arXiv:2603.23570v1 [math.DS] 24 Mar 2026

不存在弱因子普适元胞自动机

´ ´ ´MAJA
GWOZDZ

Abstract. Hochman 曾提出这样一个问题：是否存在某个元胞自动机 F，使得每个元胞自动机在动力学意义上都是 F 的因子？特别是，我们不要求因子映射与空间平移相交换。我们证明，这样的元胞自动机不存在。更一般地，如果 F 弱因子映射到半径为零的 q-时钟自动机$C_q^{(k)}$，那么 F 的每个周期点的周期都能被 q整除。对于元胞自动机 F：$A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$，定义 φ_F： $A \to A$ 为 $F(a) = \varphi_F(a)$，并令 g_F 为 φ_F 的周期长度的最大公约数。我们证明，如果 $C_q^{(k)}$是 F的弱因子，那么 $q \mid g_F$成立。由此可知， F 在常值构型上的作用给出了时钟弱因子的一个明确整除障碍。

1. Introduction

Hochman [3] 曾问，是否存在一个元胞自动机

$$F : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$$

使得每个元胞自动机

$$G : \Delta^{\mathbb{Z}^k} \to \Delta^{\mathbb{Z}^k}$$

在动力学意义上都是 F 的因子。更准确地说，应该存在一个连续满射

$$\pi : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Delta^{\mathbb{Z}^k}$$

满足

$$\pi \circ F = G \circ \pi,$$

其中我们不要求 π 与空间平移可交换。我们沿用 [4] 的术语，将这样的映射称为弱因子映射。

对于整数 $q \geq 2$ 和 $k \geq 1$，令

$$C_q^{(k)} : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^k} \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^k}$$

其为由下式定义的半径为零的 q 时钟自动机

$$(C_q^{(k)}(x))_v = x_v + 1 \pmod q \qquad (v \in \mathbb{Z}^k).$$

对于每个 $n \geq 1$,

$$(C_q^{(k)})^n(x) = x + n \pmod q$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37B15, 37B50, 68Q80.

Keywords. 元胞自动机、弱因子、普适性、时钟自动机。1

按坐标成立。此外， $C_q^{(k)}$ 中的每个点的周期都是精确周期 q。

这个问题的答案是否定的，而且障碍很简单。其思路是，因子映射会将周期点映射为周期点，而半径为零的 q-时钟元胞自动机只有精确周期为 q 的点。由此得到命题 2.1 和推论 2.2。定理 1.1 的另一项要点是，这一障碍可以通过有限状态重述来表达，且只取决于 F 对常值构型的作用。

定理 1.1。令 $q \geq 2$, $k \geq 1$，且令 $F\colon\ A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$ 为一个元胞自动机。定义 $\varphi_F\colon\ A \to A$ 为

$$F(\underline{a}) = \underline{\varphi_F(a)} \qquad (a \in A).$$

我们用 a 表示取值为 a 的常值构型。令 $m_1, \ldots, m_r$ 为 φ_F 的周期长度，并设

$$g_F := \gcd(m_1, \ldots, m_r).$$

如果存在连续映射

$$\pi : A^{\mathbb{Z}^d} \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^k}$$

with

$$\pi \circ F = C_q^{(k)} \circ \pi,$$

then

$$q \mid g_F.$$

顺便提一下，我们所处的语境不同于 Boyer 和 Theyssier [1] 研究的重缩放局部模拟预序。对于维数相同的元胞自动机F_1 和 F_2，他们的模拟关系等价于存在一个满射局部映射 ϕ 以及整数 $t_1,\ t_2 \geq 1$，使得

$$\phi \circ F_1^{t_1} = F_2^{t_2} \circ \phi$$

[1, 命题 1]。他们证明了，对于每个 $d \geq 2$，都不存在通用的满射d维元胞自动机；并且在维数 1 中，存在一个具有持久状态 [1, 的元胞自动机类，其中包含通用元胞自动机（定理 1，定理 2]）。

2. 障碍

对于 $a \in A$，我们用$_\ a \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 表示常值构型 $v \mapsto a$。

命题 2.1。设 $q \geq 2$、$k \geq 1$，且 $F\colon\ A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个元胞自动机。若存在一个连续映射

$$\pi : A^{\mathbb{Z}^d} \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^k}$$

使得

$$\pi \circ F = C_q^{(k)} \circ \pi,$$

那么，对于每个 $x \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 和每个 $n \geq 1$,

$$F^n(x) = x \quad \Longrightarrow \quad q \mid n.$$

特别地， F 的每个周期点的最小周期都能被 q整除。

证明。 设 $x \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $n \geq 1$ 满足 $F^n(x) = x$。由此可得

$$(C_q^{(k)})^n(\pi(x)) = \pi(F^n(x)) = \pi(x).$$

对于每个 $y \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^k}$，我们都有

$$(C_q^{(k)})^n(y) = y + n \pmod{q}$$

逐坐标地。我们得出，$(C_q^{(k)})^n$ 有不动点当且仅当$q \mid n$，因此 $q \mid n$ 成立。□

推论 2.2。 不存在弱因子普适元胞自动机。即使将此类限定为单射、满射或可逆元胞自动机，同样的结论仍然成立。

证明。 每个元胞自动机都有一个周期点，因为常值构型组成的有限 F-不变集包含一个循环。因此，对于每个 $q \geq 2$，都不存在任何元胞自动机能够弱因子映射到 $C_q^{(k)}$。注意，每个 $C_q^{(k)}$都是可逆的，故结论成立。□

现在我们证明定理 1.1，它是命题 2.1 的有限状态细化。为完整起见，注意 φ_F 是良定义的。观察到，F 与每个空间平移交换，因此 $F(a)$ 是平移不变的，从而是常值的。 –

定理 *1.1* 的证明。 对于 φ_F的每个循环，取一个代表元$a_i \in A$。由此可知，a_i 是一个 F-周期点，其精确周期为 m_i。现在我们对每个 a_i应用命题 2.1，并得到对每个 i均成立的 $q \mid m_i$ 。因此

$$q \mid \gcd(m_1, \ldots, m_r).$$

□

推论 2.3。 对于每个元胞自动机 $F\colon\ A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$，存在一个素数 $q \nmid g_F$，使得对于每个 $k \geq 1$，可逆元胞自动机$C_q^{(k)}$不是 F的弱因子。

证明。 取一个素数 $q \nmid g_F$。这样的素数存在，因为 g_F 是一个正整数。定理 1.1 表明，对于任意$k \geq 1$， $C_q^{(k)}$都不是 F 的弱因子。□

注 2.4。 定理 1.1 中的整除条件对于时钟自动机这一类而言是最优的。事实上，对于 $F = C_m^{(d)}$，我们有

$$\varphi_F(a) = a + 1 \pmod{m},$$

所以 $g_F = m$。如果 $q \mid m$，那么模 q 的逐坐标约化定义了一个弱因子映射

$$C_m^{(d)} \longrightarrow C_q^{(d)}.$$

References

[1] L. Boyer 和 G. Theyssier, *On factor universality in symbolic spaces* *Math-* ，载于《计算机科 *ematical Foundations of Computer Science 2010* 学讲义》，**6281**，施普林格，柏林、海德堡，2010 年，第 209–220 页。https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-15155-2_20[2] G. A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical sys-* *tem* **3** 1969 4, 320 375 10 1007 ，《数学系统理论》（），第 – 期。https://doi.org/ . / BF01691062[3] M. Hochman, *Are there factor-universal CA?*，未发表的问题札记，见 https://math.huji.ac.il/~mhochman/problems/universal-CA.pdf。[4] J. Jalonen 和 J. Kari, *On the conjugacy problem of cellular automata*，《信息与计算》 **274** 2020 104531 10 1016 2020 104531 （），。https://doi.org/ . / [5] *Tessellations with local transformations* j.ic. . D. Richardson，《计算机与系统科学杂志》**6**（1972），第 5 期，373–388 页。https://doi.org/10.1016/S0022-0000(72)80009-6

University of Zurich

ETH Zürich
Email address: mgwozdz@ethz.ch