arXiv:2603.23832v1 [math.SP] 25 Mar 2026

定位算子特征值的精确估计及其在面积律中的应用

ALEKSEI KULIKOV 和 MARTIN DAM LARSEN

摘要。我们研究定位算子 $S_{A,\ B} = P_A \mathcal{F}^{-1} P_B \mathcal{F} P_A$ 的特征值，其中 $\mathcal{F}$ 是傅里叶变换，$A = cA_0$，$B = B_0$，这里的固定集合 A_0，$B_0 \subset \mathbb{R}^d$ 以及大参数 $c > 0$。对于特征值 $|\{n : \varepsilon < \lambda_n(A, B) \leq 1 - \varepsilon\}|$ 的计数函数，若其中一个集合是有限个互不相交的平行多面体之并，我们得到一个精确的一致上界；在一般情形下，我们得到的上界与猜想的最优上界仅相差一个对数因子。这些界被用于估计具有极低正则性的函数 f 的迹 $\mathrm{Tr}\ f(S_{A,\ B})$，尤其是在前一种情形下建立了增强面积定律。

1. 引言

1.1. 时频定位算子。对于可测集 $A \subset \mathbb{R}^d$，由 P_A 表示到 A 的投影，由 Q_A 表示到 A 的傅里叶投影

$$Q_A = \mathcal{F}^{-1} P_A \mathcal{F},$$

其中 $\mathcal{F}$ 是傅里叶变换

$$\mathcal{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx,$$

其逆变换为

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi)\, d\xi.$$

对于一对可测集 $A,\ B \subset \mathbb{R}^d$，由 $S_{A,\ B}$ 表示时频定位算子

$$S_{A,B} = P_A Q_B P_A.$$

这不是一个 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的 n-负定自伴算子，其积分核 1

$$S_{A,B}(x, y) = 1_A(x) \check{1}_B(x - y) 1_A(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

如果 A 和 B 的测度有限，那么$S_{A,\ B}$ 是一个迹类算子，且 $\mathrm{Tr}(S_{A,\ B}) = |A||B|$。特别地，它是紧算子，因此有一列特征值

$$1 > \|S_{A,B}\| = \lambda_1(A, B) \geq \lambda_2(A, B) \geq \ldots \geq 0.$$

我们指出以供日后参考：显然，如果我们将 A 和 B修改零测集，$S_{A,\ B}$ 不会改变。

可以证明，交换 A和 B后，特征值保持不变，也就是说$\lambda_n(A,B) = \lambda_n(B,A)$。 $\lambda_1(A,B)$严格小于 1 这一事实说明，不存在一个非零函数，使它及其傅里叶变换的支撑集都具有有限测度。这被称为 Benedicks 和 Amrein–Berthier 的不确定性原理[2, 3]。本文将研究这些特征值分布的更精细性质。

通常考虑的情形是，集合 A和 B 是某些固定集合 A_0, B_0的缩放。因此，对于较大的参数 c，我们将假设 $A = cA_0$ 和 $B = B_0$ 。请注意，我们没有对 B进行缩放，因为通过仿射变量变换，可以将其转移到对 A 的缩放上，而不改变特征值。更一般的仿射变量变换将在后文的证明中发挥作用。

本文旨在研究特征值分布 $\lambda_n(cA_0,\ B_0)$。我们预计，特征值会呈现相变：前 $\approx c^d|A_0||B_0|$ 个特征值非常接近 1，随后只有 $\asymp c^{d-1}$ 个远离 0 和 1 的中间特征值，其后特征值便会极快地衰减至 0。谱的中间部分通常称为骤降区。在一维情形下，当 A_0 和 B_0 是固定区间时，这一图景尤为清晰；此时，特征值的精确极限行为和非常精细的一致估计已为人所知 [6, 10, 18, 21, 22],另见下文第2节。

在高维情形中，随着集合 $A_0,\ B_0$ 的几何开始发挥重要作用，我们所知甚少。为描述这些结果，先引入特征值的计数函数。

$$
\begin{aligned}
N_\varepsilon(A,B) &= |\{n : \lambda_n(c) > \varepsilon\}|,\\
\Lambda^+_\varepsilon(A,B) &= \left|\left\{n : 1-\varepsilon > \lambda_n(c) > \frac{1}{2}\right\}\right|,\\
\Lambda^-_\varepsilon(A,B) &= \left|\left\{n : \frac{1}{2} \geq \lambda_n(c) > \varepsilon\right\}\right|,\\
\Lambda_\varepsilon(A,B) &= \Lambda^+_\varepsilon(A,B) + \Lambda^-_\varepsilon(A,B) = |\{n : 1-\varepsilon \geq \lambda_n(c) > \varepsilon\}|.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

我们选择这种严格不等式与非严格不等式的排列方式，以确保对于 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，我们有-

$$
N_{1-\varepsilon}(A,B) = N_{1/2}(A,B) - \Lambda^+_\varepsilon(A,B), \quad N_\varepsilon(A,B) = N_{1/2}(A,B) + \Lambda^-_\varepsilon(A,B). \tag{1.3}
$$

当然，对于所有应用而言，不等式是严格还是非严格并不重要。

先前结果在对边界 ∂A_0 和 ∂B_0作出足够强假设的条件下，给出了 $N_\varepsilon(cA_0, B_0)$ 和 $\Lambda_\varepsilon(cA_0, B_0)$ 的上界。特别是，Sobolev [26] 为固定的 $\varepsilon > 0$ 建立了 $N_\varepsilon(cA_0, B_0)$ 的两项渐近公式。此外，对于 $N_\varepsilon(cA_0, B_0)$ 和 $\Lambda_\varepsilon(cA_0, B_0)$，当 $c \to \infty$ [12, 14, 17, 23] 时，还有若干一致估计。

在这项工作中，我们对 $\Lambda_\varepsilon(cA_0,\ B_0)$ 建立了估计：一方面，这些估计优于此前所有已获得的估计，且在某些情形下是尖锐的；另一方面，它们对集合 $A_0,\ B_0$ 所要求的几何条件要弱得多，也更自然。

我们的结果形式取决于对集合 A_0、B_0 所作的假设。如果它们都是轴平行盒，我们便可以利用一维情形下已知的估计，建立关于 $\Lambda_\varepsilon^{\pm}(cA_0,\ B_0)$ 的精确双边估计。如果其中一个集合是平行多面体的不交有限并，而另一个集合满足一个非常弱的边界正则性条件，那么我们就能得到 $\Lambda_\varepsilon^{\pm}(cA_0,\ B_0)$ 的尖锐一致上界。这尤其使我们能够为非常粗糙的函数f求出 $\mathrm{Tr} f(S_{A,\ B})$ 的两项渐近展开。对于一般情形，我们得到的界与猜想的界至多相差一个对数因子。现在，我们将按一般性逐步增强的顺序介绍所考虑的情形。

1.2. 两个盒子的情形。 本节考虑情形 $A = [0, a]^d, B = [0, b]^d$。由于变量彼此分离，算子 $S_{A,B}$ 分解为张量幂 $S_{A,B} = \left(S_{[0,a],[0,b]}\right)^{\otimes d}$。特别地，特征值仅取决于乘积 $c = ab$，因此 $S_{A,B}$ 的特征值就是算子$S_{[0,a],[0,b]}$ 的 d 个特征值的所有乘积，并按重数计数。利用这一点，我们可以通过简单的组合论论证，将一维计数函数的所有估计推广到高维。

定理 1.1。 考虑 $A = B = [0, 1]^d, d \geq 1$ 和 $c \geq 2$。存在 $\alpha_d \geq 4$ 使得

$$\Lambda_\varepsilon^{\pm}(cA, B) \lesssim c^{d-1} \log(\tfrac{1}{\varepsilon}) \log\left(\frac{\alpha_d\, c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) \tag{1.4}$$

对所有 $\alpha_d^{-c} < \varepsilon < 1/2$ 一致成立。此外，若 $\varepsilon < c^{-\alpha_d}$，则还有

$$\Lambda_\varepsilon^{\pm}(cA, B) \gtrsim c^{d-1} \log(\tfrac{1}{\varepsilon}) \log\left(\frac{\alpha_d\, c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) \tag{1.5}$$

如果 $\varepsilon \leq \alpha_d^{-c}$，那么不存在大于 $1 - \varepsilon$ 的特征值，并且

$$\Lambda_\varepsilon^{-} \asymp \left(\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{\log\left(\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{c}\right)}\right)^d. \tag{1.6}$$

如果 A 和 B 是边长不一定相等的轴平行盒，也可以采用相同的张量积结构。这样，通过相同的组合论论证，我们得到以下稍微更一般的结果。

命题 1.2. 设 $d \geq 1$ 和 $I_1, \ldots, I_d$ 和 $J_1, \ldots, J_d$ 是固定的闭区间和有限区间。令 $A = I_1 \times \cdots \times I_d$ 和 $B = J_1 \times \cdots \times J_d$。那么定理 *1.1* 的结论仍然成立，但 α_d 现在还依赖于区间 (I_k)、(J_k)。

1.3. 一般情形。 对于一般集合 A, B，算子 $S_{A,B}$ 不再分解为张量积，而我们结果的精确性将取决于 A 和 B的几何形状。具体而言，我们将假设它们是不交的平行多面体有限并，或者它们是有界的，且其边界具有有限上闵可夫斯基含量。

定义 1. 若集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 满足

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{|\{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < r\}|}{2r} < \infty.$$

众所周知，对于足够正则的 ∂A，极限 $\lim_{r \to 0^+} \frac{|\{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, \partial A) < r\}|}{2r}$ 恰好等于 A的周长。这里的“足够正则”包括具有 Lipschitz（或 C^1）边界的任意有界集合，参见 [1, 定理 2.106]。注意，由于当$r \to 0^+$时 $2r$ 趋于 0，任何具有有限上闵可夫斯基含量的集合都具有零勒贝格测度。

此外不难看出，一般而言，如果 Γ 具有有限的上 Minkowski 维数，那么 Γ 必定有界。对于 $d \geq 2$，集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ 的边界有界，当且仅当 A 或 $\mathbb{R}^d \backslash A$ 有界；如果 $d = 1$，那么 A 或 $\mathbb{R}^d \backslash A$ 有界，或者它们各自都包含一条射线。无论哪种情况， A 具有有限测度的唯一可能是 A有界，因此我们总是假设所有集合都有界。

定义 2。 如果存在一个可逆的 $d \times d$ 矩阵 M和一个向量 $b \in \mathbb{R}^d$ 使得 $A = M[0,1]^d + b$, 我们就称集合 A 为平行六面体。

定理 1.3. 假设 A 是一个有界集合，其边界具有有限上闵可夫斯基内容，并且 B 是有限个内部互不相交的平行多面体的并，且 A和 B 的测度均为正。存在 $\alpha = \alpha(d, A, B) \geq 4$，使得对于所有 $c \geq 2$ 和$\alpha^{-c} < \varepsilon < \frac{1}{2}$，我们都有

$$\Lambda_\varepsilon(cA, B) \lesssim c^{d-1} \log(\tfrac{1}{\varepsilon}) \log\left(\frac{\alpha\, c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right). \tag{1.7}$$

对于 $\varepsilon \leq \alpha^{-c}$，不存在大于 $1-\varepsilon$ 的特征值，并且

$$\Lambda_{\varepsilon}^{-}(cA, B) \asymp \left(\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{\log\left(\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{c}\right)} \right)^{d}. \tag{1.8}$$

注 1.4. 如果我们限制在轴平行盒子的有限并上，就不必假设它们的内部互不相交，因为我们可以通过有限细分使它们互不相交。

注 1.5. 我们只需假设 A 和 B 的测度为正，以确保 (1.8) 中存在下界，因为如果 A 或 B 的测度为零，那么 $S_{A,B} = 0$ 以及所有特征值都为零。

定理 1.6. 假设 A 和 B 是边界具有有限上闵可夫斯基内容的有界集合，并且 A 和 B 的测度都为正。存在 $\alpha = \alpha(d, A, B) \geq 4$，使得对于所有 $c \geq 2$ 和 $\alpha^{-c} < \varepsilon < \frac{1}{2}$，我们都有

$$\Lambda_{\varepsilon}(cA, B) \lesssim c^{d-1} \log(\tfrac{1}{\varepsilon}) \log^{2}\left(\frac{\alpha\, c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right).$$

对于 $\varepsilon \leq \alpha^{-c}$，不存在大于 $1-\varepsilon$ 的特征值，并且

$$\Lambda_{\varepsilon}^{-}(cA, B) \asymp \left(\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{\log\left(\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{c}\right)} \right)^{d}.$$

从定理 1.3 推广到定理 1.6 时，我们必须在 $\log\left({}^{\alpha\, c}{}_{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right)$ 这一项上再加一个平方。虽然我们认为实际上并不会出现这种情况，但目前还无法消除这一项。

注 1.7。 在这两个结果中，我们也可以让 A 和 B 随 c 变化，只要它们始终有界、内部包含半径有一致正下界的球，并且对于所有 $0 < r < 1$，其边界在有限上闵可夫斯基内容的定义中都有一致界。我们将这些常规推广留给感兴趣的读者。

与我们证明定理 1.1 类似的论证已见于文献，例如 [12] 和 [17]。然而，这两篇文献都依赖于 Karnik、Romberg 和[5]

Davenport [18], 的估计，而这些估计并非在一维的所有情形下都能提供现有最强界，详见下文第2节。特别是在 $\varepsilon < \alpha_d^c$ 这一情形下，我们得到的最差结果为

$$\Lambda_\varepsilon^-(cA, B) \lesssim \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^d,$$

其上界为 $\left(\log c \log \frac{1}{\varepsilon}\right)^d$，也就是说，他们至少损失了一个 $(\log c)^d$ 因子。

对于一般情形，我们关于边界具有有限上闵可夫斯基内容的假设，比文献中此前出现的所有假设都弱，尤其是 [14, 23], 参见 [1, 定理 2.104] 中的最大阿尔福斯正则边界假设。此外，在所有情形下，我们的估计都至少比这些论文所得的界好一个对数因子，尤其是在定理 1.3 的设定中是尖锐的。在下面的证明策略中，我们将重点介绍使我们得以取得这一改进的关键新估计。

定理 1.3 情形下此前最好的估计出自 Israel 和 Mayeli [17]。他们使用波包基，得到了如下形式的界

$$\Lambda_\varepsilon(cA, B) \lesssim_\delta c^{d-1}(\log c)^{2+\delta}$$

在 $\varepsilon \sim \frac{1}{c^s}$ 固定 $s \geqslant 0$ 的情形下，对任意 $\delta > 0$ 均成立，因此与我们的结果仅相差一个 $(\log c)^\delta$ 因子。在证明中，他们依赖 Gevrey 类，也就是紧支撑函数的傅里叶变换可能具有的衰减。因此，由于 Beurling– Malliavin 定理 [4], ，即使在这一情形下，也无法采用他们的方法达到我们的结果。与我们的定理 1.6 相比，近期的工作 [15] 也是如此。

1.4. 证明策略。 我们所有论证的第一步都是采用 $S - S^2$ 技巧。当且仅当 $\varepsilon(1-\varepsilon) < \lambda(1-\lambda)$ 时，我们有$\varepsilon < \lambda < 1 - \varepsilon$ 。对于时频定位算子 $S_{A,\ B}$ 我们有

$$S_{A,B} - S_{A,B}^2 = P_A Q_B Q_B P_A - P_A Q_B P_A Q_B P_A = P_A Q_B (1 - P_A) Q_B P_A = P_A Q_B P_{A^c} Q_B P_A,$$

其中 A^c 是 A 的补集。后一个表达式等于 T^*T ，其中 $T = P_{A^c} Q_B P_A$。因此，我们需要从上方估计 T 中大于 $\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ 的奇异值的数量。

接下来，我们要将集合 A 和 B 划分成更小的集合，并将 T 写成算子之和

$$T = \sum_{k,l} P_{A^c} Q_{B_l} P_{A_k}.$$

在最初的论证中，我们按照 [18] 中的方法，对这个和应用了 Weyl 不等式。不过，在那里，作者将 T 分解为仅含 3 个算子的和，因此6

他们只需将 ε除以 3 即可。在我们的情形中，项数的量级为 c^d，因此这种方法仅在 $\varepsilon < \frac{1}{c^d}$ 时得到了精确结果。我们将不再应用 Weyl–不等式，而是采用 [14] 中的 p- Schatten准范数方法。

设 $K : H \to H$ 是从希尔伯特空间 H 到其自身的紧算子。设 $\sigma_1(K) \geq \sigma_2(K) \geq \ldots \geq 0$ 为其奇异值序列。对于 $0 < p < \infty$，我们定义其 p-Schatten 拟范数为

$$\|K\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(K)^p.$$

若 K 不紧，则定义 $\|K\|_p = \infty$。

对于 $p = \frac{1}{2 \log \frac{1}{\delta}}$，其中 $0 < \delta < \frac{1}{2}$，我们有

$$\|K\|_p^p \geq \sum_{k:\sigma_k(K)\geq\delta} \sigma_k(K)^p \geq \frac{1}{\sqrt{e}} |\{k : \sigma_k(K) \geq \delta\}|, \tag{1.9}$$

其中第二步用到了 $\delta^p = \frac{1}{\sqrt{e}}$。因此，大于 δ–的奇异值至多有 $\sqrt{e}\|K\|_p^p$ 个。注意，对所有 $0 < \delta < \frac{1}{2}$，都有 $0 < p < 1$。关于 $0 < p < 1$ 的 p-Schatten 拟范数，关键的非平凡事实 [5, 定理 11.5。9] 是它们满足以下次可加性

$$\|K_1 + K_2\|_p^p \leq \|K_1\|_p^p + \|K_2\|_p^p. \tag{1.10}$$

因此，只需估计算子 $P_{A^c} Q_{B_l} P_{A_k}$ with$p = \frac{1}{\log(\varepsilon^{\frac{1}{(1-\varepsilon)}})}$ 的 p-Schatten 拟范数。

为清晰起见，我们仅描述在 $B = [0,1]^d$ and A 是具有有限上闵可夫斯基内容的边界的集合时所用的分解。在这种情况下，我们不划分 B。A 的划分 (A_k) 将由 A 内部的惠特尼分解（分解为二进立方体）得到。我们保留惠特尼分解中边长大于某个阈值 2^{-D} 的所有立方体，并用包含在边长为 2^{-D} 的立方体中的集合覆盖其余部分。由此得到 (A_k)。根据 ∂A 具有有限上闵可夫斯基内容这一假设，我们可以估计边长为 2^t 的立方体数量不超过 $C2^{-(d-1)t}$，其中 C 为常数。

对于形如 $P_U Q_V P_W$ 的单项，很容易看出，如果扩大 U 或 W，那么奇异值只会增大。对于分割中的立方体 A_k，根据惠特尼分解的性质，我们将 A^c 扩大为 $(2A_k)$ 的补集，该补集包含 A^c。对于处于阈值处的立方体，我们将 A^c 扩大为整个 $\mathbb{R}^d$，并将 A_k 扩大为包含它且边长为 2^{-D} 的对应立方体。

将 $(2A_k)^c$ 进一步划分为 $2^d - 1$ 个区域后，我们可以将对 $P_{(2A_k)^c}Q_B P_{A_k}$ 和 $Q_B P_{A_k}$ 的分析归结为研究一维算子的张量积

$$I_r = Q_{[0,1]}P_{[0,r]} \quad \text{and} \quad J_r = P_{(-\infty,-2r]\cup[2r,+\infty)}Q_{[0,1]}P_{[-r,r]}.$$

注意， I_r 就是通常的时频定位算子，而 J_r 则来自惠特尼分解中的分离性。对于这些算子，我们给出以下奇异值估计。

引理 1.8. 存在 $\tau > 0$、 $C > 0$和 $r_0 > 0$ ，使得对所有 $r > r_0$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\sigma_n(I_r) \le \begin{cases} 1, & n < 10r, \\ Ce^{-\tau n}, & n \ge 10r, \end{cases}$$
$$\sigma_n(J_r) \le Ce^{-\tau n}.$$

σ_n（I_r）的估计由下文陈述的定理 2.5 得出（许多先前的出版物中也明确或隐含地包含了该结果，参见例如 [7, 24]），但我们将给出一个受 [21]启发的自足复分析证明。

σ_n（J_r）的估计证明利用了 J_r的核的精确结构。具体而言，可以将$J_r = \sum_{n=0}^{\infty} J_{r,n}$ 分解为秩 2 算子$J_{r,n}$ 之和，其中$\|J_{r,n}\| \lesssim 2^{-n}$，由此即可得出结果。值得一提的是，我们最初的论证更为复杂，采用了 Karnik、Romberg 和 Davenport 在 [18]中使用的低位移秩结构及佐洛塔廖夫数估计。

对于 $\sigma_n(J_r)$ 的估计不依赖于 r ，这是相较于 [14] 中论证而言我们证明中的关键新要素。归根结底，这源于我们在惠特尼分解中使用了分离条件，而此前的工作并未使用该条件。

进行类似于定理 1.1 证明的组合论论证，利用 (1.10) 将所有求和项合并，并为惠特尼分解仔细选择阈值 D ，我们便得到 $\varepsilon > \alpha^{-c}$ 的所需估计。对于 $\varepsilon \le \alpha^{-c}$ ，我们可以直接与两个盒子的情形进行比较，因为这正是边界项与体积项成正比的情形。

1.5. 面积律。 我们关注一般函数 $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ 的迹 $\mathrm{Tr} f(S_{A,B})$。对于紧自伴算子 $T : H \to H$ ，其特征值为 $1 \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge 0$，对应的归一化特征向量为 v_1， v_2，...，我们定义 $f(T)(v) := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\langle v, v_n\rangle v_n$。当 $\mathrm{Tr} f(T) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$ 绝对收敛时，该算子属于迹类。为方便起见，我们始终假设 $f(0) = 0$ ，因为我们考虑的所有算子

都具有无限维核。首先，我们建立一些结果，以保证 $f(T)$ 属于迹类。

对于函数 $f:[0,1] \to \mathbb{C}$，我们令 $M_0 f(t) = \sup_{0\le x\le t} |f(x)|$，并令 $M_1 f(t) = \sup_{1-t\le x\le 1} |f(1) - f(x)|$。

定义 3. 考虑函数 $f: [0,1] \to \mathbb{C}$。如果存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^\delta \frac{M_0 f(\varepsilon) \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon \left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d} \, d\varepsilon < \infty. \tag{1.11}$$

注意，对于任意相对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 可容许迹类函数 f，必然有 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$。

定理 1.9. 若 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是有界集合，且 f 相对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 是迹类可容许的，则 $f(S_{A,B})$ 属于迹类。

定理 1.10. 设 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ 满足 $S_{A,B}$ 是紧集，且它们的内部非空。若 $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ 满足：$|f(x)|$ 在 0 附近非递减，且 $f(S_{A,B})$ 属于迹类，则 f 相对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 是迹类可容许的。

现在我们转向定理 1.1 和定理 1.3 中一致界的主要应用，即在$c \to \infty$ 的极限下，为极其一般的函数 f计算 $\mathrm{Tr}\ f(S_{cA,\ B})$ 的两项渐近公式。作为输入，我们使用相应的多项式 f公式。对于 $d = 1$，Landau 和 Widom [22]的工作给出了这一公式。高维情形则困难得多。该公式由 Widom [29] 提出猜想，后来 Sobolev [26] 针对足够规则的集合 A 和 B建立了这一公式。对于本文的背景，我们依据 Fournais、Seiringer、Solovej 和第二作者近期工作 [9] 中对 Sobolev 结果的精确推广。研究证明，对于多项式 f 以及具有有限测度和有限周长的集合 A， B

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\, f(S_{cA,B}) \\ &\quad = c^d |A||B| f(1) + c^{d-1} \log(c) I(A,B) \int_0^1 \frac{f(\theta) - f(1)\theta}{\theta(1-\theta)} \, d\theta + o(c^{d-1}\log(c)), \end{aligned} \tag{1.12}$$

如 $c \to \infty$，其中边界系数为 $I(A,\ B)$。若 A 和 B 是具有 C^1 边界的集合，则

$$I(A,B) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial A} \int_{\partial B} |\nu_A(x) \cdot \nu_B(p)| \, d\mathcal{H}^{d-1}(p) \, d\mathcal{H}^{d-1}(x),$$

其中， ν_A 和 ν_B 分别表示 A 和 B 的内法向量， $d\mathcal{H}^{d-1}$ 是$d-1$维豪斯多夫测度。在有限周长情形下，描述该系数需要借助几何测度论中的工具。详情请参阅 [9] 。

对我们的工作而言，需要注意的是，如果一个集合的边界具有有限的上闵可夫斯基含量，那么该集合具有有限周长，因此（1.12）在我们的情形下适用。这是因为任何具有有限上闵可夫斯基含量的集合都具有有限的 $d-1$ 维豪斯多夫测度（例如参见下文引理 4.5），并且根据如下事实：如果一个集合的边界具有有限的 $d-1$ 维豪斯多夫测度，那么它具有有限周长 [1, 命题 3.62]。请注意，即使在这种情况下，因子 $I(A,B)$ 也只能借助几何测度论来定义。

自 Sobolev 的原始结果以来，人们投入了大量精力，将两项渐近公式（1.12）从多项式推广到更粗糙的谱函数 [27, 28]。这部分动机来自物理学。在这一领域，Gioev 和 Klich [11]发现，迹 $\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})$，其中 $f(\theta) = -\theta\log(\theta) - (1-\theta)\log(1-\theta)$ 或相关的 R´enyi 熵函数，直接出现在自由费米子系统基态下的双分割纠缠熵表达式中。在这一语境下，定义域 B 表示费米子算子的费米海，而 A 表示空间子系统。由于熵函数满足 $f(1) = 0$，公式（1.12）表示 $\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) \sim c^{d-1}\log(c)$，这在物理学文献中被称为增强面积定律。相关背景请参见 [8]。

此前，Sobolev 采用所涉及算子的统一 Schatten 准范数估计进行了延拓论证 [28], ，这使得 f 具有 H¨older 型奇异性成为可能。借助定理 1.1 和定理 1.3 给出的更精确的谱界，我们能够将这一结果大幅推进，尤其是得到了关于函数 f 的本质上必要且充分的条件。

定义 4. 考虑函数 $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{C}$。若 f 满足以下条件，我们称其为面积律可容许：

$$\int_0^1 \frac{M_0 f(\varepsilon) + M_1 f(\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon < \infty. \tag{1.13}$$

定理 1.11。 设 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个有界集合，其边界具有有限上闵可夫斯基内容；设 B 是有限个内部互不相交的平行多面体的并。假设 f 对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 既是面积律可容许的，也是迹类可容许的。存在 $c_0(f,A,B)$ 和 $C(A,B)$，使得对于 $c > c_0(f,A,B)$，我们有

$$|\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) - c^d|A||B|f(1)| \le C(A,B)c^{d-1}\log(c)\int_0^1 \frac{M_0 f(\varepsilon) + M_1 f(\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon. \tag{1.14}$$

如果另外 n f 对所有 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上黎曼可积，则我们还有

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) \\ &\quad = c^d|A||B|f(1) + c^{d-1}\log(c)I(A,B)\int_0^1 \frac{f(\theta)-f(1)\theta}{\theta(1-\theta)}\,d\theta + o(c^{d-1}\log(c)), \end{aligned} \tag{1.15}$$

如 $c \to \infty$。

注 1.12. 对我们来说， $C(A,B)$ 不依赖于 f，这一点至关重要。另一方面，$c_0(f,A,B)$ 可以且确实会依赖于 f，具体来说，依赖于 $L^2(\mathbb{R}^d)$的迹类可容许性定义中的积分。

对于 $d=1$，每个 f，只要它是面积律可容许的，就自动是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的迹类可容许函数。另一方面，对于每个 $d \geq 2$，都存在一个函数，它是面积律可容许的，但不是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的迹类可容许函数，而且在 0 附近单调。因此，根据定理 1.10，对于具有非空内部的任意集合 A， $B \subset \mathbb{R}^d$，我们有 $\operatorname{Tr} f(S_{A,B}) = \infty$，尽管 f 是面积律可容许的。

例 1. 令 $f(\theta) = \frac{1}{\log(\frac{2}{\theta})^{3/2}\theta}$ 那么， f 在 $[0,1]$, 上单调递增，它是面积律可容许的，但对于任意 $d \geq 2$，它都不是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的迹类可容许函数。

对于一般集合 A， B 我们的论证给出的上界多出一个对数因子。

定理 1.13. 设 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ 为边界具有有限上闵可夫斯基内容的有界集合。假设 f 对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$既是面积律可容许的，也是迹类可容许的。存在 $c_0(f,A,B)$ 和 $C(A,B)$，使得对于 $c > c_0(f,A,B)$，我们有

$$|\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) - c^d|A||B|f(1)| \leq C(A,B)c^{d-1}\log(c)^2\int_0^1 \frac{M_0 f(\varepsilon) + M_1 f(\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon.$$

1.6. Tr 的低阶项。如果 A 和 B 都是有限个轴平行盒的并，那么在最简单的非平凡情形$f(\theta) = \theta^2$中，我们可以进一步展开。我们进行这项计算，部分是出于数学上的好奇，同时也是因为从物理学角度来看，似乎有人对 $\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})$ 展开式中的更多项感兴趣，尤其是当 f为熵函数时。例如，Kitaev 和 Preskill [19] 基于对纠缠熵的物理理解提出，$\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})$ 展开式中 $d=2$的常数阶项应当包含拓扑信息。虽然我们无意为他们的主张提供严谨的数学基础，也无意验证这些主张，但我们仍认为，为一般函数 f求出更多项是一个有趣的数学问题。

定理 1.14。设 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 为有限个轴平行盒的并。迹 $S^2_{A,\ B}$可以通过四种标准算术运算、乘方、取对数以及指数积分函数 $\mathrm{E}_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}$，用构成 A 和 B 的盒子的边长来计算。

—

遗憾的是，如果 A 和 B 分别由 n 个和 m 个盒子组成，那么我们的程序会产生约 $9^d n^2 m^2$ 项，因此在实践中相当难以实施。因此，我们只在 $A = [0, c]$, $B = [0, 1]$ 的情况下进行显式计算。

定理 1.15. 下面的展开式成立：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr} S^2_{[0,c],[0,1]} \\
&\quad = c - \frac{\log(c)}{\pi^2} - \frac{1+\gamma+\log(2\pi)}{\pi^2} + \left(\frac{2}{\pi}c\left(\mathrm{Si}(2\pi c) - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos(2\pi c)}{\pi^2} + \frac{\mathrm{Ci}(2\pi c)}{\pi^2}\right) \\
&\quad = c - \frac{\log(c)}{\pi^2} - \frac{1+\gamma+\log(2\pi)}{\pi^2} \\
&\qquad - \frac{\cos(2\pi c)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)! - (2n-1)!}{(2\pi c)^{2n}} - \frac{\sin(2\pi c)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)! - (2n)!}{(2\pi c)^{2n+1}},
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Si(t)} = \int_0^t {}_{\text{正弦函数}(x)\,x}\ dx$ 是正弦积分，$\mathrm{Ci(t)} = -\int_t^\infty {}_{\text{余弦函数}(x)\,x}\ dx$ 是余弦积分，而 γ 是欧拉–马歇罗尼常数。该级数是渐近的，也就是说，如果我们在两个求和中都取前 N 项，那么误差将为 $O\left({}_{c^{2N+2}}^{1}\right)$。

——

注意，迹 $S^2_{[0,c],[0,1]}$ 中的振荡直到第 $O({}_{c^2}^{1})$ 项才开始出现。我们的论证表明，它们有可能早在第 $O(1)$ 项就出现，但结果是，第 $O(1)$ 项和第 $O({}_{c}^{1})$ 项中的振荡项都相互抵消了。对于这一现象，我们没有先验解释。

1.7. 单项渐近。 如果我们只关注展开式 (1.15) 中的第一项，那么对 A, B 和 f 的条件可以大幅放宽，尤其是无需对 ∂A 和 ∂B 的几何形状作任何假设。

由于对于任意有限测度的 A, B，$\mathbf{Tr} S_{A,B} = |A||B|$ 都是有限的，因此对于任意满足 $|f(\theta)| \le C\theta, \theta \in [0, 1]$ 的函数 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$，我们有 $f(S_{A,B})$ 属于迹类。此外，如果假设 f 在 1 处连续，那么我们可以为 $\mathbf{Tr} f(S_{cA,B})$ 建立一个单项渐近公式。

定理 1.16。 设 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 为具有有限测度的集合。若 $f\colon\ [0, 1] \to \mathbb{C}$ 在 1 处连续，并且对某个 $C > 0$ 满足 $|f(\theta)| \le C\theta$，则

$$\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) = c^d |A||B| f(1) + o(c^d), \tag{1.16}$$

当 $c \to \infty$ 时。

尽管条件 $|f(\theta)| \leq C\theta$ 可能显得限制性较强，但在这种一般性下，它实际上是最优条件。

命题 1.17. 给定一个函数 f，满足 $\lim_{x\to 0^+} |f_{(x|} = \infty)$，以及一个具有有限正测度的集合 $B \subseteq \mathbb{R}$，则存在一个有限测度集合 $A \subseteq \mathbb{R}$，使得 $f(S_{A,B})$ 不是迹类。

特别地，这适用于熵函数 $f(\theta) = -\theta \log(\theta) - (1-\theta)\log(1-\theta)$。

另一方面，若集合 A 和 B 有界，则可以将假设 $|f(\theta)| \leq C\theta$ 替换为：f 有界，且对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 是迹类可容许的，正如定理 1.11 中所述。

定理 1.18. 设 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是有界集合，并假设 f 有界，对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 是迹类可容许的，且 f 在1处连续。那么

$$\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) = c^d|A||B|f(1) + o(c^d),$$

当 $c \to \infty$ 时。

2. 一维算子的先前结果

本节将汇集关于$S_{A,\ B}$特征值分布的先前结果，考虑 A 和 B 为一维区间这一最简单的情形，并将其重述为便于我们使用的形式。通过重标度，我们总可以假设$A = [0, c]$, $B = [0, 1]$ 从而得到$S_{A,\ B}$的一列特征值 $(\lambda_n(c))$。关于这些特征值行为的首个结果由 Slepian [25] 发现，并由 Landau 和 Widom [22]严格证明。

定理 2.1。 对于所有有界区间 A、$B \subseteq \mathbb{R}$ 以及所有固定的 $0 < a < 1$，有

$$N_a(A, B) = |A||B| + \tfrac{1}{\pi^2}\log\left(\tfrac{1-a}{a}\right)\log(|A||B|) + o(\log(|A||B|)),$$

当 $|A||B| \to \infty$ 时。

请注意，该结果与 [22]中的表述略有不同，因为我们对傅里叶变换采用了不同的归一化方式。以下部分结果也同样如此。

他们的证明先对所有幂次 $n \in \mathbb{N}$ 建立了 $\operatorname{Tr} S_{A,B}^n$ 的两项渐近展开（甚至误差项为 $O(1)$），然后用多项式逼近区间的示性函数。然而，由于他们的论证在 n 上的一致性极差，因此在 a 上的一致性也极差，几乎不可能用他们的估计

来界定 $N_a(A,B)$ 和 $\Lambda_a(A,B)$，其中 a 变化。因此，当 a 变化时，针对这些数的一致估计得到了大量研究。Karnik、Romberg 和 Davenport [18] 最近取得了其中一项最佳成果，同时具备完全一致、精确且显式的特点。

The定理 2.2。对于所有 $0<\varepsilon<1/2$ 以及所有有界区间 A 和 B，我们有 e

$$\Lambda_\varepsilon(A,B)\le\frac{2}{\pi^2}\log(50|A||B|+25)\log\left(\frac{5}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right)+7.$$

注意，在这一结果中，对 c 以及 $\varepsilon(1-\varepsilon)$ 的依赖与定理 2.1 中一样是对数级的，同时所有常数都完全明确。特别是，将定理 2.2 与定理 2.1 结合起来，便足以证明我们关于 $\mathrm{Tr}f(S_{A,\ B})$ 两项渐近展开的增强面积定律版本

$$\mathrm{Tr}f(S_{A,B})=f(1)|A||B|+\frac{1}{\pi^2}\log(|A||B|)\int_0^1\frac{f(\theta)-\theta f(1)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta+o(\log(|A||B|))$$

对于极其一般的函数 f，精确表述见定理 1.11。

对于范围很广的 ε 取值，这一结果本质上是尖锐的。不过，当 ε 的取值非常小（在 $|A||B|$ 中几乎呈指数级小）时，可以得到更好的界。对于满足 $n<c$ 的特征值 $\lambda_n(c)$，第一作者 [21] 已证明了这一点。

定理 2.3。存在数 c_0、B、η、$\mu>0$，使得对于 $c>c_0$ 和 $n<c$ –B对数$^2(c)$，我们有

$$\exp\left(-\mu\frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}\right)<1-\lambda_n(c)<\exp\left(-\eta\frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}\right). \tag{2.1}$$

对于 $n>c$，不仅可以得到更好的估计，Bonami 和 Karoui [6] 甚至还得到了 $\lambda_n(c)$ 的渐近公式，且相对误差极小。

定理 2.4. 对于所有 $n\ge c\ge 10$，我们有

$$\lambda_n(c)=\exp\left(-\frac{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}\int_{\Phi\left(\frac{c}{n+\frac{1}{2}}\right)}^1\frac{1}{tE(t)^2}dt+O(\log(n))\right),$$

其中 $E(t)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-t^2x^2}{1-x^2}}dx$ 是第二类椭圆积分，而 Φ 是函数 $t\to{}^{t}_{E\ t()}$ 的反函数。

利用椭圆积分在 0 和 1 附近已知的渐近式，我们可以将其改写为以下形式（粗略得多），其优点是不涉及任何特殊函数。

定理 2.5。 存在数 $c_0, B, \eta, \mu > 0$，使得对于 $c > c_0$, $2c > n > c + B$对数$^2(c)$，我们有

$$\exp\left(-\mu\frac{n-c}{\log(\frac{2c}{n-c})}\right) < \lambda_n(c) < \exp\left(-\eta\frac{n-c}{\log(\frac{2c}{n-c})}\right)$$

而对于 $n \geq 2c$，我们有

$$\exp\left(-\mu n \log\left(\frac{n}{c}\right)\right) < \lambda_n(c) < \exp\left(-\eta n \log\left(\frac{n}{c}\right)\right).$$

为了实际应用这些估计，我们还希望将其改写为计数函数的形式。注意，对于 $N_{1-\varepsilon}([0,1],\ [0,c])$ 的下界以及 $N_\varepsilon([0,1],\ [0,c])$ 的上界，我们分别可以将定理 2.3 和定理 2.5 与定理 2.2 和定理 2.1 结合起来，从而得到对所有 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ 都成立的估计。对于其余的界，我们没有可用的定理 2.2 的类似结果，因此它们仅在 $\varepsilon < c^{-A}$ 且常数 A 足够大时成立。具体而言，我们有以下六个断言。设 κ，$c_1 > 0$ 为足够大的常数，$c_2 > 0$ 为足够小的常数，且这些常数与 c 和 ε 无关，并假设 $c > c_1$。

每当 $2^{-\kappa c} < \varepsilon < \frac{1}{2}$，我们就有

$$N_{1-\varepsilon}([0,c],[0,1]) \geq c - c_1 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right) \tag{2.2}$$

and

$$N_\varepsilon([0,c],[0,1]) \leq c + c_1 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right). \tag{2.3}$$

对于 $2^{-\kappa c} < \varepsilon < c^{-A}$，我们也有互补界

$$N_{1-\varepsilon}([0,c],[0,1]) \leq c - c_2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right) \tag{2.4}$$

and

$$N_\varepsilon([0,c],[0,1]) \geq c + c_2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right). \tag{2.5}$$

对于 $\varepsilon \leq 2^{-\kappa c}$，我们有

$$N_{1-\varepsilon}([0,c],[0,1]) = 0$$

and

$$N_\varepsilon([0,c],[0,1]) \asymp \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{4\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{c}\right)}.$$

作为示例，我们从定理 2.1、2.2 和 2.3 推导出 (2.2)，其余五种情形留给感兴趣的读者。

对于 $\frac{1}{100} \le \varepsilon < \frac{1}{2}$，由定理 2.1 可得 $N_{1-\varepsilon}([0,c],[0,1]) \ge N_{99/100}([0,c],[0,1]) = c + O(\log c)$。接下来注意，若 $n_c = [c]$，其中 $[x]$ 是不大于 x的最大整数，并且 c 足够大，则 $\frac{1}{3} \le \lambda_{n_c}(c) \le \frac{2}{3}$。事实上，由定理 2.1 可得$N_{1/3}([0,c],[0,1]) = c + \log(2)\pi^2 \log(c) + o(\log(c))$，且 $N_{2/3}([0,c],[0,1]) = c - \log(2)\pi^2 \log(c) + o(\log(c))$，因此 n_c 不满足 $\lambda_n(c) > \frac{2}{3}$，但满足 $\lambda_n(c) \ge \frac{1}{3}$。

如果 $c^{-A} \le \varepsilon < \frac{1}{100}$，那么 n_c 属于集合 $\{n : \varepsilon < \lambda_n(c) \le 1-\varepsilon\}$。还要注意，这个集合显然是一个整数区间。因此我们有

$$N_{1-\varepsilon}([0,1],[0,c]) \ge n_c - |\{n : \varepsilon < \lambda_n(c) < 1-\varepsilon\}| = n_c - \Lambda_\varepsilon([0,1],[0,c]).$$

应用定理 2.2，并取足够大的 c，由 $n_c \ge c$ 可得

$$N_{1-\varepsilon}([0,1],[0,c]) \ge c - 100\log(c)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

如果 $c^{-A} \le \varepsilon$且 c足够大，那么 $\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right) \ge \frac{1}{2}\log(c)$，所以我们至多需要将常数加倍。事实上，在 [21] 中，定理 2.3 的证明采用了相同的论证，适用范围宽得多，ε最大可达 $\varepsilon = \exp(-c^{7/8})$。

如果 $0 < \varepsilon < c^{-A}$，那么首先 $c_1 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right) \ge B\log^2(c)$。因此，只需证明对于 $n = \left[c - c_1\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right)\right] + 1$，(2.1) 式右边至多为 ε（如果 $n \le 0$，那么所需估计自动成立）。对于足够大的 c_1，显然有 $n < c - \frac{c_1}{2}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right)$。因此，只需证明对于足够大的 c_1，我们有

$$\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \le \eta \frac{c_1 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right)}{2\log\left(\frac{2c}{c_1\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right)}\right)}.$$

两边除以 $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$并代入 $t = \frac{\kappa c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$，得到一个不等式

$$1 \le \frac{\eta c_1}{2}\frac{\log(t)}{\log(t) - \log\log(t) - \log(\frac{c_1}{2})},$$

这在 $c_1 > \frac{2}{\eta} + 2$ 时总是成立。对于 (2.4)，我们则需要证明含有 μ 和 c_2 的类似表达式至多为 1；为此，我们将使用 $\log\log(t) \le \log(t)/2$，例如。

3. 两个盒子的情形

本节将证明定理 1.1。命题 1.2 的证明类似，因此我们将其证明留给感兴趣的读者。

我们先给出下面这个简单的观察，尽管如此，它仍足以用于证明：

$$N_{a^{1/d}}([0,c],[0,1])^d \le N_a([0,c]^d,[0,1]^d) \le N_a([0,c],[0,1])^d. \tag{3.1}$$

事实上，如果 d 个数的乘积大于 a，且每个数都介于 0 和 1 之间，那么每个数也都大于 a，由此可得一个上界。另一方面，如果每个数都大于 $a^{1/d}$，那么它们的乘积就大于 a。

因此，我们可以应用上一节中关于 $N_a([0,c],[0,1])$ 的估计。注意，对于 $2^{-\kappa c} < \varepsilon < \frac{1}{2}$，我们总有 $\log\binom{1}{\varepsilon}\log\left(\frac{\kappa c}{\log\binom{1}{\varepsilon}}\right) = O(c)$。在取 d 次方时，我们将使用下面这个简单的不等式：若 $y = O(x)$，则 $(x+y)^d = x^d + O(x^{d-1}y)$。我们只会在 $x = c$ 的情形下使用它。

我们先根据 (3.1) 估计 $N_{1/2}([0,c]^d,\ [0,1])$。得到

$$N_{2^{-1/d}}([0,c],[0,1])^d \le N_{1/2}([0,c]^d,[0,1]^d) \le N_{1/2}([0,c],[0,1])^d.$$

根据定理 2.1，$N_{1/2}([0,c],\ [0,1])$ 和 $N_{2^{-1/d}}([0,c],\ [0,1])$ 都是 $c + O(\log\ c)$。将其提升至 d 次幂，得到

$$N_{1/2}([0,c]^d,[0,1]^d) = c^d + O(c^{d-1}\log c). \tag{3.2}$$

首先，我们将证明 (1.4)。为此，我们将分别使用 $N_{1-\varepsilon}([0,c],\ [0,1])$ 的下界和 $N_\varepsilon([0,c],\ [0,1])$ 的上界。对于 $\Lambda_\varepsilon^+([0,c]^d,\ [0,1]^d)$，我们得到

$$\begin{aligned}\Lambda_\varepsilon^+([0,c]^d,[0,1]^d) &= N_{1/2}([0,c]^d,[0,1]^d) - N_{1-\varepsilon}([0,c]^d,[0,1]^d)\\ &\le N_{1/2}([0,c]^d,[0,1]^d) - N_{(1-\varepsilon)^{1/d}}([0,c],[0,1])^d.\end{aligned}$$

根据伯努利不等式，我们知道 $(1-\varepsilon)^{1/d} \le 1 - \frac{\varepsilon}{d}$，因此有 $N_{(1-\varepsilon)^{1/d}}([0,c],\ [0,1]) \ge N_{1-\varepsilon/d}([0,c],\ [0,1])$。代入我们的界，对于 $2^{-\kappa c} < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 可得

$$\Lambda_\varepsilon^+([0,c]^d,[0,1]^d) \le c^d + O(c^{d-1}\log c) - c^d + O\left(c^{d-1}\log\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log(\frac{d}{\varepsilon})}\right)\right).$$

消去 c^d，注意到第一个大O记号被第二个大O记号控制，并且根据如下事实：对于$\varepsilon < \frac{1}{2}$，我们有 $\log\binom{d}{\varepsilon} \asymp \log\binom{1}{\varepsilon}$，因此在必要时将$\kappa$增大为 α_d后，即可得到所需的上界。

对于 $\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,\ [0,1]^d)$，通过类似的推理可得 $2^{-\kappa c}<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 。

$$\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,[0,1]^d)\le c^d+O\left(c^{d-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\kappa c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right)\right)-c^d+O(c^{d-1}\log c).$$

再次消去 c^d，并注意到第一个大O记号占主导地位，我们便得到所需结果。

为了证明 (1.5)，我们将改为对 $N_{1-\varepsilon}([0,c],\ [0,1])$ 使用上界，并对 $N_\varepsilon([0,c],\ [0,1])$ 使用下界。为此，仅有不等式 $(x+y)^d=x^d+O(x^{d-1}y)$ 是不够的；我们还需要在 $0\le y\le\frac{1}{2}x$ 时满足 $(x-y)^d\le x^d-c_dx^{d-1}y$ 和 $(x+y)^d\ge x^d+c_dx^{d-1}y$。注意，只要有必要，我们可以通过减小 (2.4) 和 (2.5) 中的常数 c_2^- 来实现 $y\le\frac{1}{2}x$。其余论证与 (1.4) 的证明基本相同，唯一的变化是我们必须明确写出不等式，而不是使用大O记号；此外，在 $\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,\ [0,1])$ 的情形下，我们使用 $\log\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/d}}\right)$ 而不是 $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$，但由于二者成正比，最终得到的结果相同。

剩下的情况是 $\varepsilon\le 2^{-\kappa c}$。首先，由于 (3.1) 右端为零，因此不存在大于$1-\varepsilon$的特征值。对于 $\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,[0,1]^d)$，我们得到

$$\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,[0,1]^d)=N_\varepsilon([0,c]^d,[0,1]^d)-N_{1/2}([0,c]^d,[0,1]^d).$$

对于上界，我们只需舍去第二项，并估计

$$\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,[0,1]^d)\lesssim\left(\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{4\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{c}\right)}\right)^d.$$

对于下界，首先取某个 $\gamma_d>0$；若 $\varepsilon>\gamma_d^{-c}$，则可使用前一种情况中 $\varepsilon=2^{-\kappa c}$ 的下界（必要时增大 κ），该下界与当前情况下的下界成比例，并利用 $\Lambda_\varepsilon^-(A,B)$ 关于 ε的显然单调性。

最后，在 $\varepsilon\le\gamma_d^{-c}$ 的情况下，我们先粗略地写出

$$\Lambda_\varepsilon^-([0,c]^d,[0,1]^d)=N_\varepsilon([0,c]^d,[0,1]^d)-N_{1/2}([0,c]^d,[0,1]^d)\ge N_\varepsilon([0,c]^d,[0,1]^d)-2c^d$$

并利用 (3.1) 估计第一项，得到

$$N_\varepsilon([0,c]^d,[0,1]^d)\ge\left(\frac{\delta\log\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/d}}\right)}{\log\left(\frac{4\log\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/d}}\right)}{c}\right)}\right)^d$$

对于某个 $\delta>0$。若对于足够小的 γ_d，$\varepsilon\le\gamma_d^{-c}$ 成立，那么这与所需的下界成正比，且也至少为 $4c^d$，因此我们可以约去已有的 $-2c^d$。

4. 一般情形

本节将证明定理 1.3 和定理 1.6。我们先证明第一个定理，因为它仍包含了我们的大部分技巧，同时稍微容易一些。因此，设 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个正测度、有界且边界具有有限上闵可夫斯基含量的集合，并设 $B = \cup_n B_n$ 是有限个内部互不相交的平行多面体的并。目前我们也只考虑 $\varepsilon > \alpha^{-c}$ 的情形，并在本节末尾讨论另一种情形。

我们从 $S - S^2$ 技巧开始。我们有

$$S_{cA,B} - S_{cA,B}^2 = P_{cA}Q_B P_{cA^c} Q_B P_{cA} = T^*T,$$

其中 $T = P_{cA^c} Q_B P_{cA}$。我们关注大于 $\varepsilon(1-\varepsilon)$ 的 $S_{cA,B} - S_{cA,B}^2$ 的特征值个数，也就是大于 $\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ 的 T 的奇异值个数。

由于 ∂B_n 的测度为 0，显然有 $Q_B = \sum_{n=1}^N Q_{B_n}$，因此

$$P_{cA^c} Q_B P_{cA} = \sum_{n=1}^N P_{cA^c} Q_{B_n} P_{cA}.$$

令 $p = \frac{1}{\log(\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon))} < 1$。由 (1.9) 和 (1.10) 可得

$$\Lambda_\varepsilon(cA, B) \le \sqrt{e} \|P_{cA^c} Q_B P_{cA}\|_p^p \le \sqrt{e} \sum_{n=1}^N \|P_{cA^c} Q_{B_n} P_{cA}\|_p^p. \tag{4.1}$$

利用反向的 $S-S^2$ 技巧，我们可以将这些拟范数改写为用特征值 $\lambda_m(cA, B_n)$ 表示的形式：

$$\|P_{cA^c} Q_{B_n} P_{cA}\|_p^p = \sum_m (\lambda_m(cA, B_n)(1 - \lambda_m(cA, B_n)))^{\frac{p}{2}}.$$

我们有 $B_n = M_n[0,1]^d + b_n$，其中 M_n 是可逆矩阵，且 $b_n \in \mathbb{R}^d$。为了化归到 $[0,1]^d$ 的情形，我们将使用以下引理。

引理 4.1. 设 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是有限测度集合，且 $M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是可逆线性映射。那么，对于所有 u、$v \in \mathbb{R}^d$ 和所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$\lambda_n(A, B) = \lambda_n(MA + v, M^{-T}B + u).$$

证明。我们从 $u = v = 0$ 的情形开始。考虑酉膨胀算子 $D_M f(x) = |\det(M)|^{\frac{1}{2}} f(Mx)$，其逆为 $D_M^{-1} = D_{M^{-1}}$。我们将计算 $D_M^{-1} S_{A,B} D_M$。为此，只需注意，对于任意可逆矩阵 M 以及所有可测集 X，

$$\mathcal{F} D_M = D_{M^{-T}} \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}^{-1} D_{M^{-T}} = D_M \mathcal{F}^{-1}, \quad P_X D_M = D_M P_{MX}$$

由此可得

$$D_M^{-1} S_{A,B} D_M = P_{MA} Q_{M^{-T}B} P_{MA}$$

因此，由酉等价可得 $\lambda_n(A,\ B) = \lambda_n(MA,\ M^{-T}B)$。接下来，我们处理一般平移 u, v。考虑酉平移算子 $T_v f(x) = f(x-v)$ 和相移乘法算子 $W_u f(p) = e^{-2\pi i u\cdot p} f(p)$，其逆分别为 T_{-v} 和 W_{-u}。与之前一样，以下交换关系成立：

$$\mathcal{F} T_v = W_v \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}^{-1} W_v = T_v \mathcal{F}^{-1}, \quad P_X T_v = T_v P_{X-v}, \quad P_X W_u = W_u P_X.$$

我们得出 $W_u T_v S_{A,\ B} T_v^{-1} W_u^{-1} = S_{A+v,\ B+u}$，因此 $\lambda_n(A,\ B) = \lambda_n(A+v,\ B+u)$。

□

将引理 4.1 应用于 $A,\ B_n$，可得 $\lambda_m(cA,\ B_n) = \lambda_m(cM_n^{-T}A,\ [0,1]^d)$。注意，$M_n^{-T}A$ 仍是一个边界具有有限上闵可夫斯基含量的有界集合。事实上，只需注意，对任意 $r>0$

$$|M^{-T}A + B_r| \le \frac{1}{|\det(M)|} \left|A + B_{r\|M^{-T}\|^{-1}}\right|,$$

其中 $+$ 表示两个集合的闵可夫斯基和。因此，为简化记号，从现在起我们假设 $B=[0,1]^d$ 和 A 是某个边界具有有限上闵可夫斯基内容的有界集合，并希望给出 $\|P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cA}\|_p^p$ 的界。

接下来，我们引入 A 的惠特尼分解。为此，我们回顾一下，∂A 的测度为 0，因此 $P_A = P_{\mathrm{int}A}$，所以我们可以假设 A 是开集。另请注意，$\partial(\mathrm{int}A) \subseteq \partial A$，因此 $\partial(\mathrm{int}A)$ 也具有有限上闵可夫斯基内容。以下内容引自 [13, 附录 J]

命题 4.2。设 $A \subsetneq \mathbb{R}^d$ 是一个开子集。存在一族 (Q_k) 闭二进立方体，使得

(i) $\bigcup_k Q_k = A$ 与各个 Q_k 的内部互不相交，(ii) 存在仅依赖于 d 的常数 c_1、c_2，使得

$$c_1 \operatorname{diam}(Q_k) \le \operatorname{dist}(Q_k, A^c) \le c_2 \operatorname{diam}(Q_k).$$

为了后续使用，我们需要对该分解稍作修改，使常数c_1 可以任意大。

命题 4.3。设 $A \subsetneq \mathbb{R}^d$ 是一个开子集。存在一族(Q_k) 闭二进立方体，使得

(i) $\bigcup_k Q_k = A$ 与 Q_k互不相交的内部，

(ii) 存在一个仅依赖于 d 的常数 c_3，使得

$$2\,\mathrm{diam}(Q_k) \le \mathrm{dist}(Q_k, A^c) \le c_3\,\mathrm{diam}(Q_k).$$

证明。设 Q_k 是命题 4.2 中的一列立方体，并将其中每个立方体沿某个$m \in \mathbb{N}$切分为 2^{md} 个二进子立方体 $Q_{k,\,1}$，.....，$Q_{k,\,2^{md}}$，其直径为 2^{-m}diam(Q_k)。我们有

$$\mathrm{dist}(Q_{k,n}, A^c) \le \mathrm{dist}(Q_k, A^c) + \mathrm{diam}(Q_k) \le (c_2+1)\mathrm{diam}(Q_k) = (c_2+1)2^m\mathrm{diam}(Q_{k,n}),$$

因此 $c_3 = (c_2+1)2^m$ 可行。另一方面，

$$\mathrm{dist}(Q_{k,n}, A^c) \ge \mathrm{dist}(Q_k, A^c) \ge c_1\mathrm{diam}(Q_k) = c_1 2^m\mathrm{diam}(Q_{k,n}),$$

因此，若我们选择 m 使得 $c_1 2^m > 2$，就能得到立方体 $Q_{k,\,n}$ 所需的结果。 □

我们用 A_l 表示 A 的惠特尼分解中边长为 2^{-l} 的立方体所组成的集合。由于我们假设 A 有界，因此存在 $l_0 \in \mathbb{Z}$ 使得对于 $l < l_0$，有 $A_l = \varnothing$。关于边界具有有限上闵可夫斯基含量的有界开集 A，我们需要以下两个引理。

引理 4.4。设 A 是一个边界具有有限上闵可夫斯基含量的有界开集。存在一个常数 C，它仅依赖于 A，使得

$$|A_l| \le C2^{(d-1)l}.$$

引理 4.5。设 A 是一个边界具有有限上闵可夫斯基含量的开有界集合。存在一个仅依赖于 A 的常数 C，使得对于所有足够小的 $r > 0$，我们都可以找到一个由轴平行盒组成的集合 N_r，其边长为 r 且内部互不相交，并且 $|N_r| \le Cr^{1-d}$ 以及

$$\partial A + B_r \subseteq \cup_{Q\in N_r} Q.$$

引理 *4.4* 的证明。设 $X_l = \cup_{Q\in A_l} Q$。我们有

$$|A_l| = \sum_{Q\in A_l} 1 = \sum_{Q\in A_l} |Q|2^{dl} = 2^{dl}|X_l|.$$

根据惠特尼分解的一个性质，存在 $C_d > 0$ 使得

$$\mathrm{dist}(x, \partial A) \le C_d 2^{-l}$$

对所有 $x \in X_l$均成立。由于 ∂A 具有有限上闵可夫斯基含量，存在仅依赖于A的 l_1，使得

$$|X_l| \le |\{x : \mathrm{dist}(x, \partial A) \le C_d 2^{-l}\}| \le C_A 2^{-l}.$$

对于 $l \ge l_1$，这就给出了所需的估计。若 $l \le l_1$，那么我们只需将其界定为

$$2^{dl}|X_l| \le 2^{dl}|A| \le 2^{(d-1)l}|A|2^{l_1}.$$

□

引理 *4.5* 的证明。对于 $z \in r\mathbb{Z}^d$，记 $Q_r(z)$ 为以 z 为中心、边长为 r 的立方体。令 $Z_r \subseteq r\mathbb{Z}^d$ 为满足 $Q_r(z) \cap (\partial A + B_r) \neq \varnothing$ 的点 $z \in r\mathbb{Z}^d$ 的集合。若对于 $z \in Z_r$，有 $\omega \in Q_r(z)$，则

$$\operatorname{dist}(\omega, \partial A) \leq \inf_{p \in Q_r(z)} (|\omega - p| + \operatorname{dist}(p, \partial A)) \leq (\sqrt{d} + 1)r.$$

因此，

$$\left| \bigcup_{z \in Z_r} Q_r(z) \right| \leq |\partial A + B_{(\sqrt{d}+1)r}| \leq Cr$$

当 r 足够小时。由于不同 z 对应的 $Q_r(z)$ 除了一个测度为 0 的集合外互不相交，我们得到

$$|Z_r| \leq Cr^{1-d}.$$

最后，我们注意到有覆盖 $A + B_r \subseteq \cup_{z \in Z_r} Q_r(z)$，因此该覆盖可行。

□

注 4.6。引理 *4.4* 只需要 ∂A 的上闵可夫斯基含量的内部部分，即只需要 $|(\partial A + B_r) \cap A|$，但对于引理 *4.5*，我们需要完整的上闵可夫斯基含量。

注 4.7。注意，引理 *4.5* 特别说明，如果一个集合具有有限上闵可夫斯基内容，那么它具有有限的 $d-1$ 维豪斯多夫测度。

我们取一个较小的数 $\delta > 0$，并考虑阈值 $D = \left\lceil \log_2 \left({}_{\delta} \, {}^{c_{\log(\frac{1}{\varepsilon})}} \right) \right\rceil$。对于边长大于 2^{-D} 的立方体，我们保持其不变，并注意到它们的并集覆盖了 A 中除去可能位于 $C_d 2^{-D}$ 邻域内的 ∂A 中的点以外的全部部分。令 $r = C_d 2^{-D}$，并考虑引理 4.5 中的立方体 N_r。我们得到

$$A \subseteq \left(\cup_{l<D} \cup_{Q \in A_l} Q \right) \cup \left(\cup_{Q \in N_r} Q \right).$$

这个并集的第一部分互不相交。我们通过设定 $X \in N_r$，使第二部分互不相交

$$X' = X \cap A \setminus \left(\cup_{l<D} \cup_{Q \in A_l} Q \right).$$

因此，

$$A = \left(\cup_{l<D} \cup_{Q \in A_l} Q \right) \cup \left(\cup_{Q \in N_r} Q' \right).$$

由此我们可以写出

$$P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cA} = \sum_{l<D} \sum_{Q \in A_l} P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ} + \sum_{Q \in N_r} P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ'}. \tag{4.2}$$

接下来，我们希望扩大这些集合，以便简化计算。为了了解扩大集合后奇异值如何变化，我们将使用以下引理。

引理 4.8. 考虑 $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}^d$，并假设 $P_X Q_Y P_Z$ 是紧的。若 $X \subset X'$ 且 $P_{X'} Q_Y P_Z$ 是紧的，则

$$\sigma_k(P_X Q_Y P_Z) \leq \sigma_k(P_{X'} Q_Y P_Z).$$

类似地，若 $Z \subseteq Z'$ 且 $P_X Q_Y P_{Z'}$ 是紧的，则

$$\sigma_k(P_X Q_Y P_Z) \leq \sigma_k(P_X Q_Y P_{Z'}).$$

证明. 根据极大极小定理，若 T 是 H上的紧算子，则

$$\sigma_k(T) = \max_{\substack{V \subseteq H \\ \dim H = k}} \min_{\psi \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|}.$$

对于第一个不等式，我们只需注意到，对所有 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$，都有 $\|P_{X'} Q_Y P_Z \psi\| \geq \|P_X Q_Y P_Z \psi\|$。第二个不等式可由第一个不等式取伴随算子得到。□

推论 4.9. 设 X, Y, Z为可测集。若 $X \subseteq X'$ 且 $Z \subseteq Z'$，则 $\|P_X Q_Y P_Z\|_p^p \leq \|P_{X'} Q_Y P_{Z'}\|_p^p$。

我们将对 (4.2) 应用 (1.10) 和推论 4.9。对于 $P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ}$, $Q \in A_l$，我们将 cA^c 扩大到 cQ^c，其中 Q是与 Q 中心相同且边长为其两倍的立方体。注意，根据惠特尼分解的性质，4.3 Q 仍包含于 A中。对于 $P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ'}$, $Q \in N_r$，我们只需将 cA^c 扩大到整个 $\mathbb{R}^d$，并将 cQ' 扩大到 cQ。于是得到

$$\|P_{cA^c} Q_{[0,1]^d} P_{cA}\|_p^p \leq \sum_{l<D} \sum_{Q \in A_l} \|P_{c\tilde{Q}^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ}\|_p^p + \sum_{Q \in N_r} \|Q_{[0,1]^d} P_{cQ}\|_p^p. \tag{4.3}$$

根据引理 4.1 进行平移后，我们可以看出，第二个求和中的算子只是引理 1.8 中的一维算子的张量幂 I_{cr}。我们将利用 Schatten 范数在张量积运算下具有乘法性的性质。

引理 4.10. 设 $H_1, \ldots, H_m$为希尔伯特空间，$A_j \in H_j$, $j = 1, \ldots, m$为紧算子。若 T是 $H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_m$上的算子 $T = A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$，则对于任意$0 < p < \infty$，有

$$\|T\|_p = \|A_1\|_p \ldots \|A_m\|_p.$$

证明. 作为多重集，我们有

$$\{\sigma_n(T) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\sigma_{n_1}(A_1) \ldots \sigma_{n_m}(A_m) \mid n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}\}.$$

对等式左、右两边各项的 p 次幂求和，即得所述结论。

□

由引理 1.8 可得

$$\|I_{cr}\|_p^p \le \sum_{n=1}^{[10cr]} 1^p + \sum_{n=[10cr]}^{\infty} C^p e^{-\tau p n} \le 10cr + C^p \frac{1}{1-e^{-\tau p}} \le C_1 \left(cr + \frac{1}{p} \right)$$

其中某个绝对常数为 C_1。根据我们对 r 和 p 的选择，有 $C_2 cr \ge \frac{1}{p}$，因此 $\|I_{cr}\|_p^p \le C_3 cr$，由此根据 4.10

$$\|Q_{[0,1]^d} P_{cQ}\|_p^p = \|I_{cr}\|_p^{pd} \le C_3^d c^d r^d.$$

我们转而考虑 $Q \in A_l$, $l < D$ 下的算子 $P_{c\tilde{Q}} Q_{[0,1]^d} P_{cQ}$。为了将其与引理 1.8 中陈述的一维算子精确联系起来，我们将进一步简化。首先，经过平移，并采用类似于引理 4.1 证明中的论证，我们可以假设

$$Q = I^d, \quad \tilde{Q} = \tilde{I}^d,$$

其中 $I = [-2^{-l-1}, 2^{-l-1}]$ 和 $\tilde{I} = [-2^{-l}, 2^{-l}]$。于是，由于这些并集两两不相交，

$$\tilde{Q}^c = \left(\tilde{I}^c \times \mathbb{R}^{d-1} \right) \cup \left(\tilde{I} \times \tilde{I}^c \times \mathbb{R}^{d-2} \right) \cup \cdots \cup \left(\tilde{I}^{d-1} \times \tilde{I}^c \right).$$

~ ~我们将 $P_{c\tilde{Q}^c} Q_{[0,1]^d} P_Q$ 按照 Q^c 的这一分解写成和，并在每一种情形下将 I 扩大到整个 $\mathbb{R}$。由引理 4.8、引理 4.10 和 (1.10) 可得

$$\begin{aligned} \|P_{c\tilde{Q}^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ}\|_p^p &\le d \| \left(Q_{[0,1]} P_{cI} \right)^{\otimes (d-1)} \otimes P_{c\tilde{I}^c} Q_{[0,1]} P_{cI} \|_p^p \\ &= d \|Q_{[0,1]} P_{cI}\|_p^{p(d-1)} \|P_{c\tilde{I}^c} Q_{[0,1]} P_{cI}\|_p^p. \end{aligned}$$

对于上述的 $Q_{[0,1]} P_{cI} = I_{c2^{-l}}$，我们有

$$\|Q_{[0,1]} P_{cI}\|_p^p \le C_1 \left(c2^{-l} + \frac{1}{p} \right).$$

同样，根据我们对 D 和 p 的选择，总有 $C_2 c 2^{-l} \ge \frac{1}{p}$，因此

$$\|Q_{[0,1]} P_{cI}\|_p^p \le C_3 c 2^{-l}.$$

对于 $P_{c\tilde{I}^c} Q_{[0,1]} P_{cI} = J_{c2^{-l-1}}$，由引理 1.8 可得

$$\|P_{c\tilde{I}^c} Q_{[0,1]} P_{cI}\|_p^p \le \sum_{n=1}^{\infty} C^p e^{-\tau p} \le \frac{C_1}{p}.$$

因此，总体而言

$$\|P_{c\tilde{Q}^c} Q_{[0,1]^d} P_{cQ}\|_p^p \le \frac{C}{p} c^{d-1} 2^{-(d-1)l}.$$

回到 (4.3)，我们看到

$$\|P_{cA^c}Q_{[0,1]^d}P_{cA}\|_p^p \le C\sum_{l<D}|A_l|c^{d-1}2^{-(d-1)l} + C|N_r|c^d r^d.$$

由引理 4.4 可得 $|A_l| \le C2^{(d-1)l}$，由引理 4.5 可得 $|N_r| \le Cr^{-(d-1)}$。此外，对于 $l < l_0$，有 $|A_l| = 0$。因此

$$\|P_{cA^c}Q_{[0,1]^d}P_{cA}\|_p^p \le \frac{C}{p}\sum_{l_0\le l<D} c^{d-1} + Cc^d r = C\left((D+l_0)c^{d-1}\frac{1}{p} + c^d r\right).$$

根据我们对 D, p, r 的选择，当 δ 足够小时，对于 $\frac{1}{2} > \varepsilon > \alpha^{-c}$，我们得到

$$\|P_{cA^c}Q_{[0,1]^d}P_{cA}\|_p^p \lesssim c^{d-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\alpha c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right). \tag{4.4}$$

将此估 计代入 (4.1)，并利用 N 是一个固定常数，我们最终得 de

$$\Lambda_\varepsilon(cA, B) \lesssim c^{d-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\alpha c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right).$$

接下来，我们证明定理 1.6，其中 A 和 B 都是具有有限上闵可夫斯基含量边界的有界集合，且处于相同的情形 $\frac{1}{2} > \varepsilon > \alpha^{-c}$。为此，我们再次采用 $S - S^2$ 技巧，这次将惠特尼分解应用于集合 B，并使用相同的阈值 $D = \left\lfloor \log_2\left(\delta^{\,c\log(\frac{1}{\varepsilon})}\right)\right\rfloor$。显然地调整集合 A 的记号后，集合 $\overline{B}$ 可分解为

$$B = \left(\cup_{l<D}\cup_{Q\in B_l} Q\right) \cup \left(\cup_{Q\in N_r} Q'\right).$$

我们有

$$\Lambda_\varepsilon(cA, B) \le \sqrt{e}\|P_{A^c}Q_B P_A\|_p^p \le \sqrt{e}\sum_{l<D}\sum_{Q\in B_l}\|P_{cA^c}Q_Q P_{cA}\|_p^p + \sqrt{e}\sum_{Q\in N_r}\|P_{cA^c}Q_{Q'}P_{cA}\|_p^p.$$

对于 $Q \in B_l$，由引理 4.1 可得

$$\|P_{cA^c}Q_Q P_{cA}\|_p^p = \|P_{c2^{-l}A^c}Q_{[0,1]^d}P_{c2^{-l}A}\|_p^p,$$

因此我们可以使用 (4.4)，得到

$$\|P_{cA^c}Q_Q P_{cA}\|_p^p \lesssim c^{d-1}2^{-l(d-1)}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\alpha c 2^{-l}}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right).$$

对于第二个对数，我们注意到它一致有界于 $\log\left(\frac{\alpha c 2^{-l_0}}{\varepsilon}\right)$，因此，记作 $\alpha' = \alpha 2^{-l_0}$，我们得到

$$\sum_{l<D}\sum_{Q\in B_l}\|P_{cA^c}Q_Q P_{cA}\|_p^p \lesssim (D+l_0)c^{d-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\left(\frac{\alpha' c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right)$$
$$\lesssim c^{d-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log^2\left(\frac{\alpha' c}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right),$$

这恰好是所需的界。

对于边界层 $P_{cA^c}Q_{Q'}P_{cA}, Q\in N_r$，我们首先将 cA^c 扩大到整个 $\mathbb{R}^d$，并将 cA 扩大到 cR，其中 R 是一个包含 A 的固定立方体，从而利用推论 4.9 将分析化归为算子 $Q_{Q'}P_{cR}$。然后，根据等式 $\sigma_n(Q_{Q'}P_{cR}) = \lambda_n(cR, Q')^{\frac{1}{2}}$ 以及对称性 $\lambda_n(U, V) = \lambda_n(V, U)$，我们得到

$$\|P_{cA^c}Q_{Q'}P_{cA}\|_p^p \le \|Q_{Q'}P_{cR}\|_p^p = \|P_{cR}Q_{Q'}P_{cR}\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \|P_{Q'}Q_{cR}P_{Q'}\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \|Q_{cR}P_{Q'}\|_p^p.$$

现在，我们可以将 Q' 扩大到 Q，并利用引理 4.1 将所有缩放因子转移到 Q 上，从而得到

$$\|P_{cA^c}Q_{Q'}P_{cA}\|_p^p \le \|Q_{cR}P_{Q'}\|_p^p \le \|P_{[0,cr]^d}Q_{[0,1]^d}\|_p^p.$$

由引理 4.10，右端等于 $\|P_{[0,cr]}Q_{[0,1]}\|_p^{pd}$。仿照定理 1.3 的证明，我们得到

$$\|P_{[0,cr]^d}Q_{[0,1]^d}\|_p^p \lesssim c^d r^d,$$

因此

$$\sum_{Q\in N_r}\|P_{cA^c}Q_{Q'}P_{cA}\|_p^p \lesssim |N_r|c^d r^d \lesssim c^d r \lesssim c^{d-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

这甚至比所需的界还小。至此，定理 1.6 在 $\frac{1}{2} > \varepsilon > \alpha^{-c}$ 情形下的证明完成。

最后，我们将处理 $0 < \varepsilon \le \alpha^{-c}$ 情形。定理 1.3 和定理 1.6 的证明完全相同。设 $U_A \subset A \subset V_A$ 和 $U_B \subset B \subset V_B$ 为一些固定的盒子。根据引理 4.8 以及对称性 $\lambda_k(X,Y) = \lambda_k(Y,X)$，我们有

$$\lambda_1(cA, B) \le \lambda_1(cV_A, B) \le \lambda_1(cV_A, V_b).$$

特别地，根据命题 1.2，当 α 足够大时，不存在大于 $1-\alpha^{-c}$ 的特征值。

对于 ε 与 $\frac{1}{2}$ 之间的特征值个数，我们有

$$\Lambda_\varepsilon^-(cA, B) = N_\varepsilon(cA, B) - N_{1/2}(cA, B).$$

对于第二项，我们有

$$N_{1/2}(cA,B)\le 2c^d|A||B|$$

因为 $\mathrm{Tr}S_{cA,\ B}=c^d|A||B|$。根据引理 4.8 和对称性，我们有

$$\lambda_k(cU_A,U_B)\le\lambda_k(cA,B)\le\lambda_k(cV_A,V_B),$$

因此

$$N_\varepsilon(cU_A,U_B)\le N_\varepsilon(cA,B)\le N_\varepsilon(cV_A,V_B).$$

由 (1.6) 可知，如果 $0<\varepsilon<\alpha^{-c}$ 和 α 足够大，那么 n

$$N_\varepsilon(cU_A,U_B)\ge 4c^d|A||B|.$$

代入这些界，我们得到

$$\frac{N_\varepsilon(cU_a,U_B)}{2}\le N_\varepsilon(cU_A,U_B)-N_{1/2}(cA,B)\le\Lambda_\varepsilon^-(cA,B)\le N_\varepsilon(cV_A,V_B)$$

当 $0<\varepsilon\le\alpha^{-c}$ 足够大时，根据 (1.6)，两边都与所需的值成比例。

注 4.11。请注意，最后的论证给出了所有具有非空内部的集合 A、B 的特征值下界，以及所有有界集合 A、B 的特征值上界。

5. 一维算子的奇异值

本节将证明引理 1.8。由于关于 I_r 的结果可以由定理 2.5 推出，我们将从对 $\sigma_k(J_r)$ 的估计开始。

5.1. 奇异值 J_r。我们将证明，$J_r=P_{[-2r,2r]^c}Q_{[0,1]}P_{[-r,r]}$ 对应$r>0$ 的算子可分解为有限秩算子的和。这个思路与 Karnik、Romberg 和 Davenport [18] 所采用的方法十分相似；他们证明了一个类似的算子具有低位移秩结构，而对于这类算子，可以通过佐洛塔廖夫数有效地估计其奇异值。根据 (1.1)，算子 J_r 的核为

$$K(x,y)=1_{[-2r,2r]^c}(x)\check{1}_{[0,1]}(x-y)1_{[-r,r]}(y)=\frac{1}{2\pi i}1_{[-2r,2r]^c}(x)\frac{e^{2\pi i(x-y)}-1}{x-y}1_{[-r,r]}(y).$$

变量 x 和 y 彼此分离，唯一例外是项 $\frac{1}{x-y}$。在 [18] 中，作者通过改为考虑 xJ_r-J_rx 来处理这一项，而它的秩为 2。然而，只需将

项 $\frac{1}{x-y}$ 写成几何级数即可得出

$$K(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{-n-1}1_{[-2r,2r]^c}(x)e^{2\pi ix}\right)\left(y^n1_{[-r,r]^c}(y)e^{-2\pi iy}\right)\\-\left(x^{-n-1}1_{[-2r,2r]^c}(x)\right)\left(y^n1_{[-r,r]^c}(y)\right).$$

注意，由于当指示函数不为零时 $\frac{|y|}{|x|}\leq\frac{1}{2}$，该级数绝对收敛。这正是我们使用分离性的关键之处。因此，若令

$$f_n(x)=x^{-n-1}1_{[-2r,2r]^c}(x),\quad \tilde{f}_n(x)=f_n(x)e^{2\pi ix},\\ g_n(y)=y^n1_{[-r,r]}(y),\quad \tilde{g}_n(y)=g_n(y)e^{2\pi iy},$$

我们看到，对于 $\varphi\in L^2$,

$$J_r\varphi=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\langle\varphi,g_n\rangle f_n-\langle\varphi,\tilde{g}_n\rangle\tilde{f}_n\right).$$

显然，和中的每一项的秩至多为 2。根据紧算子奇异值的一个著名刻画 A,

$$\sigma_{k+1}(A)=\inf\{\|A-P\|\mid P\text{ is an operator of rank at most }k\},$$

我们立即得到，对所有 $N\in\mathbb{N}$,

$$\sigma_{2N+3}(J_r)\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\|f_n\|\,\|g_n\|+\|\tilde{f}_n\|\,\|\tilde{g}_n\|\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\|f_n\|\,\|g_n\|.$$

范数可以很容易地精确计算:

$$\|f_n\|^2=\frac{2}{2n+1}(2r)^{-2n-1},\quad \|g_n\|^2=\frac{2}{2n+1}r^{2n+1}.$$

因此，我们得到

$$\sigma_{2N+3}(J_r)\leq\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}2^{-n}\leq\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{2N+3}2^{-N}\leq\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{-N},$$

至此，证明完成。

5.2. 的奇异值 I_r。由于 I_r 是范数不超过 1 的算子的乘积，因此显然对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\sigma_n(I_r)\leq 1$，所以我们将重点讨论 $n>10r$。正如我们已经提到的，由于 $I_r^*I_r=S_{[0,r],\ [0,1]}$，原则上我们可以从定理 2.5 以及文献中的许多先前结果中导出所需的界（事实上，我们可以将 10 换成任何大于 1 的常数）。为使论证自成一体，我们将改为给出一个复分析证明，沿用 [21]中的论证。

I_r 的奇异值是$S_{[0,r],\ [0,1]}$的特征值的平方根。根据引理 4.8，若增大 r ，特征值只会增大。因此，只需考虑$n = 10r$的情形。由于特征值仅取决于区间长度的乘积，为方便起见，我们将改为考察$S_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\ [-\frac{r}{2},\frac{r}{2}]}$的特征值。

首先考虑 n归一化特征函数 f_1， f_2，…， f_n，它们属于 $S_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\ [-\frac{r}{2},\frac{r}{2}]}$，对应的特征值为$\lambda_1(r) \geq \cdots \geq \lambda_n(r)$。若 $\lambda_n(r) = 0$，则无需证明（事实上，再次利用极大极小原理不难看出，这种情况不会发生），因此不失一般性，我们假设 $\lambda_n(r) > 0$。于是立即可知， f_1，…， f_n 的支集包含于$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$。特别地，它们的傅里叶变换

$$g_k(z) = \hat{f}_k(z) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_k(t) e^{-2\pi i z t} dt$$

对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都有定义，并且是关于 z的全纯函数。

取定 $n-1$ 个互不相同的复数 z_1， z_2，…， z_{n-1}。利用简单的线性代数，我们可以找到不全为零的标量 a_1，…， $a_n \in \mathbb{C}$，使得线性组合 $g(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(z)$ 满足 $g(z_1) = \cdots = g(z_{n-1}) = 0$。经过缩放，我们可以假设 $\|g\|_2 = 1$。

首先，我们对 $g(x+iy)$ 有一个一致的逐点界：

$$|g(x+iy)| \leq e^{\pi |y|}. \tag{5.1}$$

事实上，令 $f = \sum a_k f_k$，我们有

$$|g(x+iy)| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2\pi i (x+iy) t} dt \right| \leq e^{\pi |y|} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt \leq e^{\pi |y|},$$

其中最后一步用到了柯西–施瓦茨不等式。根据特征值的极大极小刻画，我们还有

$$\lambda_n(r)^2 \leq \|S_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],[-\frac{r}{2},\frac{r}{2}]} f\|^2 \leq \int_{-r/2}^{r/2} |g(x)|^2 \, dx. \tag{5.2}$$

我们希望通过选择一个适当的序列 z_l 得出矛盾。

我们暂且假设 $n \geq 1000$。 $n < 1000$ 的情形我们将在最后讨论。我们的数列将是一个等差数列，其 $z_1 = -r$、 $z_{n-1} = r$。它的步长为 $s = \frac{2r}{n-1}$。由于 $n = 10r$， $n \geq 1000$，我们有 $s \leq \frac{1}{4}$。我们希望对 $x_0 \in [-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}]$给出 $|g(x_0)|$的上界，假设对所有 x， $y \in \mathbb{R}$ 以及 $g(z_l) = 0$，都有 $|g(x+iy)| \leq e^{\pi |y|}$。我们将对以 x_0 为圆心、 $\frac{r}{2}$ 为半径的圆盘使用詹森公式：

$$\log |g(x_0)| = \int_0^1 \log \left| g\left(x_0 + \frac{r}{2} e^{2\pi i t} \right) \right| dt + \sum_{|z - x_0| < \frac{r}{2}, g(z) = 0} \log \frac{2|z - x_0|}{r}.$$

由于每个 和中的项为负，因此只保留其中的 z_l's，我们得到一个不等式 y

$$\log|g(x_0)| \le \int_0^1 \log\left|g\left(x_0+\frac{r}{2}e^{2\pi it}\right)\right| dt + \sum_{|z_l-x_0|<\frac{r}{2}} \log\frac{2|z_l-x_0|}{r}. \tag{5.3}$$

对于积分项，根据 (5.1) 有 $\left|g\left(x_0+\frac{r}{2}e^{2\pi it}\right)\right| \le e^{\pi\frac{r}{2}|\text{正弦函数}(2\pi t)|}$，于是 ce

$$\int_0^1 \log\left|g\left(x_0+\frac{r}{2}e^{2\pi it}\right)\right| dt \le \int_0^1 \frac{\pi r}{2}|\sin(2\pi t)|dt = r.$$

对于 x_0 右侧的 z_l，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{x_0<z_l<x_0+\frac{r}{2}} \log\frac{2|z_l-x_0|}{r} &\le \frac{1}{s}\sum_{x_0<z_l<x_0+\frac{r}{2}}\int_{z_l}^{z_l+s}\log\frac{2(\omega-x_0)}{r}d\omega\\ &= \frac{1}{s}\int_{\min\limits_{z_l>x_0} z_l}^{\max\limits_{z_l<x_0+\frac{r}{2}} z_l+s}\log\frac{2(\omega-x_0)}{r}d\omega\\ &\le \frac{1}{s}\int_s^{\frac{r}{2}+s}\log\frac{2\omega}{r}d\omega \le -\frac{1}{4s}r+1.\end{aligned}$$

其中，第一步用到了函数 $\log\frac{2t}{r}$ 在 $t>0$ 上的单调性；第二步将积分合并为一个积分；第三步用到了函数 $\log\frac{2t}{r}$ 在 $t<\frac{r}{2}$ 上为负、在 $t>\frac{r}{2}$ 上为正，以及 z_l 的最小值至多为 x_0+s、z_l 的最大值至少为 $x_0+\frac{r}{2}-s$，因为 $x_0+\frac{r}{2}\le r$，所以我们无法超出区间 $[-r.r]$；最后一步用到了不等式 $\log u \le \bar{u}-1$。对于 x_0 左侧的 z_l，我们得到完全相同的上界。

将所有估计代入 (5.3)，并结合 $s\le\frac{1}{4}$，得到 -

$$|g(x_0)| \le e^{2-r}.$$

因此，由 (5.2) 可得

$$\lambda_n(r)^2 \le \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} |g(x)|^2 dx \le re^{4-2r} \le e^{4-r},$$

如所需。

对于 $n\le 1000$，我们只需简单估计 $\lambda_n(r)\le 1$；若增大 C，这与我们的界一致。

6. Trace class conditions

本节证明定理 1.9 和定理 1.10。

6.1. 充分条件。 我们先证明定理 1.9，因此考虑有界可测集 A，$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 并令 f 为迹类可容许函数，即

$$\int_0^\delta \frac{M_0 f(\varepsilon) \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon \left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d} d\varepsilon < \infty. \tag{6.1}$$

由于 A 和 B 有界，它们具有有限测度，因此 $S_{A,B}$ 是紧算子。我们需要证明 $\sum_{n=1}^\infty |f(\lambda_n(A,B))| < \infty$。由于 $\lambda_n(A,B) \to 0$，仅有有限个 n 满足 $\lambda_n(A,B) > \frac{\delta}{2}$。因此，只需证明尾项 $\sum_{\lambda_n(A,B)\le\frac{\delta}{2}} |f(\lambda_n(A,B))|$ 是有限的。我们也将忽略所有等于 0 的特征值，因为对于所有迹类可容许的 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 函数 f，$f(0) = 0$。我们将求和按二进尺度分解，并将 f 上界估计为 $M_0 f$：

$$\begin{aligned}
\sum_{0<\lambda_n(A,B)\le\frac{\delta}{2}} |f(\lambda_n(A,B))| &= \sum_{k=0}^\infty \sum_n 1_{\{\delta 2^{-2^{k+1}} < \lambda_n(A,B) \le \delta 2^{-2^k}\}} |f(\lambda_n(A,B))| \\
&\le \sum_{k=0}^\infty M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right) \left(N_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(A,B) - N_{\delta 2^{-2^k}}(A,B)\right) \\
&\le \sum_{k=0}^\infty M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right) N_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(A,B).
\end{aligned}$$

我们选择这种特定的分解，是因为在这个尺度上，(1.6) 中的估计大致每一步都会加倍。由于 A 和 B 有界，存在固定的立方体 V_A, V_B，使得 $A \subseteq V_A$, $B \subseteq V_B$。由引理 4.8 可得，对于所有 $0 < \varepsilon < 1$，$N_\varepsilon(A,B) \le N_\varepsilon(V_A,V_B)$。因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right) N_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(A,B) &\le \sum_{k=0}^\infty M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right) N_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(V_A,V_B) \\
&= \sum_{k=0}^\infty M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right) \left(N_{1/2}(V_A,V_B) + \Lambda^-_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(V_A,V_B)\right).
\end{aligned}$$

由于积分 (6.1) 收敛，对于所有 $\varepsilon < \delta$，$M_0 f(\varepsilon)$ 都是有限的。特别是，只需证明其尾部

$$\sum_{k=k_0}^\infty M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right) \left(N_{1/2}(V_A,V_B) + \Lambda^-_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(V_A,V_B)\right)$$

对某个值是有限的 $k_0 > 0$。注意，$N_{1/2}(V_A, V_B)$ 是一个固定数，而 $\Lambda^-_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(V_A, V_B)$ 趋于无穷大，因此当 k_0 足够大时，我们有 $N_{1/2}(V_A, V_B) \le \Lambda^-_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(V_A, V_B)$ 对于 $k \ge k_0$。如果再适当增大 k_0，便可应用上界 (1.6)（注意，c，它

是 V_A 与 V_B的边长之积，在当前讨论中为一个常数），并得到

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right)\left(N_{1/2}(V_A,V_B)+\Lambda^{-}_{\delta 2^{-2^{k+1}}}(V_A,V_B)\right)$$
$$\lesssim \sum_{k=k_0}^{\infty} M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right)\left(\frac{\log\left(\frac{1}{\delta 2^{-2^{k+1}}}\right)}{\log\left(\frac{\log\left(\frac{1}{\delta 2^{-2^{k+1}}}\right)}{c}\right)}\right)^d.$$

直接计算表明，方括号中的表达式与 $\binom{2^k}{k}$ 成正比。因此，只需证明 $\sum_{k=k_0}^{\infty} M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right)\binom{2^{kd}}{k^d}$ 有限。我们有以下不等式链：

$$\begin{aligned}\sum_{k=k_0}^{\infty} M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right)\frac{2^{kd}}{k^d} &= \sum_{k=k_0}^{\infty} M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right)\frac{2^{kd}}{k^d}\frac{1}{\log(2)2^{k-1}}\int_{\delta 2^{-2^k}}^{\delta 2^{-2^{k-1}}}\frac{1}{\varepsilon}\,d\varepsilon\\ &\lesssim \sum_{k=k_0}^{\infty} M_0 f\left(\delta 2^{-2^k}\right)\int_{\delta 2^{-2^k}}^{\delta 2^{-2^{k-1}}}\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon\left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d}\,d\varepsilon\\ &\le \sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{\delta 2^{-2^k}}^{\delta 2^{-2^{k-1}}}\frac{M_0 f(\varepsilon)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon\left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d}\,d\varepsilon\\ &\le \int_0^{\delta}\frac{M_0 f(\varepsilon)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon\left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d}\,d\varepsilon<\infty.\end{aligned}$$

我们利用了对于 $\delta 2^{-2^k}<\varepsilon<\delta 2^{-2^{k-1}}$，项 $\log(\frac{1}{\varepsilon})^{d-1}(\log\log(\frac{1}{\varepsilon}))^d$ 与 $\binom{2^{k(d-1)}}{k^d}$ 成正比，并且 $M_0 f$ 是非递减的。至此，定理 1.9 的证明完成。

6.2. 必要条件。 我们转而证明定理 1.10，因此假设 $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ 是具有非空内部的集合，满足 $S_{A,B}$ 是紧集，并考虑一个函数 f，满足 $|f(x)|$ 在 0 附近非递减，例如对 $0\le x\le\beta$ 成立。假设 $f(S_{A,B})$ 是迹类。我们需要证明

$$\int_0^{\delta}\frac{M_0 f(\varepsilon)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon\left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d}\,d\varepsilon<\infty$$

对于某些 e $\delta > 0$。注意，对 $0 \le \varepsilon \le \beta$，我们有 $M_0 f(\varepsilon) = |f(\varepsilon)|$，因此若 $\delta \le \beta$，则 n

$$\int_0^\delta \frac{M_0 f(\varepsilon) \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon \left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d} \, d\varepsilon = \int_0^\delta \frac{|f(\varepsilon)| \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon \left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d} \, d\varepsilon.$$

与定理 1.9 的证明相同，我们将 $\sum |f(\lambda_n(A,\ B))|$ 拆分为特征值大于 β 和不大于 β 的两部分之和，并舍去第一部分，因为它是有限的。因此，我们的基本假设是

$$\sum_{\lambda_n(A,B) \le \beta} |f(\lambda_n(A,B))| < \infty.$$

根据定义，$\lambda_n(A,\ B)$ 关于 n 单调不增，因此这就是从某个 n_0 到无穷大的求和。由于 A 和 B 具有非空内部，我们可以找到立方体 U_A 和 U_B，使得 $U_A \subset A$、$U_B \subset B$。由引理 4.8 可得 $\lambda_n(A,\ B) \ge \lambda_n(U_A,\ U_B)$。利用 $|f|$ 的单调性，我们得到

$$\sum_{\lambda_n(A,B) \le \beta} |f(\lambda_n(A,B))| \ge \sum_{n=n_0}^{\infty} |f(\lambda_n(U_A,U_B))|.$$

接下来，我们进行二进分解，但使用一个较大的常数 $K \ge 2$，其值稍后确定。选取 k_0 使得 $2^{-K^{k_0}} \le \lambda_{n_0}(U_A,\ U_B)$，并利用 $|f|$ 的单调性写成：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} |f(\lambda_n(U_A,U_B))| &\ge \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_n 1_{\{2^{-K^{k+1}} < \lambda_n(U_A,U_B) \le 2^{-K^k}\}} |f(\lambda_n(U_A,U_B))| \\
&\ge \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \left(N_{2^{-K^{k+1}}}(U_A,U_B) - N_{2^{-K^k}}(U_A,U_B) \right) \\
&= \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \left(\Lambda^-_{2^{-K^{k+1}}}(U_A,U_B) - \Lambda^-_{2^{-K^k}}(U_A,U_B) \right)
\end{aligned}$$

我们打算应用 (1.6)。注意，这里存在与 K 无关的 $c_1, c_2 > 0$，使得对所有 $k \ge k_0(K)$

$$c_1 \frac{K^{kd}}{(\log(K)k)^d} \le \Lambda^-_{2^{-K^k}}(U_A,U_B) \le c_2 \frac{K^{kd}}{(\log(K)k)^d}.$$

我们选择 K，使得 $K^d \ge \frac{2^{d+1} c_2}{c_1}$，这确定了 k_0，并确保

$$\Lambda^-_{2^{-K^{k+1}}}(U_A,U_B) \ge 2\Lambda^-_{2^{-K^k}}(U_A,U_B)$$

只要 $k \geq k_0$，便有。因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \left(\Lambda^-_{2^{-K^{k+1}}}(U_A, U_B) - \Lambda^-_{2^{-K^k}}(U_A, U_B) \right) \\
&\qquad \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \Lambda^-_{2^{-K^k}}(U_A, U_B) \\
&\qquad \gtrsim \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \frac{K^{kd}}{k^d}.
\end{aligned}$$

Argu照定理 1.9 的证明进行，并利用 $|f|$ 的单调性，我们得到 in

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \frac{K^{kd}}{k^d} \gtrsim \int_0^{2^{-K^{k+1}}} \frac{|f(\varepsilon)| \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon \left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d} \, d\varepsilon.$$

汇总所有结果，我们得出

$$\infty > \sum_{\lambda_n(A,B) \leq \beta} |f(\lambda_n(A,B))| \gtrsim \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| f\left(2^{-K^{k+1}}\right) \right| \frac{K^{kd}}{k^d} \gtrsim \int_0^{2^{-K^{k+1}}} \frac{|f(\varepsilon)| \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon \left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d} \, d\varepsilon,$$

证明至此完成。

7. Area laws

本节证明定理 1.11 和定理 1.13。

7.1. 一致界。 现在我们证明 (1.14) 和定理 1.13。对于二者，我们~不失一般性地可以假设 $f(1) = 0$。事实上，记 $f(\theta) = f(\theta) - \theta f(1)$~，我们有 $f(1) = 0$,

$$\mathrm{Tr} f(S_{cA,B}) = \mathrm{Tr}\tilde{f}(S_{cA,B}) + f(1)\mathrm{Tr}(S_{cA,B}) = \mathrm{Tr}\tilde{f}(S_{cA,B}) + c^d|A||B|f(1)$$

and

$$\int_0^1 \frac{\tilde{f}(\theta) - \theta\tilde{f}(1)}{\theta(1-\theta)} \, d\theta = \int_0^1 \frac{f(\theta) - f(1)\theta}{\theta(1-\theta)} \, d\theta.$$

注意，如果 f 成立，那么 $\tilde{f}$ 对 $L^2(\mathbb{R}^d)$也满足面积律可容许和迹类可容许。因此，~只需确定 $\mathrm{Tr} f(S_{cA,\ B})$ 在 (1.15) 中的行为。为了得到所述的一致上界 (1.14)，我们还需要证明

$$\int_0^1 \frac{M_0\tilde{f}(\varepsilon) + M_1\tilde{f}(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon \leq C \int_0^1 \frac{M_0 f(\varepsilon) + M_1 f(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon$$

~ ~对某个绝对常数 $C > 0$成立。我们有 $M_0f(\varepsilon) \leq M_0f(\varepsilon) + \varepsilon|f(1)|$ 且 $M_1f(\varepsilon) \leq M_1f(\varepsilon) + \varepsilon|f(1)|$，所以只需证明

$$\lambda \int_0^1 \frac{M_0f(\varepsilon) + M_1f(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon \geq |f(1)|$$

对于某个绝对常数 $\lambda > 0$。对于 $\varepsilon > \frac{1}{2}$，我们有 $M_0f(\varepsilon) \geq |f(\frac{1}{2})|$，且 $M_1f(\varepsilon) \geq |f(1) - f(\frac{1}{2})|$，因此 $M_0f(\varepsilon) + M_1f(\varepsilon) \geq |f(1)|$。对其积分可得

$$\int_0^1 \frac{M_0f(\varepsilon) + M_1f(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon \geq \log(2)|f(1)|,$$

因此 $\lambda = \frac{1}{\log(2)}$ 可行。

我们首先证明一致上界 (1.14)，因此假设 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个集合，其边界 ∂A 具有有限上闵可夫斯基含量，且 $B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是由内部互不相交的平行六面体构成的有限并；再设 f 对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 同时满足面积律可容许和迹类可容许，且 $f(1) = 0$。我们需要证明，对于足够大的、依赖于 A、B 和 f 的 c，

$$|\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})| \leq C(A,B)c^{d-1}\log(c) \int_0^1 \frac{M_0f(\varepsilon) + M_1f(\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon$$

定理 1.13 的证明几乎完全相同。取定理 1.3 陈述中的 α。我们将特征值划分为相关的几个范围：

$$\begin{aligned} |\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n(cA,B))\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n(cA,B))| \\ &= \sum_{\lambda_n(cA,B) > 1-\alpha^{-c}} |f(\lambda_n(cA,B))| + \sum_{1-\alpha^{-c} \geq \lambda_n(cA,B) \geq \alpha^{-c}} |f(\lambda_n(cA,B))| \\ &\quad + \sum_{\alpha^{-c} > \lambda_n(cA,B) > 0} |f(\lambda_n(cA,B))|. \end{aligned} \tag{7.1}$$

我们将分别对这三个和进行估计。根据定理 1.3，第一个和为空，因为不存在大于 $1-\alpha^{-c}$ 的特征值。接下来估计第二个和。我们将该和分解为接近 1 和接近 0 的特征值，并像定理 1.9 的证明中那样按二进尺度进行分解。设 $k_0(c)$ 满足 $2^{-2^{k_0(c)+1}} < \alpha^{-c} \leq 2^{-2^{k_0(c)}}$。我们

写作

$$\begin{aligned}\sum_{1-\alpha^{-c}\geq\lambda_n(cA,B)\geq\alpha^{-c}}|f(\lambda_n(cA,B))| &\leq \sum_{k=0}^{k_0(c)}\sum_n 1_{\{2^{-2^{k+1}}<\lambda_n(cA,B)\leq 2^{-2^k}\}}|f(\lambda_n(cA,B))| \\ &\quad+\sum_{k=0}^{k_0(c)}\sum_n 1_{\{2^{-2^{k+1}}<1-\lambda_n(cA,B)\leq 2^{-2^k}\}}|f(\lambda_n(cA,B))| \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0(c)}\sum_n 1_{\{2^{-2^{k+1}}<\lambda_n(cA,B)\leq 2^{-2^k}\}}M_0f\left(2^{-2^k}\right) \\ &\quad+\sum_{k=0}^{k_0(c)}\sum_n 1_{\{2^{-2^{k+1}}<1-\lambda_n(cA,B)\leq 2^{-2^k}\}}M_1f\left(2^{-2^k}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0(c)}\left(M_0f\left(2^{-2^k}\right)+M_1f\left(2^{-2^k}\right)\right)\Lambda_{2^{-2^{k+1}}}(cA,B).\end{aligned}$$

第一步，我们进行了二进分割（在 α^{-c} 之外可能存在重复计数）；第二步，我们分别用 M_0f 和 M_1f 对 f 作了有界估计；第三步，我们粗略地将相应区间内的特征值个数估计为 $\Lambda_\varepsilon(cA,\ B)$，其中 ε 取适当值。

对于 $k<k_0(c)$，我们将使用 (1.7)。对于 $k=k_0(c)$，我们必须使用 (1.8)，但可以验证，在这一范围内，该估计与 (1.7) 中的估计成比例，因此这里我们也将使用 (1.7)。于是得到

$$\Lambda_{2^{-2^{k+1}}}(cA,B)\lesssim c^{d-1}2^k\log\left(\alpha c2^{-k}\right)\lesssim c^{d-1}2^k\log(c). \tag{7.2}$$

应用这一结果，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{1-\alpha^{-c}\geq\lambda_n(cA,B)\geq\alpha^{-c}}|f(\lambda_n(cA,B))| &\leq \sum_{k=0}^{k_0(c)}\left(M_0f\left(2^{-2^k}\right)+M_1f\left(2^{-2^k}\right)\right)\Lambda_{2^{-2^{k+1}}}(cA,B) \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{k_0(c)}\left(M_0f\left(2^{-2^k}\right)+M_1f\left(2^{-2^k}\right)\right)c^{d-1}2^k\log(c).\end{aligned}$$

根据这个简单的恒等式

$$2^k=\frac{2}{\log(2)}\int_{2^{-2^k}}^{2^{-2^{k-1}}}\frac{1}{\varepsilon}\,d\varepsilon,$$

我们得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{1-\alpha^{-c}\geq\lambda_n(cA,B)\geq\alpha^{-c}} |f(\lambda_n(cA,B))| \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{k_0(c)} \left(M_0 f\left(2^{-2^k}\right) + M_1 f\left(2^{-2^k}\right)\right) c^{d-1}\log(c)\frac{2}{\log(2)}\int_{2^{-2^k}}^{2^{-2^{k-1}}} \frac{1}{\varepsilon}\,d\varepsilon \\
&\leq c^{d-1}\log(c)\frac{2}{\log(2)}\sum_{k=0}^{k_0(c)}\int_{2^{-2^k}}^{2^{-2^{k-1}}} \frac{M_0 f(\varepsilon)+M_1 f(\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon \\
&\leq c^{d-1}\log(c)\frac{2}{\log(2)}\int_0^{2^{-1/2}} \frac{M_0 f(\varepsilon)+M_1 f(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon,
\end{aligned}$$

这正是 (1.14) 所要求的形式。

最后，我们转向 (7.1) 中的第三个求和。使用完全相同的二进分解，我们最终得到

$$\sum_{\alpha^{-c}>\lambda_n(cA,B)>0} |f(\lambda_n(cA,B))| \leq \sum_{k=k_0(c)}^{\infty} M_0 f\left(2^{-2^k}\right)\Lambda^-_{2^{-2^{k+1}}}(cA,B). \tag{7.3}$$

由于现在处于 $\varepsilon<\alpha^{-c}$ 的情形，由 (1.8) 可知

$$\Lambda^-_{2^{-2^{k+1}}}(cA,B) \lesssim \left(\frac{2^{k+1}}{\log(\frac{2^{k+1}}{d})}\right)^d.$$

我们断言，对于 $k \geq k_0(c)$，有 $\left(\frac{2^{k+1}}{\text{对数}\left(\frac{2^{k+1}}{c}\right)}\right)^{} \leq \frac{2^{(k+1)d}}{(k+1)_d}C(d,\ \alpha)$ 对数$(c)^d$，其中 $C(d,\ \alpha)$ 是一个仅依赖于 d 和 α 的常数。事实上，这等价于 $\frac{k+1}{\text{对数}\left(\frac{2^{k+1}}{c}\right)} \leq C(d,\ \alpha)^{1/d}$ 对数(c)。左侧等于 $\frac{1}{\text{对数}(2)-\frac{\log(c)}{k+1}}$，显然是 k 的递减函数，因此只需验证 $k = k_0(c)$ 时的不等式。利用 $2^{-2^{k_0(c)+1}} \leq \alpha^{-c} \leq 2^{-2^{k_0(c)}}$ 和 $\alpha \geq 4$，我们得到

$$\frac{k_0(c)+1}{\log\left(\frac{2^{k_0(c)+1}}{c}\right)} \leq \frac{\log_2(c)+\log_2(\log_2(\alpha))+1}{\log(\log_2(\alpha))} \leq \log(c)\frac{\frac{1}{\log(2)}+\log_2(\log_2(\alpha))+1}{\log(2)}.$$

从而得到结论：$C(d,\ \alpha)^{1/d} = \frac{1}{\log(2)+\log_2(\log_2(\alpha))+1}\log(2)$。

将其代入 (7.3)，并按照定理 1.9 的证明中的论证，我们得到 t

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha^{-c}>\lambda_n(cA,B)>0}|f(\lambda_n(cA,B))| &\lesssim \log(c)^d\sum_{k=k_0(c)}^{\infty}M_0f\left(2^{-2^k}\right)\frac{2^{(k+1)d}}{(k+1)^d}\\ &\lesssim \log(c)^d\int_0^{2^{-2^{k_0(c)-1}}}\frac{M_0f(\varepsilon)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon\left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d}\,d\varepsilon.\end{aligned}\tag{7.4}$$

当 c 足够大时，最后的积分有限，因为 f 对 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 是迹类可容许的。此外，当 $c\to\infty$ 时，我们有 $k_0(c)\to\infty$，因此该积分可以任意小。特别地，对于 $c>c_0(f,\ A,\ B)$，我们可以假设

$$\int_0^{2^{-2^{k_0(c)-1}}}\frac{M_0f(\varepsilon)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d-1}}{\varepsilon\left(\log\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^d}\,d\varepsilon\le\int_0^1\frac{M_0f(\varepsilon)+M_1f(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon$$

假设 $\int_0^1\frac{M_0f(\varepsilon)+M_1f(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon$ 非零。但只有当 $f\equiv0$ 时，它才可能为零，而此时定理显然成立。因此，对于 $c>c_0(f,\ A,\ B)$，我们有

$$|\mathrm{Tr}f(S_{cA,B})|\le C(A,B)(c^{d-1}\log(c)+\log(c)^d)\int_0^1\frac{M_0f(\varepsilon)+M_1f(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon.$$

对于 $c>1$，我们有 $\log(c)\le c$，由此可得所需的估计，常数 $C(A,\ B)$ 至多扩大一倍。

为了证明定理 1.13，我们唯一需要改变的是：在 (7.2) 中使用 $\log^2(c)$，而不是 log(c)，这会使最终误差界变为 $O(c^{d-1}\log^2(c))$。

注 7.1。我们的论证中至关重要的一点是，(7.1) 中的第三个和最终为 $o(c^{d-1}\log(c))$，否则可能无法得到该界。对于 $d\ge2$，第三个和为 $O(\log(c)^d)=o(c^{d-1}\log(c))$，因此在这种情况下，我们只需知道 δ 的值，以及 $L^2(\mathbb{R}^d)$的迹类可容许性定义中的积分。

对于 $d=1$，按我们所写的证明，还需要知道积分$\int_0^t\frac{M_0f(\varepsilon)\log\log(\frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon}d\varepsilon$趋于 0 的速度，随着 $t\to0$趋于何处，以便得到 $O(\log(c))$，且常数可以任意小。然而，巧合的是，$d=1$ 也是唯一一个 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的迹类可容许性弱于面积律可容许性的情形。特别地，

$$\int_0^t\frac{M_0f(\varepsilon)}{\varepsilon\log\log(\frac{1}{\varepsilon})}d\varepsilon\le\frac{1}{\log\log(\frac{1}{t})}\int_0^t\frac{M_0f(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon.$$

这样我们就会得到，第三个和为 $O(1)$（甚至是 $o(1)$），对于 $d=1$，而值 $c_0(f,A,B)$ 甚至将与 f 无关。

7.2. **两项渐近展开**。 接下来要在与上一小节相同的 A 和 B 假设下，证明双项渐近展开式 (1.15)，但还需额外假设：对于所有 $0 < \varepsilon < 1/2$， f 在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上黎曼可积。我们还不失一般性地假设 f 为实值，因为我们可以先分别对 $\mathrm{Re} f$ 和 $\mathrm{Im} f$ 证明结论；如果 f 满足所有假设，它们也满足这些假设。再利用 (1.15) 两边关于 f 都是线性的这一点即可。最后，与前面一样，我们还将假设 $f(1) = 0$，方法是从 f 中减去 $\theta f(1)$。

回顾一下，对于多项式 [9]，(1.15) 成立。我们首先将 (1.15) 推广到所有支撑在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上的连续函数，其中 $\varepsilon > 0$，然后由此推得，对于所有 $0 < a < b < 1$，(1.15) 对 $f = 1_{[a,b]}$ 成立。这与在 [22]中用于证明定理 2.1 的论证相同。

令 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 为一个连续函数，使得当 $0 < \theta < \varepsilon$ 或 $1-\varepsilon < \theta < 1$ 时， $f(\theta) = 0$。函数 $g(\theta) = f(\theta)/\theta(1-\theta)$ 显然在 [0,1] 上连续。给定 $\delta > 0$，根据斯通-魏尔斯特拉斯定理，我们可以找到一个多项式 P，使得对所有 $\theta \in [0,1]$， $|P(\theta) - g(\theta)| \le \delta$。显然，我们有

$$(P(\theta) + \delta)\theta(1-\theta) \ge f(\theta) \ge (P(\theta) - \delta)\theta(1-\theta).$$

记 $Q(\theta) = (P(\theta) + \delta)\theta(1-\theta)$， $R(\theta) = (P(\theta) - \delta)\theta(1-\theta)$，我们有

$$\operatorname{Tr} Q(S_{cA,B}) \ge \operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) \ge \operatorname{Tr} R(S_{cA,B})$$

除以 $c^{d-1}\log(c)$，对 Q 和 R 应用 (1.15)，并取极限 $c \to \infty$，得到

$$\begin{aligned} I(A,B)\int_0^1 \frac{Q(\theta)}{\theta(1-\theta)}d\theta &\ge \limsup_{c\to\infty} \frac{\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})}{c^{d-1}\log(c)} \\ &\ge \liminf_{c\to\infty} \frac{\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})}{c^{d-1}\log(c)} \ge I(A,B)\int_0^1 \frac{R(\theta)}{\theta(1-\theta)}d\theta \end{aligned}$$

左端与右端之差至多为 $2\delta I(A,B)$，因此取极限 $\delta \to 0$ 并使用夹逼定理，得到

$$\lim_{c\to\infty} \frac{\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})}{c^{d-1}\log(c)} = I(A,B)\int_0^1 \frac{f(\theta)}{\theta(1-\theta)}d\theta,$$

这就证明了当 f 在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$之外连续且为零时，(1.15)成立。

现在，我们转向 $f(\theta) = 1_{[a,b]}(\theta)$，以处理 $0 < a < b < 1$。对于充分小的$\delta > 0$，考虑连续函数 $Q_\delta(\theta) = \max\left(1 - \operatorname{dist}(\theta,[a,b])/\delta, 0\right)$ 以及 $R_\delta(\theta) = \max\left(1 - \operatorname{dist}(\theta,[a+\delta,b-\delta])/\delta, 0\right)$，它们满足 $Q_\delta(\theta) \ge 1_{[a,b]}(\theta) \ge R_\delta(\theta)$。令 $\delta \to 0$，再次应用夹逼定理，我们得到对于 $1_{[a,b]}$ 成立的 (1.15)。

现在，我们转向一般的 $f\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$，其中 $f(1)=0$ 对于 $L^2(\mathbb{R})$ 是面积律可容许且迹类可容许的，并且对于所有$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，在 $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ 上黎曼可积。由在 $[\varepsilon,1-\varepsilon]$-上的黎曼可积性，我们可以找到黎曼上和与下和 $Q_\varepsilon\geq f\geq R_\varepsilon$，使得

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{Q_\varepsilon(\theta)-R_\varepsilon(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta<\varepsilon. \tag{7.5}$$

这里， Q_ε 和 R_ε 是由形如 $1_{[a,b]}$ （其中 $\varepsilon\leq a<b\leq 1-\varepsilon$）的指示函数构成的有限线性组合。定义

$$G_\varepsilon(\theta)=\begin{cases}M_0f(\theta), & 0\leq\theta<\varepsilon,\\ 0, & \varepsilon\leq\theta\leq 1-\varepsilon,\\ M_1f(1-\theta), & 1-\varepsilon<\theta\leq 1.\end{cases}$$

我们有如下不等式链

$$Q_\varepsilon(\theta)+G_\varepsilon(\theta)\geq f(\theta)\geq R_\varepsilon(\theta)-G_\varepsilon(\theta)$$

因此，与之前一样，

$$\begin{aligned}&\limsup_{\varepsilon\to0^+}\left(\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}Q_\varepsilon(S_{cA,B})+\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}G_\varepsilon(S_{cA,B})\right)\\ &\quad\geq\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}f(S_{cA,B})\geq\liminf_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}f(S_{cA,B})\\ &\quad\geq\liminf_{\varepsilon\to0^+}\left(\liminf_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}R_\varepsilon(S_{cA,B})-\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}G_\varepsilon(S_{cA,B})\right).\end{aligned}$$

由于 Q_ε 和 R_ε 是由形如 $1_{[a,b]}$ （其中 $0<a<b<1$）的指示函数构成的有限线性组合，我们知道

$$\begin{aligned}\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}Q_\varepsilon(S_{cA,B})&=I(A,B)\int_0^1\frac{Q_\varepsilon(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta,\\ \liminf_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr}R_\varepsilon(S_{cA,B})&=I(A,B)\int_0^1\frac{R_\varepsilon(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta.\end{aligned}$$

取极限 $\varepsilon\to0$，由 (7.5) 可得

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to0^+}\int_0^1\frac{Q_\varepsilon(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta&=\int_0^1\frac{f(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta,\\ \liminf_{\varepsilon\to0^+}\int_0^1\frac{R_\varepsilon(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta&=\int_0^1\frac{f(\theta)}{\theta(1-\theta)}\,d\theta.\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr} G_\varepsilon(S_{cA,B})=0. \tag{7.6}$$

这里我们使用已知上界 (1.14)。它给出

$$\limsup_{c\to\infty}\frac{1}{c^{d-1}\log(c)}\operatorname{Tr} G_\varepsilon(S_{cA,B})\le C(A,B)\int_0^1\frac{M_0G_\varepsilon(\theta)+M_1G_\varepsilon(\theta)}{\theta}d\theta.$$

对于 $\theta<\varepsilon$，我们有 $M_0G_\varepsilon(\theta)=M_0f(\theta)$ 以及 $M_1G_\varepsilon(\theta)=M_1f(\theta)$，因此

$$M_0G_\varepsilon(\theta)+M_1G_\varepsilon(\theta)\le M_0f(\theta)+M_1f(\theta).$$

对于 $\varepsilon\le\theta<1$，我们有

$$M_0G_\varepsilon(\theta)+M_1G_\varepsilon(\theta)\le 2\max(M_0f(\varepsilon),M_1f(\varepsilon))\le 2(M_0f(\theta)+M_1f(\theta)). \tag{7.7}$$

我们得到，$\frac{M_0G_\varepsilon(\theta)+M_1G_\varepsilon(\theta)}{\theta(1-\theta)}$ 被 L^1-函数 $\frac{2(M_0f(\theta)+M_1f(\theta))}{\theta(1-\theta)}$ 所控制。因此，如果我们证明当 $\varepsilon\to 0^+$ 时它逐点趋于零，那么控制收敛定理将推出 (7.6)。根据 (7.7)，只需证明

$$\max(M_0f(\varepsilon),M_1f(\varepsilon))\to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0^+. \tag{7.8}$$

显然，$\max(M_0f(\varepsilon),M_1f(\varepsilon))$ 是非负的，并且关于 ε 非递减，因此右极限 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\max(M_0f(\varepsilon),M_1f(\varepsilon))=\nu$ 存在且非负。如果 $\nu>0$，则积分

$$\int_0^1\frac{M_0f(\theta)+M_1f(\theta)}{\theta}d\theta$$

发散，这与假设 f 是面积律可容许的相矛盾。因此，$\nu=0$ 得到式（7.6）。

8. 当 A 和 B 是有限个盒子的并时，计算 $\operatorname{Tr}S_{A,B}^2$

在本节中，我们证明定理 1.14 和定理 1.15。计算的关键思路是，迹$S_{A,B}^2=\|S_{A,B}\|_2^2$ 是$S_{A,B}$的希尔伯特–施密特范数的平方。由于$S_{A,B}$是一个核为 (1.1) 的算子，我们有

$$\|S_{A,B}\|_2^2=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|1_A(x)\check{1}_B(x-y)1_A(y)|^2\,dx\,dy.$$

假设 $A=\cup_{k=1}^{n}A_k$ 和 $B=\cup_{l=1}^{m}B_l$ 是内部互不相交的有限个轴平行盒的并。我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|1_A(x)\check{1}_B(x-y)1_A(y)|^2\,dx\,dy\\&\quad=\sum_{k_1,k_2=1}^{n}\sum_{l_1,l_2=1}^{m}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}1_{A_{k_1}}(x)1_{A_{k_2}}(y)\check{1}_{B_{l_1}}(x-y)\check{1}_{B_{l_2}}(y-x)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

对于每个 k_1，k_2，l_1，l_2，变量彼此分离，因此我们可以将问题化简为如下形式的积分

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}1_{I_1}(x)1_{I_2}(y)\check{1}_{J_1}(x-y)\check{1}_{J_2}(y-x)dx\,dy$$

其中某些区间为 I_1，I_2，J_1，$J_2\subset\mathbb{R}$。进行变量替换 $x-y=z$ 并应用富比尼定理，我们得到

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}1_{I_1}(x)1_{I_2}(x+z)\check{1}_{J_1}(z)\check{1}_{J_2}(-z)dx\,dz=\int_{\mathbb{R}}\check{1}_{J_1}(z)\check{1}_{J_2}(-z)|I_1\cap(I_2-z)|dz. \tag{8.1}$$

在傅里叶侧对区间 J_1 和 J_2也进行完全相同的处理。对于每个 $z\in\mathbb{R}$

$$\check{1}_{J_1}(z)\check{1}_{J_2}(-z)=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}1_{J_1}(u)1_{J_2}(v)e^{2\pi iz(u-v)}\,du\,dv=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi izw}|J_1\cap(J_2-w)|\,dw.$$

将其代入 (8.1)，得到

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}e^{2\pi izw}|I_1\cap(I_2-z)||J_1\cap(J_2-w)|\,dz\,dw \tag{8.2}$$

对于固定的区间 I，I'，函数 $\mathbb{R}\ni t\to I\cap(I'-t)$在某个点 p_1之前为零，随后线性变化至某个 p_2，再保持常数至某个 p_3，然后再次线性变化至某个 p_4，之后为零（若 $|I|=|J|$，则 $p_2=p_3$）。因此，根据数对 I_1，I_2 和 J_1，J_2 分成九种情况，我们需要计算如下形式的积分

$$\int_a^b\int_c^d(\alpha z+\beta)(\gamma w+\delta)e^{2\pi izw}dzdw.$$

直接计算表明

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_c^d(\alpha z+\beta)(\gamma w+\delta)e^{2\pi izw}\,dz\,dw\\&\quad=\int_a^b(\gamma w+\delta)\left(\frac{(\alpha d+\beta)e^{2\pi iwd}-(\alpha c+\beta)e^{2\pi iwc}}{2\pi iw}+\frac{\alpha\big(e^{2\pi iwd}-e^{2\pi iwc}\big)}{4\pi^2w^2}\right)dw.\end{aligned}$$

利用指数积分函数$E_1(w)$可以显式地计算这个积分，因为 $\int\frac{e^{ir}}{r^2}dr=-\frac{e^{ir}}{r}+i\int\frac{e^{ir}}{r}$。如果 $0\in[a,b]$，则需要稍加注意，移除一个小区间 $[-\varepsilon,\varepsilon]$，在所得的各个区间上积分，并令 $\varepsilon\to0$

利用 $E_1(w)$在小 w 时已知的渐近式，这将给出对数项。

遗憾的是，由于出现的项数太多，这种策略在实际操作中相当难以实现，因此我们只考虑最简单的一维情形 $A=[0,c]$，$B=[0,1]$。我们将从 (8.2) 出发，取 $I_1=I_2=[0,c]$ 和 $J_1=J_2=[0,1]$。我们发现

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} S^2_{[0,c],[0,1]} &= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{2\pi i z w}\ |[0,c]\cap([0,c]-z)|\ |[0,1]\cap([0,1]-w)|\ dz\,dw \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-c}^{c} e^{2\pi i z w}\,(c-|z|)\,(1-|w|)\,dz\,dw.\end{aligned}$$

利用富比尼定理，并对 w 积分，得到

$$\operatorname{Tr} S^2_{[0,c],[0,1]} = \int_{-c}^{c}(c-|z|)\frac{\sin(\pi z)^2}{\pi^2 z^2}dz = 2\int_0^c (c-z)\frac{\sin(\pi z)^2}{\pi^2 z^2}dz = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\int_\varepsilon^c (c-z)\frac{\sin(\pi z)^2}{\pi^2 z^2}dz.$$

利用 $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ 和 $\int \frac{\sin(t)}{t^2} = -\frac{\cos(t)}{t} - \int \frac{\cos(t)}{t}$，我们可以求得一个显式原函数，并得到

$$2\int_\varepsilon^c (c-z)\frac{\sin(\pi z)^2}{\pi^2 z^2}dz = \left.\frac{2\pi c z\operatorname{Si}(2\pi z) + c\cos(2\pi z) - c + z\operatorname{Ci}(2\pi z) - z\log(z)}{\pi^2 z}\right|_\varepsilon^c.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，原函数的极限为 $\frac{\gamma+\log(2\pi)-\pi^2}{\pi^2}$，这是利用 $\operatorname{Ci}(z)$ 在 z 较小时的已知渐近式得到的。因此，

$$\operatorname{Tr} S^2_{[0,c],[0,1]} = c - \frac{\log(c)}{\pi^2} - \frac{1+\gamma+\log(2\pi)}{\pi^2} + \left(\frac{2}{\pi}c\left(\operatorname{Si}(2\pi c)-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos(2\pi c)}{\pi^2} + \frac{\operatorname{Ci}(2\pi c)}{\pi^2}\right),$$

正如所需。回顾 $\operatorname{Si}(t)$ 和 $\operatorname{Ci}(t)$ 在 t 较大时的已知渐近式

$$\operatorname{Si}(t) = \frac{\pi}{2} - \cos(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{t^{2n+1}} + \sin(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{t^{2n}}, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{Ci}(t) = \sin(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{t^{2n+1}} + \cos(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{t^{2n}}. \tag{8.4}$$

我们注意到，(8.3) 中第一个级数的第一项与 $\frac{\cos(2\pi c)}{\pi^2}$ 相消，而 (8.3) 中第二个级数的第一项与 (8.4) 中第一个级数的第一项相消。因此，振荡项从 $O(\frac{1}{c^2})$ 项开始。将这些级数代入我们的公式，即可得到所需的渐近表达式。

9. 单项渐近

为了一般性地建立单项渐近式 (1.16)，我们首先需要直接对任意两个性质不同的函数建立该结果。对于 $f(\theta) = \theta$，即使不包含任何误差项，我们也已经知道该结果，因此我们将考虑 $f(\theta) = \theta^2$。

命题 9.1. 设 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是有限测度集合。则 $S^2_{cA,B}$ 属于迹类，且

$$\operatorname{Tr} S^2_{cA,B} = c^d |A||B| + o(c^d)$$

当 $c \to \infty$ 时。

证明。只需证明 $\operatorname{Tr}\left[S_{cA,B} - S^2_{cA,B}\right] = o(c^d)$。利用 $S - S^2$ 技巧可得

$$S_{cA,B} - S^2_{cA,B} = |P_{cA} Q_B P_{cA^c}|^2,$$

因此，迹由 $P_{cA} Q_B P_{cA^c}$ 的希尔伯特–施密特范数平方给出。仿照上一节的论证，我们得到

$$\|P_{cA} Q_B P_{cA^c}\|_2^2 = c^d \int_{\mathbb{R}^d} \left|\check{1}_B(x)\right|^2 \left|A \cap \left(A^c - \frac{x}{c}\right)\right| \, dx.$$

函数 $F_A(x) = |A \cap (A^c - x)| = 1_A * 1_{-A^c}(-x)$ 连续且有界，并满足 $F_A(0) = 0$。由控制收敛定理，命题立即得证。

□

定理 *1.16* 的证明。从 f 中减去 $\theta f(1)$，不失一般性地设 $f(1) = 0$。取一个较小的 $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$。我们将 $\operatorname{Tr} f(S_{cA,B})$ 拆分为包含 $\lambda_n > 1 - \varepsilon$ 和 $1 - \varepsilon \geq \lambda_n \geq 0$ 的项：

$$\operatorname{Tr} f(S_{cA,B}) = \sum_{\lambda_n(cA,B) > 1-\varepsilon} f(\lambda_n(cA,B)) + \sum_{1-\varepsilon \geq \lambda_n(cA,B) \geq 0} f(\lambda_n(cA,B)).$$

对于第二个求和，我们直接应用线性界 $|f(\theta)| \leq C\theta$ 和初等不等式 $\theta \leq {}^{\theta}{}_{(1-\theta)\,\varepsilon}$，该不等式对 $0 \leq \theta \leq 1 - \varepsilon$ 成立。于是得到

$$\left| \sum_{1-\varepsilon \geq \lambda_n(cA,B) \geq 0} f(\lambda_n(cA,B)) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \operatorname{Tr}\left[S_{cA,B} - S^2_{cA,B}\right],$$

根据命题 9.1，对于所有固定的 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，这都是 $o(c^d)$。

对于第一项求和，由于 f 在 1 处连续，对于任意 $\delta > 0$，都存在足够小的 ε，使得 $|f(\lambda_n(cA,B))| < \delta$ 当 $\lambda_n(cA,B) > 1 - \varepsilon$ 时成立。由于 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，这意味着 $|f(\lambda_n(cA,B)| < 2\delta\lambda_n(cA,B)$。因此，第一项求和至多为 $2\delta c^d |A||B|$。由于 $\delta > 0$ 可以任意小，这就得到了所需结果。□

现在，我们转而证明定理 1.18。这一次，我们将对 $\mathrm{Tr} f(S_{cA,B})$ 进行更复杂的拆分。

定理 *1.18* 的证明。 与前面的证明一样，不失一般性地假设 $f(1) = 0$。还要指出，由于 f 对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 是迹类可容许的，利用与 (7.8) 的证明类似的论证，只需将面积律可容许条件替换为对于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的迹类可容许条件，即可得到 f 必须满足 $\lim_{\theta\to 0^+} f(\theta) = 0$。

由于 $A,\ B$ 有界，因此存在盒子 $V_A,\ V_B$ 使得 $A \subseteq V_A, B \subseteq V_B$。固定一个足够大的数 D，其值稍后确定（它只依赖于 $V_A,\ V_B$）。令$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 为一个小数。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} f(S_{cA,B}) = &\sum_{\lambda_n(cA,B)>1-\varepsilon} f(\lambda_n(cA,B)) + \sum_{1-\varepsilon\geq\lambda_n(cA,B)\geq\varepsilon} f(\lambda_n(cA,B)) \\ &+ \sum_{\substack{0\leq\lambda_n(cA,B)<\varepsilon \\ n\leq Dc^d}} f(\lambda_n(cA,B)) + \sum_{\substack{0\leq\lambda_n(cA,B)<\varepsilon \\ n>Dc^d}} f(\lambda_n(cA,B)).\end{aligned}$$

对于第一个求和，对任意 $\delta > 0$，我们都可以像前面的证明那样，选取足够小的 $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$，使得它不超过$2\delta|A||B|c^d$。

对于第二个求和，我们只需利用 f 有界以及初等不等式$1 \leq \frac{[S_{cA,B}-S_{cA,B}^2]}{\theta(1-\theta)} \leq \varepsilon(1-\varepsilon)$ 对 $\theta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 成立。因此，第二个求和至多为 $\text{迹}\ \varepsilon\ 1-\varepsilon\ ()\ \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$，根据命题 9.1，这等于 $o(c^d)$。

对于第三个求和，我们利用 $\lim_{\theta\to 0^+} f(\theta) = 0$，从而得出对于任意 $\delta > 0$，我们都可以选取足够小的 $\varepsilon > 0$，使其不超过 $\delta D c^d$。

最后，我们转向最具挑战性的第四个求和。首先，我们将 $|f(\lambda_n(cA,B))|$估计为 $M_0 f(\lambda_n(cA,B))$。由于 $M_0 f$是非递减的，根据引理 4.8，我们可以用$\lambda_n(cV_A, V_B)$给出 $\lambda_n(cA, B)$的上界。因此，剩下要证明的是

$$\sum_{n>Dc^d} M_0 f(\lambda_n(cV_A, V_B)) = o(c^d).$$

我们声称，如果 D 足够大且 $n > Dc^d$，那么 $\lambda_n(cV_A, V_B) \leq \alpha_d^{-c}$，其中 α_d 取自定理 1.1。这等价于说 $N_{\alpha_d^{-c}}(cV_A, V_B) \leq Dc^d$。我们有

$$N_{\alpha_d^{-c}}(cV_A, V_B) = N_{1/2}(cV_A, V_B) + \Lambda_{\alpha_d^{-c}}(cV_A, V_B).$$

第一项根据 (3.2) 为 $O(c^d)$，第二项根据 (1.6) 为 $O(c^d)$。因此，对于足够大的 D，$N_{\alpha_d^{-c}}(cV_A, V_B) \leq Dc^d$ 成立。由此断言，计算 (7.4) 说明

$$\sum_{n>Dc^d} M_0 f(\lambda_n(cV_A, V_B)) \leq \sum_{\lambda_n(cV_a,V_B)\leq\alpha_d^{-c}} M_0 f(\lambda_n(cV_A, V_B)) = O(\log(c)^d) = o(c^d),$$

至此证明完成。 □

9.1. **无界集合的反例**。 在本小节中，我们证明命题 1.17。首先，为方便起见，我们将 f 替换为单调从属函数 g。

断言 9.2. 对于任意函数 $f\colon [0,1]\to\mathbb{C}$，若 $\lim_{x\to 0^+} |f(x)| = \infty$），则存在 $\varepsilon>0$和 $g\colon [0,1]\to[0,\infty)$，使得 g 是非递减的，且 $\lim_{x\to 0^+} g(x)/x = \infty$，并且 $g(x)\le |f(x)|$ 对 $0\le x\le \varepsilon$成立。

证明。 由于 $\lim_{x\to 0^+} |f(x)| = \infty$），对于任意 $k\in\mathbb{N}$，存在 $y_k>0$，使得当 $0<x\le y_k$时有 $|f(x)|\ge 2^k x$。如有必要，逐步减小 y_k，此外还可假设 $y_k\ge 2y_{k+1}$。我们定义 $g(y_k) = 2^{k-1}y_k$，在 y_k 与 y_{k+1} 之间将 g作线性延拓，并令 $x\in[y_1,1]$ 时 $g(x) = g(y_1)$。下面将证明 g 是非递减的，$\lim_{x\to 0^+} g(x)/x = \infty$，且 $g(x)\le |f(x)|$ 对 $0<x\le y_1$成立。

对于第一个断言，只需验证 $g(y_k)\ge g(y_{k+1})$，因为线性函数不会改变单调性。这等价于 $y_k\ge 2y_{k+1}$，而根据我们的假设，这成立。对于第二个断言，我们有

$$\inf_{x\in[y_k,y_{k+1}]}\frac{g(x)}{x} = \frac{g(y_k)}{y_k} = 2^{k-1},$$

当 $k\to\infty$ 时趋于无穷大，因此 $\lim_{x\to 0^+} g(x)/x = \infty$。类似地，我们还有

$$\sup_{x\in[y_k,y_{k+1}]}\frac{g(x)}{x} = \frac{g(y_{k+1})}{y_{k+1}} = 2^{k},$$

因此，对于 $x\in[y_k,y_{k+1}]$，$g(x)\le 2^k x$。另一方面，对于 $x\in[y_k,y_{k+1}]$，我们有 $|f(x)|\ge 2^k x$，由此得到最后一个断言。最后，我们令 $g(0)=0$，以完成证明。□

对于任意有限测度集合 A,B，显然，若 $f(S_{A,B})$ 属于迹类，则$g(S_{A,B})$ 也属于迹类。因此，给定一个正且有限测度的集合 B，只需构造一个集合 A，使得 $g(S_{A,B})$ 不属于迹类，或者等价地，$\operatorname{Tr} g(S_{cA,B}) = \infty$。

我们取 $A=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$，其中每个 A_k的测度为 $\frac{1}{2^k}$。由单调性，$\operatorname{Tr} g(S_{A,B}) \ge \operatorname{Tr} g(S_{A_k,B})$，因此只需使 $\operatorname{Tr} g(S_{A_k,B})$ 趋于无穷大。由于 $\lim_{x\to 0^+} g(x)/x = \infty$，对每个 k，存在 $x_k>0$ 使得 $g(x)\ge 4^k x$，对于 $0<x\le x_k$。若 $S_{A_k,B}$ 没有大于 x_k 的特征值，那么我们有

$$\operatorname{Tr} g(S_{A_k,B}) = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n(A_k,B)) \ge \sum_{n=1}^{\infty} 4^k\lambda_n(A_k,B) = \frac{4^k}{2^k}|B| = 2^k|B|,$$

其随 $k\to\infty$ 趋于无穷。

因此，剩下的工作是构造测度为 $\frac{1}{2^k}$ 的集合 A_k，使得 $S_{A_k,\ B}$ 没有大于 x_k 的特征值。这等价于要求 $\lambda_1(A_k,\ B) \leq x_k$。显然，我们有

$$\lambda_1(A_k, B) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_k, B)^2 \right)^{1/2} = \left(\mathrm{Tr} S_{A_k,B}^2 \right)^{1/2}.$$

因此，如果我们能让 $\mathrm{Tr} S_{A_k,\ B}^2$ 尽可能小，就能得到所需的不等式。我们取一个较大的数 N，并令 A_k 为由 N 个彼此相距很远、长度为 $\frac{1}{N2^k}$ 的区间组成的并集：

$$A_k = \bigcup_{m=1}^{N} \left[Nm, Nm + \frac{1}{N2^k} \right].$$

我们有

$$\mathrm{Tr} S_{A_k,B}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\check{1}_B(x)|^2 \, |A_k \cap (A_k - x)| \, dx.$$

直接观察可知，对于 $\frac{1}{N2^k} < |x| < N - \frac{1}{N2^k}$，有 $A_k \cap (A_k - x) = \varnothing$；而对于$x$ 超出此范围的情形，交集的测度显然至多为 $\frac{1}{2^k}$。因此，

$$\mathrm{Tr} S_{A_k,B}^2 \leq \frac{1}{2^k} \int_{|x| < \frac{1}{N2^k}} |\check{1}_B(x)|^2 dx + \frac{1}{2^k} \int_{|x| > N - \frac{1}{N2^k}} |\check{1}_B(x)|^2 dx.$$

当 $N \to \infty$时，根据控制收敛定理，这两个积分都趋于 0。因此，只要取足够大的 N，就能让 $\mathrm{Tr} S_{A_k,\ B}^2$ 尽可能小，正如所需。

致谢。 Aleksei Kulikov 和 Martin Dam Larsen 获得了 VILLUM 卓越中心量子理论数学中心（QMATH）的资助，资助编号为 10059。

参考文献

[1] Luigi Ambrosio、Nicola Fusco 和 Diego Pallara，《有界变差函数与自由间断问题》，牛津数学专著，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000 年。[2] W. O. Amrein 和 A. M. Berthier，《关于 L^p 函数及其傅里叶变换的支撑性质》，《泛函分析杂志》 **24** (1977)，第 3 期，258–267。[3] Michael Benedicks，《关于支撑在有限勒贝格测度集合上的函数的傅里叶变换》，《数学分析及其应用杂志》**106** (1985)，第 1 期，180–183。[4] A. Beurling 和 P. Malliavin，《关于紧支撑测度的傅里叶变换》，《数学学报》**107**(1962)，291–309。[5] M. Sh. Birman 和 M. Z. Solomjak，《希尔伯特空间中自伴算子的谱理论》，数学及其应用（苏联丛书），D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1987。由 S. Khrushch¨ev 和 V. Peller 从 1980 年俄文原版翻译。

[6] *Aline Bonami* 和 *Abderrazek Karoui*，时频限制算子的谱衰减，《应用与计算调和分析》*42 (2017)*，第 *1* 期，*1–20*。[7] ,有限傅里叶变换的随机离散化及相关核随机矩阵，《傅里叶分析及其应用杂志》*26 (2020)*，第 *2* 期，论文编号 *29*，共 *29* 页。[8] *J. Eisert*、*M. Cramer* 和 *M. B. Plenio*，专题综述：纠缠熵的面积律，《现代物理评论》*82 (2010)*，第 *1* 期，*277–306*。[9] *Søren Fournais*、*Martin Dam Larsen*、*Robert Seiringer* 和 *Jan Philip Solovej*，具有最优正则性假设的 *Widom* 猜想。准备中。[10] *W. H. J. Fuchs*，关于带限信号理论中出现的积分方程的特征值，《数学分析及其应用杂志》*9 (1964)*，*317–330*。[11] *Dimitri Gioev* 和 *Israel Klich*，任意维度费米子的纠缠熵与 *Widom* 猜想，《物理评论快报》*96 (2006)*，第 *10* 期，*100503*，共 *4* 页。[12] *Luis Gomez*、*Jonathan Jaimangal*、*Azita Mayeli* 和 *Tasfia Proma*，多维长球矩阵的特征值分布分析（*2025*），*arXiv:2507.10412*。[13] *Loukas Grafakos*，《经典傅里叶分析》，第二版，数学研究生教材，第 *249* 卷，*Springer*，纽约，*2008*。[14] *Kevin Hughes*、*Arie Israel* 和 *Azita Mayeli*，高维空谱限制算子的特征值分布，*II*，《傅里叶分析及其应用杂志》*31 (2025)*，第 *4* 期，论文编号 *51*，共 *22* 页。[15] ，圆盘上限制算子的波包与特征值估计（*2026*），*arXiv:2601.21224*。[16]*Arie Israel*，时频定位算子的特征值分布（*2015*），*arXiv:1502.04404*。[17] *Arie Israel* 和 *Azita Mayeli*，高维空谱限制算子的特征值分布，《应用与计算调和分析》*70 (2024)*，论文编号 *101620*，共 *28* 页。[18] *Santhosh Karnik*、*Justin Romberg* 和 *Mark A. Davenport*，扁长球波函数与离散长球序列特征值的改进上界，《应用与计算调和分析》*55 (2021)*，*97–128*。[19] *Alexei Kitaev* 和 *John Preskill*，拓扑纠缠熵，《物理评论快报》*96 (2006)*，第 *11* 期，*110404*，共 *4* 页。[20] *Aleksei Kulikov*，骤降区之前时频定位算子特征值的指数下界，《应用与计算调和分析》*71 (2024)*，论文编号 *101639*，共 *8* 页。[21] ,骤降区之前定位算子特征值的精确估计（*2026*），*arXiv:2603.07407*。[22] *H. J. Landau* 和 *H. Widom*，时频限制的特征值分布，《数学分析及其应用杂志》*77 (1980)*，第 *2* 期，*469–481*。[23] *Felipe Marceca*、*Jos´e Luis Romero* 和 *Michael Speckbacher*，两个区域上傅里叶集中算子的特征值估计，《理性力学与分析档案》*248 (2024)*，第 *3* 期，论文编号 *35*，共 *31* 页。[24] *Andrei Osipov*，与扁长球波函数相关的特征值的若干上界，《应用与计算调和分析》*35 (2013)*，第 *2* 期，*309–340*。

[25] David Slepian，关于扁长球波函数的一些渐近展开式，数学与物理杂志**44**（1965），99–140。[26] A. V. Sobolev，具有不连续符号的伪微分算子：*Widom*猜想，美国数学学会回忆录 **222** （2013），第1043号，vi+104。[27] Alexander V. Sobolev，某些伪微分算子的*Schatten–von Neumann*性质，泛函分析杂志 **266** （2014），第9期，5886–5911。[28] , 紧算子理想中的自伴算子函数，伦敦数学会杂志（2）**95**（2017），第1期，157–176。[29] Harold Widom，关于一类具有不连续符号的积分算子，Toeplitz百年纪念（特拉维夫，1981），1982年，第477–500页。Aleksei Kulikov，哥本哈根大学，数学科学系，Universitetsparken 5，2100 哥本哈根，丹麦，lyosha.kulikov@mail.ru

Martin Dam Larsen，哥本哈根大学，数学科学系，Universitetsparken 5，2100 哥本哈根，丹麦，mdl@math.ku.dk