arXiv:2603.23982v1 [math.CT] 25 Mar 2026

右群的预扭理论

ALBERTO FACCHINI 和 CARMELO ANTONIO FINOCCHIARO

摘要. 设S 为一个右群。则在S 上存在两个同余关系$\sim$ 和 $\equiv$，使得 S 是其商半群$S/\sim$和$S/\equiv$的积，其中$S/\sim$ 是一个群，而$S/\equiv$是一个右零半群。若S 的所有幂等元组成的集合为E，并固定一个元素 <style id='e'>e$_0$ $\in E$，则带基点右群 (S,e_0) 是其带基点子半群 (Se_0, e_0) 和 (E, e_0) 在带基点右群范畴中的余积。一般而言，右群范畴中存在一种预扭理论，其中扭对象是右零半群，而无扭对象是群。

2020数学学科分类。 主要分类号 18B40。次要分类号 18E40、20M07。

1. 引言

右群是半群中一类受到广泛研究的对象 [2, 第 1 节11]。每个右群S 在同构意义下都是一个非空右零半群E 与一个群G的积。在应用中，除了右群之外，考虑带基点右群往往也很方便。例如，在研究双群时就会出现这种情况（[11, 第 4] 节和 [6]）。带基点右群是一个有序对（S，e_0），其中S 是一个右群，而e_0 是S的一个幂等元。

右群范畴与带基点右群范畴的行为颇为不同。其中一些差异显而易见。例如，右群范畴 RGrp 没有始对象，而带基点右群范畴 RGrp$_*$ 有一个零对象。然而，这两个范畴之间的主要差异在于，将对象 S 表示为右零半群 E 与群 G的积。在带基点右群范畴 RGrp$_*$ 中，这种表示 $S \cong E \times G$ 同时是积和余积。相较之下，在右群范畴 RGrp 中，我们面对的是一个预扭理论 [5, 7]：对于每个右

关键词与短语。右群、右零半群、带基点右群、前挠理论。第二作者部分得到了 GNSAGA、研究项目 PIAC- ERI “ACIVA - 交换环、其理想与代数簇”以及研究项目 PRIN 2022 “单有理性、希尔伯特概形与奇点”的资助。

群 S，都有一个 RGrp 中的预正合序列 $E(S) \mathrm{i} \rightarrow S \xrightarrow{\pi} S/\sim$，其中 E(S) 是 S 中所有幂等元构成的子半群，$\sim$是 S 上使 E(S) 中所有元素两两同余的最小同余，而商半群 $S/\sim$ 是一个群（第5节）。因此，这是右群范畴 RGrp 中的一个预扭理论，其中预挠对象是非空右零半群，而无扭对象是群。请注意，这个预扭理论并非右群范畴 RGrp 中的挠理论：一方面，范畴 RGrp 没有零对象，只有终对象；另一方面，在这个预扭理论中，两个对象 S 和 S′之间有多个平凡态射，每个 S′中的幂等元对应一个。也就是说，从 S 到 S′ 的每个幂等元 e′ 都恰好对应一个平凡态射，该态射恒等于 e′。平凡态射 $S \rightarrow S$ 在模掉 $\sim$ 之后，诱导出右群范畴 RGrp 中所有且仅有的、作为典范投影 $\pi: S \rightarrow S/\sim$ 右逆的态射。相反，在带基点右群范畴 RGrp_* 中，典范投影$\pi: S \rightarrow S/\sim$ 有唯一的右逆。

带基点右群范畴 RGrp_* 等价于带基点集合范畴 Set_* 与群范畴 Grp 的积范畴（定理 4.2）；右群范畴 RGrp 等价于非空集合范畴 $\mathrm{Set}^{\neq \emptyset}$ 与群范畴 Grp 的积范畴（定理 4.5）。

右群和带基点右群分别构成普遍代数意义下型为 (2,2) 和 (2，0，1) 的簇（第 3 节）。显然，作为群或右群的半群类并不构成型为 (2) 的半群簇的子簇，因为群或右群中对乘法封闭的子集分别不一定是群或右群。

2. 预备概念与术语

2.1. 半群的直积分解。 对于任意一对半群S,T，$S \times T$的外直积是赋予分量乘法的S与T的笛卡尔积。关于内直积分解，请注意，在范畴论中，$S \cong A \times B$（S同构于两个对象A和B的积）等价于存在两个态射 $\varphi: S \rightarrow A$ 和 $\psi: S \rightarrow B$，且它们的乘积 $\varphi \times \psi: S \rightarrow A \times B$ 是一个同构。在这种情况下，φ和 ψ必然是满态射。对于半群，这意味着我们不应将半群S 的直积分解说成两个子半群的直积

A 和B（它们是S的子半群），而应将S 的直积说成S的两个商A 和B 的直积析因。等价地，S 的直积对应于（即是）一对S的同余关系$(\sim, \equiv)$。

注2.1。这解释了为什么讨论群G的直积<u>分解</u>时，我们讨论的不是G作为两个子群的直积的积<u>分解</u>，而是G的两个正规子群的直积。同样，在定理 2.6 中讨论右群S 的直积分解时，我们将看到S 是S 的两个商E 和G 的内直积，并且有两个投影$S \to E$ 和$S \to G$。

另一个例子是含幺环簇。如果我们构造两个含幺环R和S的外直积$R \times S$，那么R 和S 是$R \times S$的同态像；由于单位元不同，它们不是$R \times S$的子环。

显然，半群S 的所有同余关系在包含映射下构成一个有界格，其最小元为恒等同余 $=$，最大元为平凡同余 ω。

现在，若S 是任意集合，且 $\sim, \equiv$ 是S上的两个关系，则可以定义它们的复合关系 $\sim \circ \equiv$，即

$$\{(a,b) \in S \times S \mid \text{ there exists } c \in S \text{ with } a \sim c \text{ and } c \equiv b\}.$$

下面的事实显而易见（另见 [1, 定理 5.9]）。

引理2.2。设 S 是一个半群，$\sim$、$\equiv$是 S 上的两个同余关系。若 $\sim$ 和 $\equiv$ 可交换（即 $\sim \circ \equiv$ 与 $\equiv \circ \sim$ 相等），则在 S 的所有同余关系构成的格中，$\sim$ 和 $\equiv$ 的最小上界 $\sim \vee \equiv$ 与 $\sim \circ \equiv$相等。

对于半群S，群G 作为两个正规子群 A 和B 的直积的内部直积分解，其标准的充要条件（交集$A \cap B$ 是平凡的，且$AB = G$）变为：

定义 2.3。设S 是一个半群，$\sim, \equiv$ 是S上的两个同余关系。若 $\sim$ 和 $\equiv$ 是互补且可交换的同余关系，即 $\sim \circ \equiv$ 等于 $\equiv \circ \sim$，且等于平凡同余 ω，并且$\sim \wedge \equiv$ 是恒等同余 $=$，则称$S = (S/\sim) \times (S/\equiv)$是其同态像 $S/\sim$ 和$S/\equiv$ 的直积 。

参见 [1, 定理 5.9]。定义 2.3 中两个同余 $\sim$和 $\equiv$必须可交换这一事实，源于这样一个事实：如果 A 和 B 是半群，那么外直积 $A \times B$和 $B \times A$可通过交换映射 $s: A \times B \to B \times A$同构，因此存在一个同构 $\varphi: S \to A \times B$

当且仅当存在一个同构 $\psi = e\varphi\colon S \to B \times A$。回顾一下，半群一般不具有同余可置换性，而群和环则具有这种性质（[1, 第 87] 页和 [10] 页上的例子）。定义 2.3 中的条件 “$\sim \circ \equiv$ 等于平凡同余 ω” 等价于乘积态射这一事实

$$S \to (S/\sim) \times (S/\equiv)$$

是一个满射，并且条件“$\sim \wedge \equiv$ 是单位元 $=$”等价于乘积态射 $S \to S/\sim \times S/\equiv$ 是一个单射。当然，定义 2.3 适用于普适代数意义下的任意代数，并且可以从两个同余关系的情形推广到任意有限个同余关系。

定义 2.4。设 A 为任意代数，$\sim_1, \ldots, \sim_n$ 为 A 上的 n 个同余关系。那么，当 $\sim_1, \ldots, \sim_n$ 两两可交换且余独立时，$A = A/\sim_1 \times \cdots \times A/\sim_n$ 是其同态像 $A/\sim_1, \ldots, A/\sim_n$ 的直积；也就是说，对于每个 $i = 1, \ldots, n$，$\sim_i \vee \left(\wedge_{j \neq i} \sim_j\right)$ 等于 A 上的平凡同余 ω，并且 $\wedge_{i=1}^{n} \sim_i$ 是恒等同余 $=$。

关于相关结果，参见 [8, 命题 6.4], [3, 第 2.6 节和 2.8]以及 [4, 页 94]。此外，可将定义 2.4 与 [9]中研究的代数 A 的半直积-分解概念进行比较。给定任意代数 A、A 上的任意同余 $\sim$ 以及 A 的任意子代数 B，若复合态射 $\pi\iota_B\colon B \to A/\sim$ 是同构，则 $A = \sim \times B$ 是同余 $\sim$ 与子代数 B 的半直积，其中 $\iota_B\colon B \to A$ 是包含映射，而 $\pi\colon A \to A/\sim$ 是典范投影。

2.2. **右群**。我们将使用 [11, 第 4] 节和 [2]中的记号、术语及若干结果。若半群 $(S\ \cdot)$ 满足 $a \cdot b = b$ 对所有 $a, b \in S$ 成立，则称它为右零半群 [2, 页 4]。对于这类半群，我们通常将运算 $\cdot$ 记作 π_2，因为它对应于第二典范投影 $\pi_2\colon S \times S \to S$。因此 $a\,\pi_2\,b = b$。类似地，$a\,\pi_1\,b = a$。所以，右零半群就是形如 $(S\ \pi_2)$ 的半群，其中 S 是某个集合。以所有右零半群为对象的半群范畴的全子范畴显然同构于集合范畴 Set，因为任意两个右零半群之间的映射都是半群态射。

对于任意半群 S，令 L 为 S 的所有左单位元构成的集合，即对每个 $x \in S$，都有 $e \in L$，使得 $ex = x$。于是 L 是 S 的子半群，由 S 的运算在其上诱导的运算就是该运算本身，并且有一个嵌入 (L) → (S)。对于每个 $e \in L$，我们可以考虑 e 在 S 中的中心化子 $C(e) = \{x \in S \mid ex = xe\}$。于是每个 C(e) 也是 S 的子半群，其中 e 是双侧单位元，因此 C(e) 是

一个幺半群。此外，每个 C(e) 都是 S 的左理想，也就是说，对每个 $y \in S$，都有 $yC(e) \subseteq C(e)$。如果 S 是左消去或右消去的，那么这些幺半群 C(e) 两两不相交，因为若 $x \in C(e) \cap C(e')$，则 $ex = xe = x$ 且 $e'x = xe' = x$，因而由单侧消去性可得 $e = e'$。所有这些左理想 C(e) 的并是 S 的左理想，因此特别是 S 的子半群。这证明了：如果所有这些左理想 C(e) 的并就是半群 S 本身，且 S 是左消去或右消去的，那么幺半群 C(e) 构成 S 的一个划分，并且嵌入 $(L) \to (S)$ 有一个左逆 $(S) \to (L)$。该嵌入的左逆是一个半群态射，它将划分中块 C(e) 的所有元素映射到 e。右群这一类将在定理 2.6 中引入，它是具有这些性质的左消去半群 S 的一个自然类别；也就是说，S 是其所有左单位元的中心化子的并。

给定一个半群（$S \cdot$），我们用 $E(S \cdot)$ 表示S中所有幂等元构成的集合。回顾以下重要引理。

引理 2.5. [2, 引理 1.26] 右单半群 S 的每个幂等元都是 S 的左单位元。

现在我们将归纳半群成为右群的若干等价条件，其中大多数是众所周知的；为方便读者，我们还将概述证明。我们将着重介绍右群在代数理论方面的一些工具，这些工具对本文其余部分有所帮助。

定理 2.6. [2, 第1.11节，定理 1.27] 关于半群 $S \neq /0$ 的下列断言等价：

(a) S 是右单的（即，对所有 $a \in S$，都有 $aS = S$），且是左消去的。(b) 对任意 $a,b \in S$，都存在唯一的元素 $x \in S$，使得 $ax = b$。(c) S 是右单的，且含有一个幂等元。(d) S 同构于一个非空右零半群 E 与一个群 G 的外直积。(e) 存在元素 $e \in S$，使得：(1) e 是 S 的左单位元，且(2)S 的每个元素相对于 e 都有右逆元。(f) (1) S 有左单位元，且(2) 对于 S 的每个左单位元 e 及每个元素 $a \in S$，a 相对于 e 都有右逆元。

满足前述等价条件的半群称为右群。

证明。(a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftarrow$ (d)。参见 [2, 第1.11节，定理1.27]。

(c) $\Rightarrow$ (d)。这可直接由引理 2.5 得出。令E 为S的所有幂等元构成的集合。根据引理 2.5，E 中的每个元素都是

S 的左单位元，也就是说，对于每个 $e \in E$ 和每个 $a \in S$，都有 $ea = a$。特别地，E 是 S 的非空子半群，且是一个右零半群。接着，任取 $e_0 \in E$，并令 G 为左理想 Se_0,；可以证明，G 是一个以 e_0为单位元的群。容易验证，映射 $G \times E \to S$ 定义为对每个 $(a, e) \in G \times E$，令 $(a, e) \mapsto ae$，是从外直积 $G \times E$ 到半群 S 的半群同构。也就是说，每个 Se_0 都是 E 在 S 中的一个补。这就证明了 (d)。

(c) $\Rightarrow$ (f)。假设半群S满足(c)。由条件(c)和 [2, 引理1.26], S 有一个左单位元。现在设f 是S 的任意一个左单位元，并令$a \in S$。根据条件(b)，方程$ax = f$有唯一解；根据定义，这个解是a关于f的右逆元。这就证明了(c) $\Rightarrow$ (f)。

(f) $\Rightarrow$(e)是显然的。

(e) $\Rightarrow$ (c)。假设(e)成立，设e 是S 的一个左单位元，并且对每个 $a \in S$，令$a^{-1} \in S$ 表示a 关于e的一个右逆元。给定$a,s \in S$中的元素，我们有$s = es = aa^{-1}s$。这证明对所有$a \in S$，都有$aS = S$，也就是说，S 是右单的。此外，e 显然是S的一个幂等元。结论现在显而易见。□

注 2.7。投影 π_G: S $\to$ G、其核 $\sim$以及商群 S/$\sim$。在定理 2.6(d) 中，投影 π_G: S $\to$ G 和 π_E : S $\to$ E 分别定义为 $x \mapsto (x^{-1})^{-1}$ 以及 $x \mapsto (x^{-1})x$。这里，x^{-1} 表示 $x \in S$ 关于固定元素 $e_0 \in E$ 的右逆元（即，x^{-1} 是 S 中唯一满足 $x(x^{-1}) = e_0$ 的元素）。由结合律，并考虑 $x(x^{-1})(x^{-1})^{-1}$，可知 $e_0(x^{-1})^{-1} = xe_0$。由于 E 中所有元素都是 S 中的左单位元，因此 $(x^{-1})^{-1} = xe_0$。投影 π_G 是半群态射，因为对于任意 $x, y \in S$，都有 $xe_0ye_0 = xye_0$。 π_G 的核是 S 上的同余 $\sim$，其定义为：对于任意 $x, y \in S$，若 $xe_0 = ye_0$，则 $x \sim y$。注意，此同余 $\sim$ 不依赖于幂等元 $e_0 \in E$ 的选取，因为对于任意其他 $f \in E$ 以及所有 $x, y \in S$，$xe_0 = ye_0$ 当且仅当 $xf = yf$（因为将 $xe_0 = ye_0$ 右乘 f，可得 $xe_0 f = ye_0 f$，即 $xf = yf$；同理，右乘 e_0 可得，若 $xf = yf$，则 $xe_0 = ye_0$）。每个元素 $x \in S$ 关于 $\sim$ 的同余类都是 xE。

投影 π_E : S $\to$E、其核 $\equiv$，以及商右零半群 S/$\equiv$。正如我们在上一段所说，投影π_E : S $\to$ E 定义为 $x \mapsto (x^{-1})x$。$x \in S$ 的像 $\pi_E(x) = (x^{-1})x$ 是 S 的一个幂等元，因为 $((x^{-1})x)^2 = x^{-1}xx^{-1}x = x^{-1}e_0x = x^{-1}x$。我们有，$\pi_E(x) = (x^{-1})x$ 是满足 $xf = x$ 的唯一元素 $f \in E$。（这一刻画也立即表明 $f = \pi_E(s)$ 属于 E，因为 $sff = sf = s$。它还表明，投影 π_E与同余 $\sim$一样，不依赖于固定元素 e_0 的选择。）

投影 π_E 是一个半群态射，因为对于任意 x, y $\in$ S，若 f 是满足 y f $=$ y 的唯一幂等元，则 xy f $=$ xy 也成立，因此π_E(xy) $=$ f $=\pi_E$(x)π_E(y)。投影 S $\to$ E 的核是 S 上的同余关系 $\equiv$，其对应的商半群 S/$\equiv$ 为 {Se | e $\in$ E }。注意，对于每个 e $\in$ E，都有 Ge $=$ Se$_0$e $=$ Se。因此，每个右群 S 都有一个划分 {Se | e $\in$ E }，其中划分的每个块 Se 都是以 e 为单位元的群，所以 E 是这些群 Se 的所有单位元构成的集合。此外，所有群 Se 都通过群同构 r$_f$: Se $\to$ S f 两两同构，其中 r f (x) $=$ x f 对所有 e, f $\in$ E 均成立；该同构由右乘 f 给出。

现在我们已经在任意右群 S 上得到了两个同余关系 $\sim$和 $\equiv$，显然，按照定义 2.3 的意义，与这一对 ($\sim$, $\equiv$) 相对应的 S 的乘积分解，就是定理 2.6.(d) 中将 S 分解为右零半群 E 和群 G 的乘积分解。

例 2.8。我们举例说明定理 2.6 中的等价命题。设 S 是任意非空集合，并考虑半群 (S π_2)，它显然是一个右零半群。于是 S 是右单的，因为对于所有 a π_2 S，都有 $=$ S；S 也是左消去的，因为 a π_2 b $=$ a π_2 c 蕴含 b $=$ c。对于每个 a, b $\in$ S，都存在唯一的元素 x $\in$ S，使得 ax $=$ b，即 x 为 b。S 的每个元素都是幂等元。S 的每个元素都是左单位元。对于 S 中任意两个元素 e,a $\in$ S，a 关于 e 的右逆元是 e。

3. 右群范畴

集合上的群作用范畴，其对象是所有三元组 (G, X φ)，其中 G 是一个群，X 是一个集合，且 φ: G $\to$ Aut$_{\mathrm{Set}}$(X)，g $\mapsto \varphi_g$，是一个群态射。显然，Aut$_{\mathrm{Set}}$(X) 是对称群 Sym$_X$。态射 (G, X φ) $\to$ (H,Y ψ) 是一个有序对 (Φ, f)，其中 Φ: G $\to$ H 是一个群态射，f : X $\to$ Y 是一个映射，并且对于每个 g $\in$ G 和 x $\in$ X，都有 $\psi_{\Phi(g)}$(f (x)) $=$ f (φ_g(x))。不难看出，若 (Φ, f) : (G, X φ) $\to$ (H,Y ψ) 是集合上的群作用范畴中的一个态射，则 (Φ, f) 是一个同构，当且仅当 Φ 是群之间的同构且 f 是一个双射。若 1 : G $\to$ Aut$_{\mathrm{Set}}$(X) 是平凡群态射，我们称 (G, X , 1) 为 G 在 X 上的平凡群作用。

类似地，带基点集合上的群作用范畴的对象是所有四元组 (G, X , x0, φ)，其中 G 是一个群，X 是一个集合，x_0 是 X 的固定元素（因此 (X , x_0) 是一个带基点集合），且 φ: G $\to$ Aut$^{\mathrm{Set}_*}$(X , x_0) 是一个群态射。这里，Aut$^{\mathrm{Set}_*}$(X , x_0) 只是所有保持 x_0, 不变的 X 上置换所构成的群，也就是说，是所有满足 f (x_0) $=$ x_0 的双射 f : X $\to$ X。态射 (G, X , x0, φ) $\to$ (H,Y, y0, ψ) 是一对 (Φ, f)，其中 Φ: G $\to$ H 是一个群

态射，$f: X \to Y$是一个映射，$f(x_0) = y_0$，并且 $\psi_{\Phi(g)}(f(x)) = f(\varphi_g(x))$ 对每个 $g \in G$ 和 $x \in X$都成立。

带基点右群范畴的对象是有序对（S, e_0），其中 S 是右群，e_0 是 S 的幂等元；其态射 f：$(S, e_0) \to (S', e_0')$ 是所有满足$f(e_0) = e_0'$的半群态射 $f: S \to S'$。

注意，带基点右群 $(S, \cdot, e0, ^{-1})$ 确实构成一个代数簇，其中 $\cdot$ 是二元且满足结合律的，e_0 是零元运算，$^{-1}$ 是单目运算，并且对每个 $x \in S$，都有 $e_0 x = x$；对每个 $x \in S$，都有 $xx^{-1} = e_0$（定理 2.6(e)）。此外，右群作为代数 $(S, \cdot, \backslash)$ 来看，带有两个二元运算 $\cdot$ 和 $\backslash$，并满足三个恒等式 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$、$x \cdot (x \backslash y) = y$ 和 $x \backslash (x \cdot y) = y$，按照普适代数的意义也构成一个代数簇。

命题 3.1。若 S 是一个右群，$e \in E := E(S)$，$\iota_e: Se \to S$ 和$\iota_E: E \to S$ 是包含映射，$r_e: S \to Se$ 定义为：对于每个 $s \in S$，$r_e(s) = se$；而 $\pi_E: S \to E$ 定义为："$\pi_E(s)$ 是 S 中满足 $s\pi_E(s) = s$ 的唯一元素"，那么分解 $S = Se \times E$ 表明：

(1) (S, r_e, π_E) 是半群范畴中 Se 和 E 的积。

(2) $((S, e)\ \iota_e, \iota_E)$ 是带基点右群范畴中 (Se, e) 和(E, e) 的余积。

(3) $(S\ \iota_e, \iota_E)$ 不是半群范畴中 Se 和 E 的余积。

证明。映射 φ：$S \to Se \times E$在同态像 Se 和 E的外直积 $Se \times E$中定义为：对每个 $s \in S$，$\varphi(s) = (se\ \pi_E(s))$，是一个半群同构，因为

$$\varphi(ss') = (ss'e, \pi_E(ss')) = (ses'e, \pi_E(s')) = \\ = (se, \pi_E(s))(s'e, \pi_E(s')) = \varphi(s)\varphi(s'),$$

而 φ的逆映射是映射 φ^{-1}：$Se \times E \to S$，定义为：对于每个 $(x, y) \in Se \times E$，$\varphi^{-1}(x, y) = xy$。

为了证明 (1)，任取半群 T 以及半群态射f_e：$T \to Se$和 f_E：$T \to E$。定义映射 f：$T \to S$，令对每个 $t \in T$，$f(t) = f_e(t) f_E(t)$。于是，f 是半群态射，因为对于每个 $t, t' \in T$，有

$$f(t)f(t') = f_e(t)f_E(t)f_e(t')f_E(t') = \\ = f_e(t)f_e(t')f_E(t') = f_e(tt')f_E(tt') = f(tt').$$

此外，$r_e f = f_e$且 $\pi_E f = f_E$，因为对于每个 $t \in T$，都有 $r_e f(t) = f_e(t)\ f_E(t)e = f_e(t)e = f_e(t)$，以及 $\pi_E f(t) = \pi_E(f_e(t)\ f_E(t)) = f_E(t)$。

关于f的唯一性，设$g: T \to S$是任意另一个半群态射，使得$rg = f_e$且 $\pi_E g = f_E$。那么，对于每个$t \in T$，我们

有 g(t) $=\varphi^{-1}\varphi$g(t) $=\varphi^{-1}$(g(t)e π_E(g(t))) $=\varphi^{-1}$(r$_e$g(t) π_Eg(t)) $=\varphi^{-1}$(f$_e$(t), f$_E$ (t)) $=$f$_e$(t) f$_E$(t) $=$f (t)，因此 g $=$f。

就 (2) 而言，设 (T, e$_T$) 是一个带基点右群，且 f$_e$: Se $\to$ T 和 f$_E$: E $\to$ T 是两个半群态射，并且 f$_e$(e) $=$f$_E$(e) $=$e$_T$。定义映射 ψ: S $\to$T，使得对每个 s $\in$S， ψ(s) $=$f$_e$(se) f$_E$(π_E(s))。注意，E 的所有元素都是幂等元，因此像 f$_E$(E) 中的每个元素都是 T 的幂等元。根据引理 2.5，f$_E$ (E) 中的每个元素都是 T 的左单位元。映射 ψ是半群态射，因为对于每个 s, s′ $\in$ S，我们有

$$\begin{aligned}\psi(ss') &= f_e(ss'e)f_E(\pi_E(ss')) = \\ &= f_e(ses'e)f_E(\pi_E(s')) = f_e(se)f_e(s'e)f_E(\pi_E(s')) = \\ &= f_e(se)f_E(\pi_E(s))f_e(s'e)f_E(\pi_E(s')) = \psi(s)\psi(s').\end{aligned}$$

此外，对于每个 $s \in S$，我们有

$$\psi\iota_e(se) = \psi(se) = f_e(se)f_E(e) = f_e(se)f_e(e) = f_e(se),$$

因此 $\psi\iota_e = f_e$。类似地，

$$\psi\iota_E(e') = \psi(e') = f_e(e'e)f_E(\pi_E(e')) = f_e(e)f_E(e') = e_T f_E(e') = f_E(e'),$$

因此 $\psi\iota_E = f_E$。

为证唯一性，设 ψ': $S \to T$ 是任意另一个半群态射，使得 $\psi'\iota_e = f_e$ 且 $\psi'\iota_E = f_E$。那么，对每个 $s \in S$，都有 s =(se)π_E(s)，其中 $se \in Se$ 且 $\pi_E(s) \in E$，因此

$$\psi'(s) = \psi'(se)\psi'(\pi_E(s)) = \psi'\iota_e(se)\psi'\iota_E(\pi_E(s)) = f_e(se)f_E(\pi_E(s)) = \psi(s).$$

因此 $\psi' = \psi$。

对于 (3)，令 A $=$ {x, y} 为一个含两个元素的集合，并令 W 为由集合 A 自由生成的自由半群，因此 W 是字母表 A 上所有长度为 ≥ 1 的字的半群，运算为连接。令$\simeq$ 为 W 上由两个有序对 (x, xx) 和 (y, yy) 生成的同余。设 T :$=$ W /$\simeq$，使得它的两个元素 [x]$_\simeq$和 [y]$_\simeq$是两个不同的幂等元。考虑常值半群态射 f$_e$: Se $\to$ T 和 f$_E$: E $\to$ T，它们定义为对每个 se $\in$ Se 和 e′ $\in$ E，都有 f$_e$(se) $=$ [x]$_\simeq$ 且 f$_e$(e′) $=$ [y]$_\simeq$。那么不存在映射 ω: S $\to$ T 使得 $\omega\iota_e$ $=$ f$_e$ 且$\omega\iota_E$ $=$f$_E$，因为 ω(e) $=$ $\omega\iota_e$(e) $=$f$_e$(e) $=$ [x]$_\simeq$且 ω(e) $=$ $\omega\iota_E$(e) $=$f$_E$(e) $=$ [y]$_\simeq$，矛盾。□

带基点右群范畴是一个具有零对象的范畴，并且根据命题 3.1，(S, $re, \pi_E, \iota_e, \iota_E$) 是一个双积。

推论 3.2. 若 S 是一个右群， $\pi_\sim : S \to S/\sim$ 由 $\pi_E(s) = sE$ 定义，其中每个 $s \in S$；而 $\pi_E : S \to E$ 由“$\pi_E(s)$ 是 S 中满足 $s\pi_E(s) = s$ 的唯一元素”定义，那么 (S $\pi_\sim, \pi_E$) 是 $S/\sim$与 E 在半群范畴中的积。

证明可由同构 $re\colon S/\sim \to Se$ 以及命题 3.1(1) 得出。

在 [11]中，右群与带基点右群之间的区别并没有如此明确地表述。

定理 3.3。 存在一个从带基点集合上的群作用范畴到带基点右群范畴的忠实、本质满函子。

证明。 对于带基点集合 (X,x_0) 上的任意群作用 $(G,X,x0,\varphi)$，将其对应到半群 $(X\times G)\varphi:=X\times G$，其运算定义如下：

$$(x,g)(x',g')=(\varphi_g(x'),gg')$$

对所有 (x, g), (x′, g′) ∈X ×G。很容易验证，半群 X ×G 是一个右群。相对于其幂等元 $(x0,1_G)$，它是带基点的。给定带基点集合上的左群作用范畴中的任意态射 (G, X , x0, φ) →(H,Y, y0, ψ)，该态射是一个有序对 (Φ, f)，其中 Φ: G →H 是群态射，f : X →Y 是映射，f (x0) =y0，并且对每个 g ∈G 和每个 x ∈X，都有 $\psi_{\Phi(g)}$(f (x)) = f (φ_g(x))。对于 (Φ, f) : (G, X φ) →(H,Y ψ)，可以将其对应到半群态射 F (Φ, f) = f ×Φ: X ×G →Y ×H，其定义为 (f ×Φ)(x, g) =(f (x) Φ(g))，其中 x ∈X，g ∈G。显然，映射 (Φ, f) →F (Φ, f) = f ×Φ 是单射。也就是说，我们有一个忠实函子 F，其定义为 F (G, X , x0, φ) =(X ×G, (x0, 1_G))，且 F(Φ, f) = f ×Φ。

给定任意带基点右群（S,e_0），将其关联到四元组（Se_0,$E(S)$,x_0, $\mathbb{1}$），其中 $1:Se_0\to \mathrm{Sym}^{E(S)}$是平凡作用，对于该作用，$\mathbb{1}_{se_0}\colon E(S)\to E(S)$ 对每个 $se_0\in Se_0$ 都是 $E(S)$ 上的恒等映射。于是，$F(Se_0,E(S),x_0,\mathbb{1})=E(S)\times Se_0$,是运算为

$$(x,se_0)(x',s'e_0)=(x',ss'e_0'),$$

使得 $F(Se_0,E(S),x_0,\mathbb{1})\cong S$。这证明 F 是本质满的。

□

定理 3.4. 存在一个从非空集合上的群作用范畴到右群范畴的忠实本质满函子。

证明。证明与定理 3.3 的证明类似。定义从非空集合上的左群作用范畴到右群范畴的函子 F 如下。对于非空集合 X 上的任意左群作用 (G, X φ)，关联半群 (X ×G)φ:= X ×G，其运算定义为：对于所有 (x, g)、(x′, g′) = (φ_g(x′), gg′)，(x, g)、(x′)、(g′) ∈X ×G。很容易验证，带有此运算的 X ×G 是一个右群。令 F(G, X φ) =(X ×G)φ。给定非空集合上的左群作用范畴中的任意态射 (G, X φ) →(H,Y ψ)，在该

范畴中，我们有该态射是一个二元组 (Φ, f)，其中 $\Phi: G \to H$ 是一个群态射，$f: X \to Y$ 是一个映射，并且对于每个 $g \in G$ 以及每个 $x \in X$，都有 $\psi_{\Phi(g)}(f(x)) = f(\varphi_g(x))$。可以将 $(\Phi, f): (G, X, \varphi) \to (H, Y, \psi)$ 关联到半群态射 $F(\Phi, f) = f \times \Phi: (X \times G)_\varphi \to (Y \times H)_\psi$，其定义为：对于所有 $x \in X$、$g \in G$，$(f \times \Phi)(x, g) = (f(x), \Phi(g))$。这样，我们便得到一个从非空集合上的群作用范畴到右群范畴的忠实函子。

给定任意右群 S，考虑三元组 $(S/\sim, E(S), 1)$，其中 $\sim$ 是 S 上的同余，定义为：若存在某个幂等元 e（见注 2.7；S 中 $x \in$关于同余 $\sim$ 的同余类为 xE），则 $x \sim y$ 当且仅当 $xe = ye$。并且 $1: S/\sim \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Set}}(E(S))$ 是平凡群态射。那么

$$F(S/\sim, E(S), \mathbb{1}) = (E(S) \times S/\sim)_{\mathbb{1}} = E(S) \times S/\sim \cong S,$$

根据定理 2.6 和注 2.7。这证明 F 是本质满的。□

命题 3.5. 设 F 是定理 *3.4* 中定义的函子，G 是一个群，X 是任意非空集合。那么，对于每个群态射 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Set}}(X)$，右群 $F(G, X, \varphi)$ 与 $F(G, X, \mathbb{1})$ 同构，其中 $\mathbb{1}$ 是平凡群态射。

证明。令 $\eta: F(G, X, 1) \to F(G, X, \varphi)$ 为如下映射：对所有 $x \in X$、$g \in G$，令 $\eta(x, g) := (\varphi_g(x), g)$。不难看出，$\eta$ 是一个右群同构。□

注 3.6。注意，定理 3.4 中定义的函子 F 不是满的。事实上，考虑一个群 G 和一个非空集合 X，使得存在一个非平凡群态射 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Set}}(X)$。根据命题 3.5，右群 $F(G, X, \varphi)$ 和 $F(G, X, 1)$ 同构。另一方面，群作用 (G, X, φ) 和 $(G, X, 1)$ 并不同构：确实，若存在同构 $(\Phi, f): (G, X, \varphi) \to (G, X, 1)$，其中 $\Phi: G \to G$ 是某个群自同构，且 $f: X \to X$ 是某个双射，那么根据群作用范畴中态射的定义，对所有 $x \in X$、$g \in G$，都有 $f(x) = f(\varphi_g(x))$；这将迫使每个 φ_g 都是平凡的（因为 f 是双射），也就是说 $\varphi = \mathbb{1}$，矛盾。这表明 F 不是满的。

类似地，可以看出定理 3.3 中定义的函子也不是满函子。

4. 右群的同态

小节 2.2 和第 3 节中的结果表明，有必要研究两个右群之间的半群态射 $\varphi: S \to S'$。设 S,S'。

用 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{SGrp}}(S, S')$ 表示所有此类态射构成的集合。由于幂等元在半群态射下的像仍是幂等元，因此 φ 将 S 的所有幂等元组成的集合 $E = E(S)$ 映入 S' 的所有幂等元组成的集合 $E' = E(S')'$。因此，可以考虑 $\varepsilon: E \to E'$ 在 E 上的限制 φ。取一个元素 $e_0 \in E$。此时 φ 将群 Se_0 映入群 $S'\varepsilon(e_0)$，因此可以考虑限制 $\varphi|_{Se_0}: Se_0 \to S'\varepsilon(e_0)$，它是一个群态射。

命题 4.1。 设 S、S' 为右群。对于每个半群态射 $\varphi: S \to S'$，考虑上一段中描述的三元组 $(\varepsilon: E \to E', e_0, \varphi|_{Se_0}: Se_0 \to S'\varepsilon(e_0))$。那么：

(a) 三元组 $(\varepsilon: E \to E', e_0, \varphi|_{Se_0}: Se_0 \to S'\varepsilon(e_0))$ 完全决定半群态射 $\varphi: S \to S'$。

(b) 对于任意映射 $\varepsilon: E \to E'$、任意元素 $e_0 \in E$ 以及任意群态射 $\psi: Se_0 \to S'\varepsilon(e_0)$，三元组 $(\varepsilon, e0, \psi)$ 对应于一个半群态射 $\varphi: S \to S'$，也就是说，存在一个半群态射 $\varphi: S \to S'$，使得对于每个 $e \in E$，$\varepsilon(e) = \varphi(e)$，并且对于每个 $x \in Se_0$，$\psi(x) = \varphi(x)$。

(c) 两个这样的三元组 $(\varepsilon_1, e_1, \psi_1), (\varepsilon_2, e_2, \psi_2)$ 对应于同一个半群态射 $\varphi: S \to S'$，当且仅当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$，且图表

(1)
$$\begin{array}{ccc} Se_1 & \xrightarrow{\psi_1} & S'\varepsilon_1(e_1) \\ {\scriptstyle r_{e_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_{\varepsilon_2(e_2)}} \\ Se_2 & \xrightarrow{\psi_2} & S'\varepsilon_2(e_2) \end{array}$$

可交换。

证明。(a) 对于给定的半群态射 $\varphi: S \to S'$，考虑三元组 $(\varepsilon: E \to E', e0, \varphi|_{Se_0}: Se_0 \to S'\varepsilon(e_0))$。若考虑带基点右群 (S, e_0) 和 $(S', \varepsilon(e_0))$，则 $\varphi: S \to S'$ 成为带基点右群之间的态射 $\varphi: (S, e_0) \to (S', \varepsilon(e_0))$。根据命题 3.1((1) 和 (2))，S 既是 Se_0 与 E 的积，也是它们的余积。类似地，S' 既是 $S'\varepsilon(e_0)$ 与 E' 的积，也是它们的余积。现在，S 中的每个元素 $s \in S$ 都能唯一地写成 Se_0 中的元素 se_0 与 E 中的元素 $\pi_E(s)$ 的乘积。因此

(2) $$\varphi(s) = \varphi((se_0)(\pi_E(s))) = \varphi(se_0)\varphi(\pi_E(s)) = \varphi|_{Se_0}(se_0)\varepsilon(\pi_E(s)).$$

因此，三元组 $(\varepsilon: E \to E', e0, \varphi|_{Se_0}: Se_0 \to S'\varepsilon(e_0))$ 完全确定了 $\varphi: S \to S'$。

(b) 给定 (b) 中的三元组 $(\varepsilon, e0, \psi)$，定义 $\varphi\colon S \to S'$，令对每个$s \in S$，$\varphi(s) = \psi(se_0)\varepsilon(\pi_E(s))$。那么 φ 是半群态射，因为

$$\varphi(s_1)\varphi(s_2) = \psi(s_1e_0)\varepsilon(\pi_E(s_1))\psi(s_2e_0)\varepsilon(\pi_E(s_2)) = \\ = \psi(s_1e_0)\psi(s_2e_0)\varepsilon(\pi_E(s_2)) = \psi(s_1s_2e_0)\varepsilon(\pi_E(s_1)\pi_E(s_2)) = \\ = \varphi(s_1s_2).$$

(c) 两个三元组（ε_1，$e1$，ψ_1），（ε_2，$e2$，ψ_2）对应于同一个半群态射 $\varphi\colon S \to S'$，当且仅当

$$\varphi(s) = \psi_1(se_1)\varepsilon_1(\pi_E(s)) = \psi_2(se_2)\varepsilon_2(\pi_E(s))$$

对于每个 s ∈S。因此，如果（ε_1，e1，ψ_1）、（ε_2，e2，ψ_2）对应于同一个半群态射 φ：S → S′，则 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$，因为它们都是 φ 到 E 的限制。此外，图表 (1) 可交换，因为对于每个 s ∈S，$r_{\varepsilon_2}(e_2)\psi_1(se_1) = r_{\varphi(e_2)}\varphi(se_1) = \varphi(se_1)\varphi(e_2) = \varphi(se_1e_2) = \varphi(se_2)$，并且$\psi_2 r_{e_2}(se_1) = \psi_2(se_1e_2) = \psi_2(se_2) = \varphi(se_2)$。因此 $r_{\varepsilon_2}(e_2)\psi_1 = \psi_2 r_{e_2}$，且图表可交换。

对于逆向证明，我们必须证明：如果 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 和图表 (1) 可交换，那么对每个 s ∈S，都有 $\psi_1(se_1)\varepsilon_1(\pi_E(s)) = \psi_2(se_2)\varepsilon_2(\pi_E(s))$。现在，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 以及图表的可交换性意味着 $r_{\varepsilon_1}(e_2)\psi_1(se_1) = \psi_2 r_{e_2}(se_1)$，也就是说，对每个 s ∈ S，都有 $\psi_1(se_1)\varepsilon_1(e_2) = \psi_2(se_2)$。在右侧乘以 $\varepsilon_1(\pi_E(s)) = \varepsilon_2(\pi_E(s))$，得到 $\psi_1(se_1)\varepsilon_1(\pi_E(s)) = \psi_2(se_2)\varepsilon_2(\pi_E(s))$，正如所需。□

注意，图表 (1) 中的竖直箭头是群态射。更一般地，对于任意两个元素 $e,f \in E = E(S)$，其中 S 是右群，映射 $r_f\colon Se \to Sf$，$r_f(s) = sf$对所有 $s \in Se$均成立，是一个群同构，因为

$$r_f(se)r_f(s'e) = sefs'ef = ss'ef = ses'ef = r_f((se)(s'e)).$$

其逆映射为映射 $r_e\colon Sf \to Se$。这就是为什么限制$\varphi|_{Se_0}$ 决定了 φ 在划分 $\{Se \mid e \in E\}$ 的所有块上的行为。

由命题 4.1 可容易地证明：

定理 4.2。带基点右群的范畴 RGrp_* 等价于积范畴 $\mathsf{Set}_* \times \mathsf{Grp}$，后者由带基点集合的范畴 Set_* 和群的范畴 Grp构成。

4.1. **右逆 $\varphi\colon S/\sim \to S$ 到典范投影 $\pi\colon S \to S/\sim$**。为了尽可能减少引入带基点右群这一人为概念的必要性，考虑典范投影 $\pi\colon S \to S/\sim$ 的右逆是合适的。这里S 是一个右群，而 $\sim$ 是注 2.7 中所考虑的 S 上的半群同余。对于任意 $e \in E$，$\sim$ 是半群态射r_e的核：$S \to S$ 定义为

对每个$x \in S$，$r_e(x) = xe$。每个$x \in S$的模 $\sim$ 同余类为$xE = \{xe \mid e \in E\}$。对于任意右群S，商半群$S/\sim$是一个群。

若 ψ: S $\to$ S′ 是两个右群 S 和 S′之间的任意半群态射，则 ψ 诱导一个群态射 $\tilde{\psi}$: S/∼ → S′/∼。为此，固定一个元素 $e_0 \in E$。若 s,t $\in$ S 且 s $\sim$ t，则 $se_0 = te_0$, ，因此 $\psi(s)\psi(e_0) = \psi(t)\psi(e_0)$。于是 $\psi(s) \sim \psi(t)$。因此 $\tilde{\psi}$ 是一个定义良好的映射。由此，S $\mapsto$ S/∼, $\psi \mapsto \tilde{\psi}$是一个函子 RGrp →Grp。

命题4.3。对于右群 S，半群态射中作为典范投影 $\pi: S \to S/\sim$ 的右逆元的集合，与集合 $E(S)$之间存在一一对应。若 $e_0 \in E(S)$，与 e_0 对应的 π 的右逆同态是半群态射 $r_{e_0}: S/\sim \to S$，它由 e_0的右乘 $r_{e_0}: S \to S$诱导。

证明。若 φ: S/∼ → S 是任意一个满足 $\pi\varphi = \mathrm{id}_{S/\sim}$ 的半群态射，那么 φ 必须将群 S/∼ 的单位元 E 映射到 S 中的某个幂等元 e_0，也就是说，映射到满足 $e_0 \in E := E(S)$ 的元素。我们有直积析因 S = $Se_0 \times$E，相应地，也有平凡的直积析因 S/∼ = (S/∼)E × {E}。下面证明，典范投影 π: S → S/∼ 在 $Se_0 \to S/\sim = (S/\sim)E$ 上的限制 $\pi|_{Se_0}$ 是一个（半）群同构。映射 $\pi|_{Se_0}$ 定义为：对每个 $se_0 \in Se_0$，$\pi|_{Se_0}(se_0) = se_0E = sE$。它是单射，因为若 s, s′ ∈ S 且 sE =s′E，那么在右侧乘以 e_0 后可得 $se_0 = s'e_0$。它是满射，因为若 sE ∈S/∼，那么在 s 的右侧乘以 e_0，可得 $\pi|_{Se_0}(se_0) = sE$。因此，$\pi|_{Se_0}$ 是一个同构。

沿用命题 4.1 中的记号，这个三元组

$$(\varepsilon: E(S/\sim) \to E(S), E, \varphi|_{S/\sim}: S/\sim \to Se_0)$$

对应于半群态射 φ: S/∼ → S，并满足ε: E(S/∼) → E(S) 将 E(S/∼) 的唯一元素 E 映射到 e_0。此外，$\pi\varphi = \mathrm{id}_{S/\sim}$ 蕴含 $\pi|_{Se_0}\varphi|^{Se_0} = \mathrm{id}_{S/\sim}$。由于 $\pi|_{Se_0}: Se_0 \to S/\sim = (S/\sim)E$ 是一个同构，因此可得 $\pi|_{Se_0}$: $Se_0 \to S/\sim$ 和 $\varphi|^{Se_0}$: S/∼ → Se_0 互为群同构的逆映射。因此，$\varphi|^{Se_0}$: S/∼ → Se_0 将 S/∼ 中任意元素 sE 映射到 se_0。现在，r_{e_0}: S → S 诱导出一个单射态射 r_{e_0}: S/∼ →S，并且不难看出，r_{e_0} 也对应于与 φ 相同的三元组 (ε, E $\varphi|_{S/\sim}$)。□

命题 4.4。(a)若$(S\ \cdot)$是右群，且 $e, f \in E(S)$，那么$(S\ \cdot, e)$和$(S\ \cdot, f)$是同构的带基点右群。

(b) 将每个带基点右群 $(S\ \cdot, e)$ 关联到右群 $(S\ \cdot)$ 的遗忘函子 RGrp $_*$ →RGrp 是忠实且本质满的函子。

证明。 (a) 设 $\varepsilon: E(S) \to E(S)$ 是任意一个将 e 映到 f 的双射。令 rf: $Se \to Sf$ 为由 f 右乘所给出的群同构。三元组 (ε, e, r_f) 对应于一个同构 $(S\ \cdot, e) \to (S\ \cdot, f)$。(b) 的证明很简单。□

定理 4.5. 右群范畴等价于 $\mathsf{Set}_{\neq\emptyset}$ （非空集合范畴）与 Grp （群范畴）的积范畴。

证明. 该范畴等价由以下函子给出:

$$F: \mathsf{RGrp} \to \mathsf{Set}_{\neq\emptyset} \times \mathsf{Grp}$$

它将每个右群 S 对应到一对对象 (E(S), S/∼)，其中 ∼ 是任意右乘 r_e: S → S 的核（注 2.7 ）。函子 F 将每个右群态射 f : S →S′ 对应到一对态射 $\widetilde{\ }$(f $|_E$: E(S) → E(S′), f : S/∼ → S′/∼)，其中 f $|_E$ 是 f 在 $\widetilde{\ }$E(S) 上的限制，而 f 是由 f 诱导的从 S/∼ 到 S′/∼ 的群态射。为了证明 F 满且忠实，我们必须证明映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathsf{RGrp}}(S, S') &\to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(E(S), E(S')) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(S/\sim, S'/\sim), \\ f &\mapsto (f|_{E(S)}, \widetilde{f}) \end{aligned} \tag{3}$$

对于所有右群，′均为双射。任取元素 $_0 \in$ 。则右乘 e_0 是一个满射半群态射，其核为∼，因此它诱导出一个（半）群同构 e_0。由于是半群态射，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{r_{e_0}} & Se_0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f|_{Se_0}} \\ S' & \xrightarrow[r_{f(e_0)}]{} & S'f(e_0), \end{array}$$

使得 $\widetilde{f} = (r_{f(e_0)})^{-1} f|_{Se_0} r_{e_0}$。因此，若 f 对应于三元组

$$(f|_E, e_0, f|_{Se_0})$$

按照命题 4.1 的含义，则映射 (3) 将 $|_{E(S)}$ 关联到有序对 ($\widetilde{\ }$, $=^{-1}$)。因此，映射 (3) 是双射的证明可由命题 4.1 得出。

最后，函子是本质满的。为说明这一点，对任意集合和任意群，取与右零半群 (π_2) 的直积。□

鉴于定理 4.5，将两个右群之间的态射 ψ: $S \to S'$ 的核 定义为数对 ($\sim_{\psi|_E}$,K) 是很自然的，其中 $\sim_{\psi|_E}$ 是

映射 $\psi|_E\colon E \to E'$ 的核（它是集合E的一个划分），而K 是群态射 $\widetilde{\psi}\colon S/\sim \to S'/\sim$的核（它是群$S/\sim$的一个正规子群）。

元素 $s' \in S'$ 在半群态射$\psi\colon S \to S'$ 下的原像可按如下方式计算。给定 $s' \in S'$，我们有 $s'E' \in S'/\sim$，且 $\pi_{E'}(s') \in E'$。假设 $s'E' \in \mathrm{Im}(\widetilde{\psi})$ 且 $\pi_{E'}(s') \in \mathrm{Im}(\psi|_E)$。那么存在 $s_1 \in S$，使得 $\psi(s_1) \in s'E$，并且存在 $s_2 \in E(S)$，使得$\psi(s_2) = \pi_{E'}(s')$。在这种情况下，我们有

$$\psi^{-1}(s') = (\widetilde{\psi})^{-1}(s'E') \cdot (\psi|_E)^{-1}(\pi_{E'}(s')) = \\ = s_1E \cdot K \cdot [s_2]_{\sim_{\psi|_E}} = s_1K \cdot [s_2]_{\sim_{\psi|_E}}.$$

在另一种情况下，也就是 $s'E' \notin \mathrm{Im}(\widetilde{\psi})$ 或 $\pi_{E'}(s') \notin \mathrm{Im}(\psi|_E)$ 时，我们有 $\psi^{-1}(s') = /0$。

5. 右群的预扭理论

现在我们简要回顾 [5]和 [7] 中关于任意范畴中的预扭理论的概念。设 C 为一个范畴，Z 为 C 中一个非空的对象类。对于 C 中任意一对对象 A,A'，我们用 $\mathbf{Triv}_Z(A,B)$ 表示 C 中所有经由 Z 中某个对象分解的态射所成的集合。我们称这些态射为 Z-平凡态射。

若 $f\colon A \to A'$ 是 C 中的一个态射，则称 C 中的态射 $\varepsilon\colon X \to A$ 为 f 的 Z-预核，如果：

(1) $f\varepsilon$ 是一个 Z-平凡态射。(2) 若 $\lambda\colon Y \to A$ 是 C 中任意一个使 $f\lambda$ 为 Z-平凡的态射，则存在唯一态射 $\lambda'\colon Y \to X$ 属于 C，使得 $\lambda = \varepsilon\lambda'$。

对偶地，f 的 Z-预余核 是一个态射 $\eta\colon A' \to X$，满足：

(1) ηf 是一个 Z-平凡态射。(2) 若 $\mu\colon A' \to Y$ 是 C 中任意一个满足 μf 为 Z-平凡的态射，则存在唯一的态射 $\mu'\colon X \to Y$，使得 $\mu = \mu'\eta$。

若 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to C$ 是 C 中的态射，我们称

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

为 C 中的一个短Z-预正合序列，如果 f 是g 的 Z-预核，且 g 是 f的 Z-预余核。

定义 5.1。设 C 是一个范畴，T，F 是 C 的两个充满的（即对同构封闭的）满子范畴。令 $Z := T \cap F$。若满足以下性质，则称有序对 (T，F) 为范畴 C 中的一个预扭理论。

(1) 对于每个对象 $T \in T$，$F \in F$，都有 $\mathrm{Hom}_C(T,F) = \mathbf{Triv}_Z(T,F$。

(2) 对于 C 中的每个对象 B，都存在一个短 Z-预正合列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

带有 $A \in$ T 和 $C \in$ F。

现在令 C :=RGrp 为右群范畴，令 T := Rzs（分别地，F := Grp）为 RGrp 的满子范畴，它们分别由右零半群（分别地，群）组成，并令 Z := T∩F。显然，Z 由所有阶为 1 的（半）群组成，即 RGrp 的终对象。因此，Z-平凡态射 $S \to S'$ 是像为单元素集的半群态射，也就是说，它们恰好是常值态射 $S \to S'$，即映射 $f: S \to S'$，其中存在元素 $e'_0 \in E(S')$，使得对每个 $s \in S$，都有 $f(s) = e'_0$。

我们的首要目标是刻画 RGrp 中具有 Z-预核的态射。

引理 5.2. 设 $f: S \to S'$ 是 RGrp 中的一个态射，且 $E := E(S)$。那么，f 在 RGrp 中有 Z-预核，当且仅当 $f(E)$ 是单元素集。此外，若 f 在 RGrp 中有 Z-预核，且 $f(E) = \{g_0\}$，则 $K := f^{-1}(\{g_0\})$ 是 S 的一个右子群，且包含态射 $i: K \to S$ 是 f 的一个 Z-预核。

证明。 假设 $f(E) = \{g_0\}$，因此特别地，g_0 必须是 S' 中的一个幂等元。于是 $K := f^{-1}(\{g_0\})$ 是 S 的一个子半群。现在，设 $a,b \in K$，并设 $x \in S$ 是满足 $ax = b$ 的唯一元素（定理 2.6(a)）。那么

$$g_0^2 = g_0 = f(b) = f(a)f(x) = g_0 f(x),$$

由于 S 是左消去的，因此 f (x) = g_0, 。这证明 x ∈ K，因而 K 是 S 的一个右子群。令 i : K → S 为包含映射。根据构造，复合 f i 是 Z-平凡的。现在考虑任意右群态射 λ : Y → S，满足 f λ 是 Z-平凡的；也就是说，存在 S′ 中的一个幂等元 $g_1 \in$，使得 f (λ(Y)) = {g_1}。由于 Y 有一个幂等元 e_0，且 λ(e_0) ∈ E，因此立即可得 $g_1 = g_0$,，从而 λ(Y) ⊆ K。因此，映射 λ′ : Y → K，y ↦ λ(y)，是 RGrp 中满足 λ = iλ′ 的唯一态射。这证明 i 是 f 的一个 Z-预核。

反过来，假设 f 有一个 Z-预核 j : L → S。特别地，f j 是 Z-平凡的，也就是说，对某个幂等元 $g_0 \in S'$，f (j(L)) = {g_0}。由于 L 有一个幂等元 l_0，且 j(l_0) ∈ E，因此 $g_0 \in$ f (E)。现在考虑任意元素 e ∈ E。于是，包含映射 ι : {e} → S 是 RGrp 中的一个态射，而复合 f ι 是右群间的一个常值态射，因而是 Z-平凡的。由于 j 是 f 的 Z-预核，存在唯一态射 ι_0: {e} → L，使得 ι = jι_0。因此 e ∈ j(L)，从而由 f (j(L)) = {g_0} 可得 f (e) = g_0。这证明了 f (E) = {g_0}。□

引理 5.3。 设 $\mu : S \to T$ 是右群间的一个态射，且 $\mu(E(S))$是单元素集。那么，典范投影 $\pi_G: S \to S/\sim$的核 $\sim$ 包含于 μ的核中。特别地，存在唯一态射$\mu' : S/\sim \to T$，使得 $\mu = \mu'\pi_G$。

证明。任取 S 中的幂等元 e_0 。正如我们在命题 4.1(a)（恒等式 2）的证明中所见，对于右群之间的每个态射 μ: S →T，都有 μ(s) = $\mu|_{Se_0}(se_0)\mu|_E(\pi_E(s))$，对每个 s ∈ S 都成立。假设$\mu$(E(S)) 是单元素集，并令 t 为 μ(E(S)) 中唯一的元素。为了证明 ∼ 包含在 μ的核中，取 S 中两个元素 s、s′，使得 s ∼ s′。于是 $se_0 = s'e_0$（注 2.7），且 $\mu|_E(\pi_E(s)) = t = \mu|_E(\pi_E(s'))$，因此 $\mu(s) = \mu(s')$。这证明了 ∼ 包含在 μ的核中。由此可知，μ : S →T 诱导出唯一的半群态射 μ': S /∼ →T，即存在唯一的态射 μ': S/∼ →T，使得 $\mu = \mu'\pi_G$。□

我们已经指出，RGrp 中由右零半群构成的全子范畴 T =Rzs 与范畴 Set 同构。

定理 5.4。 这一对 (Rzs,Grp) 是 *RGrp* 的预扭理论。

证明。 令 Z =Rzs ∩Grp。考虑一个右零半群 D、一个单位元为 1 的群 G以及一个态射 $\varphi: D \to G$，其中该态射属于 RGrp。若 D 为空，则φ 显然是空映射，并且它可以分解为空映射 $D \to \{1\}$ 与包含映射 $\{1\} \to G$的复合，即 φ 是 Z-平凡的。现在假设 $D \neq /0$。由于幂等元在映射下的像仍是幂等元，D中的所有元素都是幂等元，而群 G 中唯一的幂等元是 1，因此我们立即得到 $\varphi(D) = 1$。于是 φ 是 Z-平凡的。

现在，设 S 是任意一个右群，令 E :=E(S) 为 S 的所有幂等元构成的集合，考虑群 G := S/∼ 以及典范投影 π_G: S →G，其定义为对每个 s ∈S，都有 s ↦sE。由引理 5.2 应用于态射 π_G: S → G 可知，π_G 在 RGrp 中有一个 Z-预核，因为π_G(E) 是单元素集 {E}（它是群 G =S/∼的平凡子群）。此外，E = π_G^{-1}({E})，且包含态射 i : E → S 是 f 的一个 Z-预核（引理 5.2）。

仍需证明 π 是i的 Z-预余核。设 $\mu: S \to T$ 是 RGrp 中任意一个态射，且 μi 是 Z-平凡的。这意味着 $\mu(E)$ 是单元素集。因此，我们可以应用引理 5.3，得到存在唯一的态射 $\mu' : S/\sim \to T$ 使得 $\mu = \mu'\pi_G$。映射 μ' 由$sE \mapsto \mu(s)$ 定义。由此即可得出结论。□

参考文献

[1] S. Burris 和 H. P. Sankappanavar，《普适代数教程》，数学研究生教材第**78**卷，施普林格出版社，纽约—柏林，1981。千禧年版可从 https://math.hawaii.edu/ ralph/Classes/619/univ-algebra.pdf 获取。[2] A. H. Clifford 和 G. B. Preston，《半群代数理论》，第一卷，数学调查第**7**卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1961。[3] A. Facchini，《模论：某些模类中的自同态环与直和分解》，数学进展第**167**卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1998。后收入“现代 Birkhäuser 经典著作”丛书再版，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2012。[4] A. Facchini，《半局部范畴与具有半局部自同态环的模》，数学进展第 331 卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2019。[5] A. Facchini 和 C. A. Finocchiaro，《预挠理论、稳定范畴与预序集》，《纯粹与应用数学年鉴》**199** (2020)，1073–1089。[6] A. Facchini 和 C. A. Finocchiaro，《双群》，即将出版。[7] A. Facchini、C. A. Finocchiaro、M. Gran，《一般范畴中的预挠理论》，《纯粹与应用代数杂志》**225** (2021)，第 2 期，论文编号 106503，共 21 页。[8] A. Facchini 和 R. Fernández-Alonso，《预加性范畴的次直积与弱等价》，《应用范畴结构》**16** (2008)，第 1–2 期，103–122。[9] A. Facchini 和 D. Stanovský，《普适代数中的半直积》，载于《代数结构及其应用》，A. Laghribi 和 A. Leroy 编，数学当代第**826**卷，美国数学学会，普罗维登斯，2025，第 103–124 页；亦可见 arXiv:2311.04321。[10] H. Hamilton，《交换半群上同余关系的可置换性》，《半群论坛》**10** (1975)，55–66。[11] M. K. Kinyon，《莱布尼茨代数、李架与双群》，《李理论杂志》**17**(2007)，99–114。

（Alberto Facchini）“Tullio Levi-Civita”数学系，帕多瓦大学，35121 意大利帕多瓦电子邮箱：facchini@math.unipd.it

（Carmelo Antonio Finocchiano）数学与信息学系，卡塔尼亚大学，大学城，安德烈亚·多利亚大道6号，95125 意大利卡塔尼亚电子邮箱：cafinocchiaro@unict.it