arXiv:2603.23653v1 [math.MG] 24 Mar 2026

三角形中的周长版温特尼茨定理

Allan Berele 和 Stefan Catoiu

摘要. 过三角形形心 G的一条可变直线将三角形分成两部分，各部分的长度占周长的比例构成闭区间 $[m, 1-m]$，其中 m 介于 0 和 1/2 之间。我们证明，对所有三角形取 m 的值域为区间 $(3/10,\ 4/9]$；当三角形按比例缩放并趋近于 5-4-1 三角形，且取其相应的中等长度中线时，该值趋近于 3/10；而等边三角形以及过 G 且平行于各边的直线则可取到 4/9。该结果是经典温特尼茨定理的周长版本。经典定理断言，对于三角形，若考虑的是面积比而非周长比，则 $m = 4/9$；所有三角形及其过 G 且平行于各边的直线均可取到该值。。

温特尼茨定理断言，经过平面凸集形心 G的可变直线所确定的两个区域，各自至少占总面积的 4/9；当凸集是三角形且经过 G的直线平行于一条边时，恰好达到下界 4/9。见 Blaschke [1]。

在他们于 1951 年首次出版的著作 [6], 中，Yaglom 和 Boltyanskii 提出了温特尼茨定理的周长版本，认为这是一个值得研究的课题。然而，或许因为这个问题极其困难，此后一直没有人尝试解决它。

本文旨在证明三角形情形下温特尼茨定理的周长类比；我们将看到，这同样是一个有趣的问题。

等边三角形的情形。温特尼茨定理的经典证明分为两部分：证明该定理对所有三角形都成立，以及将问题从凸集归约到三角形。三角形的温特尼茨定理可简化表述如下：在任意三角形中，经过形心的可变直线所截出的面积中，较小的一部分最小为总面积的 4/9；当且仅当该直线平行于一条边时取到此最小值。仿射

日期：2026年3月24日。
2010 数学主题分类。主要：52A10；52A38；次要：51M04；51M25；51N20。
关键词和短语。温特尼茨定理。

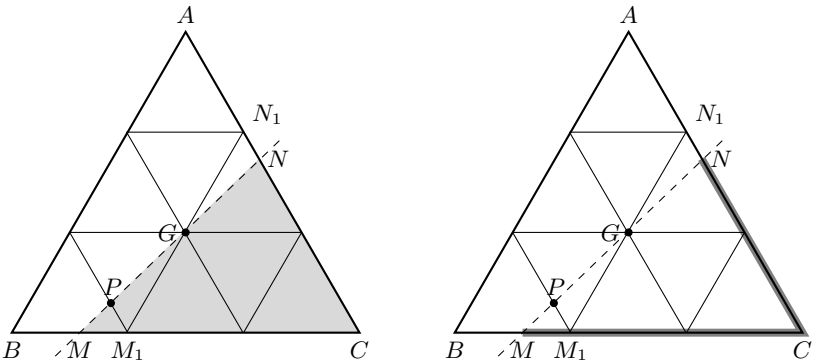

图1. 等边三角形的温特尼茨定理及其周长类比的证明。[1]

不变性使得证明温特尼茨定理对所有三角形成立，等价于证明它对等边三角形成立，如图1（左）所示，其中平行于各边的直线将三角形分成九个全等的小三角形。设等边三角形 ABC 的边长为 a，面积为 $\sigma = [ABC]$。根据等边三角形的对称性，并沿用图中的记号，不失一般性，我们可以假设可变直线 MN 经过形心 G，并如图所示与周长相交。为证明该定理，只需证明 $\frac{4}{9}\sigma \le [CMN] \le \frac{1}{2}\sigma$，或 $[CM_1N_1] \le [CMN] \le [CBB']$，其中 B'（图中未示出）是 AC的中点。我们只证明这两个不等式中的第一个；第二个的证明类似。事实上，

$$\begin{aligned}[CMN] - [CM_1N_1] &= ([GMM_1] + [GNCM_1]) - ([GNN_1] + [GNCM_1]) \\ &= [GMM_1] - [GNN_1] \\ &= ([PMM_1] + [GPM_1]) - [GNN_1] \\ &= [PMM_1] \ge 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等式来自三角形 GPM_1 和 GNN_1 关于 G的对称性。当且仅当 $M = M_1$ 和 $N = N_1$时，不等式取等号。

等边三角形的温特尼茨定理的周长类比指出：过形心的可变直线从此类三角形截出的最短周长部分的长度为周长的 4/9；当且仅当该直线平行于一条边时，才能达到 4/9。其类似的证明见图1（右图），只需证明$\frac{4}{9}\cdot(3a) \le CM + CN \le \frac{1}{2}\cdot(3a)$，也就是说，$CM_1 + CN_1 \le CM + CN \le CB + CB'$。我们只证明两个类似不等式中的第一个。为此，我们计算

$$\begin{aligned}(CM+CN) - (CM_1+CN_1) &= (MM_1+CM_1+CN) - (CM_1+CN+NN_1) \\ &= MM_1 - NN_1 = MM_1 - PM_1 \ge 0,\end{aligned}$$

其中，该不等式在三角形 PMM_1 中等价于 $\angle P - \angle M \ge 0$，而这可由 $\angle M \le 60^\circ$ 和 $\angle M_1 = 60^\circ$得出。当 $\angle M = 60^\circ$时，同一不等式取等号，即当 $M = M_1$ 和 $N = N_1$时。

由于周长情形中不存在仿射变换，上述等边三角形温特尼茨定理的周长类比不容易推广为适用于所有三角形的温特尼茨定理周长类比。因此，需要新的思路。特别是，证明这一推广的探索构成了整篇文章的目标。＊　＊　＊

我们的主要结果是将上述等边三角形温特尼茨定理的周长类比推广到所有三角形，具体如下。

定理1（任意三角形中的周长温特尼茨定理）。 在任意三角形中，经过形心的可变直线截出的最短周长部分占周长的比例介于 *3/10* 和 *4/9* 之间。

当三角形的尺度趋近于 *5-4-1*退化三角形，且所取中线对应于中间边时，比例下界 *3/10* 可以任意逼近。等边三角形中，经过形心且平行于边的直线可以达到比例上界 *4/9*。见图*2*。

请注意，与温特尼茨定理的面积情形不同，后者中 $m = 4/9$ 适用于所有三角形；在定理1的周长情形中，m 则遍及一个完整区间，其一个端点为$4/9$。尤其是，m 取决于三角形的形状，这也解释了为何难以将上述针对等边三角形的周长温特尼茨定理证明推广为适用于所有三角形的证明。

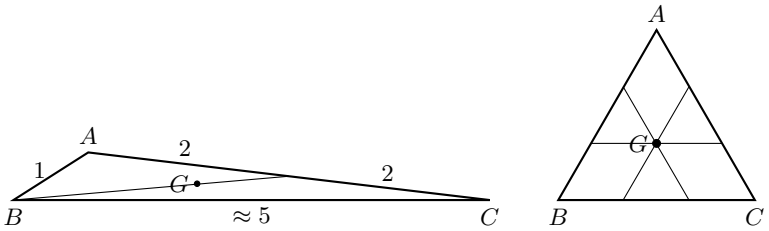

图2。定理1中的极值三角形，以及所有经过形心的弦 G；这些弦分别将周长约分成约 3/10 和恰好 4/9。

定理1的证明见最后一节；这并非简单地将上述针对等边三角形的证明推广到所有三角形。证明分为两部分。首先，在定理4中，我们用边长表示经过三角形形心的可变直线所截得的周长较小部分。然后，使用多元微积分方法，确定该表达式占周长的比例的取值范围。

设 MN 是一条经过三角形 ABC 形心 G 的可变截线，该三角形的边长为 $a = BC$、$b = AC$、$c = AB$，半周长为 s。若 θ 是直线 MN 的倾角，那么 MN 在 ABC 上所确定的两个区域中任一区域的面积占总面积的比例，是 θ 的连续函数，因此其值域是闭区间 $[m, 1-m]$，其中 m 介于 0 和 1/2 之间。经典温特尼茨定理断言 $m = 4/9$。在本文中，w 表示同一条可变直线从周界上截出的两段中较短一段的长度，而 $m = w/(2s)$ 表示 w 所占周长的比例。

* * *

在其于 [4], 1945年发表的文章中，Neumann证明了两个定理。第一个定理是对温特尼茨定理的重新证明，显然并不知道温特尼茨的工作。第二个定理是温特尼茨定理针对连续质量分布的如下推广：对于平面中的每个紧凸集和每个连续质量分布，都存在一点 P，使得每条经过 P的直线都将该集合分成两部分，且每一部分都包含该集合总质量的至少1/3。此外，1/3这一界是最优的。Neumann定理和温特尼茨定理都由格林鲍姆于 [3] 1960年推广到 n维，其中1/3被替换为 $1/(n+1)$，4/9被替换为$(n/(n+1))^n$。Neumann指出，当质量沿周长均匀分布时，对于平面凸集可以得到优于1/3的结果，并在没有依据的情况下猜想，此时的最佳界应为$(3-\sqrt{5})/2 \approx .382$。据我们所知，诺伊曼猜想至今仍未解决，而其向 n 维的推广——格林鲍姆问题（目前尚无猜想值）——是凸几何中最重要的未解决问题之一。在格林鲍姆之后，关于这一主题的大多数后续工作都集中于其两个结果中较大的（温特尼茨）一端，这一领域通常被统称为格林鲍姆不等式。例如，温特尼茨定理最近由Shintar和Yaskin在 [5], 年推广，并由Bose、Carmi、Hurtado和Morin在 [2]年推广。

回到这里的主要结果，我们的常数 3/10 小于 1/3，这表明平面上凸集的形心不能扮演诺伊曼定理与猜想中点 P 的角色。这或许就是为什么，在这一领域已有百年历史的过程中，我们关于三角形温特尼茨定理的自然周长类比一直未被发现。

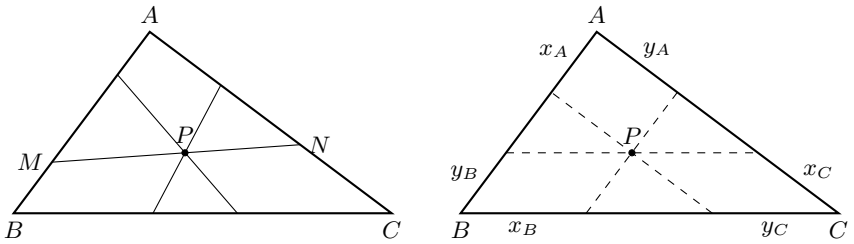

图3。（左）一个三角形，经过内部点 P、相对于三个顶点的三条周长 W 线。（右）同一个三角形，以及从 P 向各边作的平行线。

1. 周长温特尼茨线。

给定一个顶点为 A 的角及其内部点 P，若一条经过 P 且与角的两边分别交于 M 和 N 的直线使 $AM+AN$ 取得最小值，则称其为一条*W*线（相对于该角或顶点 A）。注意，当 MN 平行于其中一边时，数值 $AM+AN$ 从无穷大开始减小，达到W线所取得的最小值后，又在 MN 平行于角的另一边时增大至无穷大。

下面这个关于 W 线的引理，对于证明其余所有结果都至关重要。

引理 2. (i) 给定三角形 ABC 及其内部一点 P，一条经过 P、使被其截出的两部分之一的周长达到最大值或最小值的直线，要么是劈线，要么是相对于某个角的 *W* 线。(ii) 给定一个角 $\angle A$，设 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 是沿角两边方向的单位向量，且 $P = x\vec{u}+y\vec{v}$ 是一个内部点。那么，经过 P 的 *W* 线与角的两边分别交于 $(x+\sqrt{xy})\vec{u}$ 和 $(y+\sqrt{xy})\vec{v}$。特别地，该 *W* 线从角中截出的周长为 $x+y+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$。

证明。 (i) 根据 W线的定义，这一部分显而易见。(ii) 过 P 且与角的两边分别交于 $s\vec{u}$ 和 $t\vec{v}$ 的直线，其方程为 $x/s+y/t=1$。为求 $s+t$ 的极值，我们使用拉格朗日乘子，并令

$$F(s,t,\lambda)=s+t+\lambda\left(\frac{x}{s}+\frac{y}{t}-1\right).$$

于是 $F_s=1-\lambda x/s^2$ 和 $F_t=1-\lambda y/t$。[2]由于它们均为零，故 $s^2/t^2=x/y$。结合 $x/s+y/t=1$ 可得 $s=x+\sqrt{xy}$ 和 $t=y+\sqrt{xy}$。□

给定三角形 ABC的一个内部点 P，令 w_A 为过 P的可变弦 MN所对应的和 $AM+AN$ 的最小值，其中 M位于 AB上， N位于 AC上。根据引理 2，当弦 MN 是相对于 A过 P 的一条 W线（如图3左图所示）或一条劈线时，该最小值可取到。对 w_B 和 w_C也有类似定义。令 $w=w(P)$表示过 P的可变直线所截得的周长的最小部分的长度。

引理 2 的第一个应用将与点 P 相关联的数 w、 w_A、 w_B、 w_C 联系起来。

引理 3. $w=$最小值$\{w_A,w_B,w_C\}$。

证明。 这是因为 w 的定义集合包含 w_A、 w_B 和 w_C 的定义集合之并，所以 $w\le\min\{w_A,w_B,w_C\}$。不失一般性，设 w 是由经过 P、且 M_0 在 AB 上、N_0 在 AC 上的弦 M_0N_0 所确定的周长中最短的一段。需要考虑两种情况。若 $w=AM_0+AN_0$，则$w\ge w_A\ge\min\{w_A,w_B,w_C\}\ge w$，而首末两项相等迫使

结论成立。否则， $w = M_0B + BC + CN_0$，因此 $w = \min\{MB + BC + CN \mid M \in AB,\ N \in AC,\ P \in MN\} = 2s -$最大值 $\{AM + AN \mid M \in AB, N \in AC, P \in MN\}$。根据引理 2(i)，最大值（因而前述最小值）不可能由 W线取到；它们在 M_0N_0 是从 B 或 C 引出的劈线时取到。不失一般性，设 M_0N_0 是劈线 CC'。于是 $w = C'B + BC$ 属于 w_B 的定义集合，因此 $w \geq w_B \geq \min\{w_A, w_B, w_C\} \geq w$；同样，首末两项相等迫使结论成立。□

2. 定理1的证明。

从三角形的形心向各边作平行线，会将各边三等分。因此，采用图3（右图）中的记号，当 $P = G, x_B = y_C = a/3, x_C = y_A = b/3$，且 $x_A = y_B = c/3$ 时，根据引理 2(ii)，分别相对于A， B， C处角的 W 线，将有限长度 $b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3$，$a/3 + c/3 + 2\sqrt{ac}/3$，$a/3 + b/3 + 2\sqrt{ab}/3$ 与三角形外延角的无限周长分隔开来。

引理 2 的第二个应用，是针对特定三角形的以下周长温特尼茨定理。

定理4 (特定三角形中的周长版温特尼茨定理)。 采用上述记号，每个三角形 ABC 均满足以下性质：

(i) *If* $a \geq b \geq c$ *then*

$$w_A = \begin{cases} b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3, & \text{for } b \leq 4c, \\ c + b/2, & \text{for } b > 4c, \end{cases}$$

$$w_B = \begin{cases} a/3 + c/3 + 2\sqrt{ac}/3, & \text{for } a \leq 4c, \\ c + a/2, & \text{for } a > 4c, \end{cases}$$

$$w_C = a/3 + b/3 + 2\sqrt{ab}/3.$$

(ii) 若 $a \geq b \geq c$，则 $w_A \leq w_B \leq w_C$。特别地， $w = w_A$。

(iii) $w \leq 4(a + b + c)/9$，当且仅当 $a = b = c$ 时取等号。

证明。 (i) 根据引理 2，当 $x_A + \sqrt{x_A y_A} = c/3 + \sqrt{bc}/3 \leq c$且 $y_A + \sqrt{x_A y_A} = b/3 + \sqrt{bc}/3 \leq b$时， $w_A = b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3$。第一个不等式两边除以 c 等价于$b/c \leq 4$，而第二个不等式两边除以 b则得到真不等式 $c/b \leq 4$。因此， $w_A = b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3$ 恰好当 $b \leq 4c$时成立。当 $b > 4c$时，根据同一引理， $w_A = \min\{c + b/2, b + c/2\} = c + b/2$，其中 $c + b/2$ 和 $b + c/2$ 分别是由从 B 和C引出的中线所确定的、包含 A的周长部分的长度。这就证明了 w_A的表达式。 w_B 和 w_C 的表达式可类似证明，但条件 $a > 4b$ 对于 w_C 是不可能的，因为它意味着 $a > 4c$，取平均后得到 $a > 2(b + c)$，这与三角形不等式矛盾。

(ii) 根据第(i)部分和引理 3， $w = \min\{w_A, w_B, w_C\}$ 的表达式取决于 $4c$ 相对于 a 和 b 的位置。需要考虑三种可能的情形。

情形 *1.* 如果 $4c \geq a$，那么 $4c \geq b$，因此根据第(i)部分， $w_A = b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3$和 $w_B = a/3 + c/3 + 2\sqrt{ac}/3$。本情形下的结论由假设 $a \geq b \geq c$beingequivalentto $w_A \leq w_B \leq w_C$得出。

情形 *2.* 若 $a > 4c \geq b$，则 $w_A = b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3$ 且 $w_B = c + a/2$。为了证明$w_A \leq w_B$，即 $b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3 \leq c + a/2$，这等价于 $\sqrt{4bc} \leq 2c - b + 3a/2$，因为 $4c < a$，只需证明 $\sqrt{ab} \leq 2c - b + 3a/2$。根据均值不等式，只需证明 $(a + b)/2 \leq 2c - b + 3a/2$，由此可得 $3b \leq 4c + 2a$。这是成立的，因为 $b \leq 4c$ 且 $2b \leq 2a$。不等式 $w_B \leq w_C$ 可 $c + a/2 \leq a/3 + b/3 + 2\sqrt{ab}/3$,

化简为 $6c+a \le 2b+4\sqrt{ab}$。为此，由于 $6c+a < 3a/2+a = 5a/2$ 且$6b \le 2b+4\sqrt{ab}$，只需证明 $5a/2 \le 6b$，即 $a \le 12b/5$。事实上， $a \le b+c \le b+b < 12b/5$。

情况*3*. 如果 $b > 4c$，那么也有 $a > 4c$，因此 $w_A = c+b/2$ 和 $w_B = c+a/2$，由此可得 $w_A \le w_B$。为了证明结论，只需证明 $w_B \le w_C$；与情形 2 一样，这等价于 $6c+a \le 2b+4\sqrt{ab}$。为此，由于 $6c+a < 3b/2+a$ 和 $6b \le 2b+4\sqrt{ab}$，只需证明 $3b/2+a \le 6b$，即 $a \le 9b/2$。事实上，$a \le b+c \le b+b/4 < 9b/2$。

(iii) 不失一般性，我们可以假设 $a \ge b \ge c$。当 $b \le 4c$时，由均值不等式，$w = b/3+c/3+2\sqrt{bc}/3 \le 2(b+c)/3$，且当且仅当$b = c$时取等号。此外，$2(b+c)/3 \le 4(a+b+c)/9$等价于 $b+c \le 2a$，这是真的，因为 $a \ge b$， c。那么，等式 $w = 4(a+b+c)/9$ 恰在 $a = b = c$时成立。当 $b > 4c$时， $w = c+b/2 < 4(a+b+c)/9$ 等价于 $8a > b+10c$，这是真的，因为 $a \ge b$和 $7a \ge 7b > 28c > 10c$。□

定理4(i)的证明表明，当 $a \ge b \ge c$时，相对于 C 的W线总是该三角形的一条弦；相对于 A的W线是弦，当且仅当 $b \le 4c$；相对于 C 的W线是弦，当且仅当 $a \le 4c$。

定理4与三角形中的经典温特尼茨定理有若干不同之处。例如，定理的第(ii)部分表明，与经典版本不同， w 所占的周长比例取决于边。该定理的第(iii)部分表明，与经典版本中不等式对所有三角形都取等号不同，在周长情形下，只有等边三角形才能取等号。第(i)部分则表明，与经典温特尼茨定理不同，在周长情形下，数值 w_A、 w_B和 w_C 不再对所有三角形都相等。

（最后一个结论需要进一步解释。在经典温特尼茨三角形面积定理中，对于三角形 ABC, w_A是可变直线 MN 经过 G且 M 位于 AB 上、 N 位于 AC上时，三角形 AMN的最小面积；对于 w_B 和 w_C也有类似定义。令 σ 表示该三角形的面积，令 w 表示一条经过形心的可变直线将三角形分割成的两部分中较小部分的面积。采用这一记号，具体三角形 ABC 的经典温特尼茨定理断言 $w = w_A = w_B = w_C = 4\sigma/9$，而达到 w_A， w_B， w_C 的三条弦恰好是从 G 向各边作的平行线。）

现在可以开始证明引言中陈述的定理1了。回顾一下，一条经过三角形 ABC 形心 G的可变直线所截出的最短周长部分占周长的比例是一个数 $m = w/(2s)$，其中$0 < m \le 1/2$。定理4中已经计算出了 w 关于各边的表达式。定理1断言，当遍历所有三角形时， m 的取值范围是区间（$3/10$， $4/9$]。

定理*1*的证明。由定理4(iii)可知， m 的最大值为4/9，且当三角形为等边三角形，且其经过 G的W 线为从 G 向各边作出的平行线时，最大值可以达到。

考察最小值时，不失一般性且不妨经过相似变换，假设 $a+b+c = 1$ 和 $a \ge b \ge c > a-b$，其中最后一个不等式是三角形不等式。代入 $a = 1-b-c$后，四元不等式可简化为

$$(1-c)/2 \ge b \ge c > 1/2-b, \tag{1}$$

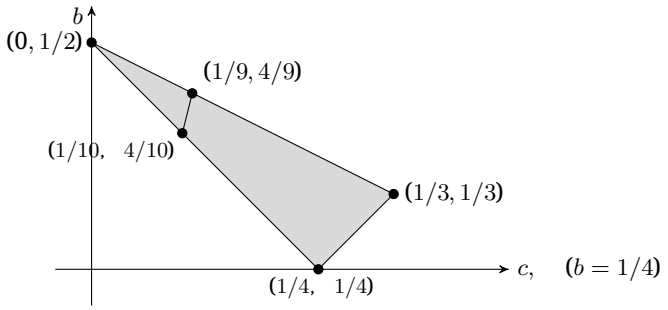

图4. 定理1证明中的区域。

并且不改变定理4中 $w = w_A$ 的表达式。于是，我们要对函数

$$F(b,c) = w = \begin{cases} b/3 + c/3 + 2\sqrt{bc}/3, & \text{for } b \le 4c, \\ c + b/2, & \text{for } b > 4c, \end{cases}$$

在由条件 (1) 确定且如图4所示的区域的闭包上。采用标准的多元微积分方法求得 F 在此区域上的极值，其中将该区域视为由直线 $b = 4c$ 划分成的两个子区域的并集；在这条直线上， F 的表达式会发生变化。注意到对于所有 $(b,\ c)$，偏导数 $F_b(b,\ c)$ 均不为零，这说明 F 在每个子区域内都没有内部临界点。容易证明， F 在两个子区域边界上的六条开线段上均无临界点，因此可推知 $F = w = m$ 的极值只能出现在角点处。计算 F 在两个子区域的五个角点处的值可知， F，因而 m 在 $(b,\ c)$ 趋近于 $(4/10,\ 1/10)$ 时，存在一个无法取到的最小值 3/10；也就是说，当 $a : b : c$ 趋近于 5 : 4 : 1 时如此；并且我们再次发现， m 在 $(b,\ c) = (1/3,\ 1/3)$ 处取得最大值 4/9，也就是说，对于 $a = b = c$。

根据定理4(i)，当 $b = 4c$ 时，经过 AB 和 AC、并穿过 G 且达到 $w = w_A$ 的直线是从 B 引出的中线，而相对于 A，这是一条 W 线。□

定理1的证明实现了本文所述的目标。我们以一个自然的猜想结束本研究：定理1中的下界 3/10 可从三角形推广到平面凸集，而显然，上界 4/9 则不能推广。

周长温特尼茨猜想。 一条可变直线经过紧平面凸集的形心时，将其周长截出的最短周长部分占周长的比例介于 *3/10* 与 *1/2* 之间。对于趋近于 *5-4-1* 退化三角形的一系列三角形，以及对应于中间边的中线，下界 *3/10* 可以无限逼近。对于中心对称凸集，任何经过其形心的直线都能达到上界 *1/2*。

参考文献

[1] Blaschke, W.（1923）《微分几何讲义 *II*：仿射微分几何》。 柏林：Springer。[2] Bose, P.、Carmi, P.、Hurtado, F.、Morin, P.（2011）。广义温特尼茨定理。*J. Geom.* **100**：29–35。[3] Grümbaum, B.（1960）。利用超平面划分质量分布和凸体。*Pacific J. Math.* **10**（4）：1257–1261。[4] Neumann, B. H.（1945）。利用超平面划分质量分布和凸体。*J. Lond. Math.Soc.***20**：226–237。

[5] Shintar, A.、Yaskin, V.（2021年）。温特尼茨定理的推广及其离散版本。*Proc.Amer. Math. Soc.* **149**（7）：3089–3104。[6] Yaglom, I. M.、Boltyanskii, V. G.（1960）。《凸图形》。Paul J. Kelly 和 Lewis F. Walton 译。纽约：霍尔特、莱因哈特与温斯顿出版社。

德保罗大学数学系，伊利诺伊州芝加哥 60614电子邮箱：
aberele@depaul.edu

德保罗大学数学系，伊利诺伊州芝加哥 60614电子邮箱：
scatoiu@depaul.edu