arXiv:2603.24188v1 [math.RA] 25 Mar 2026

某些环上的遗传 Bassian 模与超 Bassian 模

PETER VASSILEV DANCHEV、TRUONG CONG QUYNH 和 JAN ˇZEMLIˇCKA

Abstract. 我们刻画了若干基本情形，说明环上的模何时是 *hereditarily Bassian* 或 *super Bassian*：前者指其每个真子模都是 Bassian 模，后者则指其每个真满同态像都是 Bassian 模。我们证明了非本原戴德金素环（尤其是 Dedekind 整环）上遗传 Bassian 模与超 Bassian 模的若干结构判据。在这些环上，我们证明奇异模是超 Bassian 模当且仅当它是 Bassian 模；而这当且仅当它是 Bassian 模。此外，对于非本原戴德金素环上的任意模（不一定是奇异模），具有超 Bassian 性质竟然总能推出具有遗传 Bassian 性质。

我们的结果在一定程度上延续并补充了 Tuganbaev 在 Mathematics（2026）和 Blacher 在 J. Algebra（2026）中近期给出的结果。

Introduction and Motivation

设 M 是环 R 上的一个模。仿照 [4]（另见作为原始来源的 [2] 和 [3]），我们称 M 为*Bassian*，如果对于 M 的某个子模 N，单态射 $M \to M/N$ 的存在必然推出 N 是 M 的平凡子模，即 $N = (0)$。更一般地，若 N 是 M 的一个（可能是真）直和项，则称 M 为广义 ***Bassian***。

此外，若 L 是一个模，且对于任意（真）子模 $K \leq L$，其每个因子模 L/K 都是 Bassian 模，则称 L 为超 ***Bassian***。令人颇感意外的是，超 Bassian 模恰好就是 Hopfian 模（例如参见 [4, 命题 3.6 (3)]）。另一方面，若 T 是一个模，且其每个（真）子模都是 Bassian 模，则称 T 为遗传 ***Bassian***。

作为该研究主题的先驱性工作，Rowen 和 Small 在 [6] 探讨了哪些大类（仿射）代数是 Bassian 代数，并证明任何域上的半素仿射 PI 代数都是 Bassian 的；任何有限 GK 维数、且在半素理想上满足升链条件的半素仿射 Goldie 代数也都是 Bassian 的。

类似地，最近在 [3] 和 [5] 中，研究并刻画了那些真子群仍为 Bassian 群的 Bassian 阿贝尔群，以及那些真同态像也为 Bassian 群的 Bassian 阿贝尔群。

另一方面，最近 Blancher 在 [1] 考察了这样一类环：其所有真子环都是诺特环或阿廷环。

因此，继续以这种方式研究其他代数结构（例如某些经典类型的环上的模）是很合乎逻辑的。不过，我们

Date：2026年3月26日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 16D10、16D40、16D60、20K40。*Key words and phrases.* 群、模、环、遗传 Bassian、超 Bassian、奇异、本原、戴德金素。

在此讨论更具一般性的情形，即研究几大类环上的模，例如（可能非交换的）非本原戴德金素环和主理想整环上的模。本文安排如下：我们将主要结果分为接下来的两个章节，分别讨论超 Bassian 情形和遗传 Bassian 情形。在第一章中，我们证明，对于非本原戴德金素环上的任意模，该模具有超 Bassian 性质，当且仅当它存在一个有限生成子模，使得相应的商是奇异的，且其所有主分量也都是有限生成的（见定理 1.13）。在第二章中，我们证明，对于非本原戴德金素环上的任意模，该模具有遗传 Bassian 性质，当且仅当其奇异子模的每个主分量都是有限生成的，并且存在一个模掉该给定模后为奇异的有限生成子模。此外，半局部环（其雅各布森根幂零）上的模具有遗传 Bassian 性质，当且仅当其底是有限生成的（分别见定理 2.9 和 2.6）。

通常， $E(M)$表示 M的一个内射包。若 R是整环，则$\tau(M)$表示 M的扭部分。我们的基本记号和术语大多是标准的，而新概念将在下文中详细说明。

1. Super Bassian Modules

我们在此开始再次列出我们的关键工具。

定义。设 R 是一个环。若右 R-模 M 的每个满同态像都是 Bassian，则称其为超 *Bassian* 。

下面的结论值得一提。

例 1.1。任意右 *duo* 环 R 作为右 R-模都是超 *Bassian*。

证明。设 R 是一个右 duo 环，且 I 和 H 都是 R 的右理想，并且$I \leq H$。令 $f: R/I \to R/H$ 是右 R- 模之间的一个单态射，不妨设 $f(1+I) = a+H$，其中 $a \in R$。对所有 $x \in H$，由于 R 是右 duo 环，我们有 $ax \in H$，因此 $f(x+I) = ax+H = 0$。由此可得 f 是一个单态射，进而 $x \in I$。现在可知 $I = H$。因此，这表明 R_R 是超 Bassian，如所述。□

下面这个技术性观察显而易见，因此我们可以省略其证明。

引理 1.2. 设 M 是一个右 R-模。那么，以下条件等价：

(1) M 是超 *Bassian*。(2) M 的每个商都是超 *Bassian*。(3) 若序列 $0 \to M/N \to M/K$ 在 $N \leq K \leq M$ 下正合，则 $N = K$。

由于直和项同构于一个模的因子，因此我们还可以得到一个推论：超 Bassian 模这一类在取直和项时封闭。

若对 M 的所有子模 $A, B,$和 C，均成立 $A \cap (B+C) = (A \cap B)+(A \cap C)$，则称模 M 为分配的。众所周知，若 M是分配的，则对每个子模 $N \subseteq M$， M/N 都有平方自由根。

命题 1.3。 设 M 是一个分配的右 R-模。则以下两个条件等价:

(1) M 是超 *Bassian* 模。(2) M 的每个因子模都是广义 *Bassian*。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。显然，因为每个 Bassian 模都是广义 Bassian。

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设 M 的每个因子模都是广义 Bassian。此外，设 K 和 I 是 M 的子模，满足 $I \leq K$ 和 $\alpha : M/I \to M/K \cong (M/I)/(K/I)$是一个单态射。由于 M/I 是广义 Bassian， K/I 是半单的，并且根据命题 4.4]，$(K/I)^{(\omega)}$ 可嵌入到 M/I 中。但是，如上所述， M/I 具有平方自由根，因此我们推知 $K/I = (\bar{0})$，从而 $K = I$。由此，我们得出结论： M 是超 Bassian 模，如所需。□

由于非零模的无限直积幂不是 Bassian 模，因此可以得到以下简单观察。

引理 1.4. 若存在 $N \leq M$ 和非零模 S，使得 $M/N \cong S^{(\omega)}$，则环 R 上的模 M 不是超 *Bassian* 模。

下一个命题对进一步的应用也有帮助，因此值得记录下来。

引理 1.5. 设 M 是右完美环上的无限生成模。那么，

(1) 存在单模 S 和子模 N，使得 $M/N \cong S^{(\omega)}$; (2) M 不是超 *Bassian* 模。

证明。 (1) 设 R 是一个右完美环，其雅各布森根为 J，且 M 是一个无限生成模。由于 MJ 在 M 中是余essential的，因子 $M/$（MJ）具有作为半单环 R/J 上的无限生成模的结构，因此它是一个无限生成半单模。注意到每个完美环上的单模在同构意义下至多只有有限多个，因此存在单模 S 和子模 N，使得 $MJ \leq N \leq M$ 且 $M/N \cong S^{(\omega)}$。

(2) 根据 (1) 和引理 1.4， M 不是超 Bassian。 □

回顾一下，如果 M 的每个商都具有有限 Goldie 维数，则称模 M 为有限 *Goldie* 维数模。由前述结论可得:

命题 1.6。设 M 是右阿廷环 R 上的右模。那么，以下三个条件等价:

(1) M 是超 *Bassian*。(2) M 是有限生成的。(3) M 是有限 *Goldie* 维数模。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。由引理 1.5(2) 得出。

(2) $\Rightarrow$ (1) 和 (3)。由于阿廷环上的有限生成模必然具有有限长度，因此它是超 Bassian 的有限 Goldie 维数模。

(3) $\Rightarrow$ (2)。假设 M 是一个无限生成模。则由引理 1.5(1)，存在一个单模 S 和 M 的一个子模 N，使得 $M/N \cong S^{(\omega)}$，这与 M/N 的有限 Goldie 维数矛盾，正如预期。□

现在，我们打算通过建立以下结果来考察模在右诺特环上何时为超 Bassian 的更复杂情形（见 [4, 例 2.1]）。

引理 1.7。 右诺特环上的任意有限生成模都是超 *Bassian*。

证明。 回想一下，诺特模是 Bassian。由于右诺特环上的有限生成模是诺特模，因此它是超 Bassian，证毕。□

现在我们可以证明以下断言。

引理 1.8。 设 $\mathcal{M}$ 为非半单阿贝尔正则环 R的所有极大理想构成的集合，并设 M 为一个 R-模。若 M 是超 *Bassian*，则

$$\mathrm{gen}(M) \leq |\mathcal{M}| \leq 2^{|R|}.$$

证明。 首先注意， $\mathcal{M}$ 是一个无限集合，因为 R 不是半单的。给定$I \in \mathcal{M}$，由引理 1.4 可知 M/MI 是有限生成的，因此我们可以取一个有限生成子模 F_I，使得 $M = F_I + MI$。因此，可以写作 $M = \sum_{I\in\mathcal{M}} F_I$，因为 $J(M) = (0)$。由此便自动得到

$$\mathrm{gen}(M) \leq |\omega \times \mathcal{M}| = |\mathcal{M}| \leq 2^{|R|},$$

如所要求的。 □

以下结论可能有用。

命题 1.9. 若 M 是一个非 *Bassian* 模，则它包含一个可数生成的非 *Hopfian* 子模。

证明。 设 M 是非 Bassian 的，并设 $N \leq M$ 是一个非零子模，使得$\iota : M \to M/N$ 是一个嵌入。令 $0 \neq x \in N$，并按照规则 $x_0 = x$ 和 $x_{n+1}+N = \iota(x_n)$ 归纳地定义一列元素$x_n \in M$。设 $X := \sum_{n\geq 0} x_n R$，并注意到

$$\iota(X) = \sum_{n\geq 0} \iota(x_n)R = \sum_{n\geq 1}(x_nR + N)/N = \sum_{n\geq 0}(x_nR + N)/N = (X + N)/N,$$

因为 $x_0 \in N$。因此， ι将 X单射映到 $(X + N)/N \cong X/(X \cap N)$ 上，并且 $x_0 \in X \cap N \neq (0)$。由此我们证明了， X 是一个可数生成的非 Hopfian 子模。□

在本节余下部分，我们将介绍定义在 Dedekind 整环的非交换推广上的超 Bassian 模。为此，我们需要回顾 [7] 中的一些有用概念。

设 M 是一个模。我们用 $\mathrm{Sing}(M)$ 表示 M 的奇异子模；若 $\mathrm{Sing}(M) = (0)$，则称 M 为非奇异；若 $\mathrm{Sing}(M) = M$，则称其为奇异；若 $M/\mathrm{Sing}(M) = \mathrm{Sing}(M/\mathrm{Sing}(M))$，则称其为戈尔迪根基。缩写$B \trianglelefteq M$ 表示 B 是 M 的一个本质子模；而HNP 环是指遗传诺特素环。同样，非本原 *Dedekind* 素环是指一种 HNP 环，其经典分式环为 Q，且它不是本原环，并且每个非零理想在 Q 中都是可逆的。关于这些概念的一些基本性质以及其他未作解释的术语，请参阅 [7]。

现在我们来表述并证明下面这个有用的技术性结果。

引理 1.10. 设 R 是一个右非奇异环， A、 B 是模M的子模。那么，

(1) 若 $B \trianglelefteq M$，则 M/B 是奇异的。(2) 若 $A \trianglelefteq B$ 和 M/B 是奇异的，则 M/A 是奇异的。(3) 以下命题等价：(a) M/B 是奇异的。(b) $B +$<style id='18'>Sing(M) $\trianglelefteq M$。(c) 存在 B 的一个子模 H，使得 $H \cap \mathrm{Sing}(M) = (0)$ 且 M/H 是奇异的。

证明。 (1) 这显然成立，因为对每个非零的 $x \in M$， $xR \cap B \trianglelefteq xR$。

(2) 由于 B/A 和 M/B 都是奇异的，商 M/A 是一个戈尔迪根基模。由于 R 是右非奇异的，结论由 [7, 备注 11.3] 立即得出。

(3) 令 $S := \mathrm{Sing}(M)$。

(a) $\Rightarrow$ (b)。反证，假设 $B + S$ 在 M 中不是本质的，即存在非零的 $m \in M$，使得 $mR \cap (B + S) = (0)$。因此， $mR \cap B = (0)$，故 mR 嵌入 M/B。由于 mR 是非奇异的， M 不是奇异模。

(b) $\Rightarrow$ (c)。令 H 为 B 的一个极大子模，且满足条件$H \cap S = (0)$。因此， $H + S \trianglelefteq B + S \trianglelefteq M$，故由 (1) 可知 $M/(H + S)$ 是奇异的。此外，$(S + H)/H$ 也是奇异的，这说明 M/H 是戈尔迪根基。因此，再应用 [7, 注 11.3]， M/H 也是奇异的。

(c) $\Rightarrow$ (a)。这是显然的。 □

现在我们可以给出超 Bassian 模的以下必要条件。

命题 1.11. 设 R 是一个非本原 *HNP* 环，且 F 是模 M的有限生成子模。若 M/F是奇异的，并且对于每个极大可逆理想 P， M/F 的 P-主分量都是诺特的，则 M 是超 *Bassian* 模。

证明。 首先注意到， R 是非奇异的，因为它显然是遗传的。我们将证明，对于 M 的任意商模 M，它都满足 [7, 定理 3], 的假设；也就是说， $M/\mathrm{Sing}(M)$ 是有限维的，且 $\mathrm{Sing}(M)$ 的每个主分量都是诺特的。这足以得到所需结论。

为此，令 X 为 M的任意子模，并记 $M = M/X$, $F = F + X/X$ 和 $S = \mathrm{Sing}(M)$。

由于 M/F是奇异的，注意到 $M/(F+S)$ 也是奇异的。此外， [7, 命题 1.1] 表明 M/S 是非奇异的，因此根据引理 1.10 可得 $(F + S)/S \trianglelefteq M/S$。由于 F 是有限生成的，且 R 是诺特的，因此可知 $(F + S)/S$ 也是诺特的，这意味着 M/S 具有有限 Goldie 维数。

接下来，假设 P是 R的极大可逆理想。根据引理 1.10， 存在 F 的一个子模 H，使得 $H \cap S = (0)$，且 M/H 是奇异的。于是， S，因此 S的 P-主分量 $S(P)$ 嵌入 M/H中。此外， $(S(P) + F)/F$嵌入 M/F的 P-主分量中；根据备注 8], 该分量是 M/F 的 P-主分量的一个商，其中 [7, 。因此，

$$(\tilde{S}(P) + \tilde{F})/\tilde{F} \cong \tilde{S}(P)/(\tilde{S}(P) \cap \tilde{F})$$

根据假设，˜ ˜是诺特的。由于 $S(P) \cap F$显然是诺特的，我们已经证明˜ $S(P)$ 也是诺特的。

˜因此，只需应用 [7, 定理 3], ，该定理断言 M 是巴斯模。这就证明了 M 终究是超 Bassian 模，正如所需。□

在继续之前，我们先给出以下结果。

引理 1.12. 若 M 是非本原戴德金素环上的超 *Bassian* 模，则存在模 M 的有限生成非奇异子模 H ，使得 M/H 是奇异的。

证明. 首先注意，戴德金素环是 HNP，因此是非奇异戈尔迪素环（参见例如 [7, 注 2]），这意味着我们可以应用引理 1.10 和 [7,引理 4]。

令 $S := \mathrm{Sing}(M)$，并注意到，根据引理 1.10，存在 M 的子模 B，使得 $B \cap S = (0)$， M/B 是奇异的，而 B 是非奇异的。反设 B 具有无限 Goldie 维数。那么，根据 [7, 引理 4.3]„ 存在 B 的无限秩自由子模 F 。

现在，记 G 为满足条件 $G \cap F =(0)$ 的 B 的一个极大子模，并设 P 是 R的任意一个极大可逆理想。由于

$$G \oplus FP \oplus S \trianglelefteq G \oplus F \oplus S \trianglelefteq B \oplus S \trianglelefteq M,$$

˜借助引理 1.10，我们再次得到 $M = M/(G \oplus FP \oplus S)$ 是奇异的。

˜ ˜注意， M是 Bassian，且 F/FP嵌入到 M的 P-主分量中。但是，由于 F/FP 是无限生成的，这与 [7, 定理 1],˜矛盾；该定理断言， M 的所有主分量都是诺特的。

因此， B 是有限维的，也就是说， B 包含一个有限生成的本质子模 H。由于 $H + S \trianglelefteq B + S \trianglelefteq M$，借助引理 1.10，模 M/H是奇异的，结论得证。□

现在，我们已具备证明以下命题所需的全部要素。

定理 1.13。 对于非本原 *Dedekindprime* 环上的模 M ，以下条件等价：

(1) M 是超 *Bassian*。(2) 存在 M 的有限生成非奇异子模 H ，使得M/H 是奇异的，并且 M/H 的所有主分量都是诺特的。(3)存在 M 的有限生成子模 H ，使得 M/H 是奇异的，并且 M/H 的所有主分量都是有限生成的。

证明。 (1) ⇒ (2)。根据引理 1.12，存在 M 的有限生成非奇异子模 H ，使得 M/H 是奇异的。由于 M/H 是 Bassian 模，根据定理 1], M/H 的所有主分量都是诺特的。

(2) ⇒ (3)。这显然成立。

(3) ⇒(1)。根据备注 2], ， R 是右诺特的，因此 M/H 的所有主分量都是诺特的。现在，结合命题 1.11， M 是超 Bassian 的。□

以下由 [7, 定理 1] 和前一个定理直接得出的推论，阐明了非本原戴德金素环上 Bassian 与超 Bassian 之间的联系。

推论 1.14。 设 M 是非本原戴德金素环上的一个模。

(1) 若 M 是奇异的，则以下条件等价：(a) M 是超 *Bassian* 模。(b) M 的每个主分量都是诺特的。(c) M 是 *Bassian* 模。(2) M 是超 *Bassian* 模，当且仅当 M 是 *Bassian* 模，且存在 M 的有限生成子模 H，使得 M/H 是奇异 *Bassian* 模。

我们通过重新表述交换情形下的结果，并给出一个简单的例子，来结束本节。

推论 1.15. *Dedekind* 整环上的模 M 是超 *Bassian* 模，当且仅当存在 M 的有限生成无挠子模 F，使得M/F 是挠模，且 M/F 的所有主分量都是有限生成的。

注意，对阿贝尔群而言，前一个推论也可由 [3,定理 2.5] 得出。

例 1.16. 若 M 是主理想整环 R 上秩为 *1* 的无挠模，且对每个素元 $p \in R$ 都有 $pM \neq M$，那么根据推论 *1.15*， M 是超 *Bassian*。特别地，阿贝尔群

$$A = \{\frac{z}{\prod p_i} \in \mathbb{Q} \mid z \in \mathbb{Z},\ p_1, \ldots, p_n \text{ are distinct primes}\}$$

总是超 *Bassian*。

2. Hereditarily Bassian Modules

这里我们再次回顾 Bassian 模这一强化概念的第二种表述。

定义. 设 R 是一个环。若右 R-模 M 的每个子模都是 Bassian 模，则称其为遗传 *Bassian*模。

显然，所有遗传 Bassian 模构成的类对子模封闭。

我们首先考察半完美环上遗传 Bassian 模的一个必要条件。

引理 2.1. 若 M 是半完美环上的遗传 *Bassian* 模，则 M 的底是有限生成的。

证明. 用反证法，假设 Soc(M) 是无限生成的。由于非同构的简单模只有有限多个，Soc(M) 包含某个模 $S^{(\omega)}$ 的子模，其中 S 是一个适当的单模；该模不是 Bassian，因此 M 不是遗传 Bassian。□

引理 2.2. 右诺特环上的任意有限生成模都是遗传 *Bassian* 的。

证明。 显然，这是因为每个诺特模都是 Bassian 模，每个诺特模的子模也都是诺特模，而且右诺特环上的每个有限生成模也都是诺特模。□

现在，我们可以对拟弗罗贝尼乌斯环上的遗传 Bassian 模进行刻画。

命题 2.3。 对于环 M上的模，以下三个条件等价：该环是拟 *Frobenius* 环。

(1) M 是遗传 *Bassian* 模。(2) M
有限生成。(3) 底(M) M 有限生成。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (3)。由于拟 Frobenius 环是半完美环，根据引理 2.1，每个遗传 Bassian 模的底都有限生成。

(3) $\Rightarrow$ (2)。由于拟 Frobenius 环是（右）阿廷环，模 M 是半阿廷的，因此 Soc(M) 在 M中是本质的。此外，有限生成的 Soc(M) 的内射包E(Soc(M)) $\cong E(M)$是有限生成投射模，这证明 $E(M)$以及 M 都是诺特的。

(2) $\Rightarrow$(1)。由于拟弗罗贝尼乌斯环是（右）诺特环，由引理2.2可得断言。□

一个自然产生的问题是，先前的结论对于右阿廷环是否仍然成立。在回答这个问题之前，我们需要证明两个断言。第一个是一个初等但有用的技术性观察。

引理 2.4。 设 Q、S、X、Y是模 A 的子模，满足 $Q \subseteq S \cap X$和 $X \subseteq Y$。若 $S/Q =$ 底(A/Q) 和 底(A/X) $\subseteq Y/X$，则 $S \subseteq Y$。
证明。 由于 $(S + X)/X \cong ((S/Q) + (X/Q))/(X/Q)$是一个半单模，我们得到

$$(S + X)/X \subseteq \mathrm{Soc}(A/X) \subseteq Y/X,$$

这立即推出 $S \subseteq S + X \subseteq Y$。 □

引理 2.5。 设 M 是半局部环 R 上的半阿廷模，其雅各布森根为 J，且底(M) 是有限生成的。若存在满足 $MJ^n = (0)$的自然数 n，则 M 是 *Bassian*。

证明。 为间接证明所述结论，假设 M 不是 Bassian。于是，存在 $X \neq$ (0) 和一个嵌入 $\nu : M \to M/X$，即 $M \cong \nu(M)$。令$X_0 := 0$、 $X_1 := X$、 $M_0 := M$，并设 M_1 是 M 的一个子模，满足 $X_1 \subseteq M_1$和 $M_1/X_1 = \nu(M)$。由于

$$M \cong M_0/X_0 \cong M_1/X_1,$$

我们可以通过归纳法得到子模序列 $(X_n \mid n < \omega)$ 和 $(M_n \mid n < \omega)$，使得对每个$i < \omega$ 都有 $X_i \subsetneq X_{i+1}$、 $M_i \supseteq M_{i+1}$ 和 $M_i/X_i \cong M$。令 $A := \bigcup_{n<\omega} X_n$。由于 A 是半阿廷的，存在 A的一个底序列 $(S_\alpha \mid S_\alpha < \kappa)$，即一个子模光滑序列，使得

$$S_0 = 0,\ S_{\alpha+1}/S_\alpha = \mathrm{Soc}(A/S_\alpha) \text{ and } A = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha.$$

现在我们将证明 κ 是无限的。首先，我们将对 α 使用归纳法证明：对于每个 $\alpha <$ min(ω, κ)，都存在一个指标 $i_\alpha < \omega$，使得 $S_\alpha \subseteq X_{i_\alpha}$。由于 $S_0 = X_0 =$(0)，我们可以令 $i_0 = 0$。设 $S_\alpha \subseteq X_{i_\alpha}$。由于 Soc($A/X_{i_\alpha}$) $\subseteq$ Soc($M_{i_\alpha}/X_{i_\alpha}$) 是有限生成的，并且

$$A/X_{i_\alpha} = \bigcup_{n>i_\alpha} X_n/X_{i_\alpha},$$

存在一个指标 $k > i_\alpha$，使得 Soc(X_k/X_{i_α}) = Soc(A/X_{i_α})。然而，由于$S_{\alpha+1}/S_\alpha$ = Soc(A/S_α)，我们可以应用引理 2.4，断言 $S_{\alpha+1} \subseteq X_k$。接着令 $i_{\alpha+1} := k$，从而完成归纳法。

现在，若假设 κ 是有限的，我们便得到

$$A = S_{\kappa-1} \subseteq X_{i_{\kappa-1}} \subsetneq A,$$

一个显而易见的矛盾。

因此，A 以及 M 都具有无限的底层长度，这意味着对于每个 $n < \omega$，都有 $MJ^n \neq$ (0)。□

现在，我们可以按以下方式推广命题 2.3。

定理 2.6。设 R 是一个雅各布森根幂零的半局部环，且设M 是一个模。那么，M 是遗传 *Bassian* 模，当且仅当底(M) 是有限生成的。

证明。(⇒)。这直接由引理 2.1 得出。

(⇐)。如果 Soc(M) 是有限生成的，那么每个子模 N of$M$ 的底都是有限生成的。此外，存在 n 使得 J^n =(0) 对于 R的雅各布森根成立，从而 $NJ^n = N0$ =(0)。现在，只需应用引理 2.5 即可得到所需结论。□

注意，前一定理的假设对每个单侧阿廷环都成立。下面的例子明确表明，命题 2.3 的条件 (2) 并不是右阿廷环上遗传 Bassian 模的一个等价条件。

例 2.7。设

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \text{ and } M = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

于是，直接检查可知，R 是一个右阿廷环（但不是左阿廷环），M_R 具有自然的右 R-模结构，并且

$$\mathrm{Soc}(M_R) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

是一个有限生成的 R-模。因此，根据定理 *2.6*，M_R 是一个无限生成的遗传 *Bassian* 模。

因此，存在右阿廷环 R，使得内射包 $E(R_R)$ =$E(\mathrm{Soc}(R_R))$ 肯定不是有限生成的。

与超 Bassian 模的情形类似，我们现在刻画非本原 Dedekind 素环上的遗传 Bassian 模。

引理 2.8. 设 F 和 N 是右遗传右诺特环 R上的模 M 的子模。若 F 是有限生成的，且 M/F 是奇异的，则存在 N 的一个有限生成子模 G，使得 N/G 是奇异的。

证明。首先，记 M 的奇异子模为 S，并注意到 Sing(N) =$S \cap N$。由于 M/F 是奇异的，根据引理 1.10(3)，$F + S \trianglelefteq M$。由于 M/S 是非奇异的，而 $M/($ $F + S$) 是奇异的，再根据引理 1.10(3)，可验证 $(F + S)/S \trianglelefteq M/S$。因此，

$$((N + S)/S) \cap ((F + S)/S) \trianglelefteq (N + S)/S.$$

显然，$(F+S)/S$ 是诺特的，因此模 $((N+S)/S) \cap ((F+S)/S)$ 是有限生成的。这保证存在 N 的有限生成子模 G，使得

$$G+S=(N+S)\cap(F+S),$$

它是模 $N+S$ 的本质子模。最后，

$$G+(S\cap N)=(G+S)\cap N \trianglelefteq N$$

根据模律，并且

$$N/(G+(S\cap N))=N/(G+\mathrm{Sing}(N))$$

是奇异的。因此，引理 1.10 告诉我们，N/G 也同样是奇异的，论证至此完成。□

现在我们已经具备了证明以下等价命题所需的全部工具。

定理 2.9。对于非本原 *Dedekind* 素环上的模 M，以下各项等价：

(1) M 是遗传 *Bassian* 的。(2) $M\mathrm{Sing}(M)$ 的每个主分量都是诺特的，并且存在一个有限生成的非奇异子模 G，它是 M 的子模，且 M/G 是奇异的。(3) $M\mathrm{Sing}(M)$ 的每个主分量都是有限生成的，并且存在 M 的一个有限生成子模 G，使得 M/G 是奇异的。

证明。令 $S:=\mathrm{Sing}(M)$。

(1) $\Rightarrow$ (2)。由于 S 是 Bassian 的，根据 [7, 定理 1]，S 的每个主分量都是诺特的。然而，由引理 1.10 可知，存在 M 的一个子模 H，使得 $H\cap S=(0)$，且 M/H 是奇异的。显然，H 是非奇异的。采用引理 1.12 证明中的相同论证，并假设 H 具有无限维，我们得到 H 的一个自由子模 F；考虑到 [7, 引理 4.3]，它必定具有无限秩。进而，这与 M 的所有子模都是 Bassian 的假设矛盾。因此我们已证明 H具有无限维，故它包含一个有限生成的本质子模G。现在，由引理 1.10 可知，M/G 是奇异的，因为

$$G\oplus S\trianglelefteq H\oplus S\trianglelefteq M.$$

(2) $\Rightarrow$ (3)。这一蕴含显而易见。

(3) $\Rightarrow$(1)。首先注意，M 的每个子模也满足条件 (3)。设 N是 M的一个子模，P是一个极大可逆理想，则 $\mathrm{Sing}(N)=S\cap N$，因此，$\mathrm{Sing}(N)$ 的 P-主分量是 S的 P-主分量的子模。由于 R是诺特的，$S(P)$，因此 $\mathrm{Sing}(N)(P)$ 也是诺特的。根据引理 2.8，现可知存在 N 的有限生成子模 H，使得 N/H 是奇异的。

继续来看，我们刚刚证明了，只需应用 [7, 定理 3]，即可在不失一般性的前提下证明 M 是 Bassian。事实上，我们已经指出，S 的每个主分量都是诺特的。由于 M/G是奇异的，我们得到$G+S\trianglelefteq M$，因此根据引理 1.10，有 $(G+S)/S\trianglelefteq M/S$。此外，由于 $(G+S)/S$ 是有限生成的，商 M/S 是有限维的。由此，我们验证了 [7, 定理 3], 的假设，该定理蕴含 M 是 Bassian，至此便完成了。□

作为接下来的两个推论，我们可得:

推论 2.10. 设 M 是非本原戴德金素环上的一个模。

(1) 若 M 是超 *Bassian* 模，则 M 是遗传 *Bassian*。(2) 若 M 是奇异模，则以下条件等价：(a) M 是遗传 *Bassian*。(b) M 是超 *Bassian* 模。(c) M 是 *Bassian*。*(3) </style}*非奇异模 M 是遗传 *Bassian*，当且仅当 M 具有有限 *Goldie* 维数。

证明。 (1) 设 M 是超 Bassian 模，并令 $S := \text{Sing}(M)$。那么，根据定理 1.13, 存在 M 的有限生成子模 H，使得 M/H 是奇异模， $H \cap S = (0)$，且 M/H 的每个主分量都是诺特的。由于 S 可嵌入 M/H， S 的每个主分量也都是诺特的，因此根据定理 2.9， M 是遗传 Bassian。

（2）这由推论 1.14(1) 与定理 2.9 结合可得。（3）这是显然的。

□

下面的断言重新表述了交换情形下的定理 2.9。

推论 2.11。 *Dedekind* 整环上的模 M 是遗传 *Bassian* 的，当且仅当 M 的所有主分量均为有限生成，且存在 M 的有限生成无挠子模 F，使得 M/F 是挠的。

对于阿贝尔群，可以说一个（约化）群是 *Bassian*，当且仅当它是遗传 *Bassian*（比较 [3]和 [5]）。

现在我们用两个例子结束本节，它们说明超 Bassian 模和遗传 Bassian 模的概念彼此独立，因此有必要开展进一步的深入研究，以获得它们完整的结构刻画。

例 2.12. 秩 *1* 的阿贝尔群 $\mathbb{Q}$是遗传 *Bassian* 的，这可由推论 *2.10(3)* 看出；又由于众所周知 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}$，立即可知它未必是超 *Bassian* 的，这可由推论 *1.15* 加以调整得到。

例 2.13. 设 K 是域， V 是 K 上的无限维向量空间，并用 R 表示由 K 和 V 构成的平凡扩张，即 $R/J(R) \cong K$, $J(R) \cong V$以及 $J(R)^2 = (0)$。那么， R 是一个局部完美环，使得模 R_R 是超 *Bassian*（因而是 *Hopfian*），但 R_R 并非遗传 *Bassian*，因为 $J(R)$不是 *Bassian*。

最后，我们提出以下两个颇具挑战性的问题；对于广大研究者而言，它们可能具有一定的兴趣和重要性（参见 [5]）。

问题 2.14. 描述更广泛的（可能是非交换）环和整环类上遗传 *Bassian* 模与超 *Bassian* 模的结构。

关于 [1]和 [6], ，以下表述似乎是合理的。

问题 2.15。 描述遗传环和超 *Bassian* 环的结构。

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

Declarations

作者声明，在撰写和准备本稿件期间不存在任何利益冲突。

References

[1] N. Blacher, *Rings whose subrings are all Noetherian or Artinian*, 《J. Algebra》**693**（2026），362–371。[2] A. R. Cheklov、P. V. Danchev 和 B. Goldsmith, *On the Bassian property for Abelian groups*, 《巴塞尔数学档案》**117**（6）（2021），593–600。[3] P. Danchev 和 B. Goldsmith, *Super Bassian and nearly generalized Bassian Abelian groups*, 《国际代数与计算杂志》**34**（5）（2024），639–653。[4] S. Das、M. T. Ko

On Bassian and generalized Bassian modules **25** 2026

san、O. Tasdemir 和 J. ˇZemliˇcka, 《代数及其应用杂志》（）。[5] P. W. Keef, *Sub-Bassian properties on Abelian groups*, 《代数通讯》**53**（4）（2025），1723–1738。[6] L. Rowen 和 L. Small, *Hopfian and Bassian algebras*, arXiv:1711.06483v2。[7] A. Tuganbaev, *On Bassian Modules*, MDPI《数学》**14**（2026）。https://doi.org/10.3390/math14010108

Bulgarian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Informatics, Sofia1113, Bulgaria*Email address*: danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

Faculty of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education, Da Nang 550000, Vietnam*Email address*: tcquynh@ued.udn.vn

Department of Algebra, MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czechia
Email address: zemlicka@karlin.mff.cuni.cz; jan.zemlicka@matfyz.cuni.cz