E的 h-圆。若 P_0 是一个渐近的 h-点，则普通 h-点 E 在由以下变换生成的群作用下的轨道：这些 h-共线变换的不动点集是经过 P_0 的渐近闭合 h-直线。该轨道是经过 E、渐近点为 P_0 的 h-极限圆。若 l 是一个 h-直线，则外部普通 h-点 E 在保持 l 的渐近点不动的h-共线变换下的轨道，是经过 E、以 l 为轴的（双侧） h-距离线。从相应的距离几何来看： h-圆是与 P相距给定正距离的点的集合。 h-极限圆是与 P_0相距无限远但“距离相等”的点的集合。（若渐近三角形 $E_1E_2P_0\triangle$ 与 $E_2E_1P_0\triangle$ h-全等，则点 $E_1 \neq E_2$ 与P_0“距离相等”；等价地，线段 E_1E_2 的垂直平分线的渐近闭包经过P_0；这就导出一个等价关系。也可以定义到 P_0 的正则化距离；不过这与渐近点为P_0的 h-极限圆大致等价，因为它们不过是到这些极限圆的有向距离。） h-距离线是与 l相距给定正距离的点的集合。一般而言，用距离来定义 h-圆和 h-距离线并无不妥；但对于 h-极限圆，并不直接采用这种定义，因此这里使用基于 h-共线变换的定义。相应的 h-圆盘、 h-极限圆盘和 h-距离带，可通过取凸闭包得到；或者，将距离不超过原阈值的点纳入其中。也就是说，实质上就是填满其内部。渐近闭合版本则根据具体情况，通过添加 P_0 或 l的渐近点得到。

在 BCK 和 pCK 模型中，可以如下对 h-圈进行解析描述：在这些模型的环境射影空间中，渐近闭合循环由非退化二次曲面给出；这些二次曲面至少具有一个普通的 h-点，并且其方程由渐近点的二次曲面（称为：绝对）和一条二重直线的二次曲面线性生成。对于 h-圆、 h-极限圆和 h-距离直线这三种情形，这条二重直线分别支撑在一条与渐近点集相交于 0、1、2 个点的射影直线上。对于 h-距离直线，该直线是定义直线 l 的射影延拓。对于 h-极限圆，该直线与渐近点 P_0 相切。对于 h-圆，该直线位于模型外部（它是相对于绝对的 P 的极线）。通过考察一些良好的典范代表元，可以很容易证明这一刻画，随后射影不变性将其推广到一般情形。尽管我们会对此作出说明，但实际上并不使用这一解析刻画，因为我们将直接考察典范代表元。不过，从纯粹的解析观点来看，这一解析

刻画是介绍 h-圈最简单且最统一的方式。我们还要指出： h-距离直线很容易识别，因为它们是在两个临界渐近点处从渐近点集内部相切的椭圆。h-极限圆不仅是从渐近点集内部与其密切的椭圆，还是高阶密切椭圆（内部密切加上密切意味着高阶密切）；这很好地提示了它们的形状（除非渐近点是 $\infty_{\langle 0,\ 1\rangle}$，因为只有经过适当的坐标变换后，那里相切的性质才会清晰可见）。

我们感兴趣的双曲圆锥曲线。除了线性对象和圈之外，我们只考虑真正的 h-椭圆和 h-椭圆抛物线。从解析几何观点来看，这些对象最容易描述：现在，如果 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(A)$ 不是一个可能退化的线段，那么它必定是严格包含于单位圆盘内的椭圆子圆盘（因为 $(0,\ 1)_{\mathrm{BCK}}$ 不可能属于共形值域）。因此，它可能有 0、1 或 2 个渐近点（即边界点）。若有 0 个渐近点，则为 h-椭圆；它可能是 h-圆（即一个圈），否则称为真正的 h-椭圆。若有 1 个渐近点，它可能与边界超密切相切，也可能不是。在超密切相切的情形下，我们得到一个 h-极限圆；否则称为 h-椭圆抛物线。若有 2 个渐近点，则得到一对（共轭）双曲线（或“代数闭双曲线”）。（更准确地说，我们得到与这些圆锥曲线相关的圆盘。）上述解析描述将作为 h-椭圆和 h-椭圆抛物线的正式定义。

综合刻画。上述并非循环的 h-圆锥曲线，也可以用综合方式描述，即通过焦点刻画来呈现应当如何从综合角度理解它们。（我们不会假定读者掌握这方面的知识，但会为已经熟悉这些内容的读者提供一些替代证明。）

对于 h-椭圆，Story [38]已经用距离和阐明了其综合刻画。结合一些初等观察，可以将其表述为以下形式（但关于更综合的讨论，请参见Killing [23], Liebmann [33], [34]）：设 F_1 和 F_2 是（非渐近的）双曲点。令d表示（标准）双曲距离，并约定 $m^+ > \mathsf{d}(F_1, F_2)$为所指的“长轴长度”。那么，相应的 h-椭圆上的点 $\boldsymbol{x}$满足 $\mathsf{d}(F_1, \boldsymbol{x}) + \mathsf{d}(F_2, \boldsymbol{x}) = m^+$。对应的 h-椭圆盘由方程 $\mathsf{d}(F_1, \boldsymbol{x}) + \mathsf{d}(F_2, \boldsymbol{x}) \leq m^+$给出。这里，$F_1$ 和 F_2 是焦点（与 m^+一样，它们由 h-椭圆确定）。使 h-椭圆成为真椭圆的条件仅为 $F_1 \neq F_2$，否则得到的就是一个循环，即一个 h-圆。现在的结论是，解析定义的 h-椭圆与综合定义的相同。读者可能已经知道这一点，也可能尚未了解。无论如何，我们也将证明这两种定义等价。不过，熟悉综合几何有助于简化某些证明。关于 h-椭圆，有一个值得注意的几何事实如下：设 $s^+ = \frac{1}{2}m^+$为长轴长度的一半，设 $s^- = \frac{1}{2}m^-$为短轴长度的一半，且 $s^{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}m^{\mathrm{f}}$ 为两焦点间距离的一半。那么

$$\cosh s^+ = (\cosh s^-)(\cosh s^{\mathrm{f}}) \tag{5}$$

成立。（这不过是关于中心、一个焦点和短轴上的一个顶点的双曲毕达哥拉斯法则。）

对于 h-椭圆抛物线，情况并非一般情形，采用 Killing [23], 提出并由 Liebmann [33], [34]进一步详细讨论的观点更为合适：设 C 为一条极限圆。对于双曲点 $\boldsymbol{x}$，令 $\mathsf{d}_C(\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{x}$到 C 的有向距离，当 $\boldsymbol{x}$位于极限圆 C内部时，该距离为负。（因此，函数$\boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{d}_C(\boldsymbol{x})$ 是从 C的渐近点出发的正则化距离函数。给该函数

加上一个常数，恰好意味着转到一条平行极限圆 C'。）给定一条极限圆 C，我们可以任选其内部的一点 F（即 $\mathsf{d}_C(F) < 0$）。于是，与之对应的 h-椭圆抛物线上的（普通）点，就是满足方程 $\mathsf{d}(F,\boldsymbol{x}) + \mathsf{d}_C(\boldsymbol{x}) = 0$ 的那些双曲点 $\boldsymbol{x}$。相应的 h-椭圆抛物圆盘由方程 $\mathsf{d}(F,\boldsymbol{x}) + \mathsf{d}_C(\boldsymbol{x}) \leq 0$ 给出。这里 F 是 h-椭圆抛物线的一个焦点；而极限圆 F_0 的渐近点可视为另一个焦点。h-椭圆抛物线的尖点（顶点）V 位于焦点 F 与 F 在极限圆 C 上的垂足 P 之间的中点处。由于极限圆 C 与焦点 F 之间的绝对距离为 $-\mathsf{d}_C(F)$，这意味着 V 与 F 之间的距离为 $\mathsf{d}(V,F) = -\frac{1}{2}\mathsf{d}_C(F)$。请注意，与 h-椭圆的情形类似，除焦点之外，还有额外的度量数据体现在极限圆的具体选取上；不过，也可以用焦点至顶点距离 $-\frac{1}{2}\mathsf{d}_C(F) > 0$ 来等价地表示这一数据。和之前一样，熟悉与否并不影响对 h-椭圆抛物线解析定义与综合定义等价性的理解，但了解这一点有助于简化一些证明。

由于 h-椭圆抛物线不如 h-椭圆为人们所熟悉，我们将对其作进一步说明：我们讨论如何将它们典范地视为 h-椭圆的极限。考虑前述的 h-椭圆抛物圆盘。那么，对于 $u > 0$，令 $F_1(u) = F$；令 $F_2(u)$ 为位于半直线 $\overrightarrow{FF_0}$ 上、距 F 为双曲距离 u 的点。令 $m^+(u) = -\mathsf{d}_C(F) + u$。由于 $u \nearrow +\infty$，我们看到 $F_1(u) = F$，且 $F_2(u) \to F_0$，以及这些函数

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{d}(F_1(u),\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}(F_2(u),\boldsymbol{x}) - m^+(u) \equiv \mathrm{d}(F,\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}(F_2(u),\boldsymbol{x}) - u + \mathrm{d}_C(F)$$

在 u 中（这是三角不等式的一个直接推论）非严格递减，并趋于函数

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{d}(F,\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}_C(\boldsymbol{x}).$$

这意味着，当 $u \nearrow +\infty$ 时，我们得到越来越大的 h-椭圆圆盘，它们具有同一条长轴轴线；由于函数 d_C 的梯度不消失，它们趋于我们所讨论的 h-椭圆抛物圆盘。我们将此称为典范极限过程。其优点在于，最接近 $F_1(u) = F$ 的尖端（长轴上的顶点）$V_1(u) = V$ 保持不变。这或许令人惊讶，但是当 $u \nearrow +\infty$ 时，h-椭圆的短轴 $m^-(u)$ 不断增大，却趋于一个有限值，$m^-(u) \nearrow M^-$。事实上，对于 $s^-(u) = \frac{1}{2}m^-(u)$，$s^+(u) = \frac{1}{2}m^+(u) = \mathsf{d}(V,F) + \frac{u}{2}$，$s^{\mathrm{f}}(u) = \frac{1}{2}m^{\mathrm{f}}(u) = \frac{u}{2}$，等式 $\cosh s^-(u) = \cosh s^+(u) \cosh s^{\mathrm{f}}(u)$ 在 $u \nearrow +\infty$ 时趋于 $\cosh s^-_{\mathrm{a}} = \exp \mathsf{d}(V,F)$。这 s^-_{a} 就是“渐近”短半轴长，$s^-_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}m^-_{\mathrm{a}}$。由于 h-椭圆的长轴保持不变，即 h-椭圆抛物线的轴线，我们得到如下结论：h-椭圆抛物线包含在以该轴线为中心、半径为 $s^-_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}m^-_{\mathrm{a}}$ 的距离带内，但不包含在更小的距离带内。对于一个独立给出的 h-椭圆抛物线，可以分别用 s^-_{a} 和 m^-_{a} 代替 s^- 和 m^-；但它们只是渐近长度，并不对应任何实际的轴线段或轴线。归根结底，我们的主要结论是

$$\cosh s^- = \exp \mathrm{d}(V,F). \tag{6}$$

就我们的研究目的而言，三维空间中的二次曲面。就二次曲面而言，对于 Davis–Wielandt 壳，我们在双曲空间中只考虑 h-管和 h-horosphere。若 P_0 是一个渐近 h-点，则 [普通 h-点 E 在由这些 h-共线变换生成的群作用下的轨道，其中这些共线变换的不动点集是经过 P_0] 的渐近闭合 h-平面，便是经过 E 且以 P_0 为渐近点的 h-horosphere。若 l 是 h-直线，则 [普通

外部普通 h-点 E 在固定l] 的渐近点的 h-共线变换作用下的轨道，便是经过 E且轴为 l 的 h-管。 h-horosphere是与 P_0的距离为无限大、但彼此“相等”的点集。 h-管是与 l距离为某个给定正值的点集。同样，对 h-管采用基于距离的定义是合理的；不过，horosphere的描述最好放在 h-共线变换的框架中讨论，因为从渐近点出发的适当正则化距离，似乎已经隐含了horosphere。通过分别添加渐近点 P_0或直线 l的渐近点，可以得到 h-horosphere和 h-管的渐近闭合版本。可以在 BCK 和 pCK 模型中解析地描述 h-horosphere和 h-管，如下所示：在这些模型所在的射影空间中，渐近闭合的 h-horosphere由一个非退化二次曲面给出，该二次曲面至少含有一个普通 h-点，且其方程由渐近点的二次曲面与一个双平面的二次曲面线性生成；该双平面与渐近点集相切（相切于 h-horosphere的渐近点 P_0 ）。渐近闭合的h-管由一个非退化二次曲面给出，该二次曲面至少含有一个普通 h-点，且其方程由渐近点的二次曲面与一对不同平面所对应的二次曲面线性生成；这一对平面与渐近点集相切（相切于 h-管的轴 l 的渐近点）。利用一些典范代表元可以建立这些刻画，并进一步借助射影不变性推广。同样，尽管我们会对它们作些说明，但实际上不会使用这些解析刻画，因为我们将直接处理典范代表元。

本文的布局。 第1节更详细地回顾与 Davis– Wielandt 壳相关的基本信息，并陈述该节的椭圆值域定理。第2节讨论与共形值域相关的基本信息，并陈述该节的椭圆值域定理。第3节讨论复 2×2 矩阵的谱分类。第4节证明 Davis–Wielandt 壳的椭圆值域定理。第5节证明共形值域的椭圆值域定理。第6节比较数值域、Davis–Wielandt 壳和共形值域的椭圆值域定理。

术语和记号。 鉴于这些术语的性质及其具体表现，‘h-共线变换’、‘h-等距变换’、‘h-全等变换’和‘共形变换’的用法相当灵活。此外，‘M¨obius 变换’和‘分式线性变换’也属于此类（在二维情形下二者可互换使用，而在三维情形下，后者仅用于保向情形）。若 $a>0$，则 $\frac{a}{0}=+\infty$。然而， $\frac{0}{0}=\pm\infty$，其公式适用特殊的求值规则，届时会予以说明；通常取值可以是 0、1 或 ∞ 。-三重比 $a:b:c$是三元组（a， b， c），视为相差一个非零标量乘数。（因此，0 : 0 : 0 是有效的比值，且它不同于任何其他比值。）类似的说明也适用于通常的比值，即双重比。若$A<B$ 等价于 $C<D$ ，且 $A=B$ 等价于 $C=D$，则不等式 $A\le B$ 与 $C\le D$ 完全等价。若 A 可改写为 C，且 B 可改写为 D，则 $A\le B$ 可转写为 $C\le D$ 。（这意味着完全等价。）

关于本文的呈现方式。 读者会发现，论文的很大一部分内容都涉及前文解释过的相关双曲几何；若非以降低内容的可读性为代价，本可以省去这部分内容。此外，若允许 A 为多值算子（如 Davis [6], [7] 所示），有些陈述会更简洁，也能使用另一组典范代表元，但这会使处理方式显得

与标准线性代数相比有些格格不入。本文着重让线性代数研究者也能理解这些材料，尤其是其中的一些双曲几何内容。虽然在高维情形下，共形值域能提供更多信息，但这或许是一个初步熟悉它的好机会。

´致谢。 </style}作者感谢 Akos G. Horv´ath 在双曲圆锥曲线方面给予的帮助。本文稿目前的状态，得益于 Froil´an M. Dopico 以及其他几位无法一一列名者的善意建议。

1. On the Davis–Wielandt shell

1.A. 关于双曲空间（回顾）。

复参数化与共线变换。如前所述，Berger [2] 中包含了对双曲几何的现代综述。不过，就我们的目的而言，Davis [6], [7] 中的讨论非常有用（也可参见 [29] 附录 A）。回顾一下，复数通过以下方式嵌入 pCK 和 BCK 模型：

$$\iota_{\mathrm{pCK}}(\lambda) = \big(\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Im}\lambda, |\lambda|^2\big) \quad \text{and} \quad \iota_{\mathrm{BCK}}(\lambda) = \left(\frac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2+1}, \frac{|\lambda|^2-1}{|\lambda|^2+1}\right)$$

（作为渐近点）；将其扩展到黎曼球面后，$\iota_{\mathrm{pCK}}(\infty) = \infty_{\langle 0,\ 0,\ 1\rangle}$，$\iota_{\mathrm{BCK}}(\infty) = (0,\ 0,\ 1)$，即可涵盖所有渐近点。

在本节以下内容中，‘$*$’可以指 BCK 或 pCK。

若 $f\colon \lambda \mapsto \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ 是复分式线性变换（即复 Möbius 变换），则渐近闭双曲空间上存在唯一一个共线变换 f_*，使得对于 $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，$f_*(\iota_*(\lambda)) = \iota_*(f(\lambda))$。根据共线变换结构，这唯一地诱导出双曲空间上的一个保向共线变换。（若要考虑非保向的 h-共线变换，还应包括由作用 $f\colon \lambda \mapsto \frac{a\bar{\lambda}+b}{c\bar{\lambda}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ 诱导的变换。注意，变换 $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ 的作用为 $(\overline{x_*}, \overline{y}_*, z_*) \mapsto (x_*, -y_*, z_*)$，这是对规范嵌入的 h-平面的 h-反射。）回顾一下，h-共线变换是射影变换在 pCK 和 BCK 模型基集上的限制。（射影变换，即本质上作用于非渐近点的显式变换，例如列于 [29] 附录 A；但我们不会明确使用它们；关键在于它们的存在。）这里，双曲意义下的保向性与模型内部的欧几里得意义下的保向性相同，也与仅在渐近点上的保向性相同。

距离。在 BCK 模型中，自然的距离函数为

$$\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}((x_{\mathrm{BCK}}, y_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}), (\tilde{x}_{\mathrm{BCK}}, (\tilde{y}_{\mathrm{BCK}}, \tilde{z}_{\mathrm{BCK}})) = \tag{7}$$
$$= \operatorname{arcosh}\left(\frac{1 - x_{\mathrm{BCK}}\tilde{x}_{\mathrm{BCK}} - y_{\mathrm{BCK}}\tilde{y}_{\mathrm{BCK}} - z_{\mathrm{BCK}}\tilde{z}_{\mathrm{BCK}}}{\sqrt{1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(y_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2}\sqrt{1-(\tilde{x}_{\mathrm{BCK}})^2-(\tilde{y}_{\mathrm{BCK}})^2-(\tilde{z}_{\mathrm{BCK}})^2}}\right).$$

horosphere 的代表。假设映射 $F\colon \mathsf{w} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathsf{Aw} + \mathsf{b}$ 是一个欧几里得等距变换。那么 $\mathrm{Up}_F\colon (\mathsf{w}\ z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto (\mathsf{Aw} + \mathsf{b}\ z + 2\langle \mathsf{Aw}, \mathsf{b}\rangle + |\mathsf{b}|^2)$ 诱导出 pCK 模型的 h-共线变换（对应于一个 h-共线变换 f_{pCK} where $f(\lambda) = a\lambda + b$ or $f(\lambda) = a\lambda + b$ with $|a| = 1$），并固定 $\infty_{\langle 0,0,1\rangle}$。事实上，$\mathrm{Up}_F$’s 构成由以下变换生成的群 $F_{\infty,\infty}$：其不动点集是经过 $\infty_{\langle 0,\ 0,1\rangle}$ 的渐近闭合 h-平面的那些 h-共线变换（对应于那些 F’s which are

欧几里得反射）。 (很难表达 ∞ 是一个“双固定点”。) 群$F_{\infty,\infty}$ 在方程为以下形式的集合上传递作用

$$z_{\mathrm{pCK}} - (x_{\mathrm{pCK}})^2 - (y_{\mathrm{pCK}})^2 = c; \tag{8}$$

由此可见，这些带有 $c > 0$ 的集合是以 $\infty_{\langle 0,\ 0,\ 1\rangle}$ 为渐近点的 h-horosphere。事实上，Up_F 只是将 F 的作用提升到所有满足方程 (8) 的集合上。（注意，所有固定 $\infty_{\langle 0,\ 0,\ 1\rangle}$ 的共线变换构成的群更大，它是 $F_{\infty,\ \infty}$ 与映射群（$\mathbf{w}\ z$） $\in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto$ （$a\mathbf{w}\ a^2 z$）的半直积，其中 $a > 0$，对应于 h-共线变换 f_{pCK}，其中 f（λ） $= a\lambda$；这些变换会混淆这里讨论的 h-horosphere。）（几何学家会使用与之密切相关的庞加莱半空间模型来作此论证，但我们没有讨论该模型。）将 (8) 转写为 BCK 模型可得

$$(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (y_{\mathrm{BCK}})^2 + (z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 + c(z_{\mathrm{BCK}} - 1)^2 = 0, \tag{9}$$

其中 $c > 0$ 是渐近闭合的 h-horosphere 的方程，其渐近点为 (0，0，1)。（对于熟悉解析学的读者，我们指出，(9) 确实是方程 $(x_{\mathrm{BCK}})^2$ +$(y_{\mathrm{BCK}})^2$ +$(z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 = 0$ 和 $(z_{\mathrm{BCK}} - 1)^2 = 0$ 的线性组合，且实际上是正线性组合；这些方程分别对应 BCK 模型中在 (0，0，1) 处的绝对和双切平面。在 pCK 模型中，对于绝对，我们有 z_{pCK} −$(x_{\mathrm{pCK}})^2$ −$(y_{\mathrm{pCK}})^2 = 0$；对于双理想平面，则有 $0 = 1$。）特别地， $c = 1$ 得出

$$(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (y_{\mathrm{BCK}})^2 + 2(z_{\mathrm{BCK}})^2 - 2z_{\mathrm{BCK}} = 0 \tag{10}$$

as t渐近闭合的 h-horosphere 的方程，其渐近点为 (0，0，1) .

h管状域的代表。假设 A 是一个 2×2 实矩阵，且为相似变换，即正数倍的正交变换。则映射 $\mathrm{Up}_{\mathbf{A}}$: (w z) $\in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto$ (Aw $\|\mathrm{A}\|z$) 诱导出 pCK 模型的一个 h共线变换¯（对应于一个 h共线变换 f_{pCK}，其中 $f(\lambda) = a\lambda$ 或 $f(\lambda) = a\lambda$），并固定渐近点 (0, 0, 0) 和 $\infty_{\langle 0,0,1\rangle}$。事实上，$\mathrm{Up}_{\mathbf{A}}$构成群 $F_{0\infty}$，其中包含固定直线$x_{\mathrm{pCK}} = y_{\mathrm{pCK}} = 0$的渐近点 (0, 0, 0) 和 $\infty_{\langle 0,0,1\rangle}$ 的那些 h共线变换。群 $F_{0\infty}$ 在所有方程为

$$z_{\mathrm{pCK}} = (1 + c)(x_{\mathrm{pCK}})^2 + (y_{\mathrm{pCK}})^2); \tag{11}$$

但去掉点 (0，0，0) 和 $\infty_{\langle 0,\ 0,\ 1\rangle}$。由此可见，这些带有 $c > 0$ 的集合是属于 h-直线 $x_{\mathrm{pCK}} = y_{\mathrm{pCK}} = 0$ 的 h-管。（若加入 (0，0，0) 和 $\infty_{\langle 0,\ 0,\ 1\rangle}$，它们便是渐近闭合的。）将式 (11) 转换到 BCK 模型中，得到

$$(1 + c)(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (1 + c)(y_{\mathrm{BCK}})^2 + (z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 = 0, \tag{12}$$

其中含有 $c > 0$，它们是属于 h-直线 $x_{\mathrm{BCK}} = y_{\mathrm{BCK}} = 0$ 的渐近闭合 h-管的方程，即具有渐近点 (0，0，±1)。（对于熟悉解析方法的读者，我们指出，式 (12) 确实是方程 $(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (y_{\mathrm{BCK}})^2$ +$(z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 = 0$ 和 $(z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 = 0$ 的一个特殊线性组合；这些方程分别对应于绝对以及 BCK 模型中 (0，0，±1) 处切平面的并集。在 pCK 模型中，绝对的方程为 z_{pCK} −$(x_{\mathrm{pCK}})^2$ −$(y_{\mathrm{pCK}})^2 = 0$，而经过渐近点的切平面与理想平面组成的平面对的方程为 $0 = z_{\mathrm{pCK}}$。）

纯距离方法的推导如下：由对称性可知， h 平面 $z_{\mathrm{BCK}} = C$ 必须垂直于 h 直线 $x_{\mathrm{BCK}} = y_{\mathrm{BCK}} = 0$。因此，在 BCK 模型中，映射 ($x_{\mathrm{BCK}}$， y_{BCK}， z_{BCK}) $\mapsto$ (0，0，z_{BCK}) 必定是到 h 直线 $x_{\mathrm{BCK}} = y_{\mathrm{BCK}} = 0$ 的正交（垂足）投影。因此，相应的半径为 $r > 0$ 的 h 管面的方程为

$$\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}\left((x_{\mathrm{BCK}}, y_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}), (0, 0, z_{\mathrm{BCK}})\right) = r;$$

即

$$\frac{\sqrt{1-(z_{\mathrm{BCK}})^2}}{\sqrt{1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(y_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2}}=\cosh r.$$

将此式改写（针对普通的 h-点）可得方程 (12)，其中 $c=\quad {}^{1}{}_{(\sinh r)^2}$。

1.B. **Davis–Wielandt 壳（回顾）**。

设 A 是任意维复希尔伯特空间上的线性算子。

定理 1.1 （Wielandt，Davis）。若 U是幺正的，则 $\mathrm{DW}_*(A)=\mathrm{DW}_*(UAU^{-1})$。

定理 1.2 （Wielandt，Davis）。若 $f\colon\ \lambda\mapsto\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc\neq 0$是复分式线性（即复 *M¨obius*）变换，且 $-\frac{d}{c}$ 不属于 A的谱，则对于 $f(A)-=\frac{aA+b}{cA+d}$，*Davis–Wielandt* 壳为

$$\mathrm{DW}_*(f(A))=f_*(\mathrm{DW}_*(A)).$$

定理 1.3 (Wielandt，Davis)。 $\mathrm{DW}_*(A)$ 中的渐近点是 $\iota_*(\lambda)$ ，其中λ 是 A的一个特征值。

证明。 参见 Davis [6], [7]。（只有定理 1.2 是非平凡的。） □

1.C. **壳层的椭圆值域定理（陈述）**。

定理 1.4 (Wielandt，Davis)。 （*Davis–Wielandt* 壳的定性椭圆值域定理。）

设 A 是作用在二维复希尔伯特空间上的线性算子。我们有以下几种可能:

(i) A 有一个二重特征值 λ，且 A 是正规算子（因此 $A=\lambda\mathrm{Id}$）。
那么，$\mathrm{DW}_*(A)$ 仅包含点 $\iota_*(\lambda)$。
(ii) A 有两个不同的特征值 $\lambda_1\neq\lambda_2$，且 A 是正规的。
那么，$\mathrm{DW}_*(A)$ 是连接 $\iota_*(\lambda_1)$ 与 $\iota_*(\lambda_2)$的渐近闭合 h-线。
(iii) A 有一个二重特征值 λ，且 A 是非正规的。
那么，$\mathrm{DW}_*(A)$ 是一个以 $\iota_*(\lambda)$为渐近点的渐近闭合 h-极限球面。在 BCK模型中，这是一个椭球，其方程由单位球面的二次方程与在 $\iota_*(\lambda)$处与单位球面相切的双平面方程线性生成。

(iv) A 有两个不同的特征值 $\lambda_1\neq\lambda_2$，且 A 是非正规的。
那么，$\mathrm{DW}_*(A)$ 是围绕连接$\iota_*(\lambda_1)$ 和 $\iota_*(\lambda_2)$的 h直线的渐近闭合 h管状区域。在 BCK模型中，它是一个椭球，其方程由单位球面的二次方程与在 $\iota_*(\lambda_1)$ 和 $\iota_*(\lambda_2)$处与单位球面相切的平面之并集的二次方程线性生成。

Wielandt 或 Davis 并未以这种形式陈述该定理；但它包含了他们已知的信息，即 Wielandt [44], [45], Davis [6], [7]。其证明只是结合了前面定理所体现的基本信息与对称性原理，以及解析双曲几何的基本事实。更明确地说，该定理在[29], 附录 B中得到了证明。

上述陈述仅具定性，因为缺少用于确定具体双曲二次曲面的双曲度量信息。因此，我们将通过以下度量补充来重新证明定理 1.4:

定理 1.5 （定理 1.4 的补充，关于内部度量数据）。

在情形 *(ii)/(iv)* 中，可能退化的 h-管状区域$\mathrm{DW}_*(A)$ 的自然双曲半径为

$$\frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A}{|D_A|} \equiv \operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{U_A-|D_A|}{2|D_A|}} \equiv \operatorname{artanh}\sqrt{\frac{U_A-|D_A|}{U_A+|D_A|}}; \tag{13}$$

其中，量 U_A、 $|D_A|$ 在第 *3.A* 小节中定义。

在情形 *(i)/(iii)* 中，公式(13) 仅给出值0 （按定义）和 $+\infty$。

在情形 (i)、(ii)、(iv) 中，该定理刻画了 $\mathrm{DW}_*(A)$。然而，它并未刻画情形 (iii) 的 horosphere。一种省事的处理方法是

定理 1.6 （定理 1.4 的补充，使用“外部”数据）。

如果 A 的特征值为 λ_1、 λ_2，且算子范数为 $\|A\|$，那么 $\mathrm{DW}_*(A)$可刻画为可能退化的渐近闭合 h管或 h等距球面，其渐近点为 $\iota_*(\lambda_1)$ 和 $\iota_*(\lambda_2)$；根据所用模型，它分别与平面 $z_{\mathrm{pCK}} = \|A\|^2$ 或$z_{\mathrm{BCK}} = \frac{\|A\|^2-1}{\|A\|^2+1}$ （从下方）相切。

所有这些结论将在第 4 节中证明。

2. The conformal range

2.A. 双曲平面（回顾）。

复参数化与共线变换。 关于模型 BCK、pCK，令$\pi_*^{[2]}\colon H_*^3 \to H_*^2$为从双曲三维空间到双曲二维空间的典范投影，通过消去第二个坐标，换言之，将其设为 0。从几何上看，这是从 h-空间 H_*^3 到典范嵌入的（渐近闭合） h-平面 $i^{[2]}(H_*^2)$的 h-正交投影。令 $\iota_*^{[2]} = \pi_*^{[2]} \circ \iota_*$为从黎曼球面到渐近闭双曲平面的映射。那么，对于 $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\iota^{[2]}_{\mathrm{pCK}}(\lambda) = \big(\operatorname{Re}\lambda, |\lambda|^2\big) \quad \text{and} \quad \iota^{[2]}_{\mathrm{BCK}}(\lambda) = \left(\frac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2+1}, \frac{|\lambda|^2-1}{|\lambda|^2+1}\right); \tag{14}$$

以及 $\iota^{[2]}{}_{\mathrm{pCK}}(\infty) = \infty_{\langle 0,\ 1\rangle}$, $\iota^{[2]}{}_{\mathrm{BCK}}(\infty) = (0,\ 1)$。映射 $\iota_*^{[2]}$是满射；从 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$到渐近点是一一映射，而从 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 到非渐近点是二对一映射。

所有 双曲平面上的共线变换（即全等变换，也即等距变换；不仅仅是保向变换）都由实分式线性变换 $f\colon\lambda \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 诱导，其中 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$；使得 f_*限制在我们的标准 h平面上。关于这一限制，值得注意的是，对于实 M¨obius 变换 f，其作用 f_* 与 $\pi_*^{[2]}$可交换。因此，

$$f_*(\iota_*^{[2]}(\lambda)) = \iota_*^{[2]}(f(\lambda)). \tag{15}$$

（此处，$\operatorname{sgn}(ad-bc)$ 表示 h-共线变换是否保向。）

如我们所见，黎曼球面在共轭意义下可用于参数化渐近闭双曲空间。实际应用中，为此采用黎曼球面的非负虚部部分：这本质上就是庞加莱上半平面模型：其基集为 $H^2_{\mathrm{Ph}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \cup \{\infty\}$。这里， $\mathbb{C}$ 通常与 $\mathbb{R}^2$等同。到射影平面模型的规范转写可以

从（14）中抽象得出；而从射影平面模型到庞加莱上半平面模型 Ph 的规范转写由下式给出

$$(x_{\mathrm{Ph}}, z_{\mathrm{Ph}}) = \left(x_{\mathrm{pCK}}, \sqrt{z_{\mathrm{pCK}} - (x_{\mathrm{pCK}})^2}\right) = \frac{(x_{\mathrm{BCK}}, \sqrt{1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2})}{1-z_{\mathrm{BCK}}}.$$

In 就复参数化而言，这给出（符合最初的想法 ）

$$\iota^{[2]}_{\mathrm{Ph}}(\lambda) = (\operatorname{Re}\lambda, |\operatorname{Im}\lambda|), \qquad \iota^{[2]}_{\mathrm{Ph}}(\infty) = \infty.$$

由于 (15) 对 Ph 仍然成立， $w = x_{\mathrm{Ph}} + \mathrm{i}z_{\mathrm{Ph}}$ 的共线变换效应由 b 给出 y

$$f^{[2]}_{\mathrm{Ph}} : w \mapsto \left(\frac{aw+b}{cw+d}\right)^{\text{conjugated if } ad-bc<0}.$$

我们本可以不提庞加莱´半平面模型，只讨论由 $\iota^{[2]}$ 给出的参数化，但隐去它并无多大意义。众所周知，Ph 模型中的 h-直线看起来像垂直于实轴的半直线和半圆。

距离。 在 BCK 模型中，自然距离函数定义为

$$\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}((x_{\mathrm{BCK}},\ z_{\mathrm{BCK}}),\ (\tilde{x}_{\mathrm{BCK}},\ \tilde{z}_{\mathrm{BCK}})) = \tag{16}$$
$$= \operatorname{arcosh}\left(\frac{1-x_{\mathrm{BCK}}\tilde{x}_{\mathrm{BCK}}-z_{\mathrm{BCK}}\tilde{z}_{\mathrm{BCK}}}{\sqrt{1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2}\sqrt{1-(\tilde{x}_{\mathrm{BCK}})^2-(\tilde{z}_{\mathrm{BCK}})^2}}\right).$$

特别是,

$$\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}((0,0),(s,0)) = \operatorname{arcosh}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = \operatorname{arsinh}\frac{|s|}{\sqrt{1-s^2}} = \operatorname{artanh}|s| \tag{17}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{1+s^2}{1-s^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\frac{2|s|}{1-s^2} = \frac{1}{2}\operatorname{artanh}\frac{2|s|}{1+s^2}.$$

在 Ph 模型中，自然距离函数为

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Ph}}((x_{\mathrm{Ph}},z_{\mathrm{Ph}}),(\tilde{x}_{\mathrm{Ph}},\tilde{z}_{\mathrm{Ph}})) = \operatorname{arcosh}\left(1+\frac{(x_{\mathrm{Ph}}-\tilde{x}_{\mathrm{Ph}})^2+(z_{\mathrm{Ph}}-\tilde{z}_{\mathrm{Ph}})^2}{2z_{\mathrm{Ph}}\tilde{z}_{\mathrm{Ph}}}\right) \tag{18}$$
$$= 2\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{(x_{\mathrm{Ph}}-\tilde{x}_{\mathrm{Ph}})^2+(z_{\mathrm{Ph}}-\tilde{z}_{\mathrm{Ph}})^2}}{2\sqrt{z_{\mathrm{Ph}}\tilde{z}_{\mathrm{Ph}}}}\right).$$

后一公式清楚地展示了欧几里得度量在 Ph 模型中的变形方式。

极限圆的代表。 与双曲空间的情形一样，我们可以论证

$$z_{\mathrm{pCK}} - (x_{\mathrm{pCK}})^2 = c, \tag{19}$$

其中 $c > 0$ 将是 pCK 模型中以 $\infty_{(0}$ 为渐近点的 h-horocycle（等距曲线）. $_{1)}$。相应地,

$$(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 + c(z_{\mathrm{BCK}}-1)^2 = 0 \tag{20}$$

其中 $c > 0$ 将是 BCK 模型中以 (0，1) 为渐近点的 h-horocycle（等距曲线）。（它们由绝对曲线 $(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 = 0$ 和经过 (0，1) 的双切线 $(z_{\mathrm{BCK}}-1)^2 = 0$ 线性生成。）在 Ph 模型中，我们的 h-horosphere 方程为

$$z_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{c},$$

正如从（19）中很容易看出的那样。事实上，对任何有过 Ph 模型使用经验的人来说，关于 h-极限圆的这类方程应该相当熟悉。

在 $c = 1$ 的情况下，相应的方程为

$$(x_{\mathrm{BCK}})^2 + 2(z_{\mathrm{BCK}})^2 - 2z_{\mathrm{BCK}} = 0 \tag{21}$$

and

$$z_{\mathrm{Ph}} = 1.$$

˜我们称这个 h-极限圆为 C。由对称性可知，映射

$$(x_{\mathrm{Ph}}, z_{\mathrm{Ph}}) \mapsto (x_{\mathrm{Ph}}, 1)$$

˜ ˜将是到 C的正交（垂足）投影。因此，到 C的有向距离（在极限圆内部为负）为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^*_{\tilde{C}}(x_*, z_*) &= \mathrm{sgn}(1 - z_{\mathrm{Ph}})\mathrm{d}^{\mathrm{Ph}}_{\tilde{C}}\left((x_{\mathrm{Ph}}, z_{\mathrm{Ph}}), (x_{\mathrm{Ph}}, 1)\right) \\ &= -\log z_{\mathrm{Ph}} \\ &= \log\left(\frac{1 - z_{\mathrm{BCK}}}{\sqrt{1 - (x_{\mathrm{BCK}})^2 - (z_{\mathrm{BCK}})^2}}\right). \end{aligned}$$

可以看出，$\mathrm{d}_{\tilde{C}}$ 的水平集本身就是极限圆（平行等距线）。取值为 d 的水平集对应于较早的极限圆，其 c =为$\exp(-2d)$。

.....的代表式 h**-距离线**。 与 h-管的情形类似，可得

$$(1 + c)(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (z_{\mathrm{BCK}})^2 - 1 = 0, \tag{22}$$

其中 $c > 0$，它们是属于 h-线 $x_{\mathrm{BCK}} = 0$的渐近闭合 h-距离线的方程；也就是说，其渐近点为 BCK 模型中的 $(0, \pm 1)$。（对于关注解析细节的读者，我们指出，与 h-管不同，式 (22) 最好解释为方程 $(x_{\mathrm{BCK}})^2+(z_{\mathrm{BCK}})^2-1 = 0$ （对应绝对）和方程 $(x_{\mathrm{BCK}})^2 = 0$ （对应二重直线）的线性组合；事实上，是正系数组合。）

2.B. **共形值域**。

基本性质。 正如我们之前所讨论的，

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(A) = \pi^{[2]}_*(\mathrm{DW}_*(A)). \tag{23}$$

关于庞加莱半平面模型，我们注意到，

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Ph}}(A) = \left\{ \left(\frac{\mathrm{Re}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}{|\mathbf{x}|_2^2}, \frac{\sqrt{|\mathbf{x}|_2^2|\mathbf{y}|_2^2 - |\mathrm{Re}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle|^2}}{|\mathbf{x}|_2^2} \right) : A\mathbf{x} = \mathbf{y},\, \mathbf{x} \neq 0 \right\} \subset \overline{H}^2_{\mathrm{Ph}}.$$

定理 2.1. 若 U 是幺正的，则 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(A) = \mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(UAU^{-1})$。

定理 2.2. 若 $f{:}\lambda \mapsto \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$，~~$a, b, c,$~~ $d \in \mathbb{R}$，$ad - bc \neq 0$ 是实分式线性变换（即实 *Möbius* 变换），且 $-\frac{d}{c}$ 不属于 A 的谱，-则对于 $f(A) = \frac{aA+b}{cA+d}$，共形值域表示为

——

$$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(f(A)) = f_*(\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(A)).$$

定理 2.3. $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(A)$ 中的渐近点为 $\iota^{[2]}_*(\lambda)$，其中 λ 是 A 的实特征值。（但任意特征值 λ 均意味着 $\iota^{[2]}_*(\lambda) \in \mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_*(A)$。）

下文中， h的特征点是 $\iota^{[2]}_*(\lambda)$，其中 λ 是 A的特征值。证明。 这些结论可由第 1.B小节中相应的定理直接推出，同时考虑 $\pi^{[2]}_*$的性质。□

定理 2.1–2.3 对于 $* = \mathrm{Ph}$ 也自然成立。

注 2.4. 对于作用在实希尔伯特空间上的算子，实共形值域可以直接定义。在实数情形下，定理 2.1 适用于正交 U。否则，上述定理仍然成立。一般而言，若 $A^{\mathbb{R}}$ 作用在实希尔伯特空间上，则其共形值域与其典范复化 $A^{\mathbb{C}}$的共形值域相同；但 $A^{\mathbb{R}}$ 为二维时可能例外：

在二维情形下：可以看到（参见 [29]），共形值域 $\mathrm{DW}_*^{\mathbb{R}}(A^{\mathbb{R}})$ 或为一个 h圆，或为一个 h极限圆，或为一对 h双曲线，亦或为这些图形的退化形式；它们分别对应于 $A^{\mathbb{R}}$ 的椭圆、抛物和双曲情形。但考察壳层 $\mathrm{DW}_*^{\mathbb{R}}(A^{\mathbb{C}})$ 时，这些圈都被填满了。就 Davis–Wielandt 壳层 $\mathrm{DW}_*(A^{\mathbb{C}})$ 而言，它们分别对应于以下情形：一个 h管，其轴垂直于 $i^{[2]}(H_*^2)$；一个 h极限球面，其渐近点位于 $i^{[2]}(H_*^2)$上；或者一个h管，其轴位于 $i^{[2]}(H_*^2)$上。△

2.C. **共形值域的定性椭圆值域定理**。

2×2 矩阵的共形值域有更为详细的定性描述：

定理 2.5. 设 A 是作用在2维复希尔伯特空间上的线性算子。可能出现以下情形：

(i) A 有二重非实特征值 λ，或有两个共轭非实特征值 $\lambda = \bar{\lambda}$，且 A 是正规的。

那么，$DW_*^{\mathbb{R}}(A)$仅包含普通的 h点 $\iota_*^{[2]}(\lambda)$。*(ii)* A 有两个互不相等且不共轭的非实特征值 λ_1、λ_2，且 A 是正规的。那么，$DW_*^{\mathbb{R}}(A)$是连接 $\iota_*^{[2]}(\lambda_1)$与 $\iota_*^{[2]}(\lambda_2)$的 h线段。*(iii)* A 有两个不同的实特征值 λ_1、λ_2，且 A 是正规的。那么，$DW_*^{\mathbb{R}}(A)$是连接 $\iota_*^{[2]}(\lambda_1)$与 $\iota_*^{[2]}(\lambda_2)$的渐近闭合 h直线。*(iv)* A有一个非实特征值 λ_1 和一个实特征值 λ_2，且 A 是正规的。那么，$DW_*^{\mathbb{R}}(A)$是连接 $\iota_*^{[2]}(\lambda_1)$与 $\iota_*^{[2]}(\lambda_2)$的渐近闭合 h半直线。*(v)* A 有二重实特征值 λ，且 A 是正规的。那么，$DW_*^{\mathbb{R}}(A)$仅包含渐近 h点 $\iota_*^{[2]}(\lambda)$。*(vi)* A 有二重非实特征值 λ，或有两个共轭非实特征值$\lambda = \lambda$，且 A 是非正规的。那么，$DW_*^{\mathbb{R}}(A)$是一个 h圆。这里，$\iota_*^{[2]}(\lambda)$是一个内点。

(vii) A 有两个互不相等且互非共轭的非实特征值 λ_1、λ_2，并且 A 是非正规矩阵。那么$\mathrm{DW}_*^{\mathbb{R}}(A)$ 是一个真 h椭圆。这里 $\iota_*^{[2]}(\lambda_1)$ 和 $\iota_*^{[2]}(\lambda_2)$ 是内点。*(viii)* A 有两个不同的实特征值 λ_1、λ_2，并且 A 是非正规矩阵。那么$\mathrm{DW}_*^{\mathbb{R}}(A)$ 是围绕连接 $\iota_*^{[2]}(\lambda_1)$ 和 $\iota_*^{[2]}(\lambda_2)$的 h直线的 h距离带。*(ix)* A有一个非实特征值 λ_1 和一个实特征值 λ_2，并且 A 是非正规矩阵。那么$\mathrm{DW}_*^{\mathbb{R}}(A)$ 是一条 h椭圆抛物线，其渐近点为 $\iota_*^{[2]}(\lambda_2)$。这里 $\iota_*^{[2]}(\lambda_1)$是一个内点。

(x) A 有一个二重实特征值 λ，且 A 是非正规矩阵。那么 $\mathrm{DW}_*^{\mathbb{R}}(A)$ 是一个 h-极限圆盘，其渐近点为 $\iota_*^{[2]}(\lambda)$。

定理 2.5 可由定理 1.4 和 (23) 相对容易地证明；但情形 (vii) 需要经过一些思考，才能证明它不可能是一个 h-圆；

而情形 (ix) 则需要证明它不可能是一个 h-极限圆盘。问题在于，在情形 (vi)、(vii) 和 (ix) 中，对于内部的 h-特征点 $\iota_*^{[2]}(\lambda)$，相关信息并不多；此外，非正规情形 (vi)–(x) 还缺少进一步的度量信息，无法具体确定圆锥曲线（圆锥曲线圆盘）。因此，我们在第 5 节证明定理 2.5，并附上以下补充说明：

定理 2.6（定理 2.5 的补充，关于内部度量数据）.

(a) 在情形 *(i)/(vi)*、*(ii)/(vii)* 和 *(iv)/(ix)* 中，非渐近的 h-特征点分别作为可能退化的 h-椭圆和 h-椭圆抛物线的综合几何表示中的焦点。若将渐近点解释为焦点，则这一结论适用于所有情形。

(b) 在情形 *(i)–(iv)/(vi)–(ix)* 中，（广义）短半轴长为

$$s^- = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\left(1+\frac{U_A-|D_A|}{\max(E_A,|D_A|)}\right) \equiv \operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{U_A-|D_A|}{2\max(E_A,|D_A|)}}; \tag{24}$$

其中，U_A、$|D_A|$ 在第 *3.A* 小节中定义，而 E_A 在第 *3.D* 小节中定义.

在情形 *(v)* 和 *(x)* 中，(24)分别给出 0（按定义）和 $+\infty$。

定理 2.7（定理 2.6 的续篇）。

类似地，（广义）长半轴长为

$$s^+ = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A+E_A}{|E_A-|D_A||};$$

而（广义）焦距的一半为

$$s^{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{E_A+|D_A|}{|E_A-|D_A||}.$$

定理 2.6 足以刻画情形 (i)–(ix) 中的共形值域。然而，对于情形 (x)，即共形值域为极限圆盘时，它并不足够。再者，最省事的做法是通过

定理 2.8（定理 2.5 的补充，使用“外部”数据）。

若 A ***haseigenvalues*** λ_1、λ_2，且算子范数为 $\|A\|$，则 $\mathrm{DW}_*(A)$ 可刻画为可能退化的 h-椭圆，或渐近闭合的 h-椭圆抛物线；其广义焦点为 $\iota_*(\lambda_1)$ 和 $\iota_*(\lambda_2)$，并且分别与直线 $z_{\mathrm{pCK}} = \|A\|^2$ 或 $z_{\mathrm{BCK}} = \frac{\|A\|^2-1}{\|A\|^2+1}$（从下方）相切，具体取决于所用的模型。

所有这些陈述将在第 5 节中证明。

3. On 2×2 complex matrices

这里所有矩阵都是 2×2 复矩阵。

3.A. **谱判别式与度量判别式**。

我们使用以下记号

$$D_A = \det\left(A-\frac{\operatorname{tr}A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right) = (\det A)-\frac{(\operatorname{tr}A)^2}{4}. \tag{25}$$

它本质上是 A 的判别式，因为 A 的特征值为 $\frac{1}{2}\operatorname{tr}A \pm \sqrt{-D_A}$。

用迹来表示,

$$-D_A = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}\right)^2\right) = \frac{\operatorname{tr} A^2}{2} - \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4}.$$

因此，度量判别式给出了一个类似的概念

$$U_A = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}\right)^*\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}\right)\right) = \frac{\operatorname{tr} A^*A}{2} - \frac{|\operatorname{tr} A|^2}{4}. \tag{26}$$

（然而，我们将看到， U_A 并非真正与 $-D_A$对应，而是与 $|D_A|$对应。）

显而易见但值得牢记的是，任何 2×2 复矩阵 A 都可以通过酉共轭化为如下形式

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & t\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \tag{27}$$

其中 $t \geq 0$。这种形式是唯一的，特征值 λ_1 和 λ_2的顺序除外。在上述情形中,

$$U_A = \frac{t^2}{2} + \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right|^2, \qquad \text{and} \qquad D_A = -\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2. \tag{28}$$

反过来,

$$\lambda_1, \lambda_2 \qquad \text{are the two roots of} \qquad \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0; \tag{29}$$

并且，正如 (28) 所示，“典范非对角量”为

$$t = \sqrt{2(U_A - |D_A|)}. \tag{30}$$

（熟悉椭圆值域定理的人会看出， U_A 和 $|D_A|$在其中发挥作用。特别是，(30) 是短轴的长度。）

引理 3.1. 设 A 是一个 2×2 复矩阵。那么

$$U_A \geq |D_A|.$$

如果 A 是正规矩阵，那么 $U_A = |D_A|$。如果 A 是非正规矩阵，那么 $U_A > |D_A|$。

证明. 通过用一个幺正矩阵进行共轭（这保持 U_A、 $|D_A|$不变），我们可以假设 A为三角形 (27)。于是 (28) 表明结论成立。□

另一种证明. 由 (26) 我们已经看出 $U_A \geq 0$。直接计算可得 ,

$$\operatorname{tr}(A^*A - AA^*)^*(A^*A - AA^*) = 8\left((U_A)^2 - |D_A|^2\right).$$

左端是对易子 $[A^*, A]$的弗罗贝尼乌斯范数的平方。该值非负，且当且仅当 A是正规矩阵时为零。□

若 $f\colon \lambda \mapsto \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$, a， b， c， $d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ 是一个复分式线性（即复 M¨obius）变换，且 A是一个复矩阵，且 $-\frac{d}{c}$不属于 A的谱，则称 f 适用于 A。–(事实上，我们可以取 $f(A)$。)

引理 3.2。 对于复 2×2 矩阵 A，比值

$$U_A : |D_A|$$

在适用于 A 时，它在复莫比乌斯变换下保持不变。

证明。(o) 将 A 乘以非零标量 a，得到 $U_{aA} = \bar{a}aU_A = |a|^2 U_A$ 和 $|D_{aA}| = |a^2 D_A| = |a|^2 |D_A|$; 因此 $U_{\alpha A} : |D_{\alpha A}| = U_A : |D_A|$，所以在此情况下比值保持不变。(i) 将标量矩阵加到 A 上，不会改变 U_A 或 $|D_A|$; 因此比值保持不变。(ii) 关于取 A 的逆（如果适用），

$$U_{A^{-1}} : |D_{A^{-1}}| \equiv \frac{U_A}{|\det A|^2} : \left| \frac{D_A}{(\det A)^2} \right| = U_A : |D_A|$$

成立。不变性性质 (o)、(i)、(ii) 合在一起意味着复莫比乌斯不变性。□

也可以认为，这个量或其任意变体 $\frac{U_A}{|D_A|}$、$\frac{|D_A|}{U_A}$ 或 $\frac{U_A - |D_A|}{U_A + |D_A|}$，都以复莫比乌斯不变的方式度量非正规性。（这预示了其双曲几何解释。）

3.B. **典范代表元（复莫比乌斯变换）**。

引理 3.3. 对于复矩阵，在复莫比乌斯变换和酉共轭（当然，两者彼此可交换）下，只需考虑以下代表元:

$$\mathbf{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

（抛物型，正规）;

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

（抛物非正规）;

$$L_t = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ & -1 \end{bmatrix} \qquad t \geq 0 \tag{33}$$

（非抛物情形; $t = 0$: 正规, $t > 0$: 非正规）。

上述代表元彼此不等价。

证明。只需通过施加 M¨obius 变换将特征值标准化，然后通过酉共轭得到标准形。由此，我们得到抛物情形

$$\widehat{0}_t = \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ & 0 \end{bmatrix} \qquad t \geq 0, \tag{34}$$

$\widehat{\ }$和非抛物情形（33）。带有 0_t 的情形可通过线性变换（因此也可通过 M¨obius 变换）彼此缩放。因此，（34）仅归结为（31）和（32）。比值$U_A : |D_A|$ 可区分不同的代表元，参见以下例子。□

例3.4.（a）关于 L_t:

$$U_{L_t} = 1 + 2t^2, \qquad \text{and} \qquad |D_{L_t}| = 1.$$

（b）关于 S_0:

$$U_{S_0} = \frac{1}{2}, \qquad \text{and} \qquad |D_{S_0}| = 0.$$

（c）关于 $\mathbf{0}_2$:

$$U_{\mathbf{0}_2} = 0, \qquad \text{and} \qquad |D_{\mathbf{0}_2}| = 0. \qquad \diamondsuit$$

推论 3.5。比值

$$U_A \ : \ |D_A|$$

是关于复 *M ̈obius* 变换等价和酉共轭的 2×2 复矩阵的一个完全不变量。

证明。 它区分引理 3.3 中的典范代表元。 □

有了 U_A 和 $|D_A|$，以及粗略的抛物型/非抛物型谱分类，便可以处理 Davis–Wielandt 壳层的椭圆值域定理。为了研究共形值域，还需要更精细的描述:

3.C. **精细谱类型**。

我们将实 2×2 矩阵的椭圆型/抛物型/双曲型分类扩展到复 2×2 矩阵，如下所示。我们区分以下几类:

- 实椭圆型情形：两个共轭的严格复特征值,
- 实抛物型情形：两个相等的实特征值,
- 实双曲型情形：两个不同的实特征值,
- 非实抛物型情形：两个相等的严格复特征值,
- 半实情形：一个实特征值和一个严格复特征值,
- 准椭圆型情形：两个非共轭特征值 λ_1， λ_2 其中 $(\operatorname{Im}\lambda_1)(\operatorname{Im}\lambda_2) < 0$,
- 拟双曲情形：两个不同的特征值 λ_1， λ_2 其中 $(\operatorname{Im}\lambda_1)(\operatorname{Im}\lambda_2) > 0$。

可以看出，只要适用，上述各类在酉矩阵共轭以及实分式线性（即 M ̈obius）变换下都是封闭的。

3.D. **另一个谱量**。

与 $|D_A|$相对应的量为

$$E_A = \left(\frac{(\operatorname{Im}\operatorname{tr} A)}{2}\right)^2 + \frac{|D_A| - \operatorname{Re} D_A}{2}.$$

事实上，如果 λ_1 和 λ_2 是 A的特征值，那么不难看出

$$|D_A| = \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right|^2 \tag{35}$$

and

$$E_A = \left|\frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{2}\right|^2; \tag{36}$$

也就是说，对一个特征值进行共轭后，其中一个就对应于另一个。

引理 3.6. 比值

$$E_A : |D_A| = \left|\lambda_1 - \bar{\lambda}_2\right|^2 : \left|\lambda_1 - \lambda_2\right|^2$$

在实分式变换下保持不变（只要这些变换适用于 A）。

证明。 只需证明它们在变换 (o) $f\colon\ \lambda \mapsto a\lambda\,(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$、(i) $f\colon\ \lambda \mapsto \lambda + b\,(b \in \mathbb{R})$ 和 (ii) $f\colon\ \lambda \mapsto 1/\lambda$（在适用时）下保持不变；这一点显而易见。□

3.E. **关于实双矩阵的一点说明。**

引理 3.7。恒等式

$$\left(U_{\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)}\right)^2-\left|D_{\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)}\right|^2=2\left(U_A-|D_A|\right)\left(U_A+|D_A|\right)\left(U_A-|D_A|+2|E_A|\right) \tag{37}$$

成立。

证明。 由于酉不变性，只需对形如 (27) 的矩阵进行检验，此时计算相对容易。□

推论 3.8。 A 是正规矩阵，当且仅当 $\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)$ 是正规矩阵。

证明。 由于我们有 $U_A\geq|D_A|\geq 0$ 和 $U_A\geq|D_A|\geq 0$，一般而言，我们看到：$\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)$ 是正规矩阵 $\Leftrightarrow U_{\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)}-\left|D_{\mathrm{D}^{\mathbb{R}}(A)}\right|=0\Leftrightarrow$ (37) 是 $0\Leftrightarrow U_A-|D_A|=0\Leftrightarrow A$ 是正规矩阵。□

3.F. **典范代表元（实 Möbius 变换）**。

引理 3.9. 对于复矩阵，在实 *Möbius* 变换和酉共轭下，只需考虑以下情形：

$$\mathbf{0}_2=\begin{bmatrix}0 & \\ & 0\end{bmatrix} \tag{38}$$

（实抛物型，正规）；

$$S_\beta=\begin{bmatrix}0 & \cos\beta\\ & \mathrm{i}\sin\beta\end{bmatrix}\qquad \beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \tag{39}$$

（$\beta=0$：实抛物型、非正规； $0<\beta<\pi/2$：半实型、非正规； $\beta=\pi/2$：半实型、正规）；

$$L^{\pm}_{\alpha,t}=\begin{bmatrix}\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha & 2t\\ & -\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha\end{bmatrix}\qquad \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],t\geq 0 \tag{40}$$

$$\textit{but the cases } L^{+}_{0,t} \textit{ and } L^{-}_{0,t} \textit{ are identical}$$

（$\alpha=0$：实双曲型情形； $0<\alpha<\pi/2$：准椭圆型 *[−]* / 准双曲型情形*[+]*，
$\alpha=\pi/2$：实椭圆型 *[−]* / 非实抛物型情形 *[+]*； $t=0$：正规， $t>0$非正规）。

除 $\alpha=0$ 的退化情形外，上述代表元彼此不等价。

证明。 只需在庞加莱半平面模型中（相对于实莫比乌斯变换）考察特征值的像（模共轭），即在共线变换下重新考虑渐近闭双曲平面中点对的分类及相应的复特征值，并应用酉共轭下的标准形。由此，我们得到以下几种情形

$$\widehat{0}_t=\begin{bmatrix}0 & 2t\\ & 0\end{bmatrix}\qquad t\geq 0, \tag{41}$$

$$\widehat{S}^{\pm}_t=\begin{bmatrix}0 & 2t\\ & \pm\mathrm{i}\end{bmatrix}\qquad t\geq 0, \tag{42}$$

$$\widehat{L}^{\pm_1,\pm_2}_{\alpha,t}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\pm_1\mathrm{i}\sin\alpha & 2t\\ & -\cos\alpha\pm_2\mathrm{i}\sin\alpha\end{bmatrix}\qquad \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],t\geq 0. \tag{43}$$

（最值得注意的情况是存在两个非渐近的 h-特征点。于是，通过适当的共线变换，我们可以将它们移到直线（x_{Ph}）$^2+$（z_{Ph}）$^2=1$上。通过

沿这条直线进一步平移，我们可以假设 h-特征点关于（0，1）对称。然后，考察相应的可能特征值以及酉共轭下的标准形，便得到标准形（43），其中$\alpha \in$（0，$\pi/2$]。其他所有情况都更简单。）

有些符号情形可以消去：乘以 -1 并施以酉共轭，可知 $\widehat{S}_t^-$和 $\widehat{S}_t^+$等价；因此消去 $\widehat{S}_t^-$。类似地，取逆并施以酉共轭，可知 $\widehat{L}^{\pm 1}{}_{,\alpha,t}{}^{\pm 2}$、以及 $\widehat{L}^{\mp 1}{}_{,\alpha,t}{}^{\mp 2}$等价；因此消去 $\widehat{L}^{+}{}_{,\alpha,t}{}^{\pm 2}$。现在，就是 $L_\alpha^{\pm 2}{}_{,t}$。与 $L_\alpha^{\pm 2}{}_{,t}$ 缩放后得到 $L_\alpha^{\pm 2}{}_{,t}$。缩放后得到 $L_\alpha^{\pm 2}{}_{,t}$，其中 $\alpha \in (0, \pi/2]$。

从特征值的位置不难看出，来自不同族的代表元并不等价。在同一族内，比值 $U_A : |D_A| : E_A$ 可以区分不同的代表元，如下例所示。□

例 3.10. (a) 关于 $L^{\pm}_{\alpha,\,t}$:

$$U_{L^+_{\alpha,t}} = 2t^2 + (\cos\alpha)^2, \quad \left|D_{L^+_{\alpha,t}}\right| = (\cos\alpha)^2, \quad E_{L^+_{\alpha,t}} = 1, \quad E_{L^+_{\alpha,t}} \geq \left|D_{L^+_{\alpha,t}}\right|;$$

and

$$U_{L^-_{\alpha,t}} = 2t^2 + 1, \quad \left|D_{L^-_{\alpha,t}}\right| = 1, \quad E_{L^-_{\alpha,t}} = (\cos\alpha)^2, \quad E_{L^-_{\alpha,t}} \leq \left|D_{L^-_{\alpha,t}}\right|.$$

(b) 关于 S_β:

$$U_{S_\beta} = \frac{1}{4}\left(1 + (\cos\beta)^2\right), \quad |D_{S_\beta}| = E_{S_\beta} = \frac{1}{4}\left(1 - (\cos\beta)^2\right).$$

(c) 在 $\mathbf{0}_2$ 的情况下:

$$U_{\mathbf{0}_2} = |D_{\mathbf{0}_2}| = E_{\mathbf{0}_2} = 0. \qquad \diamondsuit$$

推论 3.11. 三重比

$$U_A \ : \ |D_A| \ : \ E_A \tag{44}$$

以及（当 $|D_A| = E_A > 0$ 时）可能的选择

$$\textit{real-hyperbolic / semi-real type}$$

共同构成了在实 *M¨obius* 变换和酉共轭下等价的 2×2 复矩阵的完整不变量。

证明。(44) 几乎可以区分引理 3.9 的典范代表元。唯一的歧义在于 $L_t \equiv L_{0,t}$ 与 S_β，当 $\cos\beta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ 时。□

3.G. h**-特征距离**。

引理 3.12。如果 f 是一个适用于复数 2×2 矩阵 A 的实 *M¨obius* 变换，那么 A 的 h-特征点与 $f(A)$ 的 h-特征点通过与 f 相关联的 h-等距变换相互关联。

证明。由 f_* 对 $\iota_*(\lambda)$ 的作用以及 f_* 与 $\pi_*^{[2]}$ 可交换这一事实可知。（但在 Poincar´ 半平面模型中，这一点最为明显，其中 h-特征点仅仅是模共轭的特征值。）□

定理 3.13。 如果 A 的特征值 λ_1、λ_2 来自 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，那么

$$\begin{aligned}(45)\quad \mathrm{d}^*\left(\iota_*^{[2]}(\lambda_1),\iota_*^{[2]}(\lambda_2)\right) &= \mathrm{d}^{\mathrm{Ph}}\left((\operatorname{Re}\lambda_1,|\operatorname{Im}\lambda_1|),(\operatorname{Re}\lambda_2,|\operatorname{Im}\lambda_2|)\right)\\ &= \log\left|\frac{\sqrt{\frac{E_A}{|D_A|}}+1}{\sqrt{\frac{E_A}{|D_A|}}-1}\right| \equiv \begin{cases} 2\operatorname{artanh}\sqrt{\frac{E_A}{|D_A|}} & \text{if } \frac{E_A}{|D_A|}\le 1,\\ 2\operatorname{arcoth}\sqrt{\frac{E_A}{|D_A|}} & \text{if } \frac{E_A}{|D_A|}\ge 1\end{cases}\\ &= \operatorname{arcosh}\left|\frac{E_A+|D_A|}{E_A-|D_A|}\right|.\end{aligned}$$

若存在实特征值但 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则此结论同样成立。此时，(45) 中的值为$+\infty$。（若有二重实特征值，则(45) 取0是自然的选择。）

证明。考虑到 (35) 和 (36)，利用 (18) 即可计算。这一计算完全以 Re λ_1, |Im λ_1|, Re λ_2, |Im λ_2| 为依据。□

或者，我们也可以如下论证。

引理 3.14. 关于引理 *3.9* 的典范代表元，它们在 *BCK* 模型中的 h-特征点如下：

对于 $\mathbf{0}_2$： $\iota_{\mathrm{BCK}}(0)=(0,-1)$（两次）。对于 S_β： $\iota_{\mathrm{BCK}}(0)=(0,-1)$，以及 $\iota_{\mathrm{BCK}}(\mathrm{i}\sin\beta)=\left(\sin\beta)^{2-1}(\sin\beta)^{2+1},0\right)$。对于 $L_{\alpha,t}$： $\iota_{\mathrm{BCK}}(-\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha)=(-\cos\alpha,0)$，以及 $\iota_{\mathrm{BCK}}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=(\cos\alpha,0)$。

证明。 由于矩阵为三角形，特征值可以立即辨认。因此，计算 h-特征点非常直接。□

定理 *3.13* 的另一种证明。 由于实 M¨obius 变换自然地保持每条边不变，因此该命题可归结为引理 3.9 中的典范代表元。例如，在存在非实特征值的情形下，这意味着可归结为$L^{\pm}_{\alpha,t}$ ($\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$)。根据引理 3.14， h-特征点（$\pm\cos\alpha,\sin\alpha$）在 Ph 中显而易见，或为 BCK 中的（$\pm\cos\alpha,\bar{0}$）；而且， $|D_A|$, E_A 亦由例 3.10 得出。无论如何，(45) 中的所有内容计算后都得到 $\log\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=2$ 反双曲正切 $\cos\alpha=$ 反双曲余弦 $\frac{1+\frac{\alpha^2}{2}(\cos)(\cos)}{1-\frac{\alpha^2}{2}}$。□

将 (45) 称为“ h的 A特征距离”是合理的。

4. The Davis–Wielandt shell of 2×2 complex matrices

定理 4.1. *BCK* 模型中引理 *3.3* 的典范代表元的共形值域如下：

零矩阵 $\mathbf{0}_2$ 给出点椭球

$$\{(0,0,-1)\};$$

矩阵 S_0 给出主轴为

$$\{0\}\times\{0\}\times[-1,0],$$

其半轴长度为$1\ 2$；其他半轴长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ —.

矩阵 L_t 生成的旋转椭球，其主轴

$$[-1,1]\times\{0\}\times\{0\}$$

半轴长度为1；其他半轴长度为 $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$。（当 $t=0$时，此椭球退化。）

证明。 假设$\mathbf{x} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2$ 其中 $|z_1|^2+|z_2|^2=1$。那么

$$\begin{bmatrix}\operatorname{Re}\langle L_t\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\\ \operatorname{Im}\langle L_t\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\\ \langle L_t\mathbf{x},L_t\mathbf{x}\rangle\\ \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t&0&-1&0\\0&t&0&0\\2t&0&2t^2&2t^2+1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\operatorname{Re}(z_2\bar{z}_1)\\2\operatorname{Im}(z_2\bar{z}_1)\\|z_2|^2-|z_1|^2\\|z_2|^2+|z_1|^2\end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{1+t^2}&&&0\\&t&&0\\&&2t\sqrt{1+t^2}&2t^2+1\\&&&1\end{bmatrix}}_{S_{Z1}}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}&0&\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{S_{Z2}}\underbrace{\begin{bmatrix}2\operatorname{Re}(z_2\bar{z}_1)\\2\operatorname{Im}(z_2\bar{z}_1)\\|z_2|^2-|z_1|^2\\|z_2|^2+|z_1|^2\end{bmatrix}}_{S_{Z3}}.$$

这里， S_{Z3} 在射影坐标和仿射坐标中的单位球面上取值；由于技术上两者相同，即 $\iota_{\mathrm{BCK}}(z_2/z_1)$。 S_{Z2} 使其保持不变； S_{Z1}使其沿坐标轴收缩，并沿 z轴平移。由此立即得到 $\mathsf{DW}_{\mathrm{BCK}}(L_t)$。假设 $t>0$。那么 $\mathsf{DW}_{\mathrm{BCK}}(L_t)$由以下椭球给出

$$\frac{(x_{\mathrm{pCK}})^2}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2}+\frac{(y_{\mathrm{pCK}})^2}{t^2}+\frac{\left(z_{\mathrm{pCK}}-(2t^2+1)\right)^2}{\left(2t\sqrt{1+t^2}\right)^2}=1.$$

根据 (2) 重写后，我们在 BCK 模型中得到结果，

$$\frac{(x_{\mathrm{BCK}})^2}{(1)^2}+\frac{(y_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}+\frac{(z_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=1.$$

这证明了 L_t, $t>0$ 的情形。当 $t=0$ 时，先前关于 $\mathsf{DW}_{\mathrm{pCK}}(L_0)$ 的论证给出连接 $(-1,0,1)=\iota_{\mathrm{pCK}}(-1)$ 与 $(1,0,1)=\iota_{\mathrm{pCK}}(1)$ 的线段。转换到 BCK 模型后，得到连接 $\iota_{\mathrm{BCK}}(-1)=(-1,0,0)$ 与 $\iota_{\mathrm{BCK}}(1)=(1,0,0)$ 的线段，这符合所述结论。注意，当 $t>0$ 时， L_t 的渐近点相同。

我们来考虑 S_0 的情况。在这里

$$\begin{bmatrix}\operatorname{Re}\langle S_0\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\\ \operatorname{Im}\langle S_0\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\\ \langle S_0\mathbf{x},S_0\mathbf{x}\rangle\\ \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\operatorname{Re}(z_2\bar{z}_1)\\2\operatorname{Im}(z_2\bar{z}_1)\\|z_2|^2-|z_1|^2\\|z_2|^2+|z_1|^2\end{bmatrix}.$$

通过与之前类似的论证可知，壳层由下式给出

$$\frac{(x_{\mathrm{pCK}})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{(y_{\mathrm{pCK}})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\left(z_{\mathrm{pCK}}-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

根据公式 (2) 重写后，我们得到 BCK 模型中的结果，

$$\frac{(x_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{(y_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{\left(z_{\mathrm{BCK}}+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

这就证明了 S_0 的情形。这里的渐近点是 $\iota_{\mathrm{BCK}}(0)=(0,\ 1)$。

$\mathbf{0}_2$ 的情形是显然的。 □

定理 *1.4* 的证明。 只需检验各种情形下的典范代表元：(i) $\mathbf{0}_2$；(ii) L_t，其中 $t = 0$；(iii) S_0；(iv) L_t，其中 $t > 0$。在这些情形下（另请参见前面的证明，其中给出了渐近点的方程和解释），结论大多显而易见，形状也相当容易辨认。在情形 (iii) 中，我们有一个 ah-视球面：注意，其方程

$$(x_{\mathrm{BCK}})^2 + (y_{\mathrm{BCK}})^2 + 2(z_{\mathrm{BCK}})^2 + 2z_{\mathrm{BCK}} = 0$$

就是式 (10) 绕 y-轴旋转 $180°$ 得到的，只是现在渐近点为 (0，0，-1)。由于一切在相应的复分式变换和酉共轭下都会自然变换，因此一般情形下结论成立。在情形 (iv) 中，我们有 h-管：其方程与式 (12) 类似，只是绕 y-轴旋转 $90°$，现在渐近点为 (± 1, 0，0)。□

定理 *1.5* 的证明。 只需在情形 (iii) 中检验半径。关于 L_t,$t > 0$，由于对称性，该半径为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}\left(\left(0, 0, -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right), \left(0, 0, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(1+2t^2) = \operatorname{arsinh} t.$$

这与例 3.4(a) 的陈述一致。由于在适用的复分式变换和酉共轭下，各项保持不变，因此该结论普遍成立。□

定理 *1.6* 的证明。 在 pCK 模型中更容易看出这一点。固定渐近点后，很容易看出，较小椭球包含于较大椭球之中，也就是一个凸包包含于另一个凸包之中。显然，z_{pCK} 中的上确界是范数的平方，并且随着椭球变得更胖而严格增大。（其取值从最小的 $\max(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2)$ 到 $+\infty$。）转换为 BCK 模型显而易见。□

5. The conformal range of 2×2 complex matrices

5.A. 典范代表元与共形值域的几何学。

定理 5.1。 引理 *3.9* 中典范代表元在 *BCK* 模型中的共形值域如下：

零矩阵 $\mathbf{0}_2$ 给出点椭圆

$$\{(0, -1)\};$$

S_β 给出坐标轴为

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\right] \times \left\{-\frac{1}{2}\right\} \qquad \textit{and} \qquad \{0\} \times [-1, 0];$$

而 $L^{\pm}_{\alpha,\ t}$ 给出坐标轴为

$$\left[-\frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2 + t^2}}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2 + t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\right] \times \{0\} \qquad \textit{and} \qquad \{0\} \times \left[-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right];$$

（椭圆可能是退化的）。

证明。 假设$\mathbf{x} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2$ 且满足 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$。通过直接计算可得

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}\langle L^{\pm}_{\alpha,t}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \\ 0 \\ \langle L^{\pm}_{\alpha,t}\mathbf{x}, L^{\pm}_{\alpha,t}\mathbf{x}\rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t\cos\alpha & 2t\sin\alpha & 2t^2 & 2t^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_T :=} \begin{bmatrix} 2\operatorname{Re}(z_2\bar{z}_1) \\ 2\operatorname{Im}(z_2\bar{z}_1) \\ |z_2|^2 - |z_1|^2 \\ |z_2|^2 + |z_1|^2 \end{bmatrix}.$$

现在， S_T 本身可以写成乘积

$$S_{T1}\cdot S_{T2}\cdot S_{T3} \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2} & & & \\ & 0 & & \\ & & 2t\sqrt{1+t^2} & 2t^2+1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} & -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+t^2}} & \\ & \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+t^2}} & \frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{t}{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}} & & -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}} & \\ & 1 & & \\ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}} & & \frac{t}{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

（若 $\cos\alpha = t = 0$，则可将单位矩阵取为 S_{T3}）。于是很容易看出S_T 如何作用于仿射化单位球面： S_{T3} 和 S_{T2} 只是使其保持不变的正交变换，而 S_{T1} 则将其压缩为一个（可能退化的）椭圆盘（并对其进行平移）。这给出 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(L^{\pm}_{\alpha,\,t})$。若 $t > 0$，则其方程为

$$\frac{(x_{\mathrm{pCK}})^2}{(\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2})^2} + \frac{(z_{\mathrm{pCK}} - (2t^2+1))^2}{(2t\sqrt{1+t^2})^2} \leq 1.$$

利用（2），转写式

$$\frac{(x_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} + \frac{(z_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} \leq 1, \tag{46}$$

转到 BCK 模型是直接的，从而得到该结论。在 $t = 0$情形下，集合 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(L^{\pm}_{\alpha,\,0})$ 是连接 $(-\cos\alpha,\ 1) = \iota^{[2]}{}_{\mathrm{pCK}}(-\cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha)$ 和 $(\cos\alpha,\ 1) = \iota^{[2]}{}_{\mathrm{pCK}}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ 的线段。转换到 BCK 模型后，它是连接 $\iota^{[2]}{}_{\mathrm{BCK}}(-\cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha) = (-\cos\alpha,\ 0)$ 和 $\iota^{[2]}{}_{\mathrm{BCK}}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = (\cos\alpha,\ 0)$ 的线段；同样得到该结论。

类似地，可得

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\langle S_\beta \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \\ 0 \\ \langle S_\beta \mathbf{x}, S_\beta \mathbf{x}\rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_1) \\ 2\,\mathrm{Im}(z_2\bar{z}_1) \\ |z_2|^2 - |z_1|^2 \\ |z_2|^2 + |z_1|^2 \end{bmatrix}.$$

若 $\cos\beta > 0$，则可得方程

$$\frac{(x_{\mathrm{pCK}})^2}{\left(\frac{1}{2}\cos\beta\right)^2} + \frac{\left(z_{\mathrm{pCK}} - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \le 1.$$

转录

$$\frac{(x_{\mathrm{BCK}})^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\right)^2} + \frac{\left(z_{\mathrm{BCK}} + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \le 1, \tag{47}$$

转录为 BCK 模型也很直接，可得该结论。对于 $\cos\beta = 0$，即 $\beta = \pi/2$，$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(L^{\pm}_{\alpha,\pi/2})$ 给出连接 $(0,0) = \iota^{[2]}_{\mathrm{pCK}}(0)$ 与 $(0,1) = \iota^{[2]}_{\mathrm{pCK}}(1)$ 的线段。转录为 BCK 模型后，可得连接 $\iota^{[2]}_{\mathrm{BCK}}(0) = (0,-1)$ 与 $\iota^{[2]}_{\mathrm{BCK}}(1) = (0,0)$ 的线段；同样也可得该结论。

$\mathbf{0}_2$ 的情形显然。

（注：这里涉及的 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{pCK}}(A)$ 也可以由（4）计算得出，但归根结底，我不觉得这样更简单。）□

注 5.2. 利用定理 2.2，可以证明，BCK 模型中的共形值域给出了单位圆盘内所有不包含“无穷远”点 $\iota^{[2]}_*(\infty) = (0,1)$ 的可能退化椭圆圆盘。其要点是，借助一个 h- 共线变换，任何严格包含于单位圆盘内的椭圆盘都可以化为上文讨论的标准形式。下面简述论证的要点。非平凡的情形是椭圆盘非退化时：

(a) 假设方程为 $Q(x_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}) \le 0$ 的椭圆盘包含在单位圆盘内部，后者的方程为 $Q_0(x_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}) = 1 - (x_{\mathrm{BCK}})^2 - (z_{\mathrm{BCK}})^2 \ge 0$。那么，对于适当的 $r > 0$，二次曲面 $Q' = Q + rQ_0$ 将是一个点椭圆，其支撑点位于单位圆盘内部。接着，经过适当的莫比乌斯变换 $\mathrm{M}^{\cdot\cdot}\ f$，可以将此点移至单位圆盘的中心 $(0,0)$；也就是说，$f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q'$ 将以单位圆盘为中心，而 $f^{\star}\mathrm{BCK}Q_0 = Q_0$。（事实上，$f^{\star}_{\mathrm{BCK}}$ 由一个线性变换 $R^{[2]}\ \mathrm{BCK}(f)$ 诱导，该变换保持射影化二次型 $(w_{\mathrm{BCK}})^2 - (x_{\mathrm{BCK}})^2 - (z_{\mathrm{BCK}})^2$ 不变，等等。）于是 $f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q = f^{\star}\mathrm{BCK}Q' - rQ_0$ 也将以 $(0,0)$ 为中心。再绕原点作一次旋转，甚至可以使 $g^{\star}_{\mathrm{BCK}}f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q$ 的坐标轴与 x,z-坐标轴对齐。根据前述定理，这种对齐良好的椭圆将作为与 $L^{\pm}_{\alpha,t}\ (\alpha \in (0,\pi/2])$ 相关联的共形值域出现。（这里，$f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q'$ 是一个点圆或真正的点椭圆，这最终区分了h-圆和真正的 h-椭圆这两种情况。）

(b) 假设椭圆盘的方程为 $Q(x_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}) \le 0$，它位于单位圆盘内，但有一个渐近点（边界点） B。那么，对于适当的 $r > 0$，我们有二次曲面 $Q' = Q + rQ_0$，使得 Q' 的梯度在 B 处为零；但它仅在 B 处与边界相切。因此，Q' 要么是在 B 处与单位圆盘相切的二重直线，要么是 B 处的点椭圆。在第一种情形下，利用 h-共线变换，可以将 B 化为 $(0,-1)$。于是，$f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q'$ 将是 $((z_{\mathrm{BCK}}+1)^2)$ 的正倍数。

（这是等距线情形。）无论如何，$f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q = f^{\star}\mathsf{BCK}Q' - rQ$ 在直线 $x_{\mathrm{BCK}} = 0$ 上有一个内点。沿此直线作一次 h 平移，可以将该点移至原点 $(0,0)$。于是 $g^{\star}_{\mathrm{BCK}}f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q$ 在 $(0,0)$ 处为零，因此它将是 $(z_{\mathrm{BCK}}+1)^2-(1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2) = (x_{\mathrm{BCK}})^2+2(z_{\mathrm{BCK}})^2+2z_{\mathrm{BCK}}$ 的正倍数，且由 S_0 保持。在第二种情形下，$Q' = Q_t+Q_c$，其中 Q_t 和 Q_c 是对应于二重直线的二次型（即它们的秩为 1），而 Q_t 选为在 B 处的切线。（此规定确定了分解。）对应于 Q_c 的（重）直线是 Q' 的切共轭轴。同样，利用共线变换，可以将 B 化为 $(0,-1)$，并将切共轭轴化为 $x_{\mathrm{BCK}} = 0$。于是，$f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q'$ 是 $(x_{\mathrm{BCK}})^2$ 和 $(z_{\mathrm{BCK}}+1)^2$ 的正线性组合；而 $f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q$ 的线性组合中也包含 Q_0。沿 $x_{\mathrm{BCK}} = 0$ 作一次双曲平移后，可以假设 $(0,0)$ 位于 $g^{\star}_{\mathrm{BCK}}f^{\star}_{\mathrm{BCK}}Q = 0$ 上。于是，$g^{\star}_{\mathrm{BCK}}f^{\star}\mathsf{BCK}Q$ 将是 $(x_{\mathrm{BCK}})^2$ 和 $(z_{\mathrm{BCK}}+1)^2-(1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2) = (x_{\mathrm{BCK}})^2+2(z_{\mathrm{BCK}})^2+2z_{\mathrm{BCK}}$ 的正线性组合。稍加检查可知，S_β ($\beta\in(0,\pi/2)$) 可实现这些情形。（这里，Q' 在 B 处的秩为 1 或 2，这区分了 h-等距线情形与 h-椭圆抛物情形。）

(c) 假设方程为 $Q(x_{\mathrm{BCK}},\ z_{\mathrm{BCK}})$ 的椭圆盘 ≤ 0 位于单位圆盘内，但其渐近（边界）点 B_1 具有 B_2。那么 $Q' = Q+rQ_0$ 可以实现为一条经过 B_1、B_2 等点的二重直线，并且我们有与 $L_t = L^{\pm}_{\alpha,\ t}$ 相对应的 h 距离带情形，其中 $\alpha = 0$。

最终，2×2 复矩阵的共形值域可以识别为渐近闭平面中的可能退化的 h 椭圆和 h 椭圆抛物线，但它们避开特定渐近点 $\iota^{[2]}_{*}$（∞）。△

讨论 5.3。典范代表元的共形值域尤其适合用来阐明一些几何数据，即对称性及相关的度量数据。（当然，这是在并不预先了解 h 圆锥曲线的前提下。）首先，我们确立一些关于长轴和短轴的术语。遗憾的是，后面这两个术语可能指长度可能无限的线段（主要如此），也可能指直线（这些线段所在的直线），或指长度（这些线段的长度）。希望这不会造成太多困惑。

考虑 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(L^{\pm}_{\alpha,\ t})$:

- 如果 $\alpha = 0$，那么值域是一个 h-距离带，其位置和形状都很容易识别。（关于其边界，它与 (22) 类似，但绕原点旋转了 90°，此时渐近点为 $(\pm 1,\ 0)$。）长轴 [线段]可以定义为包含在 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(L^{\pm}_{\alpha,\ t})$ 中的唯一一条 h-线。它允许存在多个短轴 [线段]，这些线段是值域与任意一条垂直于长轴的直线的交集。不过请注意，即使短轴 [线段]退化为点，短轴 [直线] 仍有自然的定义。

- 如果 $0<\alpha<\pi/2$，那么值域有界，但不是圆形的。从欧几里得视角看，它包含在一个半径最小的（唯一）圆盘中。由此容易看出，它也是包含该值域的半径最小的（唯一）h圆盘，因为值域中的一条线段是该 h圆盘的直径（因此不可能存在包含它的更小 h圆盘）。这条直径是长轴 [线段]。值域与长轴 [线段] 的垂直平分线的交集就是短轴 [线段]。请注意，即使短轴 [线段]退化为一个点，短轴所在的直线仍然是明确定义的。由于它不同于包含该值域的最小 h圆盘，我们必须称之为真 h椭圆盘。

• 如果 $\alpha = \pi/2$，那么值域有界且呈圆形，它是一个 h圆盘。由于这是一个熟悉的情形，我们只需指出，可能存在多组互相垂直的长轴和短轴 [直线] 。

考察 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(S_\beta)$:

• 若 $\beta = 0$，则我们得到一个极限圆盘。（可以看出，其边界方程 y,

$$(x_{\mathrm{BCK}})^2 + 2\,(z_{\mathrm{BCK}})^2 + 2\,z_{\mathrm{BCK}} = 0$$

就是式 (21)，不过绕原点旋转了 $180°$，此时渐近点为 $(0,\ -1)$。）长轴 [线段] 是极限圆盘与其坐标轴的交集。短轴 [线段或直线] 根本没有定义，但“短轴长度”规定为 $+\infty$。

• 若 $0 < \beta < \pi/2$，则值域是前一种情形的子集。它有相同的渐近点，但与前一种情形不同，它有一个距离渐近点“最远”的点（因为所有其他边界点都包含在前一个极限圆盘的内部）。现在，任何对称轴都必须经过渐近点，也必须经过这个距离渐近点最远的点。因此，该值域必定只有一条对称轴（显然由$x_{\mathrm{BCK}} = 0$给出）。

长轴 [线段] 是其与唯一对称轴的交集。短轴 [线段或直线]根本没有定义，但“短轴的长度”定义如下。我们考察值域与垂直于长轴的直线的交集。这些交集将产生线段；在当前情况下，它们的长度趋于

$$\lim_{z\searrow -1} \mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}\left(\left(\sqrt{-2z(1+z)}\cos\beta, z\right), \left(-\sqrt{-2z(1+z)}\cos\beta, z\right)\right) =$$

$$= \lim_{z\searrow -1} \operatorname{arcosh}\frac{1 - z - 2z(\cos\beta)^2}{1 - z + 2z(\cos\beta)^2} = \operatorname{arcosh}\frac{1 + (\cos\beta)^2}{1 - (\cos\beta)^2} = 2\operatorname{arcosh}\frac{1}{\sin\beta}.$$

这个极限，或者更确切地说，上确界，可以定义为短轴的（严格来说是渐近的）长度。事实上，根据前面的计算，我们甚至知道，值域是轴周围某个距离带的一部分。考察极限中的单调性关系，我们看到，这样的距离带的最小半径是 $\operatorname{arcosh} 1_{\sin\beta}$，即半轴长度。另一种得到相同结论的论证如下。我们看到，$\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(S_\beta)$ 是通过对轴施加比值为 $\cos\beta$ 的垂直仿射变换，从 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(S_0)$ 得到的。因此，$\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(S_\beta)$ 包含于单位圆盘经比值为 $\cos\beta$ 、相对于轴为 $x_{\mathrm{BCK}} = 0$ 的垂直仿射变换所得的像中。这是一个椭圆盘，其坐标轴为 $\{0\} \times [-1, 1]$ 和 $[-\cos\ \beta,\ \cos\ \beta] \times \{0\}$。这是一个 h距离带。可以相对简单地计算出，其半径为 $\operatorname{arcosh} 1_{\sin\beta}$。还可以看出，$\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\cancel{\mathrm{BCK}}}(S_\beta)$ 不可能包含于任何更狭窄的 h距离带中，因为那将与 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(S_0)$ 的（双曲）密切性相矛盾。出于同样的原因，每个更狭窄的 h距离带都包含于相关渐近点周围的值域中。

我们将值域的顶点定义为长轴 [线段], 的非渐近端点，它也是距离渐近点最远的点。

无论如何，该值域有一个渐近点；它不是极限圆盘，因此是一个 h-椭圆抛物圆盘。

- 如果 $0 < \beta = \pi/2$，那么值域是一条半直线，长轴长度也为无穷大，而“短轴长度”为 0。

考虑 $\mathrm{DW}_*(\mathbf{0}_2)$：

- 长轴 [线段] 就是值域本身。长轴 [直线] 可以视为任意一条渐近于值域的直线。短轴 [线段或直线] 均未定义。长轴和短轴的长度可以视为 0。

虽然我们刚才只讨论了典范例子，但上述定义是根据双曲几何（利用对称性和距离）建立的。因此，这些定义具有普遍意义（即在 h-全等变换意义下），无需借助任何关于 h-圆锥曲线的理论。特别是，在所有情况下，我们都定义了长轴和短轴的长度，并确定了自然对称性。

定理 *2.5* 的证明。由于自然的变换性质（如定理 2.2、引理 3.12 所示），只需针对引理 3.9 中的典范代表元证明这一点。前面的讨论 5.3 （以及其他内容）确定了共形值域的几何类型（例如渐近闭合的 h-半直线，或 h-椭圆抛物圆盘等）。比较引理 3.14 和定理 5.1 也能让我们了解 h-特征点的相对位置。□

接下来我们将讨论讨论 5.3 中定义的（半）轴长度。

Di讨论 5.4. 在 $L^{\pm}_{\alpha,t}$ 的情况下，我们可以说其特征 BCK 值为

$$\chi^+ = \frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2 + t^2}}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \chi^- = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \chi^{\mathrm{e}} = \cos\alpha.$$

这些值分别对应于从欧几里得视角下的 (0,0) 测得的（可能退化的）椭圆 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(L^{\pm}_{\alpha,t})$ 的长半轴和短半轴，以及从欧几里得视角下的 (0,0) 到 h-特征点 $(\pm\cos\ \alpha)$ 的距离。用双曲几何的术语来说，这些值（长半轴长度、长半轴长度和半个 h-特征距离）为

$$s^+ = \operatorname{arcosh}\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sin\alpha} \qquad s^- = \operatorname{arcosh}\sqrt{1+t^2} \qquad s^{\mathrm{e}} = \operatorname{arcosh}\frac{1}{\sin\alpha},$$

分别对应，参见 (17)。（对于 $\alpha = \pi/2$，长半轴为 $+\infty$。）如果短半轴为 0，则结果可能是一个 h-点、一个 h-线段或一条 h-直线。如果短轴非零，则结果是一个 h-距离带、一个 h-圆或一个非退化的 h-椭圆。

在 S_β的情况下，我们可以（按定义）称其特征 BCK 值为

$$\chi^+ = 1, \qquad \chi^- = \cos\beta, \qquad \chi^{\mathrm{e}} = \operatorname{sgn}\beta.$$

它们分别对应双曲长半轴和短半轴的长度以及半 h-特征距离

$$s^+ = +\infty, \qquad s^- = \operatorname{arcosh}\frac{1}{\sin\beta}, \qquad s^{\mathrm{e}} = (\operatorname{sgn}\beta)\cdot(+\infty).$$

（对于 $\beta = 0$，短半轴为 $+\infty$。）短半轴可以为 0、非零有限值或$+\infty$。那么，它们分别产生一条 h-半直线、一条 h-椭圆抛物线或一个 h-极限球面。

情形 $\mathbf{0}_2$ 对应一个渐近点。最明智的做法是赋予这些特征值

$$\chi^+ = 0, \qquad \chi^- = 0, \qquad \chi^{\mathrm{e}} = 0$$

and

$$s^+ = 0 \qquad s^- = 0, \qquad s^{\mathrm{e}} = 0.$$

一般而言，特征 BCK 值 u对应双曲半轴长度 h

$$\operatorname{arcosh}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcosh}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{artanh} u = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{1+u^2}{1-u^2},$$

参见（17）。 ♢

由于定理 5.1 中的代表元涵盖了除实 M¨obius 变换之外的所有情形，即共形值域中的 h-等距变换，因此，基于前面的讨论，‘特征 BCK 值’这一术语也可应用于任意 2×2 复矩阵。

例 5.5。 考察引理 3.9 中的典范代表元，我们得到：(a) 对于 $A = L^{\pm}_{\alpha,\ t}$,

$$U_A - |D_A| = 2t^2, \qquad \{U_A + |D_A|, U_A - |D_A| + 2E_A\} = \{2((\cos\alpha)^2 + t^2), 2(1+t^2)\}.$$

(b) 对于 $A = S_\beta$,

$$U_A - |D_A| = \tfrac{1}{2}(\cos\beta)^2, \qquad \{U_A + |D_A|, U_A - |D_A| + 2E_A\} = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}.$$

(c) 对于 $A = \mathbf{0}_2$,

$$U_A - |D_A| = 0, \qquad \{U_A + |D_A|, U_A - |D_A| + 2E_A\} = \{0, 0\}. \qquad ♢$$

讨论 5.6. 三重比

$$U_A - |D_A| \ :\ U_A + |D_A| \ :\ U_A - |D_A| + 2E_A \tag{48}$$

与推论 3.11 中的 (44) 同样适用（其中将可逆矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 应用于该比值）。如前面的例子所示，对 (48) 中最后两项的次序不作区分，并稍微滥用一下记号,

$$U_A - |D_A| \ :\ \{\, U_A + |D_A| \ :\ U_A - |D_A| + 2E_A \,\}$$

就能体现 $L^+_{\alpha,t}$ 和 $L^-_{\alpha,t}$ 所属类别的共性。事实上，由于 $U_A - |D_A|$ 被区分为绝对值最小的那一项，同样也可以对无序比值

$$\{\, U_A - |D_A| \ :\ U_A + |D_A| \ :\ U_A - |D_A| + 2E_A \,\}. \qquad \square$$

定理 5.7. 无序比值

$$\{U_A - |D_A| : U_A + |D_A| : U_A - |D_A| + 2E_A\} \tag{49}$$

以及（当 $|D_A| = E_A > 0$ 时）可能退化类型的可能选择

$$h\text{-}distance\ band\ /\ h\text{-}elliptic\ parabolic\ disk$$

共同构成了共形值域在 h-等距变换下的一个完整不变量。

若(49) 为 $\{\chi_1 :\ \chi_2 :\ \chi_3\}$，且满足 $0 \le \chi_1 \le \chi_2 \le \chi_3$，则“特征 *BCK* 值 ”*ca*可按如下方式得到:

$$\chi^+ = \sqrt{\frac{\chi_2}{\chi_3}}, \qquad \chi^- = \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_3}}, \qquad \chi^{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_3 - \chi_1}}.$$

（此处采用约定 $\frac{0}{0} = 0$。）

由“特征 *BCK* 值” u可得对应的长半轴或短半轴长度，或半个 h-特征距离，即反双曲余弦 $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ = 反双曲正弦 $\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ = 反双曲正切 $u = \frac{1}{2}$反双曲余弦 $\frac{1+u^2}{1-u^2}$。

证明。 陈述的第一部分由推论 3.11 和前述讨论 5.6 合并得出。第二部分则是结合例 5.5 得出的讨论 5.4。□

下面的陈述以更通俗易懂的方式表述了有关长轴和短轴（半轴）的信息（与定理 3.13 类似）。

定理 5.8。 假设 A 是一个 2×2 复矩阵。

(a) 若 $E_A \geq |D_A|$ （在复抛物型和拟双曲情形下，不等式为严格不等式），则特征 *BCK* 值为

$$\chi^+ = \sqrt{\frac{U_A+|D_A|}{U_A-|D_A|+2E_A}} \qquad \geq \qquad \chi^- = \sqrt{\frac{U_A-|D_A|}{U_A-|D_A|+2E_A}}.$$

相应的 h-距离（半轴），即上述各值的反双曲正切，为

$$s^+ = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A+E_A}{E_A-|D_A|} \qquad \geq \qquad s^- = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A-|D_A|+E_A}{E_A}.$$

(b) 若 $|D_A| \geq E_A$ （在实椭圆型和准椭圆情形下，不等式为严格不等式），则特征 *BCK* 值为

$$\chi^+ = \sqrt{\frac{U_A-|D_A|+2E_A}{U_A+|D_A|}} \qquad \geq \qquad \chi^- = \sqrt{\frac{U_A-|D_A|}{U_A+|D_A|}}.$$

对应的 h-距离（半轴），即上述数值的 反双曲正切，为

$$s^+ = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A+E_A}{|D_A|-E_A} \qquad \geq \qquad s^- = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A}{|D_A|}.$$

(c) 在 $E_A = |D_A|$ 情形下（包括实抛物型、实双曲型和半实情形），特征 *BCK* 值为

$$\chi^+ = 1 \qquad \geq \qquad \chi^- = \sqrt{\frac{U_A-|D_A|}{U_A+|D_A|}} \equiv \sqrt{\frac{U_A-E_A}{U_A+E_A}}.$$

对应的 h-距离（半轴），即上述数值的 反双曲正切，为

$$s^+ = +\infty \qquad \geq \qquad s^- = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A}{|D_A|} \equiv \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\frac{U_A}{E_A}.$$

*(*在特征 *BCK* 值处，采用了约定 $\frac{0}{0}=0$；在 h-距离处，采用了约定 $\frac{0}{0}=1$。）

证明。 这与前一个定理相同，但特征 BCK 值 u 被换算为对应的半轴长度，即 $\frac{1}{2}$ 反双曲余弦 $\frac{1+u^2}{1-u^2}$。□

注 5.9. 注意，在情形 (b) 中，若 $|D_A| > E_A$，则 Davis–Wielandt 壳的轴会穿过实双曲平面，短轴 s^- 将与 Davis–Wielandt 壳的半径相同（实双曲平面上将存在一条实际的径向线段）。在情形 (c) 中，也就是说，若 $|D_A| = E_A$，则实双曲平面仍至少渐近地具有 Davis–Wielandt 壳的一个轴向点（抛物情形下有多个轴），关于 s^- 也同样如此。在情形 (a) 中，若 $E_A > |D_A|$，则 Davis–Wielandt 壳会与实双曲平面保持相当大的距离。此时，相对于径向线段，向实双曲平面的投影主要呈收缩性（我们不对此作精确定义），并且 s^- 确实会小于 Davis–Wielandt 壳的半径。 s^+ 和 s^{e} 的行为在形式上相当相似。△

5.B. **共形值域的综合几何**。

这里我们将讨论h-椭圆和 h-椭圆抛物线（最初以解析方式给出）的综合几何解释。

(X) 假设 A 是一个没有实特征值的复 2×2 矩阵。设 Λ_1和 Λ_2 是它的 h特征点。设 $\boldsymbol{x}$ 是一个双曲点（在 BCK 模型中坐标为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{BCK}}=(x_{\mathrm{BCK}},\ z_{\mathrm{BCK}})$）。我们将使用以下缩写

$$f_1=\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\Lambda_1),\qquad f_2=\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\Lambda_2),\qquad m^+=\operatorname{arcosh}\frac{U_A+E_A}{||D_A|-E_A|},$$

后一个值是根据定理 5.8 计算的 $\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}(A)$ 的长轴长度。

定理 5.10。 考虑 *(X)* 中的设定。那么，$\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}(A)$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 可描述为以下不等式的解

$$f_1+f_2\le m^+, \tag{50}$$

边界处等号成立。因此，边界是一个综合 h椭圆，其焦点为h特征点，距离和为长轴长度。

无需预备知识的 h-椭圆。 只需检验典范代表元即可。这意味着 $L^{\pm}_{\alpha,t}$ 其中 $0<\alpha\le\pi/2$。于是

$$(\Lambda_1)_{\mathrm{BCK}}=(\cos\alpha,0),\qquad\text{and}\qquad(\Lambda_2)_{\mathrm{BCK}}=(-\cos\alpha,0).$$

此外,

$$\frac{U_A+E_A}{||D_A|-E_A|}=\frac{1+2t^2+(\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha)^2}.$$

正规情形（$t=0$）是平凡的，因此我们假设椭圆盘是非退化的（故 $t>0$）。现在，(50) 等价于

$$\cosh(f_1+f_2)-\cosh m^+\le 0. \tag{51}$$

由于 $|f_1-f_2|<m+$，我们知道 $\cosh m^+-\cosh(f_1+f_2)>0$，因此上面的不等式完全等价于

$$\big(\cosh(f_1+f_2)-\cosh m^+\big)\big(\cosh m^+-\cosh(f_1-f_2)\big)\le 0. \tag{52}$$

利用标准加法公式，可将其改写为

$$1-(\cosh f_1)^2-(\cosh f_2)^2-(\cosh m^+)^2+2(\cosh f_1)(\cosh f_2)(\cosh m^+)\le 0. \tag{53}$$

（左端是关于 f_1,f_2,m^+ 的对称表达式。）这种形式特别适合代入 BCK 模型中 $f_1=\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}((x_{\mathrm{BCK}},z_{\mathrm{BCK}}),(\cos\alpha,0))$、 $f_2=\mathrm{d}^{\mathrm{BCK}}((x_{\mathrm{BCK}},z_{\mathrm{BCK}}),(-\cos\ \alpha,0))$、 $m^+=$反双曲余弦 $\frac{1+2t^2+(\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha)^2}$ 的具体表达式，它们都是反双曲余弦。于是 (53) 可改写为

$$\frac{4}{(\sin\alpha)^4}\cdot\frac{t^2(1+t^2)(x_{\mathrm{BCK}})^2+((\cos\alpha)^2+t^2)(1+t^2)(z_{\mathrm{BCK}})^2-t^2((\cos\alpha)^2+t^2)}{1-(x_{\mathrm{BCK}})^2-(z_{\mathrm{BCK}})^2}\le 0.$$

这等价于（对于普通双曲点的）(46)。 □

特别是，这证明了我们的（解析） h-椭圆是合成的 h-椭圆。事实上，鉴于注 5.2，这证明了所有（解析） h-椭圆都是合成的 h-椭圆。

如果我们对 h-圆锥曲线稍微熟悉一些，但仍采用综合方法研究焦点，那么上述结论还可以通过另一种方式得到:

运用已有知识证明 h-椭圆。我们知道，所讨论的是一个 h-椭圆盘（也允许为 h-圆）。

令 s^+ 为其长半轴的 h长度， s^- 为其短半轴的 h长度，并令 s^{e} 为 A的 h特征距离的一半。我们声称

$$\cosh s^+ = (\cosh s^-)(\cosh s^{\mathrm{e}}) \tag{54}$$

成立。只需验证平方后的恒等式即可。也就是说

$$\frac{1+\cosh 2s^+}{2} = \frac{1+\cosh 2s^-}{2}\frac{1+\cosh 2s^{\mathrm{e}}}{2}. \tag{55}$$

然而，由定理 5.8 和定理 3.13 可知，这一点已显而易见。事实上，若$E_A > |D_A|$ ，则 (55) 等价于

$$\frac{1+\frac{U_A+E_A}{E_A-|D_A|}}{2} = \frac{1+\frac{U_A-|D_A|+E_A}{E_A}}{2}\cdot\frac{1+\frac{E_A+|D_A|}{E_A-|D_A|}}{2};$$

若 $|D_A| > E_A$ ，则 (55) 等价于

$$\frac{1+\frac{U_A+E_A}{|D_A|-E_A}}{2} = \frac{1+\frac{U_A}{|D_A|}}{2}\cdot\frac{1+\frac{E_A+|D_A|}{|D_A|-E_A}}{2}.$$

每种情形都很容易验证。

现在，将 (54) 与 (5) 比较可知 $s^{\mathrm{e}} = s^{\mathrm{f}}$，因此焦距等于 h-特征值间距。正如我们从 BCK 图中所知， h-特征值与焦点都必须对称地位于长轴上，且它们彼此之间的距离相同，因此二者必然重合。□

(Y) 假设 A 是一个复数 2×2 矩阵，具有一个严格复特征值 λ和一个实特征值 λ_0。相应的 h-特征点分别为 Λ和 Λ_0。利用典范代表元 S_β ，其中 $\beta\in(0,\ \pi/2]$，我们知道 $\mathsf{DW}^{\mathbb{R}}(A)$ 是一个 h-椭圆抛物圆盘，它只有一条对称轴，该轴经过 Λ 和 Λ_0 以及一个顶点 V。我们的目标是证明这个 h-椭圆抛物圆盘具有一种以焦点 Λ为中心的适当合成表示。令 d_0 为来自 Λ_0的距离函数。该函数仅在加上常数标量的意义下唯一。

令 $\boldsymbol{x}$ 表示一般的双曲点。则函数

$$\boldsymbol{x}\mapsto \mathrm{d}_0(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}_0(\Lambda) - 2\mathrm{d}_0(V)$$

也是以 Λ_0为起点的距离函数。它也是极限圆的有向距离函数

$$C = \{\tilde{\boldsymbol{x}} : \mathrm{d}_0(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \mathrm{d}_0(\Lambda) - 2\mathrm{d}_0(V) = 0\}.$$

此极限圆 C 经过点 P，该点是点 Λ 关于 V的反射点。（V 和 Λ是内点，其中 d_C 为负。）

定理 5.11。考虑构形 *(Y)*。那么，共形值域中的点 $\boldsymbol{x}$ 由以下不等式给出

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\Lambda) + \underbrace{\mathrm{d}_0(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}_0(\Lambda) - 2\mathrm{d}_0(V)}_{\mathrm{d}_C(\boldsymbol{x})} \le 0, \tag{56}$$

等号在边界上成立。

若 A 是非正规的，则共形值域也可表示为

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\Lambda) \le |\mathrm{d}_C(\boldsymbol{x})|, \tag{57}$$

等式在边界上成立。共形值域的这条边界是 h-椭圆抛物线，其上的点到 Λ 的距离与到方程为 $\mathrm{d}_0(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \mathrm{d}_0(\Lambda) - 2\mathrm{d}_0(V) = 0$ 的极限圆 C 的距离相等。换言之，这是顶点为 V、焦点为 Λ的合成 h-椭圆抛物线。

无需预先了解 h-椭圆抛物线的证明。</style>只需检验典范代表元 满足 $(0, \pi/2]$。然后

$$V_{\mathrm{BCK}} = (0,0), \qquad \Lambda_{\mathrm{BCK}} = \left(0, \frac{(\cos\beta)^2}{(\cos\beta)^2 - 2}\right), \qquad \text{and} \qquad (\Lambda_0)_{\mathrm{BCK}} = (0,-1).$$

此外，由 $\mathsf{d}_0^{\mathrm{Ph}}(x_{\mathrm{Ph}}, z_{\mathrm{Ph}}) = \log \frac{(z_{\mathrm{Ph}})^2 + z_{\mathrm{Ph}}^{\ 2}}{z_{\mathrm{Ph}}}$ 转写可得，

$$\mathrm{d}_0^{\mathrm{BCK}}(x_{\mathrm{BCK}}, z_{\mathrm{BCK}}) = \log\left(\frac{1 + z_{\mathrm{BCK}}}{\sqrt{1 - (x_{\mathrm{BCK}})^2 - (z_{\mathrm{BCK}})^2}}\right)$$

可以使用。（于是 $\mathsf{d}_0^{\mathrm{BCK}}(V_{\mathrm{BCK}}) = 0$。）这里的 h-极限圆 C 是经过 $P_{\mathrm{BCK}} = \left(0, \frac{(\cos\beta^{\,2})(\cos\beta)^2}{}\right)$ 和 $(0, -1)$ 的那个。

2− 首先，我们考虑由 (56) 推出的不等式 (57)。现在，(57) 完全等价于

$$\cosh\big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \Lambda)\big) - \cosh\big(\mathrm{d}_0(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}_0(\Lambda) - 2\mathrm{d}_0(V)\big) \le 0.$$

反过来，这完全等价于

$$\Big(\cosh\big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \Lambda)\big) - \cosh\big(\mathrm{d}_0(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}_0(\Lambda) - 2\mathrm{d}_0(V)\big)\Big) \cdot \exp(\mathrm{d}_0(\boldsymbol{x}) - \mathrm{d}_0(\Lambda)) \le 0.$$

然而，采用我们针对 S_β的特殊设置后，这可表述为

$$\frac{1}{2(\sin\beta)^2} \cdot \frac{(x_{\mathrm{BCK}})^2 + 2(\cos\beta)^2(z_{\mathrm{BCK}})^2 + 2(\cos\beta)^2 z_{\mathrm{BCK}}}{1 - (x_{\mathrm{BCK}})^2 - (z_{\mathrm{BCK}})^2} \le 0. \tag{58}$$

若 $\beta \in (0, \pi/2)$，那么对于普通的 h-点，(57)–(58) 与 (47) 完全等价。现在，(47) 蕴含 $\mathsf{d}_C(\boldsymbol{x}) < 0$。事实上，解集是 $\mathsf{DW}^{[2]}{}_{\mathrm{BCK}}(S_0)$ 的子集，而后者又包含于 C的极限圆盘内部。因此，(47) 完全蕴含（即等式对应等式）$\mathsf{d}(\boldsymbol{x}, \Lambda) \le -\mathsf{d}_C(\boldsymbol{x})$，即 (56)。这表明 (47)、(56) 和 (57) 完全等价。

若 $\beta = \pi/2$，则 (57)–(58) 给出直线 $x_{\mathrm{BCK}} = 0$。但随后很容易检验出，更严格的 $\mathsf{d}(\boldsymbol{x}, \Lambda) + \mathsf{d}_C(\boldsymbol{x}) \le 0$ 在此之后仅将这条直线截去一半。□

这尤其证明了我们的（解析） h-椭圆抛物线也是综合h-椭圆抛物线。事实上，鉴于注 5.2，这证明了所有（解析） h-椭圆抛物线都是综合 h-椭圆抛物线。

如果对 h-圆锥曲线更为熟悉，也可以用另一种方式得到上述结论：

预备知识： h-椭圆抛物线。 我们像之前一样开始证明，将问题化简为 $A = S_\beta$。设 s^- 是短半轴的长度（或者更确切地说，是短轴长度的一半）。那么很容易验证

$$\exp \mathrm{d}(V, \Lambda) \equiv \exp\left(\mathrm{d}_0(V) - \mathrm{d}_0(\Lambda)\right) = \cosh s^-. \tag{59}$$

我们已经知道，共形值域必定是一个（可能退化的）合成h-椭圆抛物线。我们知道， h-椭圆抛物线具有性质 (59)，其中焦点位于 Λ 的位置。我们还知道，尖端（或顶点）是 $V = (0,0)_{\mathrm{BCK}}$，而 Λ 从它朝向 Λ_0 。因此， Λ 就是焦点。□

现在我们有

定理 *2.6* 和定理 *2.7* 的证明。 定理 5.10 和定理 5.11 建立了定理 2.5 中情形 (i)–(ii)/(vi)–(vii) 和 (iv)/(ix) 的综合几何解释。更一般地，将渐近点视为焦点主要是一种约定，但这种约定与各种退化情形和极限情形都十分契合。度量数据已包含在定理 5.8（形式不那么紧凑）和定理 3.13 中。□

定理 *2.8* 的证明。 在 pCK 模型中，这一结论更容易看出来。固定焦点后，很容易看出与之相关的几何对象会变小或变大；其中一个包含在另一个之中。显然，z_{pCK} 中的上确界是范数的平方，而且随着相关几何对象变得更加宽厚，它会严格增大。（其范围从最小的 $\max(|\lambda_1|^2,\ |\lambda_2|^2)$一直到 $+\infty$。）转换为 BCK 模型十分直接。□

注 5.12. 对于 h-圆、 h-horosphere、 h-距离带、真 h-椭圆、 h-椭圆抛物线（即非正规情形），二次曲面（边界）的 h-焦点可在射影模型中如下求得：设 Q 为该二次曲面，令 G 为其对偶二次曲面（位于对偶射影平面上）；令 Q_0 为绝对的二次曲面，令 G_0 为其对偶二次曲面。那么，由 G 和G_0 生成的线束中，恰有一个二次曲面 G_{spec} 对应一组平面（这些直线可以相同，也可以不同）。对偶射影平面上的直线对应于原平面上的点；这些点就是 h-焦点。

事实上，我们可以在 BCK 模型中验证这一点。绝对的二次曲面用射影坐标 x_{BCK}， z_{BCK}，w_{BCK} 表示为

$$Q_0: \qquad (x_{\mathrm{BCK}})^2+(z_{\mathrm{BCK}})^2-(w_{\mathrm{BCK}})^2=0.$$

在对偶射影坐标 x'_{BCK}， z'_{BCK}， w'_{BCK} 中，对偶二次曲面为

$$G_0: \qquad (x'_{\mathrm{BCK}})^2+(z'_{\mathrm{BCK}})^2-(w'_{\mathrm{BCK}})^2=0.$$

在 $\partial\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(L_{\alpha,\ t})$ $(t>0)$ 的情形下，二次曲面为

$$Q: \qquad \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}}\right)^2(x_{\mathrm{BCK}})^2+\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right)^2(z_{\mathrm{BCK}})^2-(w_{\mathrm{BCK}})^2=0.$$

对偶二次曲面为

$$G: \qquad \left(\frac{\sqrt{(\cos\alpha)^2+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2(x'_{\mathrm{BCK}})^2+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2(z'_{\mathrm{BCK}})^2-(w'_{\mathrm{BCK}})^2=0. \tag{60}$$

于是可以看出，对于 G 和 G_0所成线束中的唯一一对直线，我们有

$$G_{\mathrm{spec}}: \qquad (\cos\alpha)^2(x'_{\mathrm{BCK}})^2-(w'_{\mathrm{BCK}})^2=0. \tag{61}$$

这属于直线 $\pm(\cos\alpha)x'_{\mathrm{BCK}}+w'_{\mathrm{BCK}}=0$；它们对应于点 $(\pm\cos\alpha,\ 0)$。

在 $\partial\,\mathrm{DW}^{\mathbb{R}}_{\mathrm{BCK}}(S_\beta)$ $(\beta\in[0,\pi/2))$ 的情形下，二次曲面为

$$Q: \qquad \frac{(x_{\mathrm{BCK}})^2}{(\cos\beta)^2}+2(z_{\mathrm{BCK}})^2+2z_{\mathrm{BCK}}w_{\mathrm{BCK}}=0.$$

在对偶射影坐标 x'_{BCK}， z'_{BCK}， w'_{BCK} 中的对偶二次曲面为

$$G: \qquad (\cos\beta)^2(x'_{\mathrm{BCK}})^2+2z'_{\mathrm{BCK}}w'_{\mathrm{BCK}}-2(w'_{\mathrm{BCK}})^2=0. \tag{62}$$

于是可以看出，对于 G 和 G_0的线束中唯一的一对直线，我们有

$$G_{\text{spec}}: \quad (\cos\beta)^2(z'_{\text{BCK}})^2 - 2z'_{\text{BCK}}w'_{\text{BCK}} + (2-(\cos\beta)^2)(w'_{\text{BCK}})^2 \equiv (z'_{\text{BCK}} - w'_{\text{BCK}})((\cos\beta)^2 z'_{\text{BCK}} + ((\cos\beta)^2 - 2)w'_{\text{BCK}}) = 0.$$

这属于直线 $-z'_{\text{BCK}} + w'_{\text{BCK}} = 0$和 $\frac{z'_{\text{BCK}} + w'_{\text{BCK}}}{(\text{余弦}\ \beta)^2(\text{余弦}\ \beta)^2-2} = 0$；它们分别对应点 $(0,-1)$ 和 $\left(0, \frac{1}{(\text{余弦}\ \beta)^2-2}\right)$。

检查完这些情形后，射影不变性便可处理其余情况。 △

注 5.13。事实上，点椭圆可以视为一对虚直线。这样一来，在上述情形中，它们会导出虚焦点。（这可能产生三对焦点，焦点可以是实的或虚的。）这种观点从一开始就存在于双曲圆锥曲线理论中，见 Story [38]。

如果我们从一开始就采用类似上述注释中的焦点解析定义，那么本节对焦点的综合几何识别便没有必要了。 △

注 5.14。对于 A 的共形值域，即使 A 是正规矩阵，对偶二次曲面 G 也可以定义。事实上，G 可以定义为 G_{spec}，它应当是对偶射影空间上对应于 h 特征点的直线方程之积。归根结底，对偶二次曲面是对 A 的共形值域进行数值编码最方便的方式；数值域的情形也是如此。熟悉数值域的 Kippenhahn 观点的话，这并不令人意外。△

6. Comparison of the elliptical range theorems

数值域与 Davis–Wielandt 壳层的椭圆值域定理十分相近。就形状而言，根据是否正规以及是否具有抛物性，分为 2×2 种情形。数值域有四种类型：（i）点；（ii）线段；（iii）圆盘；（iv）非退化椭圆盘。Davis–Wielandt 壳层也有四种类型：（i）渐近 h 点；（ii）渐近闭合的 h 直线；（iii）渐近闭 horosphere；（iv）渐近闭合的 h 管。这些情形彼此对应。相比之下，共形值域形状的 2×5 种情形则更为复杂。

在更高维度中，Davis–Wielandt 壳包含的信息不少于数值域或共形值域。在二维情形下，Davis–Wielandt 壳与数值域包含的信息量相同，而共形值域包含的信息较少。事实上，对于数值域，可以直接恢复标准形（27）；λ_1 和 λ_2是焦点，t 则可由短轴的长度确定。这意味着，矩阵 2×2 在酉共轭意义下由数值域唯一确定。显然，Davis-Wielandt 壳所包含的信息也不可能超出酉共轭意义下的信息。因此，在 2×2 情形下，两者等价。然而，共形值域情形下存在信息损失，因为它将实椭圆型／准椭圆型与复抛物型／拟双曲型情形合并在一起。（这就是为什么形状有 2×5 种情形，而不是 2×7 种。）

因此，在 2×2 的情形下，可以说共形值域比数值域和 Davis–Wielandt 壳更复杂，也更原始。然而，主要问题不在于其中包含的信息（因为矩阵 A 本身包含的信息

甚至更多），而在于如何利用这些值域。关于共形值域在这方面的应用，请参见 [29]。

References

[1] Barbarin, P.: *Études de la géométrie analytique non euclidienne.* M´émoires Couronn´és et Autres M´émoires, L'Acad´émie Royale de Belgique, Coll. in-8°, 60/1., 布鲁塞尔, 1901年。168页。[2] Berger, Marcel: *Geometry I, II.* Universitext。施普林格出版社，柏林，1987年。[3] Bromwich, T. J. I' A.: 二次曲面的分类。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905年), 275–285。[4] Coolidge, Julian Lowell: 双曲空间中的二次曲面。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **4** (1903年), 161–170。[5] Coolidge, Julian Lowell: *The Elements of Non-Euclidean Geometry.*Clarendon Press，牛津，1909年。[6] Davis, Chandler: 希尔伯特空间算子的壳层。 *Acta Sci. Math. (Szeged)* **29** (1968年), 69–86。[7] Davis, Chandler: 希尔伯特空间算子的壳层。II。 *Acta Sci. Math. (Szeged)* **31** (1970年) 301–318。[8] Davis, Chandler: 托普利茨–豪斯多夫定理详解。 *Canad. Math. Bull.* **14** (1971年), 245–246。[9] Davis, Chandler: 算子或关系的矩阵值壳层。 *Integral Equations Operator Theory* **1** 1978 334 363 ( ), – 。

[10] Donoghue, William F., Jr.: 关于有界算子的数值域。 *Michigan Math. J.* **4** (1957年), 261–263。[11] D' Ovidio, Enrico: 投影度量中圆锥曲线的焦点性质。( ), – 。[12] D'Ovidio, Enrico: 投影度量中的共焦圆锥曲线。 *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* **26** 1891 314 325 ( ), – 。

[13] D'Ovidio, Enrico: 投影度量中的圆锥曲线定理。 *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* **26** 1891 369 379 ( ), – 。

[14] Fladt, Kuno: 平面双曲几何中的一般圆锥曲线方程。 *J. Reine Angew. Math.* **197** 1957 121 139 ( ), – 。

[15] Fladt, Kuno: 平面双曲几何中的一般圆锥曲线方程。II。 *J. Reine Angew. Math.* **199** (1958年), 203-207。

[16] Fladt, K.: 双曲几何中圆锥曲线的初等确定。 *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** 1964 247 257 ( ), – 。

[17] Gustafson, Karl E.; Rao, Duggirala K. M.: *Numerical range. The field of values of linear operators and matrices.* 1997

Universitext。施普林格出版社，纽约，。[18] Halmos, Paul R.: *A Hilbert space problem book.* 2第2版，修订增订版。（原版1967年。）数学研究生教材19。施普林格出版社，纽约，1982年。[19] Hausdorff, Felix: 双线性型的值域。 *Math. Z.* **3** (1919年), 314–316。[20] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R.: *Topics in matrix analysis.* 1991年原版的更正重印本。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[21] Izmestiev, Ivan: 球面与双曲圆锥曲线。载于： *Eighteen essays in non-Euclidean geometry.* (Alberge, Vincent; Papadopoulos, Athanase 编) IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 29. Eur. Math. Soc., 苏黎世，2019年。第263–320页。[22] Johnson, Charles R.: 复 2×2 矩阵值域的计算。*J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **78** 1974 105 107 B ( ), – 。[23] Killing, Wilhelm: *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung.* B. G. Teub-ner，莱比锡，1885年。[24] Kippenhahn, R.: ¨关于矩阵的值域。 *Math. Nachr.* **6** (1951年), 193–228。[25] Kippenhahn, R.: 关于矩阵的数值域。 *Linear Multilinear Algebra* **56** (2008年), 185–225; Paul F. Zachlin 和 Michiel E. Hochstenbach 从德文译出。[26] Klein, Felix: 关于所谓的非欧几里得几何。 *Math. Ann.* **4** (1871年), 573–625。英文译本见：Stillwell, John（编译）: *Sources of Hyperbolic Geometry.* 数学史10。 [伦敦数学会和] 美国数学会；普罗维登斯，罗得岛州；1996年。第83–110页。[27] Klein, Felix: 关于所谓的非欧几里得几何。（第二篇。） *Math. Ann.* **6** 1873 112 145 ( ), – 。

[28] Klein, Felix: *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie.* 为付梓重新编订，W. Rosemann。J. Springer，柏林，1928年。

[29] 1910 03328

[30] *Archiv der Mathematik*

Lakos, Gyula: *Convergence estimates for the Magnus expansion II. C^*-algebras.* arXiv: 。Lakos, Gyula: 椭圆值域定理的一个简短证明。https://doi.org/ 10 1007 00013 023 01957 9 。/s - - - Li, Chi-Kwong: 椭圆值域定理的一个简单证明。[31] *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996年), 1985–1986。[32] Li, Chi-Kwong; Poon, Yiu-Tung; Sze, Nung-Sing: 算子的Davis–Wielandt壳。

Oper. ( ), – 。

Matrices **2** 2008 341 355

[33] Liebmann, H.: 非欧几里得空间中的圆锥曲线与行星运动。 *Berichte Königl. Sächsischen Gesell. Wiss. Math. Phys. Klasse* **54** 1902 393 423 , , ( ) – 。

[34] Liebmann, Heinrich: *Nichteuklidische Geometrie.* G. J. G¨oschen，莱比锡，1905年。[35] Lins, Brian; Spitkovsky, Ilya M.; Zhong, Siyu: 归一化数值域与Davis–Wielandt壳。 *Linear Algebra Appl.* **546** (2018年), 187–209。[36] Massau, J.: *Note sur les géométries non euclidiennes.* (摘自根特特别工程学院毕业工程师协会年刊，1904年，第419–456页；1905年，第379–513页。) Dequesne- Masquillier & Fils，蒙斯，1906年。[37] Murnaghan, Francis, D.: 关于方阵的值域。 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 18 1932年 246 248 ( ), – 。[38] Story, William E.: 关于圆锥曲线的非欧几里得性质。 *Amer. J. Math.* **5** (1882年), 358–381。[39] Toeplitz, Otto: Fejér定理的代数类比。 *Math. Z.* **2** (1918年) 187–197。[40] Uhlig, Frank: 复矩阵的值域：在 2×2 情形下的明确描述。*SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **6** (1985年), 541–545。[41] V¨or¨os, Cyrill: *Analitikus Bolyai-féle geometria. 1. köt.: Síkgeometria.* [匈牙利语。] K´okai，布达佩斯，1909年。[42] V¨or¨os, Cyrill: *Analitika geometrio absoluta. 1. vol.: La ebeno Bolyaia.* [世界语。] K´okai，布达佩斯，1910年。[43] V¨or¨os, Cyrill: *Analitika geometrio absoluta. 2. vol.: La spaco Bolyaia.* [世界语。] K´okai，布达佩斯，1912年。[44] Wielandt, Helmut: 正规矩阵特征值的包含。 *Math. Ann.* **121** (1949年), 234–241。[45] Wielandt, H.: 特征值包含定理。载于: *Simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues.* 29 美国国家

标准局应用数学丛书，第。美国政府印刷局，华盛顿特区，1953年。第75–78页。*Email address*: gyula.lakos@uni-miskolc.hu

Institute of Mathematics, Department of Analysis, University of Miskolc, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, Hungary