arXiv:2603.23579v1 [math.FA] 24 Mar 2026

关于矩阵值（非对称）截断 Toeplitz 算子

NIHAT GOKHAN GOGUS 和 REWAYAT KHAN

ABSTRACT. 矩阵值（非对称）截断 Toeplitz 算子通常并非复对称。本文定义了一种具有独特性质的新共轭，并研究其与矩阵值非对称截断 Toeplitz 算子的关系。我们还探讨矩阵值非对称截断 Toeplitz 算子与具有矩阵符号的 Hankel 算子之间的联系。

1. 引言

令 H^2 为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ 上的经典 Hardy 空间。截断 Toeplitz 算子（TTO）和非对称截断 Toeplitz 算子（ATTO）是乘法算子在 H^2 的后移不变子空间上的压缩（非对称情形下，底层子空间可能不同）。这些子空间均具有 $K_\theta = (\theta H^2)^\perp = H^2 \ominus \theta H^2$ 的形式，其中 θ 是复值内函数： $\theta \in H^\infty$ ，且在单位圆周 $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上几乎处处有 $|\theta(z)| = 1$ 。自 D. Sarason 关于 TTO 的论文问世以来，后来 ATTO 也受到广泛研究（参见 [1,10,12,15,17,31] 和 [6,18–21,26,27]）。

自然会考虑定义在向量值 Hardy 空间 $H^2(\mathcal{H})$ 的子空间上的 TTO 和 ATTO，其中 $\mathcal{H}$ 是一个可分复 Hilbert 空间。向量值模型空间 $K_\Theta \subset H^2(\mathcal{H})$ 是 $\Theta H^2(\mathcal{H})$ 的正交补，也就是说， $K_\Theta = H^2(\mathcal{H}) \ominus \Theta H^2(\mathcal{H})$。这里， Θ 是一个算子值内函数：其取值属于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$（即作用于 $\mathcal{H}$ 的所有有界线性算子所构成的代数），在 $\mathbb{D}$ 上解析、有界，并且其边界值 $\Theta(z)$ 几乎处处是 $\mathbb{T}$ 上的酉算子。这些空间与 Hilbert 空间压缩算子的模型理论有关（参见 [28]）。令 P_Θ 为从$L^2(\mathcal{H})$到 K_Θ上的正交投影。

2010年数学主题分类。主要分类号 47B35，次要分类号 47B32、30D20。关键词和短语。 模型空间、矩阵值截断 Toeplitz 算子、共轭、Hankel 算子。

对于两个算子值内函数 $\Theta_1,\ \Theta_2 \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 和$\Phi \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$（定义见第2节和?? ），令

$$A_\Phi^{\Theta_1,\Theta_2} f = P_{\Theta_2}(\Phi f), \quad f \in K_{\Theta_1} \cap H^\infty(\mathcal{H}). \tag{1.1}$$

算子 $A^{\Theta_1}_{\cdot,\Phi}{}^{\Theta_2}$称为矩阵值非对称截断托普利茨算子（MATTO），而 $A_\Phi^{\Theta_1} = A^{\Theta_1}_{\cdot,\Phi}{}^{\Theta_1}$称为矩阵值截断托普利茨算子（MTTO，见 [25]）。二者在 K_{Θ_1}上均稠密定义。令 $\mathcal{MT}(\Theta_1,\Theta_2)$ 表示所有形如（1.1）的 MATTO 构成的集合，这些算子可有界地延拓到整个空间 K_{Θ_1}；对于 $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ ，令 $\mathcal{MT}(\Theta) = \mathcal{MT}(\Theta,\Theta)$。

$\mathcal{MT}(\Theta)$ 中的算子有两个重要例子，即模型算子

$$S_\Theta = A_z^\Theta = A_{zI_\mathcal{H}}^\Theta \quad \text{and} \quad S_\Theta^* = A_{\bar z}^\Theta = A_{\bar z I_\mathcal{H}}^\Theta. \tag{1.2}$$

已知，每个具有有限亏指数的 C_0 收缩算子都与某个算子值内函数 Θ 对应的 S_Θ 酉等价（见[28, 第四章]）。另一方面， $\mathcal{MT}(\Theta_1,\Theta_2)$ 中具有某些有界解析符号的算子，作为交织S_{Θ_1} 与 S_{Θ_2} 的算子出现（见 [2, 第 238] 页）。文献 [25], 研究了 MTTO 的一些代数性质，而文献 [24]则研究了非对称情形。

本文的安排如下：第2节和第3节简要介绍向量值函数空间及其算子的相关背景知识。第4节定义一种与模型空间分解相对应的新共轭，并讨论其性质。第5节讨论矩阵值非对称截断托普利茨算子、向量值汉克尔算子与共轭之间的联系。

2. 向量值函数空间及其算子

设 $\mathcal{H}$ 是一个复可分希尔伯特空间。下文中， $\|\cdot\|_\mathcal{H}$和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathcal{H}$ 分别表示 $\mathcal{H}$上的范数和内积。此外，我们假设 $\dim\mathcal{H} < \infty$。空间 $L^2(\mathcal{H})$可定义为

$$L^2(\mathcal{H}) = \{f\colon \mathbb{T} \to \mathcal{H} : f \text{ is measurable and } \int_\mathbb{T} \|f(z)\|_\mathcal{H}^2\, dm(z) < \infty\}$$

（m 是 $\mathbb{T}$上的归一化勒贝格测度）。通常，每个$f \in L^2(\mathcal{H})$都被解释为函数类，即在 $\mathbb{T}$上关于 m几乎处处相等、表示 f的函数类。空间 $L^2(\mathcal{H})$是一个（可分的）希尔伯特空间，其内积定义为

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathcal{H})} = \int_\mathbb{T} \langle f(z), g(z)\rangle_\mathcal{H}\, dm(z), \quad f, g \in L^2(\mathcal{H}).$$

等价地， $L^2(\mathcal{H})$由形如 $\mathbb{T} \to \mathcal{H}$ 的元素 f： 组成

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{a.e. on } \mathbb{T}) \tag{2.1}$$
$$\text{with} \quad \{a_n\} \subset \mathcal{H} \text{ such that } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

n 阶傅里叶系数 a_n of $f \in L^2(\mathcal{H})$ 由下式确定

$$\langle a_n, x\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{T}} \overline{z}^n \langle f(z), x\rangle_{\mathcal{H}} dm(z) \quad \text{for all } x \in \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

若 $f \in L^2(\mathcal{H})$ 由式 (2.1) 给出，则其傅里叶级数在$L^2(\mathcal{H})$ 范数下收敛，并且

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{H})}^2 = \int_{\mathbb{T}} \|f(z)\|_{\mathcal{H}}^2 \, dm(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{\mathcal{H}}^2.$$

此外，对于 $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \in L^2(\mathcal{H})$，我们有

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathcal{H})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle_{\mathcal{H}}.$$

对于 $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ ，我们记 $L^2 = L^2(\mathbb{C})$。

向量值 Hardy 空间 $H^2(\mathcal{H})$ 定义为 $L^2(\mathcal{H})$ 中所有负指标傅里叶系数均为零的元素所构成的集合，即

$$H^2(\mathcal{H}) = \left\{ f \in L^2(\mathcal{H}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\}.$$

每个 $f \in H^2(\mathcal{H})$ 也可以视为一个函数

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析（边界值 $f(z)$ 可由径向极限得到，这些极限在$L^2(\mathcal{H})$ 范数下收敛到边界函数）。记 P_+ 为正交投影 $P_+ : L^2(\mathcal{H}) \to H^2(\mathcal{H})$,

$$P_+ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

并令 $H^2 = H^2(\mathbb{C})$。

我们也可以考虑这些空间

$$L^\infty(\mathcal{H}) = \left\{ f\colon \mathbb{T} \to \mathcal{H} : \begin{array}{l} f \text{ is measurable and} \\ \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \|f(z)\|_{\mathcal{H}} < \infty \end{array} \right\}$$

（显然， $L^\infty(\mathcal{H}) \subset L^2(\mathcal{H})$）和

$$H^\infty(\mathcal{H}) = L^\infty(\mathcal{H}) \cap H^2(\mathcal{H}),$$

后者也可视为所有有界 $\mathcal{H}$值函数构成的空间，这些函数在 $\mathbb{D}$中解析。

现在令 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$为所有定义在 $\mathcal{H}$上的有界线性算子构成的代数，并赋予算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$。 当 $\dim\ \mathcal{H} = d < \infty$时， $\mathcal{L}(\mathcal{H})$中的每个元素都可与一个 $d \times d$ 矩阵相对应。记

$$L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \left\{ \mathbf{F}\colon \mathbb{T} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \begin{array}{l} \mathbf{F} \text{ is measurable and} \\ \|\mathbf{F}\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \|\mathbf{F}(z)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty \end{array} \right\}$$

（函数$\mathbf{F}\colon\ \mathbb{T} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$可测，当且仅当$\mathbf{F}(\cdot)x\colon\ \mathbb{T} \to \mathcal{H}$对每个 $x \in \mathcal{H}$都可测）。每个$\mathbf{F}\ \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$都具有形式上的傅里叶展开（在 $\mathbb{T}$上几乎处处）

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n z^n \quad \text{with } \{F_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{2.3}$$

定义为

$$F_n x = \int_{\mathbb{T}} \overline{z}^n \mathbf{F}(z) x \, dm(z) \quad \text{for } x \in \mathcal{H} \tag{2.4}$$

（以强意义积分）。令

$$H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \left\{ \mathbf{F} \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H})) : \mathbf{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \right\}.$$

空间 $H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 等价地可定义为所有满足以下条件的解析函数 $\mathbf{F}\colon$ $\mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 所构成的空间

$$\|\mathbf{F}\|_\infty = \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \|\mathbf{F}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

每个这样的有界解析$\mathbf{F}$ 都具有如下形式

$$\mathbf{F}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{D}, \tag{2.5}$$

并且可以与边界函数相对应

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})). \tag{2.6}$$

反过来，由 (2.6) 给出的每个 $\mathbf{F} \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，都可以通过 (2.5) 延拓为 $\mathbb{D}$ 中有界且解析的函数。在每种情况下，系数$\{F_n\}$ 都可以通过 (2.4) 求得，边界函数及其延拓的范数 $\|\cdot\|_\infty$ 相同（见 [2, 第 232] 页）。

注意，对于每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，函数 $\mathbf{k}_\lambda(z) = (1-\bar{\lambda}z)^{-1} I_{\mathcal{H}}$ 属于 $H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$。此外，对于每个 $x \in \mathcal{H}$，函数 $\mathbf{k}_\lambda x : z \mapsto \mathbf{k}_\lambda(z)x$ 属于 $H^\infty(\mathcal{H})$，并具有如下再生性质

$$\langle f, \mathbf{k}_\lambda x\rangle_{L^2(\mathcal{H})} = \langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{H}}, \quad f \in H^2(\mathcal{H}).$$

对于每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，我们可以考虑

$$\mathbf{k}_\lambda^\Theta(z) = \tfrac{1}{1-\bar{\lambda}z}(I_{\mathcal{H}} - \Theta(z)\Theta(\lambda)^*) \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

对于 $x \in \mathcal{H}$，我们将函数 $z \mapsto \mathbf{k}_\lambda^\Theta(z)x$ 简记为 $\mathbf{k}_\lambda^\Theta x$。那么，对于每个 $x \in \mathcal{H}$ 和 $\lambda \in \mathbb{D}$，函数 $\mathbf{k}_\lambda^\Theta x = P_\Theta(\mathbf{k}_\lambda x)$ 属于 $K_\Theta^\infty = K_\Theta \cap H^\infty(\mathcal{H})$，并具有如下再生性质

$$\langle f, \mathbf{k}_\lambda^\Theta x\rangle_{L^2(\mathcal{H})} = \langle f(\lambda), x\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for every } f \in K_\Theta.$$

由此特别可知，K_Θ^∞ 是 K_Θ 的稠密子集。

对每个$\mathbf{F} \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，都对应一个乘法算子$M_{\mathbf{F}}: L^2(\mathcal{H}) \to L^2(\mathcal{H})$：对于 $f \in L^2(\mathcal{H})$,

$$(M_{\mathbf{F}} f)(z) = \mathbf{F}(z)f(z) \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}.$$

我们将用$\mathbf{F}f$ 代替 $M_{\mathbf{F}}f$。对于常值$\mathbf{F}$，也就是说，存在某个 $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使得$\mathbf{F}(z) = F$在 $\mathbb{T}$上几乎处处成立，我们也将用 Ff代替$\mathbf{F}f$。我们用 $T_{\mathbf{F}}$ 表示 $M_{\mathbf{F}}$ 到 Hardy 空间的压缩： $T_{\mathbf{F}}: H^2(\mathcal{H}) \to H^2(\mathcal{H})$,

$$T_{\mathbf{F}} f = P_+ M_{\mathbf{F}} f \quad \text{for } f \in H^2(\mathcal{H}).$$

显然，$(M_{\mathbf{F}})^* = M_{\mathbf{F}^*}$ 和$(T_{\mathbf{F}})^* = T_{\mathbf{F}^*}$成立，其中$\mathbf{F}^*(z) = \mathbf{F}(z)^*$在 $\mathbb{T}$上几乎处处成立。也不难验证，对于$\mathbf{F} \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，我们有$\mathbf{F} \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$当且仅当 $M_{\mathbf{F}}(H^2(\mathcal{H})) \subset H^2(\mathcal{H})$。特别地，对于 $M_z = M_{zI_{\mathcal{H}}}$，我们有 $M_z^* = M_{\bar{z}} = M_{\bar{z}I_{\mathcal{H}}}$ 且 $M_z(H^2(\mathcal{H})) \subset H^2(\mathcal{H})$。算子$S = T_z = M_{z|H^2(\mathcal{H})}$ 称为（前向）移位算子。它的伴随算子——后向移位算子 $S^* = T_{\bar{z}}$——由下式给出：

$$S^* f(z) = \bar{z}\big(f(z) - f(0)\big).$$

我们可以将 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$视为配备希尔伯特–施密特范数的希尔伯特空间，也可以像上文一样定义空间 $L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$和 $H^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$。回顾一下，范数及其对应的内积定义如下：对于希尔伯特–施密特算子 $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，有

$$\|A\|_2^2 = tr(A^*A) = \sum_{e\in\varepsilon} \langle Ae, Ae\rangle_{\mathcal{H}}$$

and

$$\langle A, B\rangle = tr(B^*A) = \sum_{e\in\varepsilon}\langle Ae, Be\rangle_{\mathcal{H}}$$

ε 是 $\mathcal{H}$ 的任意标准正交基（参见 [15, 第 3]章）。因此，对于$\mathbf{F}$,$\mathbf{G}$ $\in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle_{L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))} &= \int_{\mathbb{T}}\langle \mathbf{F}(z), \mathbf{G}(z)\rangle_2 dm(z)\\ &= \int_{\mathbb{T}}\sum_{e\in\varepsilon}\langle \mathbf{F}(z)e, \mathbf{G}(z)e\rangle_{\mathcal{H}} dm(z).\end{aligned}$$

由于 $\langle A,\ B\rangle_2 = \langle B^*,\ A^*\rangle_2$，因此 $\langle \mathbf{F},\ \mathbf{G}\rangle_{L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))} = \langle \mathbf{G}^*,\ \mathbf{F}^*\rangle_{L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))}$.

由于这里希尔伯特–施密特范数与算子范数等价，我们有

$$L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})) \subset L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})) \subset H^2(\mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

此外，不难验证，若$\mathbf{F} \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$由下式给出

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n z^n, \quad F_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

其中该级数在 $L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$-范数下收敛，则

$$\mathbf{F}^*(z) = \mathbf{F}(z)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (F_{-n})^* z^n.$$

因此我们有

$$L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \left[zH^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))\right]^* \oplus H^2(\mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

对于 $\mathbf{F} \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，算子 $M_{\mathbf{F}}$ 和 $T_{\mathbf{F}}$ 可以分别在 $L^2(\mathcal{H})$ 和 $H^2(\mathcal{H})$ 上稠密定义。关于向量值函数空间的更多详情，请参阅 [2,28,29]。

现在我们来考虑共轭。希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 中的一个共轭 Γ 是一个反线性映射 Γ: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$，满足 $\Gamma^2 = I_{\mathcal{H}}$ 并且

$$\langle \Gamma f, \Gamma g\rangle = \langle g, f\rangle \quad \text{for all} \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

共轭的重要性，例如，源于其与复对称算子的联系。回顾一下，有界线性算子 $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ 若满足 $\Gamma T\Gamma = T^*$，则称其为 Γ-对称的（其中 Γ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个共轭）。如果算子 T 关于某个共轭 Γ 是 Γ-对称的，我们就称其为复对称的（有关共轭和复对称算子的更多细节，参见例如 [16]）。

在 [5]中，作者研究了 $L^2(\mathcal{H})$ 中的某些共轭类。其中一个共轭是 $\mathbf{J}: L^2(\mathcal{H}) \to L^2(\mathcal{H})$，它是针对 $\mathcal{H}$ 中的一个固定共轭 Γ 定义的，即

$$(\widetilde{\mathbf{J}}f)(z) = \Gamma(f(z)) \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}. \tag{2.7}$$

另一个是 $\mathbf{J}^*$：由 $L^2(\mathcal{H}) \to L^2(\mathcal{H})$ 定义为

$$(\mathbf{J}^*f)(z) = \Gamma(f(\overline{z})) \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}. \tag{2.8}$$

不难验证，对于 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \in L^2(\mathcal{H})$，我们有

$$(\mathbf{J}^*f)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(a_n) z^n.$$

因此，$\mathbf{J}^*$ 是一个与 $\mathbf{M}_z$ 对易的共轭，即 $\mathbf{J}^*\mathbf{M}_z = \mathbf{M}_z\mathbf{J}^*$，且 $\mathbf{J}^*(H^2(\mathcal{H})) = H^2(\mathcal{H})$，$\mathbf{J}^*P_+ = P_+\mathbf{J}^*$（见第 [5, 节 4]）。共轭 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{J}^*$ 已在 [4] 中针对维数 $\mathcal{H} = 1$ 进行了研究。

对于 $\mathbf{F} \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 以及 $\mathcal{H}$ 中的任意共轭 Γ，令

$$\mathbf{F}_\Gamma(z) = \Gamma\mathbf{F}(z)\Gamma \quad \text{a.e on } \mathbb{T}. \tag{2.9}$$

于是 $\mathbf{F}_\Gamma \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$。正如在 [5], 中所观察到的，$\mathbf{F}_\Gamma \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 当且仅当 $\mathbf{F}^* \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，并且 $\mathbf{F}_\Gamma$ 是内函数当且仅当 $\mathbf{F}$ 是内函数。显然，$(\mathbf{F}_\Gamma)_\Gamma = \mathbf{F}$。我们还注意到，如果 $\mathbf{F}$ 具有 Γ-对称性，即 $\Gamma\mathbf{F}(z)\Gamma = \mathbf{F}(z)^*$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立（或等价地，$\mathbf{F}(\lambda)$ 具有 Γ-对称性 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，其中 λ 属于 $\mathbb{D}$，见 [5]），那么 $\mathbf{F}_\Gamma = \mathbf{F}$，其中 $\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}(\bar{z})^*$。特别地

$$\mathbf{J}^*\mathbf{M}_{\mathbf{F}} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}}\mathbf{J}^* \tag{2.10}$$

注意，$\mathbf{F}_\Gamma$ 也定义于$\mathbf{F} \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$。

3. 模型空间及其分解

本节讨论与内函数乘积相对应的模型空间的分解。设 $\Theta, \Lambda \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$是两个内函数。若存在内函数 $\Psi \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$使得 $\Theta = \Lambda\Psi$，则称 Λ 整除 Θ。标量情形已在 [6]中讨论。

回顾 Γ-对称性的定义。若 $\Gamma\Phi(z)\Gamma = \Phi(z)^*$ 在 $\mathbb{T}$上几乎处处成立，则称 $\Phi \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$是$\Gamma$-对称的。

若 Λ 整除 Θ，则有 $K_\Lambda \subset K_\Theta$。设 $\Theta\Lambda^* = \Phi$ 和 $\Lambda^*\Theta = \Psi$，则下述结果表明，若 Θ, Λ和 Ψ 均为 Γ-对称的，则 Ψ 与 Λ 交换，因而 $\Phi = \Psi$。此外，[5, 引理 7.2]中的两个陈述可以合并为一个。

命题 3.1. 设 Θ、Λ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，Λ 和 Ψ 可交换。

证明。设 Θ, Λ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。现在， Θ 是 Γ-对称内函数，因此我们有

$$\Theta^* = \Gamma\Theta\Gamma = \Gamma(\Lambda\Psi)\Gamma = \Gamma\Lambda\Gamma.\Gamma\Psi\Gamma = \Lambda^*\Psi^* = (\Psi\Lambda)^*.$$

由此可得 $\Theta = \Psi\Lambda$。我们还有 $\Theta = \Lambda\Psi = \Psi\Lambda$。 □

命题 3.2。设 Θ、Λ 和 Ψ 是内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，对于任意 $x \in \mathcal{H}$ 和 $\lambda \in \mathbb{D}$，以下结论成立：

(1) $K_\Theta = K_\Lambda \oplus \Lambda K_\Psi$.(2) $P_\Theta = P_\Lambda + \Lambda P_\Psi \Lambda^*$.(3) $k_\lambda^\Theta(z)$ $x = k_\lambda^\Lambda(z)x + \Lambda(z)k_\lambda^\Psi(z)\Lambda(\lambda)^* x$.(4) $\widetilde{k}_\lambda^\Theta(z)x = \widetilde{k}_\lambda^\Lambda(z)\Psi(\lambda)$ $x + \Lambda(z)\widetilde{k}_\lambda^\Psi(z)x$.$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$(5) $P_\Lambda(k_\lambda^\Theta(z)x) = k_\lambda^\Lambda(z)x$, $P_\Lambda(k_\lambda^\Theta(z)x) = k_\lambda^\Lambda(z)\Psi(\lambda)x$.

证明。(1) 和 (2) 的证明很容易。
(3) 考虑 K_Θ 的再生核，其定义为

$$\begin{aligned} k_\lambda^\Theta x &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}(I - \Theta(z)\Theta(\lambda)^*)x \\ &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}(I - \Lambda(z)\Psi(z)\Psi(\lambda)^*\Lambda(\lambda)^*)x \\ &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}(I - \Lambda(z)\Lambda(\lambda)^* + \Lambda(z)\Lambda(\lambda)^* - \Lambda(z)\Psi(z)\Psi(\lambda)^*\Lambda(\lambda)^*)x \\ &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}[(I - \Lambda(z)\Lambda(\lambda)^*) + \Lambda(z)(I - \Psi(z)\Psi(\lambda)^*)\Lambda(\lambda)^*)]x \\ &= k_\lambda^\Lambda x + \Lambda(z)k_\lambda^\Psi \Lambda(\lambda)^* x. \end{aligned}$$

(4) 类似于 (3) 中的论证即可得出。
第 (5) 项由将 (3) 和 (4) 中的向量正交投影到模型空间 K_Λ 上得到。□

4. 模型空间上的共轭

在标量情形下，每个模型空间 K_θ 都配备了一个自然的共轭 C_θ，它通过边界函数定义为 $(C_\theta f)(z) = \theta(z)z\overline{f(z)}$。共轭 C_θ 曾在 [30] 中研究过。若 $\Theta \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 是一个内函数，且 Γ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个共轭，我们也可以类似地定义$\mathbf{C}_\Theta$：$L^2(\mathcal{H}) \to L^2(\mathcal{H})$，定义如下：

$$(\mathbf{C}_\Theta f)(z) = \Theta(z)\overline{z}\Gamma(f(z)) \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}. \tag{4.1}$$

尽管$\mathbf{C}_\Theta$ 显然是一个反线性等距映射，但通常并非对合。简单计算可知，$\mathbf{C}_\Theta$ 是对合（因此也是共轭）当且仅当 $\Theta(z)\Gamma\Theta(z)\Gamma = I_\mathcal{H}$ 在 $\mathbb{T}$上几乎处处成立，也就是说，

当且仅当 Θ是 Γ-对称的。 [5]此前曾研究过类似于（4.1）的共轭。

如果 Θ 是 Γ-对称的，那么 $\mathbf{C}_\Theta(\Theta H^2(\mathcal{H})) = H^2(\mathcal{H})^\perp$ ，因此

$$\mathbf{C}_\Theta(K_\Theta) = K_\Theta.$$

回顾一下，在标量情形中， $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ 模型空间上的每个截断托普利茨算子K_θ 都是 C_θ-对称的，即

$$C_\theta A^\theta_\varphi C_\theta = (A^\theta_\varphi)^* = A^\theta_{\overline{\varphi}}$$

（例如，参见 [30]）。然而在这种情况下，我们只需考虑 $\mathcal{H}$ 中的共轭 $\Gamma(z) = z$ （且每个 $\varphi \in L^2$ 都是 Γ-对称的）。在向量值情形中，等式

$$C_\Theta A^\Theta_\Phi C_\Theta = A^\Theta_{\Phi^*} \tag{4.2}$$

对于任意的 $\Phi \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 不一定成立（尽管这里假设 Θ是 Γ-对称的）。不过，如果 Φ也 Γ-对称且与 Θ 交换，则该等式成立（参见 [25]）。

注意，在这种情况下，

$$\mathbf{C}_\Theta = \mathbf{J}^* \tau_\Theta,$$

其中 τ_Θ： $L^2(\mathcal{H}) \to L^2(\mathcal{H})$ 定义为

$$(\tau_\Theta f)(z) = \bar{z}\Theta(\bar{z})^* f(\bar{z}) \quad a.e.\text{ on } \mathbb{T}, \tag{4.3}$$

$\widetilde{}$是一个将 K_Θ 映射到 $K_{\widetilde{\Theta}}$的酉算子，其中 $\Theta(z) = \Theta(\bar{z})^*$。

本节研究模型空间上的一种新共轭。我们定义一种与对应于内函数 $\Theta = \Lambda\Psi = \Psi\Lambda$ 的模型空间正交分解相对应的共轭，其中 Θ, Λ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数。定理 4.1 中的共轭在 [6] 中 $\dim\ \mathcal{H} = 1$ 的情形下已有研究。

定理 4.1。设 Θ、Λ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，算子

$$C_{\Lambda,\Psi} : K_\Theta = K_\Lambda \oplus \Lambda K_\Psi \to K_\Theta = K_\Lambda \oplus \Lambda K_\Psi$$

定义为

$$C_{\Lambda,\Psi} = C_\Lambda \oplus \Lambda C_\Psi \Lambda^* = \begin{bmatrix} C_\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda C_\Psi \Lambda^* \end{bmatrix}$$

是 K_Θ 上的一个共轭。

证明。为了证明 $C_{\Lambda,\Psi}$ 是 K_Θ 上的一个共轭，我们需要证明$\Lambda C_\Psi \Lambda^*$ 是 ΛK_Ψ上的一个共轭。由于 Λ和 Ψ 是 Γ-对称的，因此 C_Λ 和 C_Ψ 分别是 K_Λ 和 K_Ψ上的共轭。令 $\mathcal{C} =$

$\Lambda C_\Psi \Lambda^*$。首先，我们需要证明 $\mathcal{C}(\Lambda K_\Psi) = \Lambda K_\Psi$。令 $f \in \Lambda K_\Psi$，则 $f = \Lambda g$，其中 $g \in K_\Psi$。于是

$$\mathcal{C}(f) = \Lambda C_\Psi \Lambda^*(\Lambda g) = \Lambda C_\Psi g \in \Lambda K_\Psi.$$

由此可得 $\mathcal{C}(\Lambda K_\Psi) \subset \Lambda K_\Psi$。算子 $\mathcal{C}$ 是对合，因为

$$\mathcal{C}^2 = \Lambda C_\Psi \Lambda^* \Lambda C_\Psi \Lambda^* = \Lambda C_\Psi^2 \Lambda^* = I_{\Lambda K_\Psi}.$$

因此，我们有

$$\mathcal{C}(\Lambda K_\Psi) = \Lambda K_\Psi.$$

$\mathcal{C}$ 的反线性可由 C_Ψ的反线性推出。

现在，我们证明 $\mathcal{C}$ 是等距的，即对所有 $f = \Lambda g \in \Lambda K_\Psi$，都有 $\|\mathcal{C}f\| = \|f\|$，其中 $g \in K_\Psi$。考虑

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}f\|^2 &= \langle \mathcal{C}f, \mathcal{C}f \rangle \\
&= \langle \Lambda C_\Psi \Lambda^* \Lambda g, \Lambda C_\Psi \Lambda^* \Lambda g \rangle \\
&= \langle C_\Psi g, C_\Psi g \rangle \\
&= \langle g, g \rangle \\
&= \langle \Lambda g, \Lambda g \rangle \\
&= \langle f, f \rangle \\
&= \|f\|^2.
\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{C}$ 是一个共轭，由此可得$C_{\Lambda,\Psi}$ 是一个共轭。 □

定理 4.2. 设 Λ、Θ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，对于任意 $f_\Lambda \in K_\Lambda$ 和 $f_\Psi \in K_\Psi$，共轭C_Θ: $K_\Theta = K_\Lambda \oplus \Lambda K_\Psi \to K_\Theta = K_\Psi \oplus \Psi K_\Lambda$具有以下性质：

(1) $C_\Theta(f_\Lambda + \Lambda f_\Psi) = C_\Psi(f_\Psi) + \Psi C_\Lambda(f_\Lambda)$.

(2) $C_\Theta(f_\Psi + \Psi f_\Lambda) = C_\Lambda(f_\Lambda) + \Lambda C_\Psi(f_\Psi)$.

证明. (1) 设 $f_\Lambda \in K_\Lambda$ 和 $f_\Psi \in K_\Psi$。那么，

$$\begin{aligned}
C_\Theta(f_\Lambda + \Lambda f_\Psi) &= \Theta z \Gamma(f_\Lambda + \Lambda f_\Psi) \\
&= \Theta z \Gamma(f_\Lambda) + \Theta z \Gamma(\Lambda f_\Psi) \\
&= \Theta \Lambda^* \Lambda z \Gamma(f_\Lambda) + \Theta z \Lambda^* \Gamma(f_\Psi) \\
&= \Psi C_\Lambda(f_\Lambda) + \Theta \Lambda^* z \Gamma(f_\Psi) \\
&= \Psi C_\Lambda(f_\Lambda) + \Psi z \Gamma(f_\Psi) \\
&= \Psi C_\Lambda(f_\Lambda) + C_\Psi(f_\Psi).
\end{aligned}$$

(2) 这一部分是 (1) 的对称版本。 □

命题 4.3。 设 Λ、Θ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，算子 $C_{\Lambda,\ \Psi}C_\Theta$： $K_\Theta = K_\Psi \oplus \Psi K_\Lambda \to K_\Theta = K_\Lambda \oplus \Lambda K_\Psi$ 和 $C_\Theta C_{\Lambda,\ \Psi}$： $K_\Theta = K_\Lambda \oplus \Lambda K_\Psi \to K_\Theta = K_\Psi \oplus \Psi K_\Lambda$ 是酉算子，并具有以下性质：

(1) $C_{\Lambda,\ \Psi}C_\Theta = P_\Lambda \Psi^* + \Lambda P_\Psi$,
(2) $C_\Theta C_{\Lambda,\ \Psi} = P_\Psi \Lambda^* + \Psi P_\Lambda$.

证明。 容易证明，$C_{\Lambda,\ \Psi}C_\Theta$ 和$C_{\Lambda,\ \Psi}C_\Theta$ 都是酉算子。

为证明 (1)，设 $f_\Lambda \in K_\Lambda$ 和 $f_\Psi \in K_\Psi$。于是，由定理 4.2 可得

$$\begin{aligned} C_{\Lambda,\Psi}C_\Theta(f_\Psi + \Psi f_\Lambda) &= C_{\Lambda,\Psi}(C_\Lambda(f_\Lambda) + \Lambda C_\Psi(f_\Psi)) \\ &= C_\Lambda^2(f_\Lambda) + \Lambda C_\Psi^2(f_\Psi)) \\ &= f_\Lambda + \Lambda f_\Psi, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (P_\Lambda \Psi^* + \Lambda P_\Psi)(f_\Psi + \Psi f_\Lambda) &= P_\Lambda(\Psi^* f_\Psi) + P_\Lambda(f_\Lambda)) + \Lambda P_\Psi(f_\Psi) + \Lambda P_\Psi(\Psi f_\Lambda) \\ &= P_\Lambda(f_\Lambda) + \Lambda P_\Psi(f_\Psi) \\ &= f_\Lambda + \Lambda f_\Psi. \end{aligned}$$

(1) 得证。
(2) 可由与 (1) 中类似的讨论得出。

□

定理 4.4。 *[5, 定理 4.8]*设 C 是作用于$L^2(\mathcal{H})$上的反线性算子。则以下命题等价：
(1) C 是 $L^2(\mathcal{H})$ 上的共轭，且满足 $M_z C = C M_{\bar{z}}$。*(2)* 存在反线性函数 $C_0 \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，使得 $C = A_{C_0}$，并且对 $\mathbb{T}$ 上几乎处处的点，$C_0(z)$都是共轭。*(3)* 对于 $\mathcal{H}$ 中任意共轭 Γ，存在 $U \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，使得 $\sim \ \sim U(z)$ 是一个 Γ- 对称酉算子，并且 $C = M_U \mathbf{J} = \mathbf{J} M_{U^*}$。

我们知道 $\mathbf{C}_\Theta = \mathbf{J}^* \tau_\Theta$，其中 $\mathbf{J}^*$ 是一个 M_z-交换共轭。因此，$\mathbf{C}_\Theta$ 是一个 M_z-共轭，即 $\mathbf{C}_\Theta M_z = M_{\bar{z}} \mathbf{C}_\Theta$。由定理 4.4 可知，存在 $U \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，使得 $U(z)$ 是一个 $\sim \ \sim \Gamma$-对称酉算子，并且 $\mathbf{C}_\Theta = M_U \mathbf{J} = \mathbf{J} M_{U^*}$。

定理 4.5. 设 Λ、Θ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，存在 Γ-对称酉函数 U、$V \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，使得

$$\mathbf{C}_{\Lambda,\Psi} = M_U \widetilde{\mathbf{J}} \oplus M_V \widetilde{\mathbf{J}} = \widetilde{\mathbf{J}} M_{U^*} \oplus \widetilde{\mathbf{J}} M_{V^*}$$

证明。记 $\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} M_z & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix}$。设 Λ, Θ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。那么，$\mathbf{C}_\Theta$ 和 $\mathbf{C}_\Psi$ 是 M_z-共轭。因此，共轭

$$\mathbf{C}_{\Lambda,\Psi} = C_\Lambda \oplus \Lambda C_\Psi \Lambda^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \mathbf{C}_\Psi \Lambda^* \end{bmatrix}$$

也是一种$\mathbf{M}_z$-共轭。根据定理 4.4，存在 Γ-对称的酉函数 U, $U' \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，使得 $\mathbf{C}_\Theta = M_U\mathbf{J} = \mathbf{J}M_{U^*}$，以及$\mathbf{C}_\Psi = M_{U'}\mathbf{J} = \mathbf{J}M_{U'^*}$。

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\Lambda,\Psi} &= C_\Lambda \oplus \Lambda C_\Psi \Lambda^* \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \mathbf{C}_\Psi \Lambda^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_U\widetilde{\mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \Lambda M_{U'}\widetilde{\mathbf{J}}\Lambda^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_U\widetilde{\mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \Lambda M_{U'}\Lambda\widetilde{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_U\widetilde{\mathbf{J}} & 0 \\ 0 & M_V\widetilde{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_U & 0 \\ 0 & M_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \\
&= M_U\widetilde{\mathbf{J}} \oplus M_V\widetilde{\mathbf{J}}
\end{aligned}$$

其中，$V = \Lambda M_{U'}\Lambda$ 是 $L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 中的酉函数。容易验证，V 也是 Γ-对称的，因为 U' 和 Λ 都是 Γ-对称的。证明另一种表示的步骤相同，即$\mathbf{C}_{\Lambda,\Psi} = \widetilde{\mathbf{J}}M_{U^*} \oplus \mathbf{J}M_{V^*}$。□

5. 与矩阵值汉克尔算子的联系

本节中，我们探讨共轭、矩阵值非对称截断 Toeplitz 算子与矩阵值 Hankel 算子之间的联系。

令 $P_- = I - P_+$ 表示从 $L^2(\mathcal{H})$ 到 $H^2_-(\mathcal{H}) = [H^2(\mathcal{H})]^\perp$ 的正交投影。对于 $\Phi \in L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$，我们定义

$$H_\Phi : H^2(\mathcal{H}) \to H^2_-(\mathcal{H}), \qquad H_\Phi f = P_-(\Phi f);$$

对于 $f \in H^2(\mathcal{H})$。

同样，对于 $\Psi \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$,

$$\widetilde{H}_\Psi : H^2_-(\mathcal{H}) \to H^2(\mathcal{H}), \qquad \widetilde{H}_\Psi f = P_+(\Psi f).$$

注 5.1. 设 $f \in K_\Theta$ 和 $\Phi \in L^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$。则

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_\Theta H_{\Theta^*\Phi} f &= \widetilde{H}_\Theta P_-(\Theta^*\Phi f)\\ &= P_+(\Theta P_-(\Theta^*\Phi f))\\ &= P_+(\Theta(I-P_+)(\Theta^*\Phi f))\\ &= (P_+ - \Theta P_+\Theta^*)(\Phi f)\\ &= P_\Theta(\Phi f)\\ &= A^\Theta_\Phi f.\end{aligned}$$

命题 5.2. 设 Λ、Θ和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Lambda\Psi$。则

(1) $P_\Theta = \Theta P_-\Theta^* - P_-$, *(2)* $P_\Theta = \Theta P_-\Theta^* P_+$,
(3) $P_\Theta = P_+\Lambda P_-\Lambda^* + \Lambda P_\Psi \Lambda^* = P_+\Theta P_-\Theta^*$,

证明. 利用恒等式 $P_\Theta = P_+ - \Theta P_+\Theta^*$ 和 $P_- = I - P_+$，即可得到所需证明。□

定理 *5.3.* *[23,* 定理 *4.5]* 设 $\Theta_1, \Theta_2 \in H^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ 是两个内函数，且 Γ 是 $\mathcal{H}$ 中的共轭，使得 Θ_1 和 Θ 是 Γ- 对称的。有界线性算子 $A : K_{\Theta_1} \to K_{\Theta_2}$ 属于 $\mathcal{MT}(\Theta_1, \Theta_2)$ 当且仅当 $C_{\Theta_2} A C_{\Theta_1}$ 属于 $\mathcal{MT}(\Theta_1, \Theta_2)$。更准确地说， $A = A^{\Theta_1}_{,\Phi}{}^{\Theta_2} \in \mathcal{MT}(\Theta_1, \Theta_2)$ 当且仅当 $C_{\Theta_2} A C_{\Theta_1} = {}_{A^{\Theta_1,\Psi}}{}^{\Theta_2} \in \mathcal{MT}(\Theta_1, \Theta_2)$，其中

$$\Psi(z) = \Gamma\Theta_2(z)^*\Phi(z)\Theta_1(z)\Gamma = \Theta_2(z)\Gamma\Phi(z)\Gamma\Theta_1(z)^* \quad a.e.\ on\ \mathbb{T}. \tag{5.1}$$

对于共轭 $C_{\Lambda,\ \Psi}$，一般来说等式不再成立，即 $A^\Theta_{,\ \Phi}{}^\Lambda C_{\Lambda,\ \Theta} \neq C_{\Lambda,\ \Theta} A^\Lambda_{,\ \Phi^*}{}^\Theta$。在下面的定理中，我们求出这两个算子之差。

定理 5.4. 设 Λ、Θ 和 Ψ 是 Γ-对称内函数，且满足 $\Theta = \Psi\Lambda$。设 $A^\Theta_{,\Phi}{}^\Lambda \in \mathcal{T}(\Theta, \Lambda)$ 并且 $f \in K_\Theta$。则有

$$(A^{\Theta,\Lambda}_\Phi C_{\Lambda,\Theta} - C_{\Lambda,\Theta} A^{\Lambda,\Theta}_{\Phi^*}) f = (\widetilde{H}_\Lambda H_\Phi C_\Theta - \widetilde{H}_\Theta H_\Phi C_\Lambda P_\Lambda) f.$$

证明。 首先有

$$\begin{aligned} A_{\Phi}^{\Lambda}P_{\Lambda} + P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\Lambda^{*}I_{K_{\Theta}})) &= A_{\Phi}^{\Lambda}P_{\Lambda} + P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\Lambda^{*}I_{K_{\Theta}})) \\ &= A_{\Phi}^{\Lambda}P_{\Lambda} + P_{\Lambda}(\Phi(P_{\Theta} - P_{\Lambda})) \\ &= A_{\Phi}^{\Theta,\Lambda}. \end{aligned}$$

由此可得

$$A_{\Phi}^{\Lambda}C_{\Lambda,\Psi}|_{K_{\Lambda}} = A_{\Phi}^{\Lambda}C_{\Lambda} = C_{\Lambda}A_{\Phi^{*}}^{\Lambda} = C_{\Lambda,\Psi}A_{\Phi^{*}}^{\Lambda}.$$

现在，我们有

$$A_{\Phi}^{\Theta,\Lambda}C_{\Lambda,\Psi}f = A_{\Phi}^{\Lambda}C_{\Lambda,\Psi}f + P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\Lambda^{*}C_{\Lambda,\Psi}f), \tag{5.2}$$

and

$$\begin{aligned} P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\Lambda^{*}C_{\Lambda,\Psi}f) &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\Lambda^{*}C_{\Lambda,\Psi}(f_{\Psi} + \Psi f_{\Lambda})) \\ &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}\Lambda^{*}(C_{\Lambda}f_{\Lambda} + \Lambda C_{\Psi}f_{\Psi})) \\ &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}\Lambda^{*}(\Lambda\bar{z}\Gamma(f_{\Lambda}) + \Lambda C_{\Psi}f_{\Psi})) \\ &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\Lambda^{*}\Lambda\bar{z}\Gamma(f_{\Lambda}) + \Lambda^{*}\Lambda C_{\Psi}f_{\Psi})) \\ &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\bar{z}\Gamma(f_{\Lambda}) + C_{\Psi}f_{\Psi})) \\ &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(\bar{z}\Gamma(f_{\Lambda})) + \Phi\Lambda P_{\Psi}(C_{\Psi}f_{\Psi})) \\ &= P_{\Lambda}(\Phi\Lambda P_{\Psi}(C_{\Psi}f_{\Psi})) = P_{+}\Lambda P_{-}\Lambda^{*}(\Phi\Lambda(C_{\Psi}f_{\Psi})) \\ &= P_{+}\Lambda P_{-}(\Lambda^{*}\Lambda\Phi(C_{\Psi}f_{\Psi})) = P_{+}\Lambda P_{-}(\Phi(C_{\Psi}f_{\Psi})). \end{aligned}$$

因此，(5.2) 变为

$$A_{\Phi}^{\Theta,\Lambda}C_{\Lambda,\Psi}f = C_{\Lambda,\Psi}A_{\Phi^{*}}^{\Lambda}f_{\Lambda} + P_{+}\Lambda P_{-}(\Phi(C_{\Psi}f_{\Psi})). \tag{5.3}$$

同样，我们有

$$A_{\Phi}^{\Lambda,\Theta} = A_{\Phi^{*}}^{\Lambda} + \Lambda P_{\Psi}\Lambda^{*}\Phi^{*}P_{\Lambda}.$$

因此，

$$C_{\Lambda,\Psi}A_{\Phi^{*}}^{\Lambda,\Theta} = C_{\Lambda,\Psi}A_{\Phi^{*}}^{\Lambda} + C_{\Lambda,\Psi}\Lambda P_{\Psi}\Lambda^{*}\Phi^{*}P_{\Lambda}. \tag{5.4}$$

我们还有

$$P_{+}\Lambda P_{-}\Lambda^{*} + \Lambda P_{\Psi}\Lambda^{*} = P_{\Theta} = P_{+}\Theta P_{-}\Theta^{*}.$$

将 (5.3) 与 (5.4) 相减，可得

$$\begin{aligned}(A_{\Phi}^{\Theta,\Lambda}C_{\Lambda,\Psi} - C_{\Lambda,\Psi}A_{\Phi^*}^{\Lambda,\Theta})f &= P_+\Lambda P_-(\Phi(C_\Psi f_\Psi)) - C_{\Lambda,\Psi}\Lambda P_\Psi(\Lambda^*\Phi^* P_\Lambda f)\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi(C_\Psi f_\Psi)) + P_+\Lambda P_-(\Phi\Psi(C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- P_+\Lambda P_-(\Phi\Psi(C_\Lambda f_\Lambda)) - \Lambda C_\Psi P_\Psi(\Lambda^*\Phi^* f_\Lambda)\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi(C_\Psi f_\Psi + \Psi C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- P_+\Lambda P_-(\Phi\Psi(C_\Lambda f_\Lambda)) - \Lambda C_\Psi P_\Psi(\Lambda^*\Phi^* f_\Lambda)\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi(C_\Psi f_\Psi + \Psi C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- P_+\Lambda P_-(\Psi\Phi(C_\Lambda f_\Lambda)) - \Lambda C_\Psi A_{\Lambda^*\Phi^*}^{\Lambda,\Psi} f_\Lambda\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_+\Lambda P_-\Lambda^*(\Theta\Phi(C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- \Lambda C_\Psi A_{\Lambda^*\Phi^*}^{\Lambda,\Psi} f_\Lambda.\end{aligned}$$

利用定理 5.3，我们有 $C_\Psi A^{\Lambda,}_{\ \Lambda^*\Phi^*}{}^{\Psi} = A^{\Lambda,\ \Psi}_{\ \Omega} C_\Lambda$，其中

$$\Omega = \Psi\Gamma\Lambda^*\Phi^*\Lambda\Gamma = \Psi\Gamma\Phi^*\Gamma = \Psi\Phi = \Lambda^*\Theta\Phi.$$

因此，

$$\begin{aligned}(A_{\Phi}^{\Theta,\Lambda}C_{\Lambda,\Psi} - C_{\Lambda,\Psi}A_{\Phi^*}^{\Lambda,\Theta})f &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_+\Lambda P_-\Lambda^*(\Theta\Phi(C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- \Lambda C_\Psi A_{\Lambda^*\Phi^*}^{\Lambda,\Psi} f_\Lambda\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_+\Lambda P_-\Lambda^*(\Theta\Phi(C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- \Lambda A_{\Omega}^{\Lambda,\Psi} C_\Lambda f_\Lambda\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_+\Lambda P_-\Lambda^*(\Theta\Phi(C_\Lambda f_\Lambda))\\ &- \Lambda P_\Psi(\Lambda^*\Phi\Theta C_\Lambda f_\Lambda)\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - (P_+\Lambda P_-\Lambda^* + \Lambda P_\Psi\Lambda^*)(\Theta\Phi(C_\Lambda P_\Lambda f))\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_\Theta(\Theta\Phi(C_\Lambda P_\Lambda f))\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_+\Theta P_-\Theta^*(\Theta\Phi(C_\Lambda P_\Lambda f))\\ &= P_+\Lambda P_-(\Phi C_\Theta f) - P_+\Theta P_-(\Phi(C_\Lambda P_\Lambda f))\\ &= (\widetilde{H}_\Lambda H_\Phi C_\Theta - \widetilde{H}_\Theta H_\Phi C_\Lambda P_\Lambda) f.\end{aligned}$$

□

致谢
两位作者均获项目 TUBITAK 1001, 123F356 资助。

References

[1] A. Baranov、I. Chalendar、E. Fricain、J. Mashreghi 和 D. Timotin，《有界符号与截断 Toeplitz 算子的再生核论题》，J.Funct. Anal.**259**，2010年，2673–2701。

[2] H. Bercovici, 《 H^∞中的算子理论与算术》, 《数学调查与专著》第26卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1988年。[3] C. Cˆamara、J. Jurasik、K. Kli´s-Garlicka 和 M. Ptak, 非对称截断 Toeplitz 算子的刻画, 《Banach 数学分析杂志》11 (2017), 899–922。[4] M. C. Cˆamara、K. Kli´s-Garlicka、B. ˙Lanucha、M. Ptak, L^2中的共轭及其不变量, 《数学物理分析》92 (2020), 10:22。[5] M. C. Cˆamara、K. Kli´s-Garlicka、B. ˙Lanucha、M. Ptak, L^2（$\mathcal{H}$）中的共轭, 《积分方程与算子理论》92 (2020), 48。[6] C. Cˆamara、K. Kli´s-Garlicka 和 M. Ptak, 非对称截断 Toeplitz 算子与共轭, Filomat, 33 (2019), 3697–3710。[7] M. C. Cˆamara、J. R. Partington, 通过扩张后等价研究截断 Toeplitz 算子的谱性质, 《数学分析与应用杂志》433 (2016), 第2期, 762–784。[8] M. C. Cˆamara、J. R. Partington, 非对称截断 Toeplitz 算子与矩阵符号托普利茨算子, 《算子理论杂志》77 (2017), 第2期, 455–479。[9] C. Cˆamara、K. Kli´s-Garlicka 和 M. Ptak, 非对称截断 Toeplitz 算子的移位不变性与反身性, 预印本。[10] I. Chalendar、E. Fricain、D. Timotin, 关于截断 Toeplitz 算子近期成果的综述, 载于《解析函数空间中的算子理论与逼近研究进展》, 59–77, Contemp. Math., 679, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2016。[11] N. Chevrot、E. Fricain 和 D. Timotin, 复对称压缩算子的特征函数, 《美国数学会会刊》135 (2007), 2877–2886。[12] J. A. Cima、S. R. Garcia、W. T. Ross、W. R. Wogen, 截断 Toeplitz 算子: 空间同构、酉等价与相似, 《印第安纳大学数学杂志》59 (2010), 第2期, 595–620。[13] J. B. Conway, 《算子理论教程》, 《数学研究生教材》第21卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2000年。[14] E. Fricain 和 J. Mashreghi, $\mathcal{H}(b)$空间理论, 剑桥大学出版社, 2016年。[15] S. R. Garcia、J. E. Mashreghi、W. Ross, 《模型空间及其算子导论》, 《剑桥高等数学研究》第148卷, 剑桥大学出版社, 2016年。[16] S. R. Garcia 和 M. Putinar, 《复对称算子及其应用》, 《美国数学会汇刊》358 (2006), 1285–1315。[17] S. R. Garcia、W. T. Ross, 《截断托普利茨算子研究进展》, 载于: J. Mashreghi、E. Fricain（编）, 《布拉施克乘积及其应用》, Fields 研究所通讯丛书第65卷, 施普林格, 纽约, 2013年, 275–319。[18] C. Gu、B. ˙Lanucha、M. Michalska, 非对称截断 Toeplitz 算子与 Hankel 算子的刻画, 《复分析与算子理论》13, 673–684 (2019)。[19] J. Jurasik、B. ˙Lanucha, 等于零算子的非对称截断托普利茨算子, 《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学学报》A辑70 (2016), 第2期, 51–62。[20] J. Jurasik、B. ˙Lanucha, 有限维空间上的非对称截断 Toeplitz 算子, 《算子与矩阵》11 (2017), 第1期, 245–262。

[21]J. Jurasik, B. ˙Lanucha, 非对称截断 *Toeplitz* 算子的矩阵表示, 马来西亚数学科学学会通报 (2020年), https://doi.org/10.1007/s40840-020-01001-x[22] R. Khan, 广义 *Crofoot* 变换, 算子与矩阵**15** (1), 225-237 (2021年).[23] R. Khan, Y. Ameur and Jamroz Khan矩阵值截断 *Toeplitz* 算子的刻画, Rocky. Mt. J. Math. **55**(4), 1049-1061 (2025年).[24] R. Khan, A. Farooq 广义 *Crofoot* 变换及其应用, 连续算子**10**, 2022138 (2023年).[25] R. Khan and D. Timotin, 矩阵值截断 *Toeplitz* 算子：基本性质, 复分析与算子理论**12**(2018年), 997–1014.[26] B. ˙Lanucha, 秩一非对称截断 *Toeplitz* 算子，计算方法与函数论**18** (2018年), no. 2, 259–267.[27] B. ˙Lanucha,有限维空间上的秩一非对称截断 *Toeplitz* 算子，数学分析与应用杂志**454**(2017年), no. 2, 961–980.[28] B. Sz.-Nagy, C. F. Foias, H. Bercovici, L. K´erchy, 希尔伯特空间上算子的调和分析, 第二版, 施普林格, 伦敦 2010年.[29] H. Radjavi, P. Rosenthal, 不变子空间, 施普林格, 纽约 1973年.[30] D. Sarason 截断 *Toeplitz* 算子的代数性质, 算子与矩阵**1**(2007年), 491–526.[31] N. A. Sedlock, 截断托普利茨算子代数, 算子与矩阵**5**(2011年), 309–326.

Faculty of Engineering and Natural Sciences, Sabanci University Istanbul, Turkey电子邮件地址: gokhan.gogus@sabanciuniv.edu

Faculty of Engineering and Natural Sciences, Sabanci University Istanbul, Turkey电子邮件地址: rewayat.khan@gmail.com