arXiv:2603.24195v1 [math.DG] 25 Mar 2026

利普希茨时空比较理论

MATHIAS BRAUN 和 MARTA SÁLAMO CANDAL

摘要。我们证明，具有局部 Lipschitz 连续度量且类时分布意义下的里奇曲率有下界的整体双曲时空，满足类时测度收缩性质。这一结果涵盖了一类引人注目的时空实例，包括冲击引力波、薄壳和匹配时空。

作为应用，我们以锐形式得到了 Lipschitz 时空的新比较定理：达朗贝尔、类时布伦–明可夫斯基不等式和类时 Bishop–Gromov 定理。在适当的非分支假设下（据猜测，即使在更低的正则性下也成立），我们的结果还导出类时曲率-维数条件、体积不完备定理，以及从一般类空子流形出发的洛伦兹距离函数的达朗贝尔算子的精确表示公式和锐比较估计。

此外，我们运用凸几何中的局部化技巧，特设地 证明了尖锐类时 Bonnet–Myers 不等式。同时，我们证明了一个类时直径估计，适用于类时里奇曲率在某种意义上仅有“微小”偏差（以 L^p 为度量）的时空。这将 Petersen–Sprouse 和 Aubry 关于黎曼流形的已有定理推广到了洛伦兹几何；早在近 30 年前，前两位学者便预见了这一转变。

目录

1. 引言 21.1. 背景 21.2. 精确的类时 Bonnet–Myers 不等式 31.3. 解析与合成时空几何 41.4. 比较理论的应用 61.5. 结构安排 82. 解析类时里奇曲率下界 82.1. Lipschitz 时空几何 82.2. 正则化 92.3. 时间分离函数的正则性 153. 合成类时里奇曲率下界 163.1. 一维讨论 163.2. 洛伦兹最优传输 193.3. 变曲率类时维数条件 223.4. 可变类时测度收缩性质 244. 光滑情形 254.1. 类时割迹 254.2. 局部化 27

2020 23, 834922, 53504610, 5375数学主题分类。 主要分类 Q C；次要分类 F C C。关键词与短语。利普希茨时空；正则化；类时里奇曲率；比较理论；洛伦兹最优传输。MB 获洛桑联邦理工学院伯努利讲席资助。MSC 部分获奥地利科学基金（FWF）资助 [资助 DOI 10.55776/EFP6] 以及维也纳数学学院资助。为实现开放获取，作者已将知识共享署名许可协议公共版权许可应用于因本次投稿而产生的任何作者接收稿版本。

4.3. 带缺陷的位移凸性 305. 精确的类时 Bonnet–Myers 不等式 356. 主要结果及应用 366.1. 从分析到综合 366.2. 定理 6.1 的应用 38附录 A. 进一步的精确类时直径估计 41附录 B. 关于定理6.5 和 6.6 43B.1. 良好测地线 43B.2. Brenier–McCann 定理 45B.3. 定理6.5 和 6.6 的证明 45参考文献 49

1. 引言

本工作的目标有二。首先，我们为度量局部 Lipschitz 连续的整体双曲时空建立若干锐比较定理，并将这类时空称为 Lipschitz 时空。其次，我们证明，对于这类时空，通过张量分布理论表述的解析类时 Ricci 曲率界，蕴含以最优传输和度量几何术语表述的合成类时 Ricci 曲率界。前一类结果是后一类结果的推论。我们方法的一个关键要素，是在低正则性时空几何与黎曼流形积分曲率界的成熟理论之间建立新的联系。

1.1. **背景**。 通常认为，若一个时空 $(M,\ g)$ 的度量张量 g 不具备所需的正则性 C^2 （此时测地线、曲率等关键概念仍可按经典方式定义），便可称其为“非光滑”。正如 Lichnerowicz [55]早在 20 世纪 50 年代就指出的那样，非光滑时空以许多自然方式出现：其动机之一来自爱因斯坦方程的初值问题，参见 Rendall [72]。此外，Hawking–Ellis [43]在 20 世纪 70 年代指出，若低于某种正则性，经典不完备性定理仍然成立， C^2 便可排除这样一种不理想的可能性：观察者仅仅因正则性丧失而不复存在；这也凸显了“奇点”的物理意义。然而，关于不完备性的研究进展直到近期才取得，参见 Calisti 等人 [17] 及其中的参考文献。

我们这项工作的框架是 Lipschitz 时空。Sämann–Steinbauer [75], Graf–Ling [41], 和 Lange–Lytchak–Sämann [54]研究了其中的测地线方程。另一方面，直到最近，Calisti 等人 [17] 才证明了首个涉及 Lipschitz 时空曲率假设的结果，即 Hawking 不完备性定理。弯曲的 Lipschitz 时空出现在许多重要实例中，例如冲击引力波（参见 Choquet-Bruhat[27] 和 Penrose [68]）以及薄壳和匹配时空（参见 Israel [45],Khakshournia–Mansouri [48], 和 Manzano–Mars [57]）；在分布意义下，前者是真空爱因斯坦方程的解 $\mathrm{Ric}_g = 0$，而后者往往具有类时非负 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ ，具体取决于拼接超曲面上的物质。在我们的结果中，这些实例都将得到涵盖。此外，Lipschitz 时空是能够避免气泡问题的正则性临界阈值，参见 Chrusćiel–Grant [28]。它们是 Minguzzi [61]意义下的闭锥结构，也是 Kunzinger–Sämann [52]意义下的正则可局部化洛伦兹长度空间。

在洛伦兹几何中，系统比较理论的重要性以其影响深远的黎曼几何先例为指引（参见 Cheeger–Ebin [26]），Ehrlich [30]对此作了强调。它自然与类时里奇曲率界相关；按照 Penrose [67] 和 Hawking [44]的观点，这些界对应于能量条件。例如，它是 Eschenburg [33],Galloway [35], 和 Newman [65],的洛伦兹分裂定理的基石；这些定理被视为真空爱因斯坦方程的刚性结论，并最终促成了 Bartnik [4] 提出的尚未解决的分裂猜想。然而，除 Calisti 等人的 Hawking 不完备定理 [17], 之外，Lipschitz 时空的比较定理一直不为人知。核心难点在于缺少指数映射，且只能获得分布曲率张量，这使得通常的雅可比场计算难以进行。此外，正如 Kunzinger–Oberguggenberger– Vickers [50], Braun–Calisti [11], 和 Calisti 等人 [17], 所指出的，另一个相关的未决问题是：非光滑时空的分布意义下的类时里奇曲率界，是否与 Cavalletti–Mondino [24]提出的合成曲率界相容。

这些动机自然引出了本文的主要贡献；我们已在上文概述，并将在下文详细阐述，同时回顾相关文献。

1.2. **尖锐类时 Bonnet–Myers 不等式。** Bonnet–Myers 定理是黎曼几何中的经典结果。该定理指出，里奇曲率具有正的下界，就意味着相关黎曼流形的直径具有上界。

它在洛伦兹几何中的对应结果被解释为一个不完备定理：若类时方向上的里奇曲率有一个正常数下界，则可推出所考察时空的类时直径具有一个尖锐上界（M, g）。在整体双曲情形下，经典的光滑版本（例如见 Beem–Ehrlich–Easley [5] ）由 Graf [39]在 g 为 $C^{1,1}$ 时作了推广，而 Braun–Calisti [11] 则在 g 为 C^1 时作了推广。我们将他们的结果推广如下。

定理 1.1 (类时 Bonnet–Myers 直径估计，定理5.1)。 我们固定$K > 0$。此外，假设 (M, g) 是一个全局双曲 *Lipschitz* 时空，满足 $\mathrm{Ric}_g \geq K$ 在分布意义下类时，参见定义 2.7。那么

$$\operatorname{diam}(M, g) \leq \pi \sqrt{\frac{\dim M - 1}{K}}.$$

与所有涉及曲率假设的结果一样，定理 1.1 也有加权版本。

尽管文中未明确说明，但定理 1.1 可由 Calisti 等人的 Hawking 不完备定理 [17] 结合 Graf 通过选取合适超曲面所作的论证得出 [39, 注 4。3]。

我们给出了一种不同的证明，并由此带来新的见解，参见下文定理 1.2。我们经常使用的一个要素是 Calisti 等人提出的近似方案：用光滑度量 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 近似 g，使得相较于 K 的 g_n 类时里奇曲率的“超额”在局部随 L^p 趋于零，当 $n \to \infty$ 时，对每个 $p \in [1, \infty)$ [17], 都成立，回顾见引理 2.11 和 2.16；我们称这样的序列为 g 的“良好逼近”，参见定义 2.13。我们将这一方法与局部化技巧（参见 §4.2）结合起来。该技巧由 Cavalletti–Mondino [24] 在洛伦兹情形中首创，随后由他们自己 [25] 以及 Braun–McCann [14], 进一步发展，从而将定理 1.1 化归为沿测地线叶状结构的一系列一维问题。借助这一合成工具，我们得以运用成熟的黎曼流形理论：研究具有实数集 L^p 内里奇曲率的黎曼流形，在薛定谔算子的半经典范围 $p \in$ （dim $M/2, \infty$）内，其比较理论由 Petersen–Wei [69] 开创。Petersen–Sprouse [70], Sprouse[76], 和 Aubry [3] 证明了这一框架下的 Bonnet–Myers 型定理；之后，Carron 提出了适用于 Kato 型界的推广

[19],罗斯 [73], 和卡龙–罗斯 [20]。近来，Caputo–Nobili–Rossi [18] 发展了 Ketterer [46] 意义下具有积分曲率界的度量测度空间的比较理论。Braun–McCann [14] 曾预见到我们将上述黎曼理论与洛伦兹几何联系起来。

事实上，我们证明定理1.1 时得到的一个附带结果，是以下洛伦兹对应结果：Petersen–Sprouse 三十年前为黎曼流形证明的定性直径估计 [70]。他们还预见到其结果与广义相对论之间的联系（在广义相对论中，合理的预期是：在小量子涨落下会出现不完备性；这种涨落可用积分意义下的小曲率超额来建模，正如 [70]中所表达的那样），以下定理对此给出了定论。

定理 1.2 (类时 Petersen–Sprouse 直径估计，推论 A.3)。 设$K > 0$, $N \in [2, \infty)$, 且 $p \in (N/2, \infty)$。那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数$\xi_{K,\ N,\ p,\ \varepsilon} > 0$，使得以下性质成立。设 $(M, g, \mathfrak{m})$ 构成一个全局双曲 ***Lipschitz*** 时空，其中 维数 $M \leq N$，并设 $k\colon\ M \to$ **实数集** 是一个连续函数，且在所有类时方向上满足 $\mathrm{Ric}_g \geq k$，那么对每个非空、开且相对紧的 $W \subset M$,

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_g[W]} \int_W \big|(k-K)_-\big|^p \,\mathrm{dvol}_g \leq \xi_{K,N,p,\varepsilon}.$$

于是我们有

$$\mathrm{diam}\,(M,g) \leq \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}} + \varepsilon.$$

Aubry 的定量黎曼直径估计的洛伦兹对应结果 [3] 也得到了证明，参见定理A.2。

尽管这里假设度量张量具有光滑性（我们相信这一条件可以放宽），但从当前致力于在某种洛伦兹–格罗莫夫–豪斯多夫拓扑中建立预紧性的研究来看，定理1.2 也很值得关注（例如参见 Cavalletti–Mondino 的综述 [23]），因为它表明，对于曲率超额一致较小的一族时空，存在一致且几乎最优的直径上界。

1.3. 解析与合成时空几何。 Penrose [67] 和 Hawking [44], 提出的能量条件“在所有类时方向上 $\mathrm{Ric}_g \geq K$”，其中 $K \in \mathbf{R}$，为广义相对论与洛伦兹比较理论建立了自然联系。现在我们概述在利普希茨时空（M，g）上定义该条件的两种方法。为简化表述，以下我们仅陈述主要结果（及相关定义），并假设 K 为零。

通常解析地在利普希茨时空上定义里奇曲率（及其类时下界）的方式——实际上，Geroch–Traschen 正则性 $H^{1,\ 2}_{\mathrm{loc}} \cap C^0$已足够 [37] ——是张量分布理论。详情请参阅 Grosser–Kunzinger– Oberguggenberger–Steinbauer [42], Graf [40], 以及 §2.2。在全文中，读者应将$(M,\ g)$ 视为爱因斯坦方程的一个分布解，其类时能量动量张量有下界，例如 §1.1中提到的情形。

另一方面，当前研究高度关注类综合类时里奇曲率下界的表述，这一概念由 Cavalletti– Mondino 提出， [24] 其灵感来自 McCann 先前取得的突破 [58] 以及 Mondino– Suhr 的工作 [64]。这一方向可追溯至 Sturm 所建立的成熟理论，即所谓的 CD度量测度空间 [77, 78] 以及 Lott–Villani 的相关工作 [56]。简而言之， [24] 类综合理论要求：沿着 Eckstein–Miller 引入的洛伦兹–Wasserstein空间中的测地线，熵泛函具有凸性 [29]。这种方法的一个优点是，它适用于不具备里奇曲率概念、甚至不具备可微结构的“度量测度时空”，例如

Busemann 的类时空间 [16], Kunzinger–Sämann 的洛伦兹长度空间[52], 或 Minguzzi–Suhr 的有界洛伦兹度量空间 [60]。Cavalletti–Mondino 的综述等指出了这一框架的诸多优点 [23], 。此处暂且指出，在这一抽象框架下有若干比较定理成立，参见 Cavalletti– Mondino [24,25], Beran 等人 [6], Braun [10], 以及下文 §1.4 。

因此，自然会问解析与合成类时里奇曲率下界之间有何关系。这个问题受到 McCann [58]和 Mondino–Suhr [64], 开创性工作的启发；他们证明了在光滑g情形下，两种方法等价。如果 g 是 C^1，那么从解析理论到合成理论的蕴含关系由 Braun–Calisti [11]证明。在黎曼号差下，Kunzinger–Oberguggenberger–Vickers [50] 在正则性 C^1 下证明了类似的蕴含关系，之后 Mondino–Ryborz [63] 在 Geroch–Traschen 正则性 $H^{1}{}_{\text{下}2\ \text{loc}} \cap C^0$ [37] 以及 Kunzinger– Ohanyan–Vardabasso [51] （基于 Ketterer [47]的稳定性结果）在 Lipschitz 正则性下也证明了这一点；事实上， [63]刻画了满足 Lott–Sturm–Villani 的 CD 条件且具有 Geroch–Traschen 正则性的黎曼流形。

我们的第二个主要定理通过从分布意义下的类时里奇曲率下界推出所谓的类时测度收缩性质（简称 TMCP），架起了 Lipschitz 时空的解析理论与综合理论之间的桥梁。因此，我们将这一蕴含所需的已知正则性从 C^1 降低到局部利普希茨连续性。TMCP 由 Cavalletti–Mondino 引入 [24] ，随后由 Braun 改进 [8]。我们所关注的 [8], 表述采用了不同的熵（1.1），其优点在于，它以尖锐形式推出了上述比较定理，且不要求满足类时非分叉假设；不过，我们的论证也可用于证明 [24] 的 TMCP。

为表述第二个主要结果，给定 $q \in (0,1)$，令 ℓ_q 为由 (M,g) 的典范时间分离 l 所诱导的 q-Lorentz– Wasserstein 距离 (3.4)。该距离定义在 M 上的博雷尔概率测度空间 $\mathcal{P}(M)$ 上。按照 McCann 的定义 [58],，若曲线 $\mu\colon [0,1] \to \mathcal{P}(M)$ 关于 ℓ_q仿射参数化，则称其为 q-测地线，参见定义 3.14。对于 $N \in (1,\infty)$，定义关于 vol$_g$的 N-Rényi 熵 $\mathcal{S}_N(\cdot\,|\mathrm{vol}_g)\colon \mathcal{P}(M) \to$实数集$_- \cup\{-\infty\}$，如下所示：

$$\mathcal{S}_N(\mu \mid \mathrm{vol}_g) := -\int_M \left[\frac{\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}}{\mathrm{dvol}_g}\right]^{1-1/N} \mathrm{dvol}_g, \tag{1.1}$$

其中 μ^{ac} 是相对于 vol$_g$，对论证 μ 作勒贝格分解所得的绝对连续部分。

定义 1.3 （类时测度收缩性质，定义 3.26）。 称全局双曲加权利普希茨时空 （M，g，vol$_g$）满足过去类时测度收缩性质，简称 TMCP$^-$（0，维数 M），若对任意 $o \in M$以及任意紧支撑的、vol$_g$-绝对连续 $\mu_1 \in \mathcal{P}$（M）且集中于 I^+（o），均存在

- 一个指数 $q \in$ （0，1）以及
- 一条 q-测地线 μ： $[0,1] \to \mathcal{P}$（M），从 $\mu_0 := \delta_o$到 μ_1

使得对任意 $N' \in$ [维数 M， ∞）以及任意 $t \in [0,1]$,

$$\mathcal{S}_{N'}(\mu_t \mid \mathrm{vol}_g) \le t\,\mathcal{S}_{N'}(\mu_1 \mid \mathrm{vol}_g).$$

TMCP 不依赖于传输指数 q，参见 §3.4。此外，上述条件 $N' \in$ [维数 M， ∞）保证了维数一致性。

定理 1.4 （类时测度收缩性质，定理 6.1）。 假设 (M,g) 是一个满足分布意义下类时 $\mathrm{Ric}_g \ge 0$ 条件的全局双曲利普希茨时空。那么，全局双曲加权利普希茨时空 $(M,$ $g,$体积测度$_g)$满足 类时测度收缩性质$^-(0,$维数 $M)$。

过去类时测度收缩性质的“未来”对应版本（其中 Dirac 质量位于绝对连续分布的因果未来）也得到了证明。

注 1.5（定理 1.4 的改进）。事实上，我们在命题 6.2 中证明了一个略强的结论：在条件 (M,g) 满足 Cavalletti–Mondino [24] 的类时非分支性之后，该结论将定理 1.4 改进为 §3.3 中回顾的类时曲率维数条件；相关结果见 Braun [8]。在此类非分支性假设下，还可以得到 Cavalletti–Mondino [25],意义下的等周型不等式、关于一般类空子流形的洛伦兹距离函数的达朗贝尔算子的精确表示公式和锐比较估计（见 Braun [10],），以及体积不完备定理，参见 García-Heveling [36] 和 Braun [10]。由于指数映射甚至都未定义明确，尚不清楚利普希茨时空是否具有类时非分支性。不过，Mondino–Ryborz [63] 在更低正则性下得到的黎曼结果，以及 Deng 关于有限维 RCD 空间在 Gigli [38] 意义下非分支性的结果，都表明定理 1.4 的假设实际上蕴含类时非分支性，因而也蕴含上述结果；参见 Cavaletti–Mondino [24,注 5.15]。■

从概念上说，我们的证明基于 Calisti 等人的良好逼近 [17]以及 Cavalletti–Mondino[24] 所实现的 TMCP 强稳定性（因为它是一种凸性不等式）。然而，与 Braun–Calisti [11] 的工作（该工作依赖于 Graf [40]的逼近结果）不同，逼近的里奇张量的类时下界并非相对于 g规定的界在局部上一致地小，而只是在积分意义下较小。我们将结合 Braun–McCann 关于具有可变类时里奇曲率下界的度量测度时空的最新理论 [14] 以及 Ketterer [47] 在黎曼号差下提出的估计来应对这一挑战。

1.4. **比较理论的应用**。 最后，我们将推导出若干锐比较定理，作为定理1.4的推论：类时布伦–明可夫斯基不等式、类时比肖普–戈罗夫比较定理以及达朗贝尔比较定理[1]。当 g 光滑时，比较理论由 Eschenburg [33],Ehrlich–Jung–Kim[31], Ehrlich–Sánchez [32], Treude [79], 和 Treude–Grant [80]系统地发展起来。对于非光滑时空，我们针对 Lipschitz 时空证明的结论，此前仅在 Graf [39]所研究的正则性$C^{1下，以及}$ C^1 Braun–Calisti [11]所研究的正则性下才为人所知。

正如 Cavalletti–Mondino [24] 以及后来 Braun [8], 所证明的，我们将得到的前两个比较定理是定理 1.4 中类时测度收缩性质的标准推论。给定 $X_0, X_1 \subset M$，令 $G(X_0, X_1)$ 表示所有起始于 X_0 并终止于 X_1的类时仿射参数化极大测地线组成的集合。给定$t \in [0,1]$，令 $\mathsf{e}_t\colon C^0([0,1]; M) \to M$表示求值映射 $\mathsf{e}_t(\gamma) := \gamma_t$。

定理 1.6 (类时 Brunn–Minkowski 不等式，定理 6.3)。 假设 (M,g)是一个具有 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 分布意义下类时的全局双曲 *Lipschitz* 时空。那么对于每个 $o \in M$、每个紧集 $X_1 \subset I^+(o)$ 以及每个 $t \in [0,1]$,

$$\mathrm{vol}_g^*[\mathsf{e}_t(G(\{o\}, X_1))]^{1/\dim M} \geq t\,\mathrm{vol}_g[X_1]^{1/\dim M},$$

其中vol_g^* 表示由vol_g诱导的外测度。

接下来，设 $E \subset I^+(o) \cup \{o\}$ 是紧致的，且相对于点$o \in M$呈星形。给定 $r > 0$，令 $v(r)$表示 E 与

[1]我们指出，类时 Bonnet–Myers 不等式本身是合成类时里奇曲率界的另一项标准推论，参见 Cavalletti–Mondino [24]。然而，在我们的工作中，定理 1.1 是定理 1.4的前提，而非推论：我们所用的 Ketterer 估计 [47] ，参见引理 3.4，要求对相关测地线的长度给出上界。因此，我们必须确保不会出现更长的测地线。

中所有到的距离不超过 r 的点所构成的双曲面 $I^+(o)$ 的交集的体积； $s(r)$表示 E 与中所有到的距离o)恰好为的点所构成的超曲面 r 的交集的 o的面积。关于这些概念的详细说明，请参见 §6.2。

定理 1.7 (类时 Bishop–Gromov 不等式，定理 6.4)。 设 $(M,\ g)$ 是一个全局双曲 *Lipschitz* 时空，且其 *Ricci* 曲率在分布意义下类时非负。给定$o \in M$，取一个紧集 $E \subset I^+(o) \cup \{o\}$ 该集合关于 o 是星形的。那么对每个 $r,\ R > 0$ 满足 $r < R$,

$$\frac{s(r)}{s(R)} \geq \frac{r^{\dim M-1}}{R^{\dim M-1}},$$
$$\frac{v(r)}{v(R)} \geq \frac{r^{\dim M}}{R^{\dim M}}.$$

我们最后一组重要结果是达朗贝尔比较定理。这些结果由 Beran 等人建立在更抽象的 TMCP 度量测度时空框架中 [6]。然而，我们没有去验证它们与 [6] 中所发展的微分演算及其在 Lipschitz 时空中的对应理论之间的兼容性——那样会使下文的结果成为 [6] 的直接应用；相反，我们基于 [6]中的论证给出一个自成一体且精简的证明；参见 §B。

令 l_o 表示点 $o \in M$出发的未来距离函数（2.7）。根据我们在 §4.1 中证明的命题 2.19，这是一个局部 Lipschitz 连续的结果，成立于 $I^+(o)$。

定理 1.8 （洛伦兹距离函数幂的达朗贝尔比较定理，定理 6.5）。 设 (M,g) 是一个全局双曲 *Lipschitz* 时空。假设 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 在分布意义下类时。令 $q \in (0,1)$，并令 $q' < 0$ 为其共轭指数。那么，对每个 $o \in M$，以下 q'-达朗贝尔比较估计

$$\operatorname{div}\Big[\Big|\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2} \nabla \frac{l_o^q}{q}\Big] \leq \dim M \tag{1.2}$$

在分布意义下成立于 $I^+(o)$，这意味着对每个具有紧支撑的 *Lipschitz* 连续函数ϕ: $I^+(o) \to$ **实数集**+，

$$-\int_M \mathrm{d}\phi\Big[\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big] \Big|\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2} \mathrm{dvol}_g \leq \dim M \int_M \phi \,\mathrm{dvol}_g.$$

不等式（1.2）应与黎曼流形上距离平方除以二的（达朗贝尔）拉普拉斯算子的类似经典比较估计相比较，参见 Cheeger–Ebin [26]。

定理 1.9 （洛伦兹距离函数的达朗贝尔比较定理，定理 6.6）。 设 $M,\ g)$ 是一个整体双曲 *Lipschitz* 时空，且 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 在分布意义下类时。则对于每个 $o \in M$，达朗贝尔比较估计

$$\operatorname{div} \nabla l_o \leq \frac{\dim M - 1}{l_o} \tag{1.3}$$

在 $I^+(o)$ 上以分布意义成立，这意味着对于每个 *Lipschitz* 连续函数ϕ: $I^+(o) \to$ **实数集**+ 且具有紧支撑，

$$-\int_M \mathrm{d}\phi(\nabla l_o)\,\mathrm{dvol}_g \leq (\dim M - 1)\int_M \frac{\phi}{l_o}\,\mathrm{dvol}_g.$$

我们预计这些比较定理将产生重要影响。首先，它们表明（1.2）和（1.3）的形式左端定义了广义有符号拉东测度；见推论 6.8 和6.9。即使涉及的函数并不光滑，这一结论依然成立；这种非光滑性甚至在 g 光滑时也已出现；参见 §4.1。其次，（1.2）和（1.3）的上述弱形式可延拓至其未来类时割迹之外

o；在 Beran 等人的工作之前，即便在光滑情形下，这种延拓也尚未为人所知。 [6]，这一结果如今已在 Lipschitz 正则性下得到确立。第三，它们近来促成了一种显著简化且出人意料的“椭圆型”证明，证明了上文提到的 Eschenburg–Galloway–Newman 分裂定理；Braun 等人还将其推广至正则性 C^1 。 [13, 12]我们的达朗贝尔比较定理为将分裂定理推广至 Lipschitz 时空铺平了道路；这项工作留待未来开展。

1.5. **结构安排**。 在第 §2节中，我们回顾（带权）利普希茨时空的洛伦兹结构的基本概念。我们还将讨论如何对非光滑度量张量进行适当的光滑逼近，并探讨其在时间分离和曲率方面的性质。在第 §3节中，我们概述洛伦兹最优传输的基础知识。在第 §4节中，我们汇集了主结果所需的光滑 时空相关结果。接着，第 §5 节给出了定理 1.1的证明。我们在第 §6.1 节证明定理 6.1 ，并在第 §6.2节讨论其主要应用。最后，我们在第 §1.2节证明定理 A。

2. 解析类时里奇曲率下界

2.1. **Lipschitz 时空几何**。 在本小节中，我们汇集局部 Lipschitz 连续度量张量时空的基础知识。关于一般因果性理论，请参阅 Minguzzi 的综述 [62] 以及 Chrusćiel–Grant [28]和 Sämann[74] 关于度量张量仅连续的时空的论述。

在下文中， M 是一个光滑、豪斯多夫、第二可数且连通的拓扑流形，其维数 $\dim M$ 至少为 2。设 g 是一个固定的局部 Lipschitz 连续洛伦兹度量，即一个具有洛伦兹号差 $+, -, \dots, -$ 的度量张量，其在坐标图中的系数局部 Lipschitz 连续；对具有其他正则性的洛伦兹度量，我们也作类似定义。（事实上，在 §§A 和 4 中，我们将假设 g光滑。）特别地，我们对类时向量 $v \in TM$采用的符号约定是 $g(v,v) > 0$，在此约定下，我们有时记作$|v| := \sqrt{g(v,v)}$。我们假设 (M,g) 是一个利普希茨时空，即 g 局部 Lipschitz 连续，且存在一个（默认固定的）连续类时向量场 Z ，定义在M上；如果 g光滑，我们就简单地称 (M,g) 为时空。给定 $o \in M$，令 T_o^+表示 T_oM中所有未来指向类时向量的集合；此外，令 T^+ 表示对所有 $o \in M$的 T_o^+的不交并。除非另有说明，所有切向量、曲线、向量场等均默认相对于 Z取未来指向。

在全文中，我们固定一个默认的完备黎曼度量 r 于 M，并假定它是光滑的。根据 Nomizu–Ozeki [66]，这样的度量必然存在。对于 $v \in TM$，我们记 $|v|_r := \sqrt{r(v, v)}$。诱导长度泛函记作Len_r，诱导度量记作d_r。

我们使用标准符号 $\le$ 和 $\ll$ 分别表示 (M, g) 的因果性和时序性。此外，我们使用标准字母 J 和 I 表示它们诱导的集合；例如， $I^+(o) \subset M$ 表示点 $o \in M$的时序未来。

时间分离函数 $l\colon M^2 \to \mathbf{实数集}_+ \cup \{-\infty, \infty\}$ 定义如下

$$\begin{aligned} l(x,y) := \sup\{\mathrm{Len}_g(\gamma) : \gamma\colon [0,1] \to M \text{ smooth} \\ \text{causal curve with } \gamma_0 = x \text{ and } \gamma_1 = y\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中我们采用约定 $\sup \emptyset := -\infty$ 并简记

$$\mathrm{Len}_g(\gamma) := \int_{[0,1]} \sqrt{g(\dot\gamma_t, \dot\gamma_t)}\, \mathrm{d}t.$$

它满足惯常的反三角不等式（其中我们采用约定$-\infty + z := z + (-\infty) := -\infty$ 对每个 $z \in$ **实数集** $\cup \{-\infty, \infty\}$均成立）。给定 $L > 0$，我们称曲线 $\gamma\colon [0, L] \to M$为固有时参数化，如果对

每个 $s,t\in[0,L]$ 且满足 $s<t$。若因果曲线 $\gamma\colon[0,1]\to M$ 满足条件 $l(\gamma_s,\gamma_t)=(t-s)\,l(\gamma_0,\gamma_1)$ 对每个 $s,t\in[0,1]$ 且满足 $s<t$，则称其为仿射参数化。达到上确界 (2.1) 并以 Filippov 的意义满足测地线方程的因果曲线 [34] 称为极大测地线。Lange–Lytchak–Sämann[54] 证明，在 Lipschitz 时空中，每条 (2.1) 的因果极大化曲线都可以重新参数化为一条 C^1,1-曲线，并且按上述意义它是一条极大测地线。（若 g 甚至具有 C^1正则性，Graf [40] 此前已证明，因果极大化曲线可以重新参数化为满足经典意义下测地线方程的 C^2-曲线。）此外，根据命题 1.4], 之后的条款，该重新参数化的 C^1,1-范数不超过 g 的 C^0,1-范数与 γ 的 r-长度（其中，所涉及的范数可理解为相对于 r的上确界范数，参见 (2.3)）。特别地，极大测地线（以及极大化子）具有确定的因果性质，这意味着它们不能同时包含类时和类光子段。这一事实证实了 Graf–Ling [41]此前的一项结果。

约定 2.1（多个度量张量）。 当涉及多个度量张量时，为避免混淆或歧义，我们有时会给由相应度量张量 g 导出的量加上下标。例如，我们写作 $\leq_g$ 而非 $\leq$，写作 $I^+_g(o)$ 而非 $I^+(o)$ （其中 $o\in M$），写作 l_g 而非 l，等等。■

定义 2.2（全局双曲性）。 若利普希茨时空（M,g）满足以下性质，则称其为整体双曲的。

（i）对于每个紧集 $C\subset M$，都存在 $c>0$，使得像包含于 C 中的所有光滑因果曲线的 r-长度均有上界 c。（ii）对于任意 $x,y\in M$，因果菱形 $J(x,y)\subset M$ 是紧致的。

第一条性质称为非完全禁闭。

Sämann[74]的研究给出了前述（经典）全局双曲性概念的若干等价刻画，即使 g 仅为连续函数也是如此。此外，还有一些值得一提的推论，详见 Sämann [74, 命题 3.3、推论 3.4] 以及 Minguzzi [61,命题 2.26、定理 2.55] 。

定理 2.3（全局双曲 Lipschitz 时空的性质）。 设 （M,g）是一个全局双曲 *Lipschitz* 时空。则有以下结论。

（i）因果关系 $\leq$ 是闭的。（ii）对于任意紧致集 $X,Y\subset M$，因果翡翠 $J(X,Y)\subset M$ 是紧致的。（iii）时间分离函数的正部 l_+ 有限且连续。（iv）任意满足 $x\leq y$ 的点 $x,y\in M$ 之间都存在一条极大化测地线。

最后，令 vol_g 表示由 g诱导的体积测度。我们将固定一个博雷尔测度 $\mathfrak{m}$，使负对数密度 $-\log \mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 局部 Lipschitz 连续。若 $-\log \mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 连续，我们称 $\mathfrak{m}$ 为光滑的。如果 M 中的博雷尔子集相对于 M上的某个（因而也相对于每个）光滑测度都是可忽略的，我们就称该子集为零测度集。类似地，我们将定义函数局部属于 L^∞，而不指定具体的测度。

定义 2.4 (加权 Lipschitz 时空)。 我们称三元组 $(M,g,\mathfrak{m})$ 为全局双曲加权利普希茨时空，如果

a. (M,g) 是一个全局双曲 *Lipschitz* 时空，并且b. $\mathfrak{m}$ 在 M 上构成一个博雷尔测度，且其负对数密度$-\log \mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 局部 *Lipschitz* 连续。

2.2. **正则化**。 由于在我们的大部分工作中， g 的系数仅局部 Lipschitz 连续，因此曲率或指数映射等基本几何量并未按经典方式定义。为了使用这些量，我们将对其进行正则化

g 使得可能存在的分布意义下的类时里奇曲率下界在某种 L^p意义下得以“近似”保留。Calisti 等人已构造出此类近似 [17], ，我们将其方法推广到加权情形。关于分布张量场正则化的更多细节和背景，也可参见 Grosser–Kunzinger–Oberguggenberger–Steinbauer [42] 和 Graf [40]。

2.2.1. 张量分布。令 $\mathrm{Vol}(M)$ 表示 M 的体积丛；如果 M 是可定向的（我们不作此假设），它就是由最高次微分形式构成的向量丛 $\Lambda^{\dim M}T^*M$。

令 $\Gamma_c(\mathrm{Vol}(M))$ 表示 $\mathrm{Vol}(M)$ 的光滑紧支撑截面空间，其元素称为体积密度。给定体积密度 $\mu\in\Gamma_c(\mathrm{Vol}(M))$ 和开集 $U\subset M$，积分 $\int_U\mu$ 的定义类比于可定向流形上最高次微分形式的积分。若对于每个开集 $U\subset M$ 都有 $\int_U\mu\geq 0$，则称 μ 非负。

标量分布集合 $\mathcal{D}'(M)$ 定义为 $\Gamma_c(\mathrm{Vol}(M))$ 的拓扑对偶空间，其对偶配对为 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$。空间 $C^\infty(M)$ 通过将 $\psi\in C^\infty(M)$ 与赋值 $\langle\psi\,|\,\mu\rangle:=\int_M\psi\,\mu$ 对应起来，嵌入 $\mathcal{D}'(M)$。

定义 2.5 （分布的比较）。给定 $u,v\in\mathcal{D}'(M)$，若对每个非负体积密度 $\mu\in\Gamma_c(\mathrm{Vol}(M))$ 都有 $\langle u\,|\,\mu\rangle\geq\langle v\,|\,\mu\rangle$，则记作 $u\geq v$。

事实上，每个非负标量分布（即在上述意义下满足$u\geq 0$ 的每个 $u\in\mathcal{D}'(M)$）都是一个测度。

由于我们将处理分布意义下的（度量张量和）曲率，因此也回顾一下由下式定义的 (0,2)-张量分布空间

$$\mathcal{D}'((T^*)^{\otimes 2}M):=\mathcal{D}'(M)\otimes_{C^\infty(M)}\Gamma((T^*)^{\otimes 2}M),$$

其中 $\otimes_{C^\infty(M)}$ 表示环 $C^\infty(M)$ 上的经典张量积。与其光滑对应物一样，(0,2)-张量分布在每个坐标图上都可作局部坐标表示。通过对相应系数作推前和拉回，这类分布在局部可视为 **实数集**$^{\dim M}$ 的开子集上的向量值分布，参见 Graf [40, 命题 3.1]。特别地，由于 g是局部 Lipschitz 连续的，并且令 $f\colon M\to$ **实数集** 为局部 Lipschitz 连续函数， f 的每个方向导数以及局部定义如下的克里斯托费尔符号

$$\Gamma_{ij}^k:=\frac{g^{kl}}{2}\Big[\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\Big],$$

都局部属于 L^∞。给定一个光滑向量场 $X\in\mathfrak{X}(M)$，假设其支集包含在单个坐标图中，则局部公式

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_g(X,X)&:=\Big[\frac{\partial\Gamma_{ij}^m}{\partial x^m}-\frac{\partial\Gamma_{im}^m}{\partial x^j}+\Gamma_{ij}^m\,\Gamma_{km}^k-\Gamma_{ik}^m\,\Gamma_{jm}^k\Big]\,X^i\,X^j,\\ \mathrm{Hess}_g f(X,X)&:=\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma_{ij}^k\,\frac{\partial f}{\partial x^k}\Big]\,X^i\,X^j,\\ (\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f)(X,X)&:=\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial x^j}\,X^i\,X^j\end{aligned}\tag{2.2}$$

在 $\mathcal{D}'(M)$ 中给出了定义良好的对象。它们分别导出 (0，2) 阶张量分布 Ric_g、$\mathrm{Hess}_g f$ 和 $\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f$。

回顾 M 上的参考测度 $\mathfrak{m}$，我们假设 $-\log\mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 局部 Lipschitz 连续。

定义 2.6 (分布意义下的 Bakry–Émery–Ricci 张量)。对于 $N\in[$维 $M,\infty)$ 我们定义 N-Bakry–Émery–Ricci 分布张量 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}\in\mathcal{D}'((T^*)^{\otimes 2}M)$

通过以下公式

$$\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N} := \begin{cases} \mathrm{Ric}_g - \mathrm{Hess}_g \log \dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g} \\ \qquad - \dfrac{1}{N - \dim M} \, \mathrm{d}\log \dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g} \otimes \mathrm{d}\log \dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g} & \text{if } N > \dim M, \\ \mathrm{Ric}_g & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 2.7（分布意义下的 Bakry–Émery–Ricci 张量的界）。对于 $K \in$**实数集**以及 $N \in$[维 M，∞），称 $\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N} \geq K$ 在分布意义下为类时，如果

a. 在 $N >$维 M的情形下，每个类时向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 都满足

$$\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}(X,X) \geq K\, g(X,X)$$

在定义 2.5的意义下，

b. 否则，密度 $\mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 为常数，且每个类时向量场$X \in \mathfrak{X}(M)$ 都满足

$$\mathrm{Ric}_g(X,X) \geq K\, g(X,X)$$

在定义 2.5的意义下。

注记 2.8（缩放）。注意，张量分布 $\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N}$（及其类时分布下界有界性）在将参考测度$\mathfrak{m}$乘以正数进行缩放后保持不变。■

2.2.2. 良好逼近。设 $\{\rho_\varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$ 是实数集 $\mathbf{R}^{\dim M}$ 上的一族标准磨光核。利用单位分解和局部系数的按坐标图卷积，对于给定的 $T \in \mathcal{D}'((T^*)^{\otimes 2}M)$，可以定义其卷积 $T *_M \rho_\varepsilon$；对每个 $\varepsilon > 0$，它都是 $\Gamma((T^*)^{\otimes 2}M)$ 的一个元素，详细内容参见例如 Graf [40, §3.3]；对于标量分布$u \in \mathcal{D}'(M)$ 的正则化 $u *_M \rho_\varepsilon$，也有类似结论。实数集 $\mathbf{R}^{\dim M}$ 上分布卷积的许多标准性质，同样适用于 M 上此类分布的正则化。

首先是收敛。回顾一下，r 是 M上的背景黎曼度量；我们分别用 ${}^r\nabla$ 和 vol_r 表示其诱导的 Levi-Civita 联络和体积测度。对于给定的 $T \in \Gamma((T^*)^{\otimes 2}M)$和 $i \in \mathbf{N}_0$,，令 $|{}^r\nabla^i T| \colon M \to$**实数集**$_+$为 ${}^r\nabla^i T$的逐点算子范数；这里，${}^r\nabla^i$ 表示对 ${}^r\nabla$ 进行 i次复合应用，使得 ${}^r\nabla^0 T := T$。对于紧子集 $C \subset M$和 $p \in [1,\infty)$，我们定义

$$\begin{aligned} \left\| {}^r\nabla^i T \right\|_{L^p,C} &:= \left[\int_C \left| {}^r\nabla^i T \right|^p \mathrm{dvol}_r \right]^p, \\ \left\| {}^r\nabla^i T \right\|_{\infty,C} &:= \sup\{ \left| {}^r\nabla^i T \right|(x) : x \in C \}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

关于局部利普希茨连续度量 g 的正则化，下列性质由 Calisti 等人 [17, 引理 3.2]证明。

引理 2.9 (关于 g的正则化的基本性质。令 $C \subset M$ 为紧致集。则以下性质成立。

(i)我们有一致 *Lipschitz* 估计

$$\sup\{ \left\| {}^r\nabla (g *_M \rho_\varepsilon) \right\|_{\infty,C} : \varepsilon > 0 \} < \infty.$$

(ii) 对于每个 $p \in [1,\infty)$，我们有 $g *_M \rho_\varepsilon \to g$在 $W^{1,p}$ 中局部成立，当 $\varepsilon \to 0^+$时，即

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\left\| (g *_M \rho_\varepsilon) - g \right\|_{L^p,C} + \left\| {}^r\nabla (g *_M \rho_\varepsilon) - {}^r\nabla g \right\|_{L^p,C} \right] = 0.$$

注记2.10（关于体积形式r的选择）。在（体积形式r 中选择2.3作为参考测度，只是表面上的选择，对我们接下来的论证并非必要。它可以并且将会被一列加权测度所取代，这些测度的密度（相对于具有洛伦兹号差的度量张量）为正且连续，并且

局部一致收敛，参见引理2.11。特别是，所有关于张量分布局部收敛的相邻陈述均保持不变。■

第二个是非负性的保持。也就是说，若 u， $v \in \mathcal{D}'(M)$ 满足$u \geq v$ 定义 2.5 中的分布意义 $u *_M \rho_\varepsilon \geq v *_M \rho_\varepsilon$ 在 M 上逐点成立，对每个 $\varepsilon > 0$。

这些“朴素”的正则化存在两个问题。首先，给定 $\varepsilon > 0$ ，来自 g 和 $g *_M \rho_\varepsilon$ 的因果结构通常并不相关。其次，设 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 是一个类时向量场。若对于某个 $K \in \mathbf{R}$ 和 $N \in [$ 维数 $M, \infty)$，$\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N} \geq K$ 在分布意义下类时，则根据上一段可得 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}(X,X)$ $*_M \rho_\varepsilon \geq K\, g(X,X) *_M \rho_\varepsilon$。由于公式 (2.2) 以非线性方式依赖于 g 和 $-\log \mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$，一般而言，后一个不等式并不意味着存在更具几何直观性的条件 $\mathrm{Ric}_{g_\varepsilon,\mathfrak{m}_\varepsilon,N}(X,X) \geq K\, g_\varepsilon(X, X)$，其中 $\{g_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 和 $\{\mathfrak{m}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 是 g 和 $\mathfrak{m}$ 各自的任意光滑正则化。

构造一族$\{\check{g}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 具有洛伦兹号差的光滑度量张量，使其逼近 g，遵循其因果结构，并以 L^p-意义保留其分布曲率界，这是 Calisti 等人的主要成果之一。 [17]。他们的方法受到 Kunzinger–Steinbauer–Stojković–Vickers[53] （假设 g 局部为 $C^{1,1}$）和 Graf [40] （假设 g 属于 C^1类）先前研究的启发。下文将讨论曲率方面；目前，我们聚焦于因果性。

回顾一下，对于 g_1 和 g_2 上的两个粗糙洛伦兹度量 M，我们记 $g_1 \prec g_2$ ，如果对于每个 $v \in TM \setminus \{0\}$， $g_1(v,v) \geq 0$ 蕴含 $g_2(v,v) > 0$；更形象地说， g_1 的光锥严格窄于 g_2的光锥。此外，回顾式（2.3）中的局部范数。

引理 2.11 (良好近似的存在 [17, 引理 2。4])。 存在一族$\{\check{g}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 光滑洛伦兹度量，它们由与 g相同的连续向量场确定可定向时间方向，并具有以下性质。

(i) 对于每个 $\varepsilon > 0$，都有 $\check{g}_\varepsilon \prec g$。(ii) 对于每个 $p \in [1, \infty)$，都有 $\check{g}_\varepsilon \to g$ 和 $\check{g}_\varepsilon^{-1} \to g^{-1}$ 在局部一致收敛，且在 $W^{1,p}$ 中局部收敛，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时；也就是说，对于每个紧集 $C \subset M$，

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \big\|\check{g}_\varepsilon - g\big\|_{\infty,C} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \big[\big\|\check{g}_\varepsilon - g\big\|_{L^p,C} + \big\|{}^r\nabla \check{g}_\varepsilon - {}^r\nabla g\big\|_{L^p,C}\big] = 0$$

逆也类似。

(iii) 对于每个 $p \in [1, \infty)$，都有 $\check{g}_\varepsilon - g *_M \rho_\varepsilon \to 0$ 和 $\check{g}_\varepsilon^{-1} - (g *_M \rho_\varepsilon)^{-1} \to 0$在 C^∞ 中局部收敛，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时；也就是说，对所有 $i \in \mathbf{N}_0$ 以及每个紧集 $C \subset M$，

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \big\|{}^r\nabla^i \check{g}_\varepsilon - {}^r\nabla^i (g *_M \rho_\varepsilon)\big\|_{\infty,C} = 0$$

逆也类似。

(iv) 对每个紧集 $C \subset M$，都存在一个序列 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$，属于 $(0, \infty)$，单调递减至零，并依赖于 C，且 $\check{g}_{\varepsilon_n} \prec \check{g}_{\varepsilon_{n+1}}$ 对每个 $n \in \mathbf{N}$ 都成立。

备注 2.12（全局双曲性的继承）。 在上述引理中，根据第一项，$\check{g}_\varepsilon$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都从 g 继承全局双曲性，参见 Sämann [74, 定理 5.7、5.9]。■

定义 2.13 (良好逼近)。 给定一个紧集 $C \subset M$，如果对于每个 $n \in \mathbf{N}$，则称定义在 M 上的洛伦兹度量与光滑测度的两个序列 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 分别在 C 上良好逼近 g 和 $\mathfrak{m}$，

$$g_n = \check{g}_{\varepsilon_n},$$
$$\log \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}{\mathrm{dvol}_{g_n}} = \Big[\log \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\Big] *_M \rho_{\varepsilon_n},$$

其中，族 $\{\check{}g_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 满足引理 *2.11* 的结论，而 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$是该引理最后一个陈述中的序列。

2.2.3. 良好逼近的性质。 我们固定良好逼近$(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 和$(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的 g 以及 $\mathfrak{m}$ 在紧集 $C \subset M$上的序列，分别记为。它们的第一个性质涉及其诱导的时间分离函数的正部，参见 Calisti 等人 [17, 引理 5。5] 以了解证明。

引理 2.14 (时间分离函数的局部一致收敛)。 序列 $(l_{g_n,\,+})_{n\in\mathbf{N}}$ 局部一致收敛于$l_{g,\,+}$。

从 g 和 $\mathfrak{m}$ 保留类时分布曲率界则更加微妙。Kunzinger–Steinbauer–Stojković–Vickers [53]（当 g 为 C^1时，1）以及 Graf [40]（当 g 为 C^1时）此前获得了由 $\{\check{}g_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$诱导的曲率张量的一个下界，该下界与 g 最初给出的类时分布曲率界之间的差在局部上一致地很小。他们的论证可推广到加权情形，参见 Braun–Calisti [11, 引理 2.8]。在我们的情形中， g 和–log $\mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 仅是局部 Lipschitz 连续的，因此不能期望保留这一局部一致误差。不过，仍可期待一个非常粗略的一致下界；而对于更精确的估计，则可期待其在 L^p中很小。这正是引理 2.15 和 2.16 的内容，它们总结了 Calisti 等人的结果 [17]。

我们先引入一些记号。固定 $N \in$ [维 M， ∞)。设 $V \subset T^+|_C$是紧致的。若存在 $\lambda > 0$ 和$n_0 \in \mathbf{N}$ ，使得对于每个满足 $n \geq n_0$的 $n \in \mathbf{N}$ ，都有 $g_n(v,\ v) \geq \lambda^2$ 对每个$v \in V$都成立，则称 V 最终一致类时。根据此定义，我们可以直接陈述 Calisti 等人关于非加权情形的结果 [17, 命题 5.8] 的以下直接推广。

引理 2.15 （粗略一致下界）。 假设 $K \in$**实数集** 且 $N \in$ [维 M, ∞)满足 $\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N} \geq K$ 在分布意义下类时。设 $V \subset T^+|_C$ 是紧致且一致类时的，其中 $C \subset M$ 是紧致的。那么存在 $\rho \in$**实数集**$_+$ 和 $n_0 \in \mathbf{N}$，使得对于每个满足 $n \geq n_0$ 的 $n \in \mathbf{N}$ 以及每个 $v \in V$，

$$\mathrm{Ric}_{g_n,\mathfrak{m}_n,N}(v,v) \geq -\rho\, g_n(v,v).$$

为获得更精细的估计，再次假设 V 如上。于是，对于每个满足 $n \geq n_0$ 的 $n \in \mathbf{N}$，函数 $k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N}\colon C \to$ **实数集** 定义如下：

$$k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N}(x) := \inf\Big\{\frac{\mathrm{Ric}_{g_n,\mathfrak{m}_n,N}(v,v)}{g_n(v,v)} : v \in V \cap T_xM\Big\} \tag{2.4}$$

是连续的。特别地，对于每个满足 $n \geq n_0$ 的 $n \in \mathbf{N}$ 、每个 $x \in C$ 以及每个 $v \in V \cap T_xM$，我们得到

$$\mathrm{Ric}_{g_n,\mathfrak{m}_n,N}(v,v) \geq k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N}(x)\, g_n(v,v).$$

采用与 Calisti 等人类似的证明 [17, 引理 5。9] (其中我们选择其中的向量场序列，使其最小化 (2.4))，即可得到以下结论。显然，通过将 Friedrichs 型引理 [17, 引理 3。3]应用于 (2.3) 中的加权量，并注意到相关参考测度的密度局部一致收敛，该结论在加权情形下也成立。

引理 2.16 (L^p曲率界的收敛). 假设存在 $K \in$**实数集**和 $N \in$ [维数 M, ∞)，使得 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},\ N} \geq K$ 在分布意义下类时。设 $V \subset T^+|_C$是紧致且一致类时的，并且 $C \subset M$是紧致的。那么对每个 $p \in [1, \infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_C \left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N} - K)_-\right|^p \mathrm{d}\mathfrak{m}_n = 0.$$

2.2.4. 紧致且一致类时集合的构造。 最后，我们给出能够实际构造上述切向量集合的充分条件。以下结果的一个变体隐含地出现在 Calisti 等人关于利普希茨时空的 Hawking 不完备定理的证明中 [17, 定理 5.1] (这里使用固有时，而非仿射参数化极大测地线)。回顾一下r 是 上的固定背景黎曼度量 M。

引理 *2.17*（洛伦兹长度与黎曼长度的界）。设 X、$Y \subset M$ 是满足 $X \times Y \subset I_g$ 的紧集。我们定义 $C := J_g(X,Y)$。根据定义 *2.13*，设 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 是 g 在 C 上的良好逼近。则存在常数 $c > 0$、$\lambda > 0$ 和 $n_0 \in \mathbf{N}$，具有如下性质。对于任意满足 $n \geq n_0$ 的 $n \in \mathbf{N}$，我们有 $X \times Y \subset I_{g_n}$，并且每条以仿射参数化的类时 g_n-极大化测地线 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 上的每个切向量，只要该测地线始于 X 并终止于 Y，就属于集合

$$V := \{v \in T^+\big|_C : g_n(v,v) \geq \lambda^2 \text{ for every } n \in \mathbf{N} \text{ with } n \geq n_0,\ |v|_r \leq c\},$$

该集合是紧致的，且最终一致类时。

证明。 显然， V 是紧致的，因为它是 TM 的一个紧子集的闭子集。此外，根据定义，它最终一致类时。

我们先作一些一般性考察。给定任意 $n_0 \in$**N**，将所讨论的曲线类简记为 $G_{\geq n_0}$。由于 (M,g) 非完全禁闭（全局双曲性蕴含这一性质），存在常数 $L > 0$，使得每条g-因果曲线的 r-长度均不超过 L。特别地，由于每个 $\gamma \in G_{n_0}$ 都是g类时的，我们得到 $\mathrm{Len}_r(\gamma) \leq L$。由于 γ 对于某个满足 $n \geq n_0$的 $n \in$**N** 关于 g_n 满足测地线方程，Lange–Lytchak–Sämann [54]在 §2.1 中回顾的结果表明， γ 在紧集 C 上相对于 r的 C^1,1-范数，可由 g_n 在 C 上的 C^0,1-范数以及 $\mathrm{Len}_r(\gamma)$ 控制。后者如前所述有上界，而根据引理 2.11 和 Calisti 等人的 [17, 引理 3.2]，前者可由 g 在 C 上的 C^0,1-范数控制（根据对 g的假设，该范数有限）。特别地，这意味着存在常数$c > 0$，使得对每个 $\gamma \in G_{\geq n_0}$，我们都有 $|\dot\gamma|_r \leq c$在 $[0,1]$上。

关于 X和 Y的假设、$(M,\ g)$的全局双曲性以及 l_+的连续性，意味着存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\inf\{l_g(x,y) : x \in X,\ y \in Y\} \geq 3\lambda.$$

根据引理2.14 以及 $X \times Y$的紧性，存在一个数 $n_0 \in \mathbf{N}_0$，使得对每个 $n \in$**N** 满足 $n \geq n_0$的情形，

$$\inf\{l_{g_n}(x,y) : x \in X,\ y \in Y\} \geq 2\lambda. \tag{2.5}$$

另一方面，再次根据引理2.11，适当增大 n_0后，每个 $n, m \in \mathbf{N}$ 满足n的情形，$m \geq n_0$ 满足

$$\big\|g_n - g_m\big\|_{\infty,C} \leq \frac{3\lambda^2}{c^2}. \tag{2.6}$$

我们将针对上述 c、 λ和 n_0的选取证明引理中的断言。

设 $\gamma \in G_{\geq n_0}$ 是一条类时仿射参数化的 g_n-极大化测地线，其中$n \in \mathbf{N}$ 满足 $n \geq n_0$，并设 $t \in [0,1]$。回忆 $|\dot\gamma_t|_r \leq c$。关于 g_n的仿射参数化、(2.5)和(2.6)给出，对于每个 $m \in$**N** 满足 $m \geq n_0$的情形，

$$\begin{aligned} g_m(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t) &= g_m(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t) - g_n(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t) + g_n(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t) \\ &\geq -\big\|g_n - g_m\big\|_{\infty,C} \big|\dot\gamma_t\big|_r^2 + 4\lambda^2 \\ &\geq \lambda^2. \end{aligned}$$

这就是所需的结论。 □

用类似的证明可以验证以下结论。

引理 2.18 (一致预紧性)。 保留引理 *2.17*中的假设和记号。那么，所有类时仿射参数化的 g极大测地线 $\gamma\colon\ [0,1]\to M$其起点位于 X且终点位于 Y的集合，关于 $C^0([0,1];C)$ 所诱导的一致拓扑 r是等利普希茨连续的。

2.3. 时间分离函数的正则性。 现在，我们利用前面的讨论，在我们的全局双曲加权利普希茨时空 $(M,g,\mathfrak{m})$ 上建立 l 的若干关键性质。

命题 *2.19*（局部等利普希茨连续性）。设 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 是定义 *2.13* 中所述的 g 的一个良好逼近。那么存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使得类 $\{l_{g_n}:\ n\in\mathbf{N}\ with\ \ n\geq n_0\}$ 在 I_g 上局部等利普希茨连续；也就是说，对于每个 $x,y\in M$ 满足 $x\ll_g y$ 的情形，都存在 $U_x,U_y\subset M$ 两个开邻域，分别包含 x 和 y，并且存在 $c_0>0$，使得对每个 $x',x''\in U_x$ 以及每个 $y',y''\in U_y$，

$$\sup\{\left|l_{g_n}(x',y')-l_{g_n}(x'',y'')\right|:n\in\mathbf{N}\ with\ n\geq n_0\}\leq c_0\left[\mathsf{d}_r(x',x'')+\mathsf{d}_r(y',y'')\right].$$

特别地，l_g 在 I_g 上局部 *Lipschitz* 连续。

这个命题的证明部分基于光滑情形下时间分离函数的一些众所周知的性质；我们在下文 §4.1 中回顾所需材料，因此将命题 2.19的证明推迟到那里。

定义洛伦兹距离函数 $l_o\colon\ I^+(o)\cup\{o\}\to$ **实数集**$^+$，从 o 到，定义为

$$l_o(x):=l(o,x).\tag{2.7}$$

推论 2.20 (程函方程)。 l_o 的梯度 ∇l_o 在 $I^+(o)$ 上存在的任何位置均指向过去，并且满足

$$g(\nabla l_o,\nabla l_o)=1\quad \mathfrak{m}\llcorner I^+(o)\text{-}a.e.$$

证明。 由命题 2.19 和拉德马赫定理， l_o 几乎处处可微 $\mathfrak{m}$于 $I^+(o)$，因此该陈述是有意义的。

我们首先声称，在 l_o 的每个可微点 $x\in I^+(o)$ 处， $g(\nabla l_o,\nabla l_o)\geq 1$。令 $v\in T_x^+$。此外，令 $^r\exp$ 表示由背景黎曼度量 r 所诱导的指数映射。由于 g 连续，对于每个充分小的 $s>0$，通过 $\gamma_t^s:=\,^r\exp_x(tsv)$ 定义的曲线 $\gamma^s\colon\ [0,1]\to M$ 都是类时的；特别地，$^r\exp_x(sv)\in I^+(x)$。由反三角不等式及 l 的定义，

$$\frac{l_o(^r\exp_x(sv))-l_o(x)}{s}\geq\frac{l(x,^r\exp_x(sv))}{s}\geq\frac{1}{s}\int_{[0,1]}\sqrt{g(\dot\gamma_t^s,\dot\gamma_t^s)}\,\mathrm{d}t.$$

由 g 的局部利普希茨连续性和泰勒展开可得，且此结论关于 $t\in[0,1]$一致，

$$\sqrt{g(\dot\gamma_t^s,\dot\gamma_t^s)}=s\sqrt{g(v,v)}+\mathrm{o}(s)\quad\text{as } s\to0^+.$$

因此，

$$\mathrm{d}l_o(v)=\lim_{s\to0^+}\frac{l_o(^r\exp_x(sv))-l_o(x)}{s}\geq\sqrt{g(v,v)}.\tag{2.8}$$

由 v 的任意性可知，对每个因果向量 $v\in T_xM$，均有 $\mathrm{d}l_o(v)\geq0$。换言之，$\mathrm{d}l_o$ 属于 T_xM 中因果向量集合的对偶锥。这个锥恰好是 T_xM 中过去指向的因果向量集合在音乐同构 $\flat$ 下的像。这意味着 ∇l_o 是 T_xM 中一个过去指向的因果向量。进而，众所周知的对偶公式

$$\sqrt{g(\nabla l_o,\nabla l_o)}=\inf\{\mathrm{d}l_o(v):v\in T_x^+\text{ with }g(v,v)\geq1\}\tag{2.9}$$

结合式（2.8）可得所需的估计。

剩下只需证明在上述点 x 处 $g(\nabla l_o, \nabla l_o) \le 1$。令 $\gamma\colon [0, l_o(x)] \to M$ 是一条从 o 到 x、按固有时参数化的类时极大测地线。根据 §2.1 中回顾的 Lange–Lytchak–Sämann [54] 的结果，γ 是一条 C^1,1-曲线。由固有时参数化可知，对每个 $t \in [0, l_o(x)]$，都有 $g(\dot\gamma_t, \dot\gamma_t) = 1$。因此，利用对偶公式（2.9）和固有时参数化，

$$\sqrt{g(\nabla l_o, \nabla l_o)} \le \mathrm{d} l_o(\dot\gamma_{l_o(x)}) = \lim_{s \to 0^+} \frac{l_o(\gamma_{l_o(x)}) - l_o(\gamma_{l_o(x)-s})}{s} = 1,$$

这就是所需的不等式。 □

3. 合成类时里奇曲率下界

3.1. 一维讨论。

3.1.1. 畸变系数。 对于 $L > 0$，令 $\kappa\colon [0, L] \to$ **实数集** 为一个连续函数。由此导出的广义正弦函数 $\sin_\kappa\colon [0, L] \to$ **实数集** 定义为常微分方程 $u'' + \kappa u = 0$ 的唯一解，其中 $u(0) = 0$ 且 $u'(0) = 1$。例如，若 κ 为常数，则对每个 $\theta \in [0, L]$，

$$\sin_\kappa(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{\kappa}\,\theta)}{\sqrt{\kappa}} & \text{if } \kappa > 0, \\ \theta & \text{if } \kappa = 0, \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-\kappa}\,\theta)}{\sqrt{-\kappa}} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

令 $\pi_\kappa \in (0, \infty]$ 表示 $\sin_\kappa$ 的第一个正零点（约定 $\pi_\kappa := \infty$，若 $\sin_\kappa$ 仅在零点处为零）。例如，若 κ 为常数，

$$\pi_\kappa = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{if } \kappa > 0, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

定义 3.1 (σ-畸变系数)。 给定 $t \in [0, 1]$ 和 $\theta \in [0, L]$，我们定义

$$\sigma_\kappa^{(t)}(\theta) := \begin{cases} t & \textit{if } \theta = 0, \\ \dfrac{\sin_\kappa(t\,\theta)}{\sin_\kappa(\theta)} & \textit{if } \theta \in (0, \pi_\kappa), \\ \infty & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

例如，如果 κ 为零，那么对于每个 $t \in [0, 1]$ 和每个 $\theta \in [0, L]$，$\sigma_\kappa^{(t)}(\theta) = t$。注意，如果对于 $\theta \in [0, L]$ 和某个（因而是每个）$t \in [0, 1]$，$\sigma_\kappa^{(t)}(\theta) < \infty$，那么由 $v(t) := \sigma_\kappa^{(t)}(\theta)$ 定义的函数 $v\colon [0, 1] \to$ **实数集**$_+$ 满足 $v''(t) + \kappa(t\,\theta)\,\theta^2 v(t) = 0$，对每个 $t \in [0, 1]$ 都成立，并且 $v(0) = 0$ 以及 $v(1) = 1$也成立。

现在，我们通过取几何平均数来回顾另一类畸变系数。为此，我们固定 $N \in (1, \infty)$。我们约定无穷大约定：对每个 $\alpha > 0$，$0 \cdot \infty := 0$，以及 $\alpha \cdot \infty := \infty^\alpha := \infty$。

定义 3.2 (τ-畸变系数)。 给定 $t \in [0, 1]$ 和 $\theta \in [0, L]$，令

$$\tau_{\kappa,N}^{(t)}(\theta) := t^{1/N}\, \sigma_{\kappa/(N-1)}^{(t)}(\theta)^{1-1/N}.$$

备注 3.3（基本性质）。 对于每个 $t \in [0, 1]$ 和每个 $\theta \in [0, L]$，以下陈述均成立。

- 如果 $\kappa'\colon [0, L] \to M$ 满足 $\kappa' \le \kappa$ 在 $[0, L]$上，那么

$$\sigma_{\kappa'/N}^{(t)}(\theta) \le \sigma_{\kappa/N}^{(t)}(\theta),$$
$$\tau_{\kappa'/N}^{(t)}(\theta) \le \tau_{\kappa/N}^{(t)}(\theta).$$

- 我们有如下关系

$$\tau^{(t)}_{\kappa,N}(\theta) \geq \sigma^{(t)}_{\kappa/N}(\theta).$$

- 若 $(\kappa_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 是连续函数序列 $\kappa_n\colon [0,L]\to$ **实数集**，使得$\kappa \leq$ 逐点满足 $\liminf_{n\to\infty}\kappa_n$ 于 $[0,1],$，那么

$$\sigma^{(t)}_{\kappa/N}(\theta) \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma^{(t)}_{\kappa_n/N}(\theta),$$
$$\tau^{(t)}_{\kappa/N}(\theta) \leq \liminf_{n\to\infty} \tau^{(t)}_{\kappa_n/N}(\theta).$$

详情请参阅 Ketterer [46, §3]。 ■

3.1.2. 缺陷估计。为后续讨论之需，我们需要量化：若一个函数在积分意义上“接近”某个数 $K\in$**实数集**，那么相应的畸变系数也会“接近”。

对于引理 3.4中的估计，给定 $K\in$ **实数集**，$N\in[2,\infty)$，$p\in(N/2,\infty)$以及$\eta\in(0,\pi_{K/(N-1)}/2)$，我们定义两个常数

$$\begin{aligned}\Omega_{K,N,p,\eta} &:= \begin{cases} C_{N,p} & \text{if } K\leq 0,\\ \max\{C_{N,p}, \sin_{K/(N-1)}(\eta)^{N+1-4p}\} & \text{otherwise,}\end{cases}\\ \Lambda_{K,N,\eta} &:= \begin{cases} D_{K,N,\eta} & \text{if } K>0,\\ 1 & \text{otherwise,}\end{cases}\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$C_{N,p} := (2p-1)^p\left[\frac{N-1}{2p-N}\right]^{p-1},$$
$$D_{K,N,\eta} := 1+\max\left\{\sin_{K/(N-1)}(r)^{1-N} : r\in\left[\frac{\pi_{K/(N-1)}}{2}, \pi_{K/(N-1)}-\eta\right]\right\}.$$

以下估计由 Ketterer [47, 推论 4。7]。

引理 3.4 (畸变系数的缺陷)。固定 $K\in$ **实数集**、$N\in[2,\infty)$,$p\in(N/2,\infty)$以及 $\eta\in(0,\pi_{K/(N-1)}/2)$。此外，设 $\kappa\colon[0,L]\to$**实数集** 是连续的，其中 $L>0$。那么对于每个 $t\in(0,1)$ 以及每个 $\theta\in(0,\min\{L,\pi_{K/(N-1)}-\eta\})$,

$$\begin{aligned}&\tau^{(t)}_{K,N}(\theta) - \tau^{(t)}_{\kappa,N}(\theta)\\ &\quad\leq \left[\Lambda_{K,N,\eta}\,\Omega^{1/(2p-1)}_{K,N,p,\eta}\right]^{1/N}\left[\int_{[t,1]}\tau^{(r)}_{\kappa,N}(\theta)^N\,\mathrm{d}r\right]^{2(p-1)/N(2p-1)}\\ &\qquad\times\left[t\,\theta^{2p}\int_{[0,1]}(\kappa(r\theta)-K)_-\,\sigma^{(r)}_{\kappa/(N-1)}(\theta)^{N-1}\,\mathrm{d}r\right]^{1/N(2p-1)}.\end{aligned}$$

3.1.3. *CD* 密度与直径估计。设 $I\subset$ **实数集** 是一个区间，$\kappa\colon I\to$ **实数集**是连续的，并且 $N\in(1,\infty)$。设 $\gamma\colon[0,1]\to I$是一条直线；特别地，它具有恒定速度 $|\dot\gamma|$。定义函数 $\kappa^+_\gamma\colon[0,|\dot\gamma|]\to$**实数集** 为 $\kappa^+_\gamma:=\kappa\circ\bar\gamma$，其中 $\bar\gamma\colon[0,|\dot\gamma|]\to I$表示 γ的单位速度重参数化。此外，定义 $\kappa^-_\gamma\colon[0,|\dot\gamma|]\to I$为 $\kappa^-_\gamma:=\kappa\circ\bar\gamma\circ T$，其中 $T\colon[0,|\dot\gamma|]\to[0,|\dot\gamma|]$表示方向反转 $T(r):=|\dot\gamma|-r$。

定义 3.5 （CD 密度）。若函数 $h\colon I\to$**实数集**$_+$被称为 CD(κ,N) 密度，则对于每条直线 $\gamma\colon[0,1]\to I$以及每个 $t\in[0,1]$,

$$h(\gamma_t)^{1/(N-1)} \geq \sigma^{(1-t)}_{\kappa^-_\gamma/(N-1)}(|\dot\gamma|)\,h(\gamma_0)^{1/(N-1)} + \sigma^{(t)}_{\kappa^+_\gamma/(N-1)}(|\dot\gamma|)\,h(\gamma_1)^{1/(N-1)}.$$

注记 3.6（基本性质）。设 $h\colon I\to$**实数集**$_+$ 是一个 CD(κ,N) 密度。则以下陈述成立。

- 它是局部半凹的（因此局部 Lipschitz 连续），在 $I_\circ$ 上成立。特别地，其右导数在 $I\setminus\{\sup I\}$ 上处处存在且右连续；类似地，其左导数在 $I\setminus\{\inf I\}$ 上也如此。此外，h 可连续延拓到 I 的闭包。
- 要么 h 恒等于零，要么它在 $I_\circ$上为正。
- 若 h 在 $I_\circ$上为正，则它几乎处处二阶可微，并且在 $I_\circ$中的每个二阶可微点处，

$$(\log h)''+\frac{1}{N-1}\left|(\log h)'\right|^2=(N-1)\,\frac{(h^{1/(N-1)})''}{h^{1/(N-1)}}\le-\kappa.$$

详情请参阅 Cavalletti–Milman [21, §A]。 ■

以下性质说明了“CD 密度”这一名称的由来。

命题3.7 （曲率-维数条件 [46, 命题3。8]）。 设 $h\colon I\to$ **实数集**局部 $\mathcal{L}^1$ I可积。那么，拓扑一维度量测度空间（cl $I,|\cdot-\cdot|,h\,\mathcal{L}^1$ I）满足 *Ketterer* 的曲率-维数条件 CD（κ,N） [46] 当且仅当 h 存在一个 $\mathcal{L}^1$ I版本，它是一个CD（κ,N）密度。

我们现在重述的一组事实是直径估计。对于黎曼流形，下一个定理 3.8 由 Aubry 证明 [3, 定理 1。2]。下面给出的版本陈述了 Caputo–Nobili–Rossi 将 Aubry 结果推广到本质非分支CD度量测度空间的结论 [18, 定理 1。2] ，针对 CD 密度。其推广结果假设参考测度满足“不塌缩”条件；对于 CD 密度而言，这一条件会迫使参考测度恒等于零。然而，这一附加假设仅在证明 [18, 命题 4。3] 时才需要，以处理非光滑密度。在我们的设定中，所有相关密度都是光滑的；特别地，可以免除不塌缩假设，参见 [3, 引理 3。1]。

定理 3.8 （一维直径估计）。 令 $K>0$, $N\in[2,\infty)$，以及 $p\in(N/2,\infty)$。存在一个常数 $C_{K,\,N,\,p}>1$ ，具有如下性质。设 $h\colon$ $I\to$**实数集** 是区间 $I\subset$**实数集** 上的光滑 CD(κ,N) 概率密度，其中 $\kappa\colon$ $I\to$ **实数集** 连续，满足

$$\int_I\left|(\kappa-K)_-\right|^p h\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1\le\frac{1}{C_{K,N,p}}.$$

于是我们有

$$\operatorname{diam}(I,|\cdot-\cdot|)\le\pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}\left[1+C_{K,N,p}\left[\int_I\left|(\kappa-K)_-\right|^p h\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1\right]^{1/5}\right].$$

推论 3.9 (定性一维直径估计)。 令 $K>0$,$N\in[2,\infty)$，以及 $p\in(N/2,\infty)$。那么对每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta_{K,\,N,\,p,\,\varepsilon}>0$ ，使得下述性质成立。设 $h\colon I\to$**实数集** 是在区间 $I\subset$ **实数集**上的光滑 CD(κ,N) 概率密度，其中 $\kappa\colon$ $I\to$ **实数集** 是连续的，且

$$\int_I\left|(\kappa-K)_-\right|^p h\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1\le\delta_{K,N,p,\varepsilon}.$$

于是我们有

$$\operatorname{diam}(I,|\cdot-\cdot|)\le\pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}+\varepsilon.$$

注 3.10（显式积分亏损）。 在前一个推论中，可以取

$$\delta_{K,N,p,\varepsilon}=\min\Big\{\Big[\frac{\varepsilon}{\pi\,C_{K,N,p}}\sqrt{\frac{K}{N-1}}\Big]^5,\frac{1}{C_{K,N,p}}\Big\}.$$

这可由定理3.8看出。 ■

3.2. **洛伦兹最优传输**。 关于此处回顾内容的背景，我们请参阅 Eckstein–Miller [29], McCann [58],和 Cavalletti–Mondino [24]。

令 $\mathcal{P}(M)$ 表示 M 上所有博雷尔概率测度组成的空间。该空间赋予由针对有界连续测试函数的收敛所诱导的窄拓扑。下标 $\sharp$ 表示通常的推前运算。

给定 $\mu,\nu\in\mathcal{P}(M)$，令 $\Pi(\mu,\nu)$ 表示 μ 与 ν 的所有耦合组成的集合。若耦合 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ 集中于因果关系 J 上，则称其为因果耦合（根据定理 2.3，这等价于 $\operatorname{spt}\pi\subset J$ ）；若其集中于时序关系 I 上，则称其为按时间顺序的。注意， $\Pi(\mu,\nu)$ 从不为空，因为它总是包含乘积测度 $\mu\otimes\nu$；然而，一般而言， μ 与 ν 未必存在因果耦合。

3.2.1. *q-Lorentz–Wasserstein*距离。 在下文中，我们固定 $q\in(0,1)$。定义 *q-Lorentz–Wasserstein*距离 $\ell_q\colon\ \mathcal{P}(M)^2\to$ **实数集**$_+\cup\{-\infty,\infty\}$，由 Eckstein–Miller 引入 [29],通过

$$\ell_q(\mu,\nu):=\sup\Big\{\Big[\int_{M^2}l(x,y)^q\,\mathrm{d}\pi(x,y)\Big]^{1/q}:\pi\in\Pi(\mu,\nu)\Big\}. \tag{3.4}$$

其中我们采用约定 $(-\infty)^q:=(-\infty)^{1/q}:=-\infty$。它继承了 l的反三角不等式。若因果耦合 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ ℓ_q是因果的，且在 (3.4) 中达到上确界，则称其为最优耦合；特别地，我们的最优性概念排除代价 $-\infty$ ，但包含代价 ∞ 。根据标准论证以及定理 2.3 中 l 的性质，如果 μ 和 ν 具有紧支撑且存在因果耦合，那么它们也存在最优耦合 ℓ_q（其代价有限）。

由于我们只讨论沿类时方向的输运，Cavalletti–Mondino 引入的以下概念 [24, 定义 2。18] 将会很方便。

定义 3.11 (类时 q-对偶可行性)。 一对$(\mu,\nu)\in\mathcal{P}(M)^2$ 称为类时q-对偶可行，如果它存在一个按时间顺序的最优耦合 ℓ_q。

请注意，按照前一个定义的含义， q和 μ 的类时 ν -对偶可化性，比要求 $\ell_q(\mu,\nu)>0$更强。另一方面，由上述讨论显然可知，任意一对满足 $\operatorname{spt}\mu\times\operatorname{spt}\nu\subset I$ 的紧支撑测度 $(\mu,\ \nu)\in\mathcal{P}(M)^2$ 都是类时 q-对偶可化的。

注 3.12（良好成本函数）。若 $\mu,\ \nu\in\mathcal{P}(M)$是紧支撑的，且满足 $\operatorname{spt}\mu\times\operatorname{spt}\nu\subset I$，则显然有

$$\ell_q(\mu,\nu)=\sup\Big\{\Big[\int_{M^2}l_+(x,y)^q\,\mathrm{d}\pi(x,y)\Big]^{1/q}:\pi\in\Pi(\mu,\nu)\Big\}$$

换言之，在这种情况下，从 ℓ_q到 μ 的 ν -最优传输问题可转化为一个具有有界连续成本函数的最优传输问题，因此相比于可能退化的成本函数（例如 l^q），标准工具更易于应用；例如参见下文命题3.21 的证明。■

Cavalletti–Mondino 所证明的以下稳定性与紧性[24, 引理 2。11]将在后文中用到。

引理 3.13 (最优耦合的静态稳定性)。 假设$(\mu^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 和$(\nu^i)_{i\in\mathbf{N}}$分别是窄收敛到 μ、$\nu\in\mathcal{P}(M)$的序列。设$(\pi^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 是由 μ^i 和 ν^i构成的 ℓ_q-最优耦合序列 π^i 。那么，$\{\pi_i:i\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathcal{P}(M^2)$ 中窄拓扑下相对紧，并且 $(\pi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ 的每个集中于时序关系 I 上的窄极限点 π 都是 ℓ_q-最优的。

3.2.2. q-测地线与 ℓ_q-最优动力耦合。 下面继续介绍 McCann 引入的以下概念： [58, 定义 1。1]。

定义 3.14 （概率测度的测地线）。 曲线 $\mu\colon [0,1]\to\mathcal{P}(M)$ 称为 q-测地线，若 $\ell_q(\mu_0,\mu_1)\in(0,\infty)$ 且对每个 $s,t\in[0,1]$ 满足 $s<t$,

$$\ell_q(\mu_s,\mu_t)=(t-s)\,\ell_q(\mu_0,\mu_1).$$

稍后我们将需要以下稳定性与紧性性质。该性质由 Braun–McCann [14,定理 2.69，注 2.70] 证明；注意，其中的假设 2.42 由 [14, 例 2.44] 满足，因为我们是在利普希茨时空上工作。

引理 3.15 （测地线的静态稳定性与紧性）。 设 $(\mu^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 是给定的一个 q-测地线序列。对于紧集 $C\subset M$，假设对每个 $i\in\mathbf{N}$ 和每个 $t\in[0,1]$， μ_t^i 都支撑在C 中。设 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 分别是$(\mu_0^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 和 $(\mu_1^i)_{i\in\mathbf{N}}$的窄收敛极限点，并假设

$$0<\ell_q(\mu_0,\mu_1)\le\liminf_{n\to\infty}\ell_q(\mu_0^i,\mu_1^i).$$

那么存在一条 q-测地线 $\mu\colon [0,1]\to M$从 μ_0到 μ_1，使得对于每个 $t\in[0,1]\cap\mathbf{Q}$，在不重新标记的子列意义下，$(\mu_t^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 狭义收敛到 μ_t。

此外，如果 μ_0 和 μ_1 的每个 ℓ_q-最优耦合都是按时间顺序的，那么前述任意 q-测地线 μ 都是狭义连续的。

与之密切相关的概念是最优动力耦合，我们现在来回顾一下。给定 $t\in[0,1]$，令 $\mathsf{e}_t\colon C^0([0,1];M)\to M$为求值映射 $\mathsf{e}_t(\gamma):=\gamma_t$。

定义 3.16 （最优动力耦合）。 给定 μ_0， $\mu_1\in\mathcal{P}(M)$，我们称$\boldsymbol{\pi}\in\mathcal{P}(C^0([0,1];M))$ 为一个 ℓ_q-最优动力耦合，它满足 μ_0和 μ_1，如果

a. 它集中于类时仿射参数化极大测地线上，并且b. $(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}$ 是 ℓ_q-最优耦合，耦合的两端分别为 μ_0 和 μ_1。

注 3.17（由最优动力耦合得到测地性）。 给定一个 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$，其对应于 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$，不难验证（例如参见 Cavalletti– Mondino [24,注 2.32]），若 $\ell_q(\mu_0,\mu_1)<\infty$，则由 $\mu_t:=(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}$ 给出的曲线 $\mu\colon[0,1]\to\mathcal{P}(M)$ 是一条 q-测地线。■

反之，近期有一些“提升定理”给出了相应的一般条件，在这些条件下，一个 q-测地线事实上可由前述注释意义下的一个 ℓ_q-最优动力耦合表示。我们将使用 Braun–McCann 的以下结果[14, 命题 2.67]，，同时也将参见 Beran 等人 [6, 定理 2.43、推论 2.46]。

引理 3.18 (提升定理**)**。 假设 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 均为紧支撑，且满足 支撑 $\mu_0\times$ 支撑 $\mu_1\subset I$。设 $\mu\colon[0,1]\to M$ 是一条连接 μ_0 与 μ_1 的 q-测地线。那么 μ 可表示为 μ_0 与 μ_1 的一个 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$，即对每个 $t\in[0,1]$，都有

$$\mu_t=(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}.$$

在光滑框架中，McCann 给出了以下更强的刻画[58, 引理 4.4、定理 5.8、推论 5。9] 。更精细的结构性质，尤其是关于 Monge–Ampère 方程和 Raychaudhuri 方程的性质，在下文 §4.3 中作了总结。

定理 3.19 （存在性与唯一性）。 设 $(M,g,\mathfrak{m})$ 是一个全局双曲加权时空。设 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 紧支撑且 $\mathfrak{m}$-绝对连续，并且 $\operatorname{spt}\mu_0\times\operatorname{spt}\mu_1\subset I$。那么存在 $U\subset M$ 的一个开邻域，以及一个局部半凸（因而局部 *Lipschitz* 连续）函数

$\varphi\colon U \to$ **实数集**，其梯度几乎处处为类时梯度 $\nabla\varphi$，使得对几乎处处的 $\mathfrak{m}$（因而几乎处处的 μ_0），定义良好的映射 $\Psi\colon [0,1]\times U \to M$ 由下式给出

$$\Psi_t(x) := \exp_x(-t\,|\nabla\varphi|^{q'-2}\,\nabla\varphi),$$

其中 $q' < 0$ 是 q的共轭指数，我们有以下性质。

(i) 函数 φ 是 μ_0 和 μ_1的康托罗维奇势。*(ii)* 测度 $(\mathrm{Id}\times\Psi_1)_\sharp\mu_0$ 是 μ_0 和 μ_1 之间唯一的（必然是按时间顺序的） ℓ_q-最优耦合；特别地，$\mu_1 = (\Psi_1)_\sharp\mu_0$。*(iii)* 曲线 $\mu\colon [0,1]\to M$ 由 $\mu_t := (\Psi_t)_\sharp\mu_0$ 定义，仅由紧支撑的、 $\mathfrak{m}$-绝对连续测度组成。此外，它定义了从 μ_0 到 μ_1的唯一 q-测地线。*(iv)* 定义 $F\colon U \to C^0([0,1];\,M)$，使得 $F(x)_t := \Psi_t(x)$。那么，测度 $F_\sharp\mu_0$ 是 μ_0 和 μ_1之间唯一的 ℓ_q-最优动力耦合。

我们参考 McCann [58, §4] 和 Cavalletti–Mondino [24, §2。4]，了解洛伦兹框架中的康托罗维奇势及其对偶理论。

注 3.20（可逆性）。事实上，由于假设 μ_0 和 μ_1 是 $\mathfrak{m}$-绝对连续的，上文引用的 McCann [58] 的结果还表明，对于每个 $t\in[0,1]$，传输映射 Ψ_t 在 $\operatorname{spt}\mu_0$ 上可逆，且其逆映射是一个局部半凸（因而局部 Lipschitz 连续）的未重标记映射 Ψ_t^{-1}在 $\operatorname{spt}\mu_t$的某个开邻域上所作的限制。■

除了引理3.13 和 3.15之外，我们还需要定义2.13中良好逼近序列的稳定性与紧性性质。类似的静态结果由 Braun [8,命题 B11] 和 Braun–McCann [14, 命题 267]中给出。

命题 *3.21*（最优动力耦合的变化稳定性与紧性）。设 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 是根据定义 *2.13* 对 g 的良好逼近。设 X、$Y\subset M$ 为满足 $X\times Y\subset I_g$ 的紧集。设 $(\mu_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $(\mu_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 分别为支撑于 X 和 Y 的序列。最后，设 $(\boldsymbol{\pi}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 为一个序列，使得 $\boldsymbol{\pi}^n$ 是 μ_0^n 和 μ_1^n 的 ℓ_{g_n}、$_q$-最优动力耦合。那么，$\{\boldsymbol{\pi}^n :\, n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathcal{P}(C^0([0,1];\,M))$ 中窄拓扑下相对紧，且 $(\boldsymbol{\pi}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的每个窄极限 $\boldsymbol{\pi}$ 都是 μ_0 和 μ_1 的 ℓ_g、$_q$-最优动力耦合；特别是，

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{g_n,q}(\mu_0^n,\mu_1^n) = \ell_{g,q}(\mu_0,\mu_1). \tag{3.5}$$

证明。根据定义，$\boldsymbol{\pi}^n$ 对每个 $n\in\mathbf{N}$，都集中于类时仿射参数化的极大化 g_n-测地线上。这些测地线根据引理 2.17和阿尔泽拉–阿斯科利定理，属于 $C^0([0,1];\,M)$ 中的一个最终不依赖于 n 的紧子集。由普罗霍罗夫定理，这意味着 $\{\boldsymbol{\pi}^n :\, n\in\mathbf{N}\}$ 的窄紧性。

现在令 $\boldsymbol{\pi}$ 为 $(\boldsymbol{\pi}^n)_{n\in\mathbf{N}}$的任意窄极限点。由于所涉及的求值映射是连续的，$(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}$ 是 μ_0 和 μ_1 的一个（必然按时间顺序的）耦合。我们声称它是 ℓ_g、$_q$-最优的。由于 $X\times Y\subset I_g$ 具有紧包含，且 l_g、$_+$ 根据定理 2.3 是连续的，依据引理 2.14，存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $X\times Y\subset I_{g_n}$ 对每个满足 $n\ge n_0$ 的 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。结合注 3.12、再次应用引理 2.14，以及所涉及成本函数的一致有界性，我们可以应用关于具有一致收敛的连续成本函数的最优传输的著名稳定性性质（参见例如 Villani [81, 定理 5.20], ），从而推断 $(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}$ 是 μ_0 和 μ_1 的一个 ℓ_g、$_q$-最优耦合，正如所需。

接下来，我们证明（3.5）。由于$l_{g,\,+}$是连续的，因此在 $X\times Y$上有界。Villani[81, 引理 4。3]以及（$\boldsymbol{\pi}^n$）$_{n\in\mathbf{N}}$ 到 $\boldsymbol{\pi}$ 的窄收敛

$$\lim_{n\to\infty}\int l_{g,+}(\gamma_0,\gamma_1)^q\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma) = \int l_{g,+}(\gamma_0,\gamma_1)^q\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).$$

另一方面，引理2.14 表明，给定 $\varepsilon > 0$ ，存在 $n_1 \in \mathbf{N}$ ，使得对每个 $n \in \mathbf{N}$ 满足 $n \geq n_1$, 都有

$$\sup\{\big|l_{g_n}(x,y)^q - l_g(x,y)^q\big| : x \in X,\, y \in Y\} \leq \varepsilon.$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \big|\ell_{g_n,q}(\mu_0^n,\mu_1^n)^q - \ell_{g,q}(\mu_0,\mu_1)^q\big| \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} \int \big|l_{g_n}(\gamma_0,\gamma_1)^q - l_g(\gamma_0,\gamma_1)^q\big| \,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma) \\
&\qquad\qquad + \limsup_{n\to\infty} \Big|\int l_{g,+}(\gamma_0,\gamma_1)^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma) - \int l_{g,+}(\gamma_0,\gamma_1)^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\Big| \\
&\qquad \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

ε 的任意性给出了所需的结论。

还需要证明 $\boldsymbol{\pi}$ 集中在类时仿射参数化的极大测地线上。根据 Braun–McCann [14, 推论 2.65], , 只需证明由 $\mu_t := (\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\pi}$ 定义的曲线 $\mu\colon [0,1] \to \mathcal{P}(M)$ 构成一条 q-测地线（对于由 g 诱导的 q-Lorentz–Wasserstein 距离）。我们仅略述论证。给定 $n \in \mathbf{N}$，定义 $\mu^n\colon [0,1] \to \mathcal{P}(M)$，其中 $\mu_t^n := (\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\pi}^n$。令 $s,t \in [0,1]$ 满足 $s < t$。我们声称

$$\limsup_{n\to\infty} \ell_{g_n,q}(\mu_s^n,\mu_t^n) \leq \ell_{g,q}(\mu_s,\mu_t). \tag{3.6}$$

事实上，给定 $n \in \mathbf{N}$，由 $\ell_{g_n,\,q}$ 和 $\ell_{g_n,\,q}$-最优性，以及 $(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)_\sharp \boldsymbol{\pi}^n$ 所满足的反三角不等式可知，$(\mathsf{e}_s,\ \mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\pi}^n$ 是其边缘分布的 $\ell_{g_n,\,q}$-最优耦合。由于其边缘分布序列根据第一段是紧的，后者在不重新标记的子列意义下窄收敛到一个将 μ_s 和 μ_t耦合的 $\pi_{s,\,t}$。由于具有因果耦合这一性质在窄拓扑下是闭的，参见 Braun–McCann [14, 定理 B.5]， $\pi_{s,\,t}$ 是 μ_s 和 μ_t的因果耦合；然而，事先我们并不知道它是否是 $\ell_{g,\,q}$-最优的。与上一段一样，利用代价泛函的基本半连续性，参见例如 Villani [81, 引理 4.3]，，不难证明其中的中间估计

$$\limsup_{n\to\infty} \ell_{g_n,q}(\mu_s^n,\mu_t^n)^q = \limsup_{n\to\infty} \int l_{g_n}(\gamma_s,\gamma_t)^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n \leq \int_{M^2} l_g^q \,\mathrm{d}\pi_{s,t} \leq \ell_{g,q}(\mu_s,\mu_t)^q,$$

如所需。利用反三角不等式 $\ell_{g,\ q}$，将（3.6）应用三次，并结合（3.5），可得

$$\begin{aligned}
\ell_{g,q}(\mu_0,\mu_1) &\geq \ell_{g,q}(\mu_0,\mu_s) + \ell_{g,q}(\mu_s,\mu_t) + \ell_{g,q}(\mu_t,\mu_1) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \big[\ell_{g_n,q}(\mu_0^n,\mu_s^n) + \ell_{g_n,q}(\mu_s^n,\mu_t^n) + \ell_{g_n,q}(\mu_t^n,\mu_1^n)\big] \\
&= \big[s + (t-s) + (1-t)\big] \limsup_{n\to\infty} \ell_{g_n,q}(\mu_0^n,\mu_1^n) \\
&= \ell_{g,q}(\mu_0,\mu_1).
\end{aligned}$$

这迫使简单推论中的等号成立

$$(t-s)\,\ell_{g,q}(\mu_0,\mu_1) = (t-s)\limsup_{n\to\infty} \ell_{g_n,q}(\mu_0^n,\mu_1^n) \leq \ell_{g,q}(\mu_s,\mu_t)$$

（3.6），从而完成证明。 □

3.3. **变曲率类时维数条件**。 现在我们定义本文将要使用的变曲率类时维数条件，简称 TCD 条件。受 McCann [58]和 Mondino–Suhr [64],关于常数类时里奇曲率界的研究启发，该条件由 Cavalletti–Mondino 在一般度量测度时空上提出 [24]。Braun–McCann 给出了他们的 TCD 条件的一个变曲率版本 [14]。

我们在接下来的两个小节中采用的定义与 [14] 不同，并遵循 Braun [8]提出的常数类时里奇曲率界方案。对于度量

测度空间，Ketterer 给出了类似的定义 [46]。这种表述的优点在于，正如 [8], ，它将使我们能够在不依赖类时极大测地线的非分支性（即使 g 是 C^1-正则的情况下，这一点也不明确）的前提下，先验地以 尖锐 形式得到后来将在 中获得的全局双曲加权时空 $(M, g, \mathfrak{m})$ 的几何不等式。

设 $\mathfrak{m}$ 是定义在 M上的拉东测度，例如定义 2.4中的测度。给定$N \in (1, \infty)$，定义相对于 N的 -*Rényi* 熵 $\mathcal{S}_N(\cdot \mid \mathfrak{m})\colon \mathcal{P}(M) \to$**实数集**$_ \cup \{-\infty\}$如下： $\mathfrak{m}$ 为

$$\mathcal{S}_N(\mu \mid \mathfrak{m}) := -\int_M \left[\frac{\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{-1/N} \mathrm{d}\mu = -\int_M \left[\frac{\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N} \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中， μ^{ac} 表示其输入 μ 相对于 $\mathfrak{m}$的勒贝格分解中的绝对连续部分。若 μ 具有紧支撑，则由詹森不等式可得

$$\mathcal{S}_N(\mu \mid \mathfrak{m}) \geq -\mathfrak{m}[\operatorname{spt}\mu]^{1/N}.$$

引理 3.22 (联合下半连续性 [56, 定理 B.33])。 给定一个紧集$C \subset M$，设 $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$和 $(\mathfrak{m}_n)$ $_{n\in\mathbf{N}}$是 $\mathcal{P}(M)$ 中支撑位于 C内的两个序列。则这两个序列的所有窄收敛极限点 $\mu, \mathfrak{m} \in \mathcal{P}($ $M)$ 分别满足

$$\mathcal{S}_N(\mu \mid \mathfrak{m}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{S}_N(\mu_n \mid \mathfrak{m}_n).$$

设 $\gamma\colon [0,1] \to M$是一条类时仿射参数化极大测地线；特别地，它具有恒定速度 $|\dot\gamma| := l(\gamma_0, \gamma_1)$。令 $\bar\gamma\colon [0, |\dot\gamma|] \to M$表示其固有时重新参数化。如§3.1.3所述，给定一个连续函数 $k\colon M \to$ 实数集，我们定义 $k^{\pm}_{\gamma}\ [0,|\dot\gamma|] \to$ $k^{+}_{\gamma} = k\ \bar\gamma$ $k^{-}_{\gamma} = k_{\ t}\ \bar\gamma\ T$ $T\ [0,|\dot\gamma|] \to$: 实数集为: $[0,|\dot\gamma|]$ $T\ r = |\dot\gamma| - r$ τ τ ∘和: ∘ ∘，其中：表示函数(): 。最后，($)_{k^{\pm}_{\gamma},N}$表示由 $k^{\pm}_{\gamma}$诱导的定义 3.2 中的 -畸变系数，其中 $N \in$ (1, ∞)且 $t \in [0,1]$。

定义 3.23 （变曲率类时维数条件）。 对于 $q \in$ （0,1）、连续函数 $k\colon M \to$**实数集**，以及 $N \in$ （1, ∞），如果对于每一对类时q-对偶可化的、紧支撑且 $\mathfrak{m}$-绝对连续测度 $(\mu_0, \mu_1) \in \mathcal{P}(M)^2$，存在

- 一条 q-测地线 $\mu\colon [0,1] \to \mathcal{P}(M)$ 从 μ_0到 μ_1，以及
- 一个从 μ_0 和 μ_1出发的 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$

使得对于每个 $N' \in [N, \infty)$ 和每个 $t \in [0,1]$,

$$\mathcal{S}_{N'}(\mu_t \mid \mathfrak{m}) \leq -\int \tau^{(1-t)}_{k^{-}_{\gamma},N'}(|\dot\gamma|)\, \frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N'}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) - \int \tau^{(t)}_{k^{+}_{\gamma},N'}(|\dot\gamma|)\, \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).$$

以下结果的证明参照 Braun–Ohta [15, 定理 5.9]。关于更精确的估计，请参阅下文第 6.1 节 。另请参阅 Braun [8, 定理 3.35]，其中给出了 Cavalletti–Mondino 的 TCD 条件的类似逐路径版本 [24]。

定理 *3.24*（*TCD* 的本质路径半凹性）。假设 *(M, g,* $\mathfrak{m}$*)* 是一个全局双曲加权时空。设 μ_0, $\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ 是两个给定的紧支撑、 $\mathfrak{m}$-绝对连续测度，且 *spt* $\mu_0 \times$ *spt* $\mu_1 \subset I$。设 μ 和 $\boldsymbol{\pi}$分别是定理 *3.19* 中它们唯一的 q-测地线和 ℓ_q-最优动力耦合，其中 $q \in$ *(0, 1)*。假设存在一个连续函数 k*:* $M \to$*R* 和 $N \in$ [*dim* M*,* ∞*)*，使得对于每条起点属于 *spt* μ_0、终点属于 *spt* μ_1的类时仿射参数化极大测地线 γ*:* $[0,1] \to M$，均有 *Ric*$_{g,\mathfrak{m},N}(\dot\gamma, \dot\gamma) \geq$ *(*k ∘ γ*)* $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$，在 $[0,1]$上成立。那么，对于每个 $N' \in$， $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处的 γ满足以下不等式

$[N,\infty)$ 以及每个 $t\in[0,1]$：

$$\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_t)^{-1/N'}\geq\tau^{(1-t)}_{k_\gamma^-,N'}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N'}+\tau^{(t)}_{k_\gamma^+,N'}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}.$$

与前面的定理不同，后续内容并不需要以下结论，但它有助于阐明“类时曲率-维数条件”这一名称。

推论 3.25 （由类时里奇曲率界推出 TCD）。 假设（$M,g,\mathfrak{m}$）是一个全局双曲加权时空。设 $k\colon M\to$ **实数集** 连续，且$N\in$[维数 M,∞）。则以下陈述等价。

（i）在所有类时方向上，我们有里奇$_{g,\ \mathfrak{m},\ N}\geq k$。（ii）三元组（$M,g,\mathfrak{m}$）对某个 $q\in(0,1)$满足 TCD^q（k,N）。（iii）三元组（$M,g,\mathfrak{m}$）对每个 $q\in(0,1)$均满足TCD^q（k,N）。

此处将结论推广到仅为类时的 q-可对偶端点，论证方式与 McCann [58, 定理 7。4] 和 Braun [8, 定理 3。35]相同。

3.4. **可变类时测度收缩性质**。

定义 3.26 (可变类时测度收缩性质)。 给定一个连续函数 $k\colon M\to$**实数集** 以及 $N\in$[维数 M,∞），若 $(M,g,\mathfrak{m})$ 满足过去类时测度收缩性质，简称 类时测度收缩性质$^-(k,N)$，则对于每个点$o\in M$ 以及每个紧支撑、 $\mathfrak{m}$-绝对连续且集中于 $I^+(o)$ 上的 $\mu_1\in\mathcal{P}(M)$，存在

- 一个指数 $q\in(0,\ 1)$，
- 一条 q-测地线 $\mu\colon[0,1]\to\mathcal{P}(M)$从 $\mu_0:=\delta_o$到 μ_1，以及
- 一个 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$，其关联测度为 μ_0 和 μ_1

使得对于每个 $N'\in[N,\infty)$ 以及每个 $t\in[0,1]$,

$$\mathcal{S}_{N'}(\mu_t\,|\,\mathfrak{m})\leq-\int\tau^{(t)}_{k_\gamma^+,N'}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\tag{3.7}$$

此外，我们称$(M,g,\mathfrak{m})$ 满足

a. 未来类时测度收缩性质，简称未来类时测度收缩性质，记作类时测度收缩性质$^+$$(k,N)$，如果赋予相反的时间定向但具有相同参考测度 $\mathfrak{m}$ 的时空(M,g) 满足类时测度收缩性质$^-(k,N)$；以及b. 类时测度收缩性质，简称类时测度收缩性质(k,N)，如果它同时满足类时测度收缩性质$^-(k,N)$ 和类时测度收缩性质$^+(k,N)$。

若 k 为常数，则（3.7）变为

$$\mathcal{S}_{N'}(\mu_t\,|\,\mathfrak{m})\leq-\int_M\tau^{(t)}_{k,N}\circ l_o\left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N'}\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中 l_o来自（2.7）。这是因为 $|\dot\gamma|=l_o(\gamma_1)$对 $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处成立， γ并且由于 $(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)\sharp\boldsymbol{\pi}=\delta_o\otimes\mu_1$ 是 ℓ_q与 μ_0 之间唯一的（必然按时间顺序且 μ_1-最优）耦合。

类时测度收缩性质不依赖于传输指数 q，参见 [24, 注 3。8]。此外，由于根据强因果性， M 中的每个点在其年代过去中都有任意接近的点，因此可以等价地要求 $\{o\}\times$ 支撑$\mu_1\subset I$，而不采用前一定义中较弱的性质 $\mu_1[I^+(o)]=1$ 。

通过引理 3.22（用均匀分布逼近狄拉克测度），不难证明：对于每个 $q\in(0,1)$、每个连续 $k\colon M\to$实数集，以及每个 $N\in$[dim M,∞)，TCD$^q(k,N)$ 都蕴含类时测度收缩性质(k,N)；参见 Cavalletti–Mondino[24, 命题 3.12]和 Braun–McCann [14, 命题 A.3]；另见下文定理 6.1 的证明。然而，一般而言，类时测度收缩性质严格弱于 TCD 条件；参见 Cavalletti–Mondino [24,注 A.3]。尽管如此，它与 TCD 条件一样，具有我们在 §6.2 中详述的那些推论。

定理的以下类时测度收缩性质版本3.24 的证明沿用 Braun–Ohta 的思路 [15, 引理 5.4]。

定理 *3.27*（*TMCP* 的本质路径半凹性）。假设 $(M, g, \mathfrak{m})$ 是一个全局双曲加权时空。此外，设 $o \in M$，并令 $\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ 为紧支撑的、 $\mathfrak{m}$-绝对连续测度，且满足 $\{o\} \times \mathrm{spt}\,\mu_1 \subset I$。设 μ 和 π 分别为定理 *3.19* 中连接 $\mu_0 := \delta_o$ 与 μ_1 的唯一 q-测地线和 ℓ_q-最优动力耦合，其中 $q \in (0,1)$。假设存在连续函数 $k\colon M \to$ 实数集，以及 $N \in [\dim M, \infty)$，使得对于每条始于 o、终于 $\mathrm{spt}\,\mu_1$ 的类时仿射参数化极大测地线 $\gamma\colon [0,1] \to M$，均有 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}(\dot\gamma,\dot\gamma) \geq (k \circ \gamma)\, g(\dot\gamma,\dot\gamma)$ 在 $[0,1]$ 上成立。那么，对每个 $N' \in [N, \infty)$ 及每个 $t \in [0,1]$，π-几乎处处的 γ 都满足以下不等式：

$$\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_t)^{-1/N'} \geq \tau^{(t)}_{k^+_\gamma, N'}(|\dot\gamma|)\, \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}.$$

4. 光滑情形

现在我们从光滑情形中整理一些材料。为此，本节假设 (M, g) 是一个整体双曲时空（特别是，g 是光滑的），并配备了定义在 M 上的光滑测度 $\mathfrak{m}$，但 §2.19末尾 §4.1中命题的证明除外。我们将这些假设简称为称 $(M, g, \mathfrak{m})$ 为全局双曲加权时空。

4.1. **类时割迹。** 设 $o \in M$ 为给定点。关于下文所述事实的细节，请参阅 Treude [79] 和 Treude–Grant [80]（他们将类时割迹称为“因果割迹”）。他们对适当子流形的讨论包含点 [79, p. 117]，这是我们唯一关心的情形。

对于 $v \in T_o^+$，令 $\gamma_v\colon I_v \to M$ 表示初速度为 v 的唯一类时测地线，其中 I_v 是相对于 **实数集**$_+$的 γ_v 最大定义域。于是，由下式定义 o-未来割函数 $s_o^+\colon T_o^+ \to$ **实数集**$_+ \cup \{\infty\}$

$$s_o^+(v) := \sup\{t \in I_v : l_o((\gamma_v)_t) = \mathrm{Len}_g(\gamma_v|_{[0,t]})\} \tag{4.1}$$

没有零点 [79, 推论 3.2.23]，且下半连续 [79, 命题 3.2.29]。

定义 4.1（类时割迹）。集合

$$\mathrm{TC}^+(o) := \{\exp_o(s_o^+(v)\, v) \in I^+(o) : v \in T_o^+,\ s_o^+(v) \in I_v\}$$

称为未来类时割迹，它属于 o。

TC$^+(o)$中的任意元素称为 o的未来类时切点。

命题 4.2（类时割迹的刻画 [79, 命题 3.2。28]）。点 $y \in I^+(o)$ 属于$\mathrm{TC}^+(o)$，当且仅当从 o 到 y 存在多条类时最大化测地线，或者 y 是沿一条类时最大化测地线从 o 出发的第一个焦点。

事实上，对于所有满足从 o 到 y 存在多条类时最大化测地线的 $y \in I^+(o)$，它们构成的集合在TC$^+(o)$中稠密 [79, 命题 3.2.30]。

回顾一下，若 M 的博雷尔可测子集相对于 M 上某个（从而也是任意一个）光滑测度可忽略，我们就称它具有零测度。

定理 4.3（未来类时切割轨迹的性质 [79, 定理 3.2.31，命题 3.2.32]）。我们定义

$$\mathcal{I}^+_{\tan}(o) := \{tv \in T_oM : v \in T_o^+,\ t \in [0, s_o^+(v))\}$$

并令 $\mathfrak{I}^+_{\tan}(o)$ 表示 $\mathcal{I}^+_{\tan}(o)$的内部。则以下陈述成立。

(i)“类时割迹之前的未来”

$$\mathcal{I}^+(o) := \exp_o(\mathcal{I}^+_{\tan}(o))$$

是开集，并且通过（o）$_o$exp与（ii）微分同胚。我们有 $\mathcal{I}^+$（o）$= I^+$（o）$\setminus \mathrm{TC}^+$（o）。（iii）集合TC^+（o）是闭集且为零测度。（iv）集合 $\mathcal{I}^+$（o）是 I^+（o）中最大的开子集，具有这样的性质：其中每一点都能通过唯一一条类时最大化测地线与 o 相连。

回顾（l_o 2.7）中的洛伦兹距离函数。

定理 4.4 (距离函数的光滑性 [80, 命题 2。7])。洛伦兹距离函数(2.7) 在 $\mathcal{I}^+$（o）上的限制是光滑的。

此外，对于每个 $y \in \mathcal{I}^+$（o），我们有

$$-\nabla l_o(y) = (\dot\gamma_{\exp_o^{-1}(y)})_{l_o(y)}.$$

换言之，$\gamma_{\exp_o^{-1}(y)}$ 与从 o 出发并经过 y 的 l_o 的唯一负梯度流重合。

事实上，正如 Andersson–Galloway–Howard 所证明的 [2, 命题 3。1] 以及后来 McCann [58, 命题 3.4、定理 3。5], 洛伦兹距离函数（2.7）在整个 $I^+(o)$ 上局部半凸（因此局部 Lipschitz 连续），并且恰好在$\mathrm{TC}^+(o)$上不再是半凹的。

在我们的情形下，至少可以如下得到局部 Lipschitz 连续性。局部半凸性似乎更难证明，因为 [2, 58] 上述证明（以及 Braun 等人 [12, 命题 13] 在 C^1-情形下的证明）在度量张量仅为局部 Lipschitz 连续时，是否仍然“稳定”并不清楚。

命题 2.19 的证明。首先假设 g 光滑，并证明 l 在 I 上的局部 Lipschitz 常数有一个上界，该上界取决于相关邻域之间的 l-距离以及 g的局部 C^0-范数。回顾一下，r 是 M上的完备背景黎曼度量。给定满足 $x \ll_g y$的 x、$y \in M$，取相对于 r的较小测地凸黎曼球 U_x、$U_y \subset M$。不失一般性，我们可以并且将假设 $\mathrm{cl}\, U_x \times \mathrm{cl}\, U_y \subset I$。令 $c > 0$ 和 $\lambda > 0$ 为将引理 2.17 应用于度量张量的常值序列所得，其中 $X := \mathrm{cl}\ U_x$，且 $Y := \mathrm{cl}\, U_y$。由三角不等式和对称性论证，只需证明存在 $c_0 > 0$，使得对任意 $o \in U_x$ 以及任意 y'、$y'' \in U_y$，

$$\sup\{|l_o(y') - l_o(y'')| : n \in \mathbf{N} \text{ with } n \geq n_0\} \leq c_0\, \mathsf{d}_r(y', y'').$$

给定 y'，$y'' \in U_y \setminus \mathrm{TC}^+(o)$，令 $\gamma\colon [0,1] \to M$为从 r-测地线到 y' 的唯一仿射参数化极大 y''；它不会离开 $I^+(o)$。由于曲线 γ 是利普希茨连续的，它与$\mathrm{TC}^+(o)$的交点集具有一维勒贝格零测度。于是由定理4.4和引理2.17 （将固有时换为仿射参数化），得到

$$\sqrt{r(\nabla l_o, \nabla l_o)} \leq \frac{c}{\lambda} \quad \gamma_\sharp(\mathcal{L}^1 \llcorner [0,1])\text{-a.e.} \tag{4.2}$$

另一方面，同样由定理4.4，

$$l_o(y') - l_o(y'') = \int_{[0,1]} \mathrm{d}l_o(\dot\gamma_t)\, \mathrm{d}t = \int_{[0,1]} g(\nabla l_o, \dot\gamma_t)\, \mathrm{d}t.$$

由于 g 的系数在 U_x 上一致有界，并且根据引理2.11，我们使用通常的柯西–施瓦茨不等式以及 r 与任意其他黎曼度量（此处为欧几里得度量的拉回）在局部等价这一性质，得到一个常数$c_1 > 0$，它取决于 C^0的 g 范数以及 r 在$\mathrm{cl}\, U_x$ 上的范数，使得

$$\int_{[0,1]} g(\nabla l_o, \dot\gamma_t)\, \mathrm{d}t \leq c_1 \int_{[0,1]} \sqrt{r(\nabla l_o, \nabla l_o)}\, \sqrt{r(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, \mathrm{d}\big[\gamma_\sharp(\mathcal{L}^1 \llcorner [0,1])\big]$$

$$\leq c_0\,\mathsf{d}_r(y',y''),$$

其中我们使用了（4.2）以及 γ 相对于 r 的测地性，并令 $c_0 := c_1\,c/\lambda$。由于$\mathrm{TC}^+(o)$具有零测度，因此得到不等式

$$\left|l_o(y')-l_o(y'')\right|\leq c_0\,\mathsf{d}_r(y',y'')$$

通过近似，可轻松推广到任意 y'，$y''\in U_y$。

如果 g 仅为局部 Lipschitz 连续函数，我们便采用其良好逼近$(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$，见定义 2.13。结合引理 2.17，利用该序列的局部一致收敛，前述论证由此表明，存在常数 $n_0\in\mathbf{N}$ 和 $c_0>0$，使得对于每个满足 $n\in\mathbf{N}$ 的 $n\geq n_0$、每个 $o\in U_x$以及每个 y'，$y''\in U_y$均有所需的等利普希茨估计

$$\left|l_{g_n,o}(y')-l_{g_n,o}(y'')\right|\leq c_0\,\mathsf{d}_r(y',y'').$$

最后一个结论成立，是因为在 I_g的每个紧子集上，l_g 都是利普希茨连续函数 $(l_{g_n})_{n\in\mathbf{N}}$ 的一致极限，这由引理 2.11可知。□

4.2. **局部化**。局部化范式（也称“针分解”）起源于凸几何。在洛伦兹几何中，即使对于可能不光滑的度量测度时空，这一方法也是由 Cavalletti–Mondino 引入[24]，随后由他们本人 [25] 和 Braun–McCann 加以拓展 [14]。简而言之，其策略如下：将所研究的集合（例如给定点 $o\in M$的时序未来）分解为从 o出发、按固有时参数化的类时极大测地线（称为“射线”）。参考测度可分解为

$$\mathfrak{m}\llcorner I^+(o)=\int_{M_\alpha}\mathfrak{m}_\alpha\,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha),$$

其中

- $\mathfrak{q}$ 是定义在集合 $Q\subset I^+(o)$ 上的概率测度，该集合用于“标记射线”，
- 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，M_α 构成一条从 o出发、按固有时参数化的类时极大测地线，并且
- 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，条件测度 $\mathfrak{m}_\alpha$ 集中在 M_α 上。

正如 Cavalletti–Mondino 在 [24, 注 5.4]，中指出的，这一结果与面积公式密切相关。（非专业人士可以把它理解为一种“非直线型的 Fubini 定理”。）通过固有时参数化，对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，射线 M_α 经由 l 与一个区间 $[0,b_\alpha)\subset\mathbf{R}+$ 等距，其中 $b_\alpha\in(0,\infty]$，每个区间都赋予欧几里得距离 $|\cdot-\cdot|$。通过这一对应，并稍微滥用记号，$(M_\alpha,|\cdot-\cdot|,\mathfrak{m}_\alpha)$ 成为一个拓扑一维度量测度空间。（可以证明，对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，$\mathfrak{m}_\alpha$ 关于 M_α 上的一维勒贝格测度绝对连续，其拉东–尼科迪姆密度为h_α。）上述范式的关键在于，对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，环境空间 $(M,g,\mathfrak{m})$ 中的类时里奇曲率界，在经过 Sturm [78] 和 Lott–Villani [56] 后，转化为 $(M_\alpha,|\cdot-\cdot|,\mathfrak{m}_\alpha)$ 中的里奇曲率界。

我们将阐明 Cavalletti–Mondino 的结果 [24,25] 和 Braun–McCann 的结果 [14]，（参见定理 4.6）的两个方面。首先，由于我们假设 g 和 $\mathfrak{m}$ 光滑，我们将证明条件密度 h_α 对 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$都是光滑的。在黎曼流形上，相应结果由 Klartag 得到 [49]。其次，上述文献假设背景时空在每个类时方向上都满足类时里奇曲率界；事实上，只需规定这些曲率界仅在所有“相关”方向上成立，即与射线相切的方向。以下结果并未针对最优性进行精简，但足以满足我们的需要。

4.2.1. 框架。 设 $o \in M$ 是给定的一点。回顾其未来类时割迹$\mathrm{TC}^+(o) \subset I^+(o)$，见第 §4.1 节，以及洛伦兹距离函数 l_o，见式（2.7）。此外，取一个具有紧包含的开黎曼球 $U \subset I^+(o)$。于是，由 l_+ 的连续性可知 $\vartheta > 0$，其中

$$2\vartheta := \inf\{l_o(y) : y \in \mathrm{cl}\, U\} > 0.$$

令人联想到定理 4.3，定义

$$\mathcal{H}^+_{\tan}(o,U) := \{tv \in T_oM : v \in \exp_o^{-1}(U),\, t \in [0, s_o^+(v))\}$$

并令 $\mathcal{G}^+_{\tan}(o,U)$ 表示 $\mathcal{H}^+_{\tan}(o,U)$ 的内部。集合

$$\mathcal{G}^+(o,U) := \exp_o(\mathcal{G}^+_{\tan}(o,U)) \tag{4.3}$$

是“薄冰锥”，由 o 以及 $I^+(o)$ 中所有位于从 o 出发且与 U 相交的（必然唯一确定的）按固有时参数化的类时极大测地线相对内部的点组成。特别地，根据命题 4.2，$\mathcal{G}^+(o,U) \cap \mathrm{TC}^+(o) = \emptyset$。此外，由定理 4.3 可知，集合 $\mathcal{G}^+(o,U) \setminus \{o\}$ 是开集，且包含关系 $U \subset \mathcal{G}^+(o,U)$ 除一个 $\mathfrak{m}$-零测集外成立，其中

$$\mathfrak{m}[U \setminus \mathcal{G}^+(o,U)] \le \mathfrak{m}[U \cap \mathrm{TC}^+(o)] \le \mathfrak{m}[\mathrm{TC}^+(o)] = 0.$$

4.2.2. 光滑解体。固定 $r \in (0, \vartheta)$ 并设

$$\Sigma_r := \{l_o = r\} \cap \mathcal{G}^+(o,U). \tag{4.4}$$

由于 r 是 l_o 在 $\mathcal{G}^+(o,U)$ 上限制的正则值（因为 $g(\nabla l_o, \nabla l_o) = 1$在那里），故 Σ_r 是超曲面。显然它是相对紧的且无因果关系。由于其法向量场 $-\nabla l_o\big|_{\Sigma_r}$（参见定理 4.4）是类时的，超曲面 Σ_r 是类空的。令 μ_r 为 $\mathfrak{m}$ 在 Σ_r 上的限制。利用 g 在 Σ_r 上限制为黎曼度量这一事实，可见除去隐含的指数权重后，μ_r 对应于 Σ_r 上诱导的黎曼体积测度。

令 $\Phi\colon W \to M$ 表示 l_o 的最大定义域上的（联合光滑）负梯度流，其中 $W \subset$ **实数集** $\times\, \mathcal{G}^+(o,\ U)$ 是开集，定义为

$$\Phi_s(y) := \exp_y(-s\,\nabla l_o).$$

回忆定理 4.4，对于每个 $y \in \mathcal{G}^+(o,\ U)$，平移 $\Phi_{\bullet - l_o(y)}(y)$ 在 **实数集**$_+$ 的某个包含零的子区间上，限制为一条从 o 出发并经过 y 的唯一类时测地线。

令 $b\colon \mathcal{G}^+(o,\ U) \to (0,\ \infty)$ 定义为

$$b_y := \sup\{t \in \mathbf{R}_+ : \Phi_{t - l_o(y)}(y) \in \mathcal{G}^+(o,U)\}.$$

显然它为正且有限。由于 $\mathcal{G}^+(o,\ U)$ 不包含 o 的未来类时切点，因此显然有

$$b \le s_o^+ \circ \exp_o^{-1},$$

其中右侧的 o-未来切函数来自（4.1）。特别地，我们看到 $\Phi_{\bullet - l_o(y)}(y)$ 在整个 $[0, b_y$ 上都是极大化的）。

根据关于 $\mathfrak{m}$ 的假设，其密度 $\mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{dvol}_g$ 光滑。因此，诱导的加权雅可比 $J_{\mathfrak{m}}\Phi_\bullet\colon W \to (0,\ \infty)$ 由下式给出

$$J_{\mathfrak{m}}\Phi_s(y) := \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(y)^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g} \circ \Phi_s(y)\right] \left|\det \mathrm{D}\Phi_s(y)\right|, \tag{4.5}$$

其中，最后一个因子表示映射 $\Phi_s\colon \Sigma_r \to \Sigma_{r+s}$ 相对于由 g 在 Σ_r 和 Σ_{r+s}上诱导的黎曼体积测度的雅可比行列式。

做好这些准备后，接下来的面积公式便是标准结果。关于完整证明，请参见 Treude [79, §§1.3, A.2] 其中给出的公式只需修改测试函数，便可直接推广到加权情形。

命题 4.5 （面积公式）**.** 设 $\psi\colon \mathcal{G}^+(o,U)\to$ **实数集** 连续且具有紧支集。则有

$$\int_{\mathcal{G}^+(o,U)}\psi\,\mathrm{d}\mathfrak{m}=\int_{\Sigma_r}\int_{[0,b_y)}\psi\circ\Phi_{t-r}(y)\,J_{\mathfrak{m}}\Phi_{t-r}(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu_r(y).$$

4.2.3. 光滑 *CD* 解体。 现在，我们调用命题 4.5给出的沿各条射线的曲率性质。

回顾一下，若映射 $F\colon X\to Y$ 在可度量化空间 X 和 Y 之间，对于 X 上的每个博雷尔概率测度 μ，它都是 μ-可测的，则称其为普遍可测。令 $\mathcal{M}(M)$ 表示 M 上有限博雷尔测度构成的空间；赋予全变差距离后，该空间成为一个度量空间。

定理 *4.6*（$\mathfrak{m}$ 的光滑 *CD* 解体）。设 $(M,g,\mathfrak{m})$ 是一个全局双曲加权时空。给定一点 $o\in M$ 和一个具有紧包含的开黎曼球 $U\subset I^+(o)$，令 $\mathcal{G}^+(o,U)\subset I^+(o)\cup\{o\}$ 由 *(4.3)* 定义。令 $N\in[\dim M,\infty)$，并假设存在连续函数 $k\colon \mathcal{G}^+(o,U)\to$ 实数集，使得对于每条从 o 出发并与 U 相交的类时仿射参数化极大测地线 $\gamma\colon[0,1]\to M$，在 $[0,1]$ 上都有 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}(\dot\gamma,\dot\gamma)\geq(k\circ\gamma)\,g(\dot\gamma,\dot\gamma)$。那么存在

- 一个类空超曲面 $Q\subset\mathcal{G}^+(o,U)$，
- 一个概率测度 $\mathfrak{q}$ 在 Q 上，并且
- 一个连续映射 $\mathfrak{m}_\bullet\colon Q\to\mathcal{M}(M)$

满足以下性质。

(i)我们有

$$\mathfrak{m}\llcorner\mathcal{G}^+(o,U)=\int_Q\mathfrak{m}_\alpha\,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha).$$

(ii) 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，条件测度 $\mathfrak{m}_\alpha$ 集中于按固有时参数化的类时极大测地线 $\Phi_{\bullet-l_o(\alpha)}(\alpha)\big|_{[0,b_\alpha)}$ 上。*(iii)* 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，条件测度 $\mathfrak{m}_\alpha$ 相对于 M_α 上的一维勒贝格测度绝对连续。令 f_α 为其拉东–尼科迪姆密度，则 $f_\alpha\circ\Phi_{\bullet-l_o(\alpha)}(\alpha)$ 是 $(0,b_\alpha)$ 上意义下的光滑 $\mathrm{CD}(k\circ\Phi_{\bullet-l_o(\alpha)}(\alpha),N)$ 密度，其中“意义下”按定义 *3.5* 所述。

证明。我们着重说明构造，仅对证明作简要概述。给定如上所述的 $r\in(0,\vartheta)$，我们令 $Q:=\Sigma_r$ 由 (4.4) 给出，并令 $\mathfrak{q}:=\mu_r[\Sigma_r]^{-1}\,\mu_{r\circ}$ 此外，对于 $\alpha\in Q$，我们将测度 $J_{\mathfrak{m},\bullet-r}(\alpha)\,\mathcal{L}^1\llcorner[0,b_\alpha)$ 在映射$\Phi_{\bullet-r}(\alpha)$下的推前定义为$\mathfrak{m}_\alpha$。由命题 4.5 可直接得到所声称的解体公式及第二个结论。最后一个结论可由标准的雅可比场计算推出，参见 Treude [79, §1.4] 和 Treude–Grant [80, §3]，并结合注 3.6。或者，也可以仿照 Cavalletti– Mondino [25, 定理 3.2] 和 Braun–McCann [14, 定理 6.37]，的证明进行论证，同时注意到其中假设的环境类时里奇曲率界仅在射线的切向方向上有所要求（在我们的情形中，这些方向对应于 Φ 的流轨道）。□

显然，对所讨论的测度乘以适当的常数，即可得到概率测度的解体定理

$$\mathfrak{n}:=\mathfrak{m}[\mathcal{G}^+(o,U)]^{-1}\,\mathfrak{m}\llcorner\mathcal{G}^+(o,U).$$

回顾一下， $\mathcal{P}(M)$ 是 M 上所有博雷尔概率测度组成的空间，并赋予窄拓扑（该拓扑可度量化，参见 Ambrosio–Gigli–Savaré [1, 注 5.1.1]）。

推论 4.7 (关于 $\mathfrak{n}$ 的光滑 CD 解体)。 我们沿用定理 *4.6*的假设和记号。于是存在

- 一个类空超曲面 $Q\subset\mathcal{G}^+(o,U)$，

- 一个定义在 Q 上的概率测度 $\mathfrak{q}$，以及
- 一个连续映射 $\mathfrak{n}_\bullet\colon\ Q \to \mathcal{P}(M)$

满足以下性质。

（i）我们有

$$\mathfrak{n} = \int_Q \mathfrak{n}_\alpha \,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha).$$

（*ii*）对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha \in Q$，条件测度 $\mathfrak{n}_\alpha$ 集中于按固有时参数化的类时极大测地线 $\Phi_{\bullet - l_o(\alpha)}(\alpha)\big|_{[0,b_\alpha]}$。（*iii*）对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha \in Q$，条件测度 $\mathfrak{n}_\alpha$ 相对于 M_α 上的一维勒贝格测度是绝对连续的。记其拉东–尼科迪姆密度为 h_α，则 $h_\alpha \circ \Phi_{\bullet - l_o(\alpha)}(\alpha)$ 是 $(0, b_\alpha)$ 上意义下的光滑 $\mathrm{CD}(k \circ \Phi_{\bullet - l_o(\alpha)}(\alpha),\ N)$ 密度，该意义见定义 *3.5*。

我们将把前述推论给出的三元组 $(Q,\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{n}_\bullet)$ 称为 $\mathfrak{n}$的光滑 $\mathrm{CD}(k,\ N)$分解。

4.3. 带缺陷的位移凸性。为证明我们的主要技术结果定理4.10，需要更精细地了解某个 q-测地线 $\mu\colon\ [0,1] \to M$穿过全局双曲加权时空 $(M, g, \mathfrak{m})$ 的结构性质，其中 $q \in (0,1)$；现将这些性质回顾如下。McCann [58]和 Braun–Ohta[15], 得出了这些性质，他们的结果甚至适用于洛伦兹–芬斯勒框架。此外，方便起见，我们将 μ 表示为中间测度 μ_t的推前，其中$t \in (0,1)$，而非像定理 3.19 中那样表示为 μ_0。

设 $t \in (0,1)$。假设 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ 均为紧支撑、 $\mathfrak{m}$-绝对连续，且满足 $\operatorname{spt}\mu_0 \times \operatorname{spt}\mu_1 \subset I$。那么，按照 McCann [58, 定义 4.1]中的意义，(μ_0, μ_1) 是 q-分离的；由 [58, 引理 4.4], 可知，这一性质（不同于 $\operatorname{spt}\mu_0$ 和 $\operatorname{spt}\mu_1$上的时序假设）会传播到唯一的 q-测地线$\mu\colon\ [0,1] \to \mathcal{P}(M)$ 的内部；该测地线连接来自定理 3.19 [58,、命题 5.5]的 μ_0和 μ_1。设 Ψ为定理 3.19 中的传输映射。根据该定理和注3.20，映射 $\Phi^t\colon\ [0,1] \times \operatorname{spt}\mu_t \to M$定义为

$$\Phi^t_r := \Psi_r \circ \Psi_t^{-1} \tag{4.6}$$

定义良好；特别是，

$$\Phi^t_t = \mathrm{Id}\big|_{\operatorname{spt}\mu_t}. \tag{4.7}$$

此外，定义 $G^t\colon\ \operatorname{spt}\mu_t \to C^0([0,1];\ M)$ 为

$$G^t(x)_r := \Phi^t_r(x), \tag{4.8}$$

我们看到 $(G^t)_\sharp\mu_t$ 等于 μ_0 和 μ_1 的唯一 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$。

另一方面，存在一个开邻域 $U \subset M$，其包含$\operatorname{spt}\mu_t$以及一个局部半凸（因而局部 Lipschitz 连续）的康托罗维奇势$\varphi^t\colon\ U \to$ **实数集**，适用于 μ_t 和 μ_1。它可以通过 φ 利用霍普夫–拉克斯演化计算得到，参见 McCann [58, 注 5。6]再次利用唯一性，对每个 $r \in [0,1]$ 我们都有

$$\exp_\bullet\big(-(r-t)\,|\nabla\varphi^t|^{q'-2}\,\nabla\varphi^t\big) = \Phi^t_r \quad \mu_t\text{-a.e.}$$

由变量替换公式得出、并最终通过雅可比场计算建立最优传输与类时里奇曲率之间联系的，是一个关于 μ_t 和 μ_1 相对于 $\mathfrak{m}$的拉东–尼科迪姆密度之间的显式关系，即蒙日–安培方程。为此，给定一点 $x \in \operatorname{spt}\mu_t$，令$|\mathrm{det}\mathrm{D}\Phi^t(x)|$ 表示与 vol_g 相关、沿着类时仿射参数化极大测地线 $G^t(x)$的 $\Phi^t(x)$的雅可比行列式；这里，D 指的是

McCann 的近似导数 [58, 定义 3。8]。类似于（4.5），我们将定义相对于 $\mathfrak{m}$的相应雅可比行列式：

$$J_{\mathfrak{m}}\Phi_r^t(x) := \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(x)^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\circ\Phi_r^t(x)\right]\left|\det \mathrm{D}\Phi_r^t(x)\right|.$$

命题 4.8 (Monge–Ampère恒等式 [58,推论 5.11])。 我们有

$$\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}\Phi_1^t\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\circ\Phi_1^t \quad \mu_t\text{-a.e.}$$

此外，Braun–Ohta 定理 5. 的证明中第 4 步的计算，利用所讨论输运测地线上每一点附近的正交归一标架，表明给定 $r\in[0,1]$ 和 $x\in\operatorname{spt}\mu_t$，上述从 μ_t到 μ_r 的输运雅可比行列式可分解为以下形式

$$J_{\mathfrak{m}}\Phi_r^t(x) = L_r^t(x)\left|\det B_r^t(x)\right|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(x)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\circ\Phi_r^t(x),$$

其中 $B_r^t(x)$ 是近似导数 $\mathrm{D}\Phi_r^t$ 在 $G^t(x)_r$ 处相对于 g 的切向量正交补上的矩阵表示，并且

$$L_r^t(x) := \frac{J_{\mathfrak{m}}\Phi_r^t(x)}{Y_r^t(x)},$$

描述了 $G^t(x)_r$处切向方向上的畸变，其中

$$Y_r^t(x) := \left|\det B_r^t(x)\right|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(x)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\circ\Phi_r^t(x). \tag{4.9}$$

注意，由 (4.7) 以及上述归一化，我们有

$$L_t^t(x) = 1. \tag{4.10}$$

引理 4.9 (凹性不等式 [15, 定理 5。9])。 以下结论对每个 $x\in\operatorname{spt}\mu_t$均成立。

(i) 切向部分 $L^t(x)$ 是凹的，即对每个 $r\in[0,1]$,

$$L_r^t \geq (1-r)\,L_0^t + r\,L_1^t.$$

(ii) 给定连续函数 $k\colon M\to$实数集，按照定义 *3.23* 中的方式定义 $k_\gamma^{\pm}\colon[0,|\dot\gamma|]\to$实数集，其中 $\gamma := G^t(x)$。此外，给定 $N\in[$维数 $M,\infty)$，我们假设在 $[0,1]$ 上有 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}(\dot\gamma,\dot\gamma)\geq(k\circ\gamma)\,g(\dot\gamma,\dot\gamma)$。那么，*(4.9)* 中的正交部分$Y^t(x)$ 对每个 $r\in[0,1]$ 都满足以下不等式：

$$\begin{aligned} Y_r^t(x)^{1/(N-1)} \geq\ & \sigma^{(1-r)}_{k_\gamma^-/(N-1)}(|\dot\gamma|)\,Y_0^t(x)^{1/(N-1)} \\ & + \sigma^{(r)}_{k_\gamma^+/(N-1)}(|\dot\gamma|)\,Y_1^t(x)^{1/(N-1)}. \end{aligned}$$

现在我们可以证明主要的技术性引理了。

定理4.10 (带缺陷的位移凸性)。 假设$(M,g,\mathfrak{m})$ 是一个全局双曲加权时空。我们假设 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 具有紧支撑且是 $\mathfrak{m}$-绝对连续的。令 $q\in(0,1)$， $K\in$**实数集**，以及 $p\in(N/2,\infty)$。假设存在 $\lambda>0$ 和 $\eta\in(0,\pi_{K/(N-1)}/2)$ 使得

$$\lambda \leq l\circ(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1) \leq \pi_{K/(N-1)} - \eta \quad \boldsymbol{\pi}\text{-a.e.}, \tag{4.11}$$

其中， $\boldsymbol{\pi}$ 是唯一的 ℓ_q最优动力耦合，表示由定理 *3.19* 给出的从 μ_0到 μ_1 的 q-测地线$\mu\colon[0,1]\to\mathcal{P}(M)$，而$\pi_{K/(N-1)}$来自 *(3.2)*。设给定连续函数 $k\colon M\to$实数集，并且 $N\in[$维 $M,\infty)$具有如下性质：对于每条从 *spt* μ_0 出发并终止于 *spt* μ_1的类时仿射参数化极大测地线 $\gamma\colon[0,1]\to M$，在 $[0,1]$ 上均有 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}(\dot\gamma,\dot\gamma)\geq(k\circ\gamma)\,g(\dot\gamma,\dot\gamma)$。

最后，设 $L>0$ 是 l 在 $\operatorname{spt}\mu_0\times\operatorname{spt}\mu_1$ 上的利普希茨常数的一个上界，参见命题 2.19。那么对于每个 $t\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_N(\mu_t\,|\,\mathfrak{m}) \le &-\int \tau_{K,N}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &-\int \tau_{K,N}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &+2\left[\Lambda_{K,N,\eta}\,\Omega_{K,N,p,\eta}^{1/(2p-1)}\right]^{1/N}\mathfrak{m}[C]^{2(p-1)/N(2p-1)}\\ &\qquad\times\left[\operatorname{diam}(C,g)^{2p-q+1}\,\lambda^{q-1}\,L\right]^{1/N(2p-1)}\\ &\qquad\times\left[\int_C\left|(k-K)_-\right|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right]^{1/N(2p-1)},\end{aligned}$$

其中 $\Lambda_{K,N,\eta}$ 以及 $\Omega_{K,N,p,\eta}$ 均来自 (3.3) 并且令 $C:=J(\operatorname{spt}\mu_0,\operatorname{spt}\mu_1)$。

证明。 由定理 3.24, $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处 γ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_t)^{-1/N}\ge\tau_{k_\gamma^-,N}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N}+\tau_{k_\gamma^+,N}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N}.\tag{4.12}$$

我们的目标是，在对 $\boldsymbol{\pi}$ 积分后，将变量的 k 畸变系数替换为常数K畸变系数，并给出明确的误差。下文中，我们着重将畸变系数 $\tau_{(t)k_\gamma^+,N}(|\dot\gamma|)$ 替换为 $\tau_{(t)K,N}(|\dot\gamma|)$；类似地，$\tau_{k^-}^{(1-t)}$

$_\gamma,_N(|\dot\gamma|)$ 被 $\tau_{K,N}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)$ 替换。

由引理 3.4 和 (4.11)， $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处 γ 满足

$$\begin{aligned}&\tau_{K,N}^{(t)}(|\dot\gamma|)-\tau_{k_\gamma^+,N}^{(t)}(|\dot\gamma|)\\ &\quad\le\left[\Lambda_{K,N,\eta}\,\Omega_{K,N,p,\eta}^{1/(2p-1)}\right]^{1/N}\left[\int_{[t,1]}\tau_{k_\gamma^+,N}^{(r)}(|\dot\gamma|)^N\,\mathrm{d}r\right]^{2(p-1)/N(2p-1)}\\ &\qquad\times\left[t\,|\dot\gamma|^{2p}\int_{[0,1]}\left|(k(\gamma_r)-K)_-\right|\sigma_{k_\gamma^+/(N-1)}^{(r)}(|\dot\gamma|)^{N-1}\,\mathrm{d}r\right]^{1/N(2p-1)}.\end{aligned}$$

将此不等式乘以 $\mathrm{d}\mu_1/\mathrm{d}\mathfrak{m}(\gamma_1)^{-1/N}$，并先应用詹森不等式，再应用霍尔德不等式，

$$\begin{aligned}&\int\tau_{K,N}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)-\int\tau_{k_\gamma^+,N}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &\quad\le\left[\Lambda_{K,N,\eta}\,\Omega_{K,N,p,\eta}^{1/(2p-1)}\right]^{1/N}\int\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N}\right.\\ &\qquad\times\left[\int_{[t,1]}\tau_{k_\gamma^+,N}^{(r)}(|\dot\gamma|)^N\,\mathrm{d}r\right]^{2(p-1)/N(2p-1)}\\ &\qquad\left.\times\left[t\,|\dot\gamma|^{2p}\int_{[0,1]}\left|(k(\gamma_r)-K)_-\right|\sigma_{k_\gamma^+/(N-1)}^{(r)}(|\dot\gamma|)^{N-1}\,\mathrm{d}r\right]^{1/N(2p-1)}\right]\\ &\quad\le\left[\Lambda_{K,N,\eta}\,\Omega_{K,N,p,\eta}^{1/(2p-1)}\right]^{1/N}\left[\int\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1}\right.\\ &\qquad\times\left[\int_{[t,1]}\tau_{k_\gamma^+,N}^{(r)}(|\dot\gamma|)^N\,\mathrm{d}r\right]^{2(p-1)/(2p-1)}\\ &\qquad\left.\times\left[t\,|\dot\gamma|^{2p}\int_{[0,1]}\left|(k(\gamma_r)-K)_-\right|\sigma_{k_\gamma^+/(N-1)}^{(r)}(|\dot\gamma|)^{N-1}\,\mathrm{d}r\right]^{1/(2p-1)}\right]^{1/N}\\ &\quad\le\left[\Lambda_{K,N,\eta}\,\Omega_{K,N,p,\eta}^{1/(2p-1)}\right]^{1/N}\underbrace{\left[\iint_{[t,1]}\tau_{k_\gamma^+,N}^{(r)}(|\dot\gamma|)^N\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\right]^{2(p-1)/N(2p-1)}}_{\mathrm{A}}\end{aligned}$$

$$\times \Big[t \int \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\, |\dot\gamma|^{2p} \Big[\int_{[0,1]} \mathrm{d}r\, \big|(k(\gamma_r)-K)_-\big|^p \underbrace{\times \sigma^{(r)}_{k^+_\gamma/(N-1)}(|\dot\gamma|)^{N-1}\, \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1} \Big]}_{\mathrm{B}} \Big]^{1/N(2p-1)}.$$

接下来，我们将分别估计积分 A 和 B。特别要注意，B 中出现的因子 $t\,\sigma^{(r)}_{k^+_\gamma/(N-1)}(|\dot\gamma|)^{N-1}$不能简化为单个 τ-畸变系数的 N 次幂。

寻找 A的上界很简单。事实上，利用（4.12）、富比尼定理，以及 $\mathrm{spt}\,\mu_r \subset C$对每个 $r\in[t,1]$都成立这一事实，

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \iint_{[t,1]} \tau^{(r)}_{k^+_\gamma,N}(|\dot\gamma|)^N\, \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) \\
&\le \int_{[t,1]} \int \frac{\mathrm{d}\mu_r}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_r)^{-1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\, \mathrm{d}r \\
&= \int_{[t,1]} \int_M \Big[\frac{\mathrm{d}\mu_r}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\Big]^{-1} \mathrm{d}\mu_r\, \mathrm{d}r \\
&\le \mathfrak{m}[C].
\end{aligned}$$

特别是，来自 A 的贡献有界。

为了求出 B的上界，我们首先将关于 $\boldsymbol{\pi}$ 的积分改写为关于 μ_t的积分。为此，我们回顾定理 Ψ_1、 Ψ_t和 Φ_1^t 3.19 及（4.6）中的传输映射；特别地，

$$\Psi_1 = \Phi_1^t \circ \Psi_t \quad \mu_0\text{-a.e.} \tag{4.13}$$

给定一点 $x\in \mathrm{spt}\,\mu_t$，令类时仿射参数化极大测地线γ^x: $[0,1]\to M$由 $\gamma^x := G^t(x)$ 定义，其中 $G^t(x)$ 来自（4.8）。结合定理 3.19、（4.13）中的恒等式 $\mu_1 = (\Psi_1)_\sharp \mu_0$，以及（$\Psi_t$）$_\sharp\mu_0 =$($\mathrm{e}_t$)$_\sharp\boldsymbol{\pi}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= t \int \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\, |\dot\gamma|^{2p} \Big[\int_{[0,1]} \mathrm{d}r\, \big|(k(\gamma_r)-K)_-\big|^p \\
&\qquad \times \sigma^{(r)}_{k^+_\gamma/(N-1)}(|\dot\gamma|)^{N-1} \Big[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \circ \Phi_1^t\Big](\gamma_t)^{-1} \Big] \\
&= t \int_M \mathrm{d}\mu_t\, |\dot\gamma^\bullet|^{2p} \Big[\int_{[0,1]} \mathrm{d}r\, \big|(k(\gamma^\bullet_r)-K)_-\big|^p \\
&\qquad \times \sigma^{(r)}_{k^+_{\gamma^\bullet}/(N-1)}(|\dot\gamma^\bullet|)^{N-1} \Big[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \circ \Phi_1^t\Big]^{-1} \Big].
\end{aligned}$$

令 L^t 和 B^t 如上所述；更确切地说，它们分别由将 ℓ_q- 从 μ_t 到 μ_1 的最优传输分解为切向部分和正交部分得到。命题4.8 中的蒙日–安培型恒等式推出

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} = \int_M \mathrm{d}\mu_t\, |\dot\gamma^\bullet|^{2p} \Big[\Big[\int_{[0,1]} \mathrm{d}r\, \big|(k(\gamma^\bullet_r)-K)_-\big|^p \\
\times \sigma^{(r)}_{k^+_{\gamma^\bullet}/(N-1)}(|\dot\gamma^\bullet|)^{N-1}\, \big|\det B_1^t\big|\, \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g} \circ \Phi_1^t \Big] \\
\times\, t\, L_1^t \Big[\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\Big]^{-1} \Big[\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\Big]^{-1} \Big].
\end{aligned}$$

注意到 $\Phi_1^t(x) = \gamma_1^x$ 对于 μ_t-几乎处处 $x\in M$ 由 (4.6) 得到

$$\mathrm{B} \le \int_M \mathrm{d}\mu_t\, |\dot\gamma^\bullet|^{2p} \Big[\Big[\int_{[0,1]} \big|(k(\gamma^\bullet_r)-K)_-\big|^p\, \big|\det B_r^t\big|\, \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma^\bullet_r)\, \mathrm{d}r \Big]$$

$$\times L_t^t \Big[\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\Big]^{-1}\Big[\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\Big]^{-1}\Big]$$
$$= \underbrace{\int_M \Big[\int_{[0,1]} \big|(k(\gamma_r^\bullet)-K)_-\big|^p \big|\det B_r^t\big| \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma_r^\bullet)\,\mathrm{d}r\Big] |\dot\gamma^\bullet|^{2p}\,\mathrm{dvol}_g}_{\mathrm{B}'};$$

这里，我们使用了以下关系式

$$\sigma^{(r)}_{k^\bullet_\gamma/(N-1)}(|\dot\gamma|)^{N-1}\big|\det B_1^t\big|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}\circ\Phi_1^t \le \big|\det B_r^t\big|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma_r^\bullet),$$
$$t\,L_1^{t,1} \le L_t^{t,1} = 1$$

由引理 4.9 和归一化条件（4.10）可得。

余面积公式的标准应用，参见例如 Ketterer [47, 引理 5.2]，现在使我们能够沿康托罗维奇势φ^t 的等值集对体积g 进行分解，该势对应于从 μ_t 到 μ_1的 ℓ_q-最优传输；更确切地说，存在一个$\mathcal{L}^1$-可测集 $Q \subset$**实数集**，包含于 φ^t的像中，1 并且对 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $a \in Q$，存在一个$\mathcal{H}^{\dim M-1}$-可测子集 $\Sigma_a \subset \{\varphi^t = a\}$，使得

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}' &= \int_Q \int_{\Sigma_a} \Big[\int_{[0,1]} \big|(k(\gamma_r^\bullet)-K)_-\big|^p \big|\det B_r^t\big| \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma_r^\bullet)\,\mathrm{d}r\Big] \frac{|\dot\gamma^\bullet|^{2p}}{|\nabla\varphi^t|}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim M-1}\,\mathrm{d}a\\
&= \int_Q \mathrm{d}a \int_{\Sigma_a} \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim M-1}\,|\dot\gamma^\bullet|^{2p-q}\Big[\int_{[0,1]} \mathrm{d}r\,\big|(k(\gamma_r^\bullet)-K)_-\big|^p\\
&\qquad \times \big|\det B_r^t\big|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma_r^\bullet)\,|\dot\gamma^\bullet|\Big]\\
&\le \mathrm{diam}\,(C,g)^{2p-q}\int_Q \mathrm{d}a \int_{\Sigma_a} \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim M-1}\Big[\int_{[0,1]} \mathrm{d}r\,\big|(k(\gamma_r^\bullet)-K)_-\big|^p\\
&\qquad \times \big|\det B_r^t\big|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma_r^\bullet)\,|\dot\gamma^\bullet|\Big];
\end{aligned}$$

这里，$\mathcal{H}^{\dim M-1}$表示（维数 $M-1$）维豪斯多夫测度；在第二个等式中，我们使用了恒等式 $|\dot\gamma^\bullet| = |\nabla\varphi^t|^{q'-1}$ μ_t-几乎处处成立，这由定理 3.19 推出。我们将上面最后一行中的迭代积分简记为 B″。现在，面积公式的标准应用，参见例如 Ketterer [47, 命题 5.6]，表明 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $a \in Q$ 满足

$$\int_{[0,1]}\int_{\Sigma_a} \big|(k(\gamma_r^\bullet)-K)_-\big|^p \big|\det B_r^t\big|\,|\dot\gamma^\bullet|\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{dvol}_g}(\gamma_r^\bullet)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim M-1}\,\mathrm{d}r$$
$$\le \int_C \big|(k-K)_-\big|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

因此

$$\mathrm{B}'' \le \mathcal{L}^1[Q]\int_C \big|(k-K)_-\big|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

接下来需要求出 $\mathcal{L}^1[Q]$ 的上界。根据 Q 的构造，

$$\mathcal{L}^1[Q] \le \mathcal{L}^1\big[\varphi^t(\mathrm{spt}\,\mu_t)\big].$$

另一方面，利用 μ 是连接端点 μ_0 和 μ_1的 q-测地线，且它们满足 spt $\mu_0 \times \mathrm{spt}\,\mu_1 \subset I$，McCann 的结果 [58, 定理 4.3、引理 4.4、命题 5.5] 表明，φ^t 在 $\mathrm{spt}\,\mu_t$ 上的利普希茨常数不大于 l^q/q 在 $\mathrm{spt}\,\mu_0 \times \mathrm{spt}\,\mu_1$上的利普希茨常数。进而，由 (4.11) 可知，后者不大于 λ^{q-1} 乘以 l 在 spt $\mu_0 \times \mathrm{spt}\,\mu_1$上的利普希茨常数，其中我们用到了

$q \in (0,1)$。由于 $\mathcal{L}^1[\varphi^t(\operatorname{spt}\ \mu_t)]$ 不大于 φ^t 在 $\operatorname{spt}\ \mu_t$上的振荡，根据我们对 L 的选择，这很容易推出

$$\mathcal{L}^1\left[\varphi^t(\operatorname{spt}\mu_t)\right] \leq \operatorname{diam}(C,g)\,\lambda^{q-1}\,L.$$

证明至此完成。 □

5. Sharp timelike Bonnet–Myers inequality

现在我们证明第一个主要结果。除了 §2.2 中对利普希茨连续度量张量的良好逼近，以及 §4.2中的局部化范式外，我们的论证还依赖推论 3.9中的定性直径估计。

定理 5.1 (尖锐类时Bonnet–Myers直径估计)。 令 $K > 0$ 和$N \in$ [维数 $M, \infty)$。假设 $(M, g, \mathfrak{m})$ 是一个满足 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N} \geq K$ 在分布意义下为类时的全局双曲加权利普希茨时空。那么

$$\operatorname{diam}(M,g) \leq \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}.$$

证明。 反设存在 $\varepsilon > 0$ 和 $o, x \in M$ 满足

$$l_o(x) \geq \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}} + 4\varepsilon.$$

由于 l_+ 连续，存在一个以 x 为中心的开黎曼球 $U \subset M$，满足

$$\inf\{l_{g,o}(y) : y \in U\} \geq \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}} + 3\varepsilon.$$

令 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 分别为 g 和 $\mathfrak{m}$ 在紧集 $C := J_g(o, \operatorname{cl} U)$ 上的固定良好逼近。回顾一下，对每个 $n \in \mathbf{N}$，诱导加权时空 $(M, g_n, \mathfrak{m}_n)$ 都是整体双曲的。由引理 2.14，我们可以并且将假设存在 $n_1 \in \mathbf{N}$，使得对每个满足 $n \geq n_1$ 的 $n \in \mathbf{N}$,

$$\inf\{l_{g_n,o}(y) : y \in U\} \geq \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}} + 2\varepsilon. \tag{5.1}$$

下文中，对于如上所述的 n，我们简记

$$G_n := \mathcal{G}^+_{g_n}(o, U),$$

其中右端来自（4.3），其定义是相对于 g_n而言的。由定理4.3以及$(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 到 $\mathfrak{m}$的窄收敛，

$$\liminf_{n\to\infty} \mathfrak{m}_n[G_n] \geq \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{m}_n[U \setminus \mathrm{TC}^+_{g_n}(o)] = \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{m}_n[U] = \mathfrak{m}[U] > 0.$$

另一方面，由于对每个 $n \in \mathbf{N}$，都有 $G_n \subset J_g(o, \operatorname{cl} U)$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathfrak{m}_n[G_n] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathfrak{m}_n[C] = \mathfrak{m}[C] < \infty.$$

特别地，除去重新编号的子列后，我们可以并且将假设 $(\mathfrak{m}_n[G_n])_{n\in\mathbf{N}}$ 在 $(0, \infty)$ 中收敛。进而，存在常数 $w > 0$ 和 $n_2 \in \mathbf{N}$，满足$n_2 \geq n_1$，使得对每个满足 $n \geq n_2$ 的 $n \in \mathbf{N}$，

$$\mathfrak{m}_n[G_n] \geq w. \tag{5.2}$$

在适当增大 n_2 的值后，对每个满足 $n \geq n_2$ 的 $n \in \mathbf{N}$，我们根据 (2.4) 定义 $k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N}\colon M \to$ 实数集，其中 $V \subset T^+|_C$ 来自引理 2.17。对于 $p \in (N/2, \infty)$，令 $\delta_{K,N,p,\varepsilon} > 0$ 如推论 3.9 所述。此外，给定 $\eta \in (0, 1)$，由引理 2.16 可知存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sqrt{\delta} \leq \min\{\delta_{K,N,p,\varepsilon}, \eta\} \tag{5.3}$$

并且存在满足 $n_3 \geq n_2$ 的 $n_3 \in \mathbf{N}$，使得对于每个满足 $n \geq n_3$ 的 $n \in \mathbf{N}$，

$$\int_{G_n} \left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N} - K)_-\right|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_n \leq w\,\delta. \tag{5.4}$$

对于每个这样的 n，定义

$$\mathfrak{n}_n := \mathfrak{m}_n[G_n]^{-1}\,\mathfrak{m}_n \llcorner G_n,$$

关系 (5.4) 和 (5.2) 意味着

$$\int_{G_n} \left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N} - K)_-\right|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{n}_n \leq \delta. \tag{5.5}$$

给定上述 n，引理2.17 结合推论4.7 可确保存在一个光滑的 CD($k_{V,\,g_n,\,\mathfrak{m}_n,\,N}$, N) 解体 (Q_n, $\mathfrak{q}_n$, $\mathfrak{n}_n$, •)，其对应于 $\mathfrak{n}_n$。现在我们用这一工具来寻求所需的矛盾。首先注意，根据 G_n 和该解体的构造，射线 $M_{n,\,\alpha}$ 对 $\mathfrak{q}_n$-几乎处处的 $\alpha \in Q_n$ 都与 U 相交。另一方面，令R_n 为所有满足以下条件的 $\alpha \in Q_n$ 的集合

$$\int_{M_{n,\alpha}} \left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N} - K)_-\right|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{n}_{n,\alpha} \leq \sqrt{\delta}.$$

由马尔可夫不等式、解体推论4.7、(5.5) 和 (5.3)，

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_n[Q_n \setminus R_n] &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{Q_n} \int_{M_{n,\alpha}} \left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N} - K)_-\right|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{n}_{n,\alpha}\,\mathrm{d}\mathfrak{q}_n(\alpha)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{G_n} \left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N} - K)_-\right|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{n}_n\\ &\leq \eta.\end{aligned}$$

因此，再次由 (5.3) 以及推论3.9，穿过集合 R_n（其 $\mathfrak{q}_n$-测度至少为 $1-\eta$）的 $\mathfrak{q}_n$-几乎处处射线的直径不超过 $\pi\sqrt{(N-1)/K} + \varepsilon$。另一方面，由于 $\mathfrak{q}_n$-几乎处处射线按构造都与 U 相交，我们看到 $\mathfrak{q}_n$-几乎处处射线的直径至少为 $\pi\sqrt{(N-1)/K} + 2\varepsilon$，由 (5.1) 得出。由于所讨论的两个集合的交集具有 $\mathfrak{q}_n$-测度，且至少为 $1-\eta > 0$，因此该交集非空，由此得到所需的矛盾。□

6. Main results and applications

6.1. 从解析到综合。

定理 6.1（类时测度收缩性质）。设 $(M, g, \mathfrak{m})$ 为一个全局双曲加权利普希茨时空。假设 $K \in \mathbf{R}$ 和 $N \in$ [维数 M, ∞) 在分布意义下满足$\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N} \geq K$ 类时。则 $(M, g, \mathfrak{m})$ 满足类时测度收缩性质 (K, N)。

事实上，在证明定理 6.1时，主要工作将投入于证明下面这个稍强的陈述。

命题 6.2（具有年代支撑的位移半凸性）。保留定理 6.1中的假设和记号。对于每个 $q \in (0, 1)$ 以及每个紧支撑的、 $\mathfrak{m}$-绝对连续测度 μ_0, $\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$，满足 $\mathrm{spt}\,\mu_0 \times \mathrm{spt}\,\mu_1 \subset I$，存在

- 一条 q-测地线 μ： $[0,1] \to \mathcal{P}(M)$ 从 μ_0 到 μ_1，并且
- ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$，对象为 μ_0 和 μ_1

使得对于每个 $N' \in [N, \infty)$ 以及每个 $t \in [0,1]$，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{N'}(\mu_t \mid \mathfrak{m}) \leq &-\int \tau_{K,N'}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &-\int \tau_{K,N'}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\end{aligned}$$

证明。令 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 为 g 和 $\mathfrak{m}$ 在紧集 $C:=J_g$(支集 μ_0，支集 μ_1) 上的固定良好逼近，如定义 2.13所述。注意，根据构造，对于每个 $i\in\{0,1\}$ 以及每个 $n\in\mathbf{N}$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}=a_n\,\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}, \tag{6.1}$$

其中，$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 是连续函数序列 $a_n:=\mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{d}\mathfrak{m}_n$，在 C上一致收敛于 1；特别地，μ_0 和 μ_1 是 $\mathfrak{m}_n$-绝对连续且具有紧支撑的函数。根据引理 2.17，我们还可以并且将不失一般性地假设 $\operatorname{spt}\mu_0\times\operatorname{spt}\mu_1\subset I_{g_n}$。考虑相应的序列 $(\boldsymbol{\pi}^n)_{n\in\mathbf{N}}$，其中 $\boldsymbol{\pi}^n$ 是由定理 3.19 提供的 μ_0 和 μ_1 的唯一 ℓ_{g_n}、q-最优动力耦合。根据命题 3.21，经过取一个不重新标记的子列，我们可以并且将假设其窄收敛于 μ_0 和 μ_1的一个ℓ_g、q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$。下文中，给定 $t\in[0,1]$，我们记 $\mu_t:=(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}$ 以及 $\mu_t^n:=(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}^n$，其中 $n\in\mathbf{N}$。

现在的思路是沿着这个收敛序列，对定理 4.10 中的不等式取极限，这需要做一些进一步的准备。我们只讨论 K 为正的情形；其他情形可用类似的方法处理（论证更简单，因为在这种互补情形下无需考虑直径界）。由引理 2.17，我们可以并且将假设存在 $\lambda>0$，使得对每个 $n\in\mathbf{N}$,

$$l_{g_n}\circ(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)\geq\lambda\quad\boldsymbol{\pi}^n\text{-a.e.}$$

另一方面，固定 $K'\in(0,\ K)$。由定理 5.1 以及 $\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N}\geq K$在分布意义下为类时，存在 $\eta\in(0,\ \pi_{K/(N-1)}/2)$，使得

$$\operatorname{diam}\left(J_g(\operatorname{spt}\mu_0,\operatorname{spt}\mu_1),g\right)\leq\pi\sqrt{\frac{N-1}{K'}}-2\eta.$$

由引理 2.14，我们可以并且将假设每个 $n\in\mathbf{N}$ 都满足

$$\operatorname{diam}\left(J_{g_n}(\operatorname{spt}\mu_0,\operatorname{spt}\mu_1),g_n\right)\leq\pi\sqrt{\frac{N-1}{K'}}-\eta,$$

这又意味着

$$l_{g_n}\circ(\mathsf{e}_0,\mathsf{e}_1)\leq\pi\sqrt{\frac{N-1}{K'}}-\eta\quad\boldsymbol{\pi}^n\text{-a.e.}$$

最后，给定 $n\in\mathbf{N}$，令 V 为引理 2.17 中的切向量集合；给定$n\in\mathbf{N}$，令 $k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N'}$ 为式 (2.4) 中的连续函数，其中 $N'\in[N,\infty)$ 固定。再次由引理 2.17，我们可以且将假设，对于每个 $n\in\mathbf{N}$，Bakry–Émery–Ricci 张量 $\mathrm{Ric}_{g_n,\mathfrak{m}_n,N'}$ 沿着从 $\operatorname{spt}\mu_0$ 到 $\operatorname{spt}\mu_1$的每条类时仿射参数化极大 g_n-测地线，都有下界 $k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N'}$。最后，令 $L>0$为对每个 $n\in\mathbf{N}$，l_{g_n}在 $\operatorname{spt}\mu_0\times\operatorname{spt}\mu_1$上的利普希茨常数的统一上界，如命题 2.19 所给。因此，给定 $p\in(N'/2,\infty)$ 和$t\in(0,1)$，这些考量结合定理 4.10（以及其假设的维数一致性）可推出

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{N'}(\mu_t^n\mid\mathfrak{m}_n)\leq&-\int\tau_{K',N'}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}(\gamma_0)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma)\\&-\int\tau_{K',N'}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma)\\&+2\left[\Lambda_{K',N',\eta}\,\Omega_{K',N',p,\eta}^{1/(2p-1)}\right]^{1/N'}\mathfrak{m}_n[C]^{2(p-1)/N'(2p-1)}\\&\qquad\times\left[\operatorname{diam}(C,g_n)^{2p-q+1}\,\lambda^{q-1}\,L\right]^{1/N(2p-1)}\\&\qquad\times\left[\int_C\left|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N'}-K)_-\right|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_n\right]^{1/N'(2p-1)},\end{aligned}$$

其中 $\Lambda_{K',N',\eta}$ 和 $\Omega_{K',N',p,\eta}$ 来自式 (3.3)，并记 $C := J_g(\operatorname{spt}\mu_0, \operatorname{spt}\mu_1)$；此外，这里我们使用了包含关系 $J_{g_n}(\operatorname{spt}\mu_0, \operatorname{spt}\mu_1) \subset C$，该关系由 $g_n \prec g$ 对每个 $n \in \mathbf{N}$ 所蕴含。

现在我们令 $n \to \infty$。首先，给定 $t \in (0,1)$，引理 3.22 推出

$$\mathcal{S}_{N'}(\mu_t \mid \mathfrak{m}) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{S}_{N'}(\mu_t^n \mid \mathfrak{m}_n).$$

其次，(6.1) 和 Sturm [78, 引理 3.3] 很容易得出

$$\begin{aligned}
&\int \tau_{K',N'}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\qquad\le \liminf_{n\to\infty}\int \tau_{K',N'}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}(\gamma_0)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma),\\
&\int \tau_{K',N'}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\qquad\le \liminf_{n\to\infty}\int \tau_{K',N'}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^n(\gamma).
\end{aligned}$$

第三，由于序列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 在 (6.1) 中在 C 上一致有界，因此 $(\mathfrak{m}_n[C])_{n\in\mathbf{N}}$ 也一致有界。第四，由引理 2.14 可知序列 (直径 (C, g_n))$_{n\in\mathbf{N}}$ 有界。第五，利用引理 2.16 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_C \big|(k_{V,g_n,\mathfrak{m}_n,N'} - K)_-\big|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_n = 0.$$

总之，这意味着

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{N'}(\mu_t \mid \mathfrak{m}) \le &-\int \tau_{K',N'}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&-\int \tau_{K',N'}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).
\end{aligned}$$

令 $K' \to K$，并结合 Levi 单调收敛定理与注记 3.3，

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{N'}(\mu_t \mid \mathfrak{m}) \le &-\int \tau_{K,N'}^{(1-t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_0)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&-\int \tau_{K,N'}^{(t)}(|\dot\gamma|)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma),
\end{aligned}$$

这就是所需的不等式。 □

定理的证明 *6.1.* 所讨论的结论可由命题 6.2和 [8, 命题 4.9]结合得出。事实上，尽管后者假设了所谓的“弱类时曲率-维数条件”，其证明仅用到了满足命题 6.2中的假设的质量分布之间 Rényi 熵的位移半凸性。其思路是将上述命题中的一个 $\mathfrak{m}$-绝对连续质量分布收缩为一个 Dirac 质量，并在概率测度的测地线层面运用与上述证明中类似的稳定性性质。 □

6.2. **定理的应用 6.1.** 众所周知，定理 6.1中确立的类时测度收缩性质（以及命题 6.2中的性质）有两个标准推论：类时布伦–明可夫斯基不等式和类时 Bishop–Gromov 不等式。（通常的第三个推论，即类时 Bonnet–Myers 不等式，已在定理 5.1 中证明，并用于证明定理 6.1。）证明参见 Cavalletti– Mondino [24, 命题 3.4、3.5] 以及 Braun [8, 命题 3.11、定理 3.16] 。

下文中，给定 X_0，$X_1 \subset M$，令 $G(X_0, X_1)$ 表示所有从 X_0 出发并终止于 X_1的类时仿射参数化极大测地线的集合。此外，回顾 §3.2.2 中求值映射e_t 的定义。

定理 6.3 (类时 Brunn–Minkowski 不等式)。 设$(M, g, \mathfrak{m})$ 为一个全局双曲加权利普希茨时空。假设 $K \in$**实数集** 且 $N \in$[维数 M, ∞)满足$\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N} \geq K$ 分布意义下类时。则以下结论成立。

(i) 对于每个 $o \in M$、每个满足 $\{o\} \times X_1 \subset I$ 的预紧 *Borel* 集 $X_1 \subset M$，以及每个 $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}^*[\mathsf{e}_t(G(\{o\}, X_1))]^{1/N}\\ &\qquad \geq \inf\{\tau_{K,N}^{(t)}(|\dot\gamma|) : \gamma \in G(\{o\}, X_1)\}\, \mathfrak{m}[X_1]^{1/N},\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{m}^*$ 表示由 $\mathfrak{m}$ 诱导的外测度。

(ii) 对于任意满足 闭包 $X_0 \times$闭包 $X_1 \subset I$ 的预紧 *Borel* 集 X_0、$X_1 \subset M$，以及每个 $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}^*[\mathsf{e}_t(G(X_0, X_1))]^{1/N}\\ &\qquad \geq \inf\{\tau_{K,N}^{(1-t)}(|\dot\gamma|) : \gamma \in G(X_0, X_1)\}\, \mathfrak{m}[X_0]^{1/N}\\ &\qquad\qquad + \inf\{\tau_{K,N}^{(t)}(|\dot\gamma|) : \gamma \in G(X_0, X_1)\}\, \mathfrak{m}[X_1]^{1/N}.\end{aligned}$$

为表述类时 Bishop–Gromov 不等式，令 $o \in M$。给定 $r > 0$，令

$$B_g(o, r) := \{y \in I^+(o) : l_o(y) < r\} \cup \{o\}$$

表示以 o 为中心的未来 r“球”，其 $\mathfrak{m}$-测度通常是无限的。因此，我们固定一个紧集 $E \subset I^+(o) \cup \{o\}$，该集合相对于 o 是星形的；也就是说，任何始于 o 并终于 E 的类时仿射参数化极大测地线 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 都不会离开 E。我们定义诱导体积函数$v\colon$ **实数集**$_+ \to$**实数集**$_+$ 以及诱导面积函数 $s\colon$ **实数集**$_+ \to$**实数集**$_+ \cup \{\infty\}$ 如下

$$\begin{aligned}v(r) &:= \mathfrak{m}[E \cap \mathrm{cl}\, B_g(o, r)],\\ s(r) &:= \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{v(r+\delta) - v(r)}{\delta}\\ &= \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta}\, \mathfrak{m}[E \cap ((\mathrm{cl}\, B_g(o, r+\delta)) \setminus B_g(o, r))].\end{aligned}$$

此外，给定 $\kappa \in$**实数集** 我们回顾广义正弦函数 $\sin_\kappa$ （3.1）中的定义及其第一个正根 π_κ （3.2），分别。

定理 6.4 （类时 Bishop–Gromov 不等式）。 设（$M, g, \mathfrak{m}$）为满足$\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N} \geq K$ 类时分布意义下条件的全局双曲加权利普希茨时空，其中某个 $K \in$**实数集** 及 $N \in$[维数 M, ∞）。设 $o \in M$，并设 $E \subset I^+$（o） $\cup \{o\}$ 关于 o 是紧致且星形的。那么对每个 $r, R \in$（0，$\pi_{K/(N-1)}$），只要满足 $r < R$,

$$\begin{aligned}\frac{s(r)}{s(R)} &\geq \frac{\sin_{K/(N-1)}(r)^{N-1}}{\sin_{K/(N-1)}(R)^{N-1}},\\ \frac{v(r)}{v(R)} &\geq \frac{\displaystyle\int_{[0,r]} \sin_{K/(N-1)}(t)^{N-1}\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{[0,R]} \sin_{K/(N-1)}(t)^{N-1}\, \mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

定理6.1 的最后一个应用是两个达朗贝尔比较定理：一个针对从点出发的距离函数，另一个针对适当的幂。在远不够光滑的框架下，Beran 等人已证明了这些定理。 [6]不过，他们引入的抽象一阶量与我们给定的利普希茨时空中的经典概念是否相容，尚不明确（关于光滑框架，参见 [6, §A。1] 为避免打断思路的展开，我们将完整自足的

（也更简洁的）定理6.5和6.6的证明基于 Beran 等人的论证， [6],推迟到 §B。

为表述这些比较定理（其证明与 Beran 等人的证明类似），[6, 定理 5.24], 给定 $K \in$ **实数集**， $N \in (1,\infty)$，以及 $\theta \in [0, \pi_{K/(N-1)})$ 我们定义

$$\tilde{\tau}_{K,N}(\theta) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_1 \tau^{(t)}_{K,N}(\theta)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{N} + \frac{\theta}{N}\sqrt{K(N-1)}\cot\Big[\theta\sqrt{\frac{K}{N-1}}\Big] & \text{if } K > 0, \\ 1 & \text{if } K = 0, \\ \frac{1}{N} + \frac{\theta}{N}\sqrt{-K(N-1)}\coth\Big[\theta\sqrt{\frac{-K}{N-1}}\Big] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，根据定理 5.1，给定 $o \in M$ 我们定义开集

$$I^+_{K,N}(o) := I^+(o) \cap \{l_o < \pi_{K/(N-1)}\}. \tag{6.2}$$

定理 6.5 (洛伦兹距离函数幂的达朗贝尔比较定理)。 设$(M, g, \mathfrak{m})$ 是一个全局双曲加权利普希茨时空。假设 $K \in$**实数集** 且 $N \in$ [维数 M, ∞) 满足$\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N} \geq K$ 类时分布意义下。令 $q \in (0,1)$ 且令 $q' < 0$ 为其共轭指数。那么，对每个 $o \in M$以及每个 *Lipschitz* 连续函数 ϕ: $I^+_{K,\ N}(o) \to$**实数集**+（具有紧支撑），

$$-\int_M \mathrm{d}\phi\Big[\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq N\int_M \tilde{\tau}_{K,N} \circ l_o\,\phi\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

定理 6.6 （洛伦兹距离函数的达朗贝尔比较定理）。假设$(M, g, \mathfrak{m})$ 是一个全局双曲加权利普希茨时空。设 $K \in$**实数集** 且 $N \in$ [维数 M, ∞) 满足 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N} \geq K$ 分布意义下类时。固定 $q' < 0$。那么，对于每个 $o \in M$ 以及每个紧支撑的 *Lipschitz* 连续函数ϕ:$I^+_{K,N}(o) \to$**实数集**+，

$$-\int_M \mathrm{d}\phi(\nabla l_o)\,|\nabla l_o|^{q'-2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \int_M \phi\,\frac{N\,\tilde{\tau}_{K,N} \circ l_o - 1}{l_o}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

事实上，与上述结论右端的情形一样，左端也与 q' 无关，这由推论 2.20 可知（因此，分别将 q 和 q'的符号互换后，结论仍然成立）。尽管如此，使这一贡献显现出来，令洛伦兹几何中的一些令人惊讶的椭圆方法得以应用，正如 Beran 等人所展示的。 [6]; McCann [59] 和 Braun [9]的综述可供参考。

正如 Beran 等人 [6]，（其结果后来由 Braun 加以改进） [10], 所述，这两个定理意味着，相关的洛伦兹距离函数（及其适当的幂）在定义 6.7的意义下具有分布达朗贝尔算子。下文的推论6.8和 6.9由 [6, 命题 5.31]推出；基本思路是应用 Riesz–Markov– Kakutani 表示定理，利用定理 6.5 和 6.6 构造所需的非负泛函。

对于开集 $U \subset M$，令 $\mathrm{Lip_c}(U)$ 表示所有具有紧支撑的 Lipschitz 连续函数 ϕ: $U \to$ **实数集** 的集合。 U 上的 Radon 泛函是一个线性映射 T: $U \to$ **实数集**，它关于由 U 的紧子集上一致收敛所诱导的拓扑是连续的。若这样的 Radon 泛函 T满足：当其自变量 $\phi \in \mathrm{Lip_c}(U)$ 非负时， $T(\phi) \geq 0$，则称其为非负的。根据黎斯–马尔可夫–角谷表示定理，每个非负 Radon 泛函都可由某个 Radon 测度（通过积分）给出。两个 Radon 测度之差总是可作为 Radon 泛函，但一般不能作为有符号 Radon 测度（因为正部和负部可能都为无穷，这会使所得对象无法满足 σ-可加性）。

定义 6.7 (分布达朗贝尔算子)。 给定 $q' < 0$，若局部 *Lipschitz* 连续函数 $u\colon U \to$ **实数集** 具有几乎处处类时的梯度，则称其属于分布 q'-达朗贝尔算子的定义域，符号表示为 $u \in \mathcal{D}(\Box_{g,\mathfrak{m},q'} \; U)$，如果存在 *Radon* 泛函 $T\colon \mathrm{Lip_c}(U) \to$ **实数集**，使得对每个 $\phi \in \mathrm{Lip_c}(U)$，

$$-\int_U \mathrm{d}\phi(\nabla u)\,|\nabla u|^{q'-2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = T(\phi).$$

当然，如果存在如上所述的映射 T，那么它是唯一的。

推论 *6.8*（洛伦兹距离函数幂的分布达朗贝尔算子）。假设 $K \in R$ 和 $N \in [\dim M, \infty)$ 满足：全局双曲加权利普希茨时空 $(M, g, \mathfrak{m})$ 在分布意义下满足 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N} \geq K$ 类时条件。设 $q \in (0, 1)$，其共轭指数为 $q' < 0$。那么对每个 $o \in M$，都有 $l_o^q/q \in \mathcal{D}(\Box_{g,\mathfrak{m},q'} \; I^+_{K,N}(o))$，其中集合 $I^+_{K,N}(o)$ 来自 *(6.2)*。

更准确地说，证明前述包含关系的唯一 *Radon* 泛函 $T\colon \mathrm{Lip_c}(I^+_{K,N}(o)) \to \mathbf{R}$ 可分解为

$$-T = \mu^T - \nu^T,$$

其中 μ^T 是定义在 $I^+_{K,N}(o)$ 上的拉东测度，并且

$$\nu^T := N\,\tilde{\tau}_{K,N} \circ l_o\,\mathfrak{m} \llcorner I^+_{K,N}(o).$$

特别地，T 相对于 $\mathfrak{m}$ 的奇异部分，即有符号 *Radon* 测度 $-\mu^T$ 的 $\mathfrak{m}$-奇异部分，是非正的。

推论 6.9 (洛伦兹距离函数的分布达朗贝尔算子)。 我们假设 $K \in$ **实数集** 且 $N \in$ [维数 M, ∞) 满足全局双曲加权利普希茨时空 $(M, g, \mathfrak{m})$ 具有 $\mathrm{Ric}_{g,\,\mathfrak{m},\,N} \geq K$ 在分布意义下类时。那么对于每个 $o \in M$ 和每个 $q' < 0$，都有 $l_o \in \mathcal{D}(\Box_{g,\,\mathfrak{m},\,q'} \; I^+_{K,\,N}(o))$。

更准确地说，唯一能够证明前述包含关系的 *Radon* 泛函 $S\colon \mathrm{Lip_c}(I^+_{K,\,N}(o)) \to$ **实数集** 具有如下分解

$$-S = \mu^S - \nu^S,$$

其中 μ^S 是定义在 $I^+_{K,\,N}(o)$ 上的拉东测度，并且

$$\nu^S := \frac{N\,\tilde{\tau}_{K,N} \circ l_o - 1}{l_o}\,\mathfrak{m} \llcorner I^+_{K,N}(o).$$

特别地，S 相对于 $\mathfrak{m}$的奇异部分（定义为有符号 *Radon* 测度 $-\mu^S$的 $\mathfrak{m}$-奇异部分）是非正的。

附录 A. 更精确的类时直径估计

定理5.1 的证明给出了一项直径估计，其形式类似于 Petersen–Sprouse [70] 和 Aubry[3]针对黎曼流形的相应结果。在本附录中，我们证实其洛伦兹对应结果，这一结果早在 [70,第 271–272]页左右、近 30 年前就已提出。

设 $(M,\ g,\ \mathfrak{m})$ 是给定的全局双曲加权时空；特别地，本节中我们只考虑光滑度量张量和参考测度。

定义 A.1 (曲率亏损)。 令 $K \in$ **实数集** 且 $p \in [1, \infty)$。一个 L^p-亏损 是 $\mathfrak{m}$-可测函数 $k\colon M \to$ **实数集** 相对于 K 的定义如下：

$$\mathrm{def}_{k,K,p}(M, \mathfrak{m}) := \sup\Big\{ \frac{1}{\mathfrak{m}[W]} \int_W \big|(k - K)_-\big|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{m} : \\ W \subset M \text{ nonempty, open, and precompact} \Big\}.$$

在前述定义中，当然，$\mathrm{def}_{k,\,K,\,p}(M,\ \mathfrak{m})=0$ 当且仅当 $k\geq K\mathfrak{m}$-几乎处处成立（若 k 是上半连续的，则处处成立）。

此定义中的归一化确保，当我们将 $\mathfrak{m}$ 乘以一个正数时，$\mathrm{def}_{k,\,K,\,p}(M,\ \mathfrak{m})$ 的值不会改变；将其局部化到测度有限的子集后，我们便可以涵盖 $\mathfrak{m}$ 为无穷大的情形。

定理 A.2（尖锐类时 **Aubry** 直径估计）。固定 $K>0$, $N\in[2,\infty)$, $p\in(N/2,\infty)$ 和 $\theta>0$。那么，定理 3.8 中的常数 $C_{K,N,p}>1$ 具有如下性质。设 $(M,g,\mathfrak{m})$ 是整体双曲加权时空 $(M,g,\mathfrak{m})$，满足在所有类时方向上 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}\geq k$，其中函数$k\colon M\to$ 实数集 R 连续，且

$$\mathrm{def}_{k,K,p}(M,\mathfrak{m})\leq\frac{1}{C_{K,N,p}^{1+\theta}}.$$

于是我们有

$$\mathrm{diam}\,(M,g)\leq\pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}\,\big[1+C_{K,N,p}\,\mathrm{def}_{k,K,p}(M,\mathfrak{m})^{1/5(1+\theta)}\big].$$

证明。设 $\varepsilon>0$ 满足

$$\mathrm{def}_{k,K,p}(M,\mathfrak{m})\leq\Big[\frac{\varepsilon}{\pi\,C_{K,N,p}}\sqrt{\frac{K}{N-1}}\Big]^{5(1+\theta)}\leq\frac{1}{C_{K,N,p}^{1+\theta}}.\tag{A.1}$$

由于 ε 的任意性，只要证明下式，便可得证

$$\mathrm{diam}\,(M,g)\leq\pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}+\varepsilon.\tag{A.2}$$

假设（A.2）不成立。正如定理 5.1的证明中所述，存在 $\eta>0$、$o\in M$以及一个开黎曼球 $U\subset M$ 使得

$$\inf\{l_o(y):y\in U\}\geq\pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}+\varepsilon+\eta.\tag{A.3}$$

考虑测度

$$\mathfrak{n}:=\mathfrak{m}[G]^{-1}\,\mathfrak{m}\llcorner G,$$

其中集合

$$G:=\mathcal{G}^+(o,U)$$

来自（4.3）。由于 G 是 $\mathrm{def}_{k\text{的定义中的竞争者},\,K,\,p}(M,\ \mathfrak{m})$，其中预紧性由 $(M,\ g)$ 的全局双曲性所蕴含，（A.1）给出

$$\int_G\big|(k-K)_-\big|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{n}\leq\Big[\frac{\varepsilon}{\pi\,C_{K,N,p}}\sqrt{\frac{K}{N-1}}\Big]^{5(1+\theta)}.\tag{A.4}$$

推论 4.7 与所假设的 $\mathrm{Ric}_{g,\ \mathfrak{m},\ N}$ 在所有类时方向上由k 下界所共同保证，存在一个光滑的 CD(k, N)分解 $(Q,\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{n}_\bullet)$ $\mathfrak{n}$。根据 $\mathcal{G}^+(o,\ U)$ 的构造以及该分解，M_α 与 U相交，且对 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$均如此。另一方面，令 R 为所有满足以下条件的 $\alpha\in Q$ 的集合

$$\int_{M_\alpha}\big|(k-K)_-\big|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{n}_\alpha\leq\Big[\frac{\varepsilon}{\pi\,C_{K,N,p}}\sqrt{\frac{K}{N-1}}\Big]^5.$$

由不等式（A.1）中的第二个不等式以及我们对 $C_{K,N,p}$ 的选取，右端对应于备注 3.10 中的数 $\delta_{K,N,p,\varepsilon}$，根据不等式（A.1）中的第二个不等式，该数属于 $(0,1)$，因为 $C_{K,N,p}>1$。由马尔可夫不等式、解体推论 4.7 以及（A.4），

$$\mathfrak{q}[Q\setminus R]\leq\frac{1}{\delta_{K,N,p,\varepsilon}}\int_Q\int_{M_\alpha}\big|(k-K)_-\big|^p\,\mathrm{d}\mathfrak{n}_\alpha\,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha)$$

$$= \frac{1}{\delta_{K,N,p,\varepsilon}} \int_G \left|(k-K)_-\right|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{n}$$
$$\leq \delta^{\theta}_{K,N,p,\varepsilon}.$$

因此，由推论 3.9，穿过集合 R （其 $\mathfrak{q}$-测度至少为 $1-\delta^{\theta}_{K,N,p,\varepsilon}$）的 $\mathfrak{q}$-几乎处处射线的直径至多为 $\pi\sqrt{(N-1)/K}+\varepsilon$。另一方面，由构造可知，$\mathfrak{q}$-几乎处处的射线都与 U 相交，因此根据（A.3），$\mathfrak{q}$-几乎处处射线的直径至少为 $\pi\sqrt{(N-1)/K}+\varepsilon+\eta$。所讨论的两个集合的交集的 $\mathfrak{q}$-测度至少为 $1-\delta^{\theta}_{K,N,p,\varepsilon}>0$；特别地，该交集非空。这就得到了所需的矛盾。□

推论 *A.3*（类时 *Petersen–Sprouse* 直径估计）。设 $K>0$, $N\in[2,\infty)$，且 $p\in(N/2,\infty)$。那么对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\xi_{K,N,p,\varepsilon}\in(0,\delta_{K,N,p,\varepsilon})$，其中 $\delta_{K,N,p,\varepsilon}$ 来自注 *3.10*，并具有以下性质。设 $(M,g,\mathfrak{m})$ 为一个全局双曲加权时空，且 $k\colon M\to$ 实数集是一个连续函数，在所有类时方向上满足 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}\geq k$，使得

$$\mathrm{def}_{k,K,p}(M,\mathfrak{m})\leq \xi_{K,N,p,\varepsilon}.$$

于是我们有

$$\text{直径}(M,\ g)\leq \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}+\varepsilon.$$

附录B. 定理6.5 和6.6的细节

B.1. **良好测地线**。正如 Braun 所示，类时测度收缩性质在逻辑上蕴含的一个特征是 [7, 定理 4。11], Beran 等人随后对其进行了改编 [6,定理 5。12], 即存在“良好测地线”，也就是具有一致有界密度的概率测度的测地线。这一事实将在下文命题 B.4 的证明中用到。我们不把 [7,6] 中的抽象结果当作黑箱，而是基于定义 2.13 中的“良好逼近”和引理 2.15中的“先验估计”，给出一个更直接的证明。

命题 *B.1*（极限最优动力计划的先验估计）。假设全局双曲加权利普希茨时空 $(M,g,\mathfrak{m})$ 满足 $\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N}\geq K$ 分布意义下类时，其中 $K\in$ 实数集且 $N\in[$维数 $M,\infty)$。令 $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 分别为 g 和 $\mathfrak{m}$的良好逼近。此外，令 $o\in M$，并令 $\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 紧支撑且 $\mathfrak{m}$-绝对连续，满足 $d\mu_1/d\mathfrak{m}\in L^\infty(M,\mathfrak{m})$，且 $\{o\}\times\mathrm{spt}\ \mu_1\subset I_g$。给定 $q\in(0,1)$，令 $(\pi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 构成由 $\mu_0:=\delta_o$ 和 μ_1 的ℓ_{g_n},q-最优动力耦合 π^n 的一个序列。则存在常数 $\vartheta\in$实数集+ 和 $\rho\in$实数集+，使得 $(\pi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的每个窄极限点 π 都具有如下性质：对每个 $t\in(0,1]$, $(e_t)_\sharp\pi$ 均为 $\mathfrak{m}$-绝对连续，且

$$\left\|\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})}\leq\frac{1}{t^N}\,\mathrm{e}^{\vartheta\sqrt{\rho N/(N-1)}}\left\|\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})}.$$

证明。令 $n_0\in$N 为引理 2.15 和 2.17 所给整数中的最大值，并取满足 $n\geq n_0$ 的 $n\in$ N。由引理 2.17、定理 3.19 以及 $\mathfrak{m}_n$ 与 $\mathfrak{m}$ 的互相绝对连续性可知，$\boldsymbol{\pi}^n$ 必然与 μ_0 和 μ_1 的唯一 ℓ_{g_n}、q-最优动力耦合重合；特别地，由命题 3.21，$\boldsymbol{\pi}$ 是 μ_0 和 μ_1 的一个 ℓ_g、q-最优动力耦合。另一方面，由引理 2.17，存在一个常数 $\rho\in$R+，使得对于每个满足 $n\geq n_0$ 的 $n\in$ N、每条始于 o 且终于 spt μ_1 的类时仿射参数化 g_n-极大化测地线 $\gamma\colon[0,1]\to M$，以及每个 $t\in[0,1]$,

$$\mathrm{Ric}_{g_n,\mathfrak{m}_n,N}(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t)\geq-\rho\,g_n(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t).$$

由此，我们首先推导出一些先验估计。记

$$\vartheta := \sup\{l_{g_n,o}(y) : n \in \mathbf{N} \text{ with } n \geq n_0,\, y \in \operatorname{spt}\mu_1\}.$$

根据定理 3.27 以及所涉及畸变系数的单调性，$\boldsymbol{\pi}^n$-几乎处处 γ 对每个 $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}^n}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}(\gamma_t)^{-1/N} &\geq \tau^{(t)}_{-\rho,N} \circ l_{g_n,o}(\gamma_1) \left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}\right](\gamma_1)^{-1/N} \\ &\geq \tau^{(t)}_{-\rho,N}(\vartheta) \left\|\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}\right\|^{-1/N}_{L^\infty(M,\mathfrak{m}_n)} \\ &\geq a^{-1/N}\, \tau^{(t)}_{-\rho,N}(\vartheta) \left\|\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|^{-1/N}_{L^\infty(M,\mathfrak{m})},\end{aligned} \tag{B.1}$$

其中常数

$$a := \sup\Big\{\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}(x) : n \in \mathbf{N} \text{ with } n \geq n_0,\, x \in C\Big\}$$

由良好逼近 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的设定可知， $\mathfrak{m}$显然为正且有限。根据所涉及畸变系数的基本估计，参见例如 Cavalletti–Mondino[22, 注 2。3], 我们知道，每个 $\theta \in$**实数集**$_+$ 都满足

$$\tau^{(t)}_{-\rho,N}(\theta) \geq t\, \mathrm{e}^{-(1-t)\theta\sqrt{\rho/N(N-1)}}.$$

将此与（B.1）结合，可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}^n}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})} &\leq b \left\|\frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}^n}{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}\right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m}_n)} \\ &\leq \frac{1}{t^N}\, \mathrm{e}^{\vartheta\sqrt{\rho N/(N-1)}} \left\|\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})},\end{aligned} \tag{B.2}$$

其中常数

$$b := \sup\Big\{\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}_n}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(x) : n \in \mathbf{N} \text{ with } n \geq n_0,\, x \in C\Big\}$$

根据$(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 以及引理 2.14的构造，显然为正且有限。现在我们转向结论。给定 $t \in (0,1]$, , 令

$$\xi := \frac{1}{t^N}\, \mathrm{e}^{\vartheta\sqrt{\rho N/(N-1)}} \left\|\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})}$$

并定义“质量超额泛函” $\mathcal{F}_\xi$: $\mathcal{P}(C) \to$ **实数集**$_+$ 如下:

$$\mathcal{F}_\xi(\mu) := \int_C \left|\left[\frac{\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} - \xi\right]_+\right| \mathrm{d}\mathfrak{m} + \mu^{\mathrm{sing}}[C],$$

其中， μ^{ac} 和 μ^{sing} 分别表示μ 相对于 $\mathfrak{m}$的绝对连续部分和奇异部分。由（B.2）以及所涉及参考测度的互相绝对连续性，对任意满足 $n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq n_0$ 的情形，均有

$$\mathcal{F}_\xi((\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}^n) = 0.$$

由于 $\mathcal{F}_\xi$ 在窄拓扑下下半连续，参见例如 Rajala [71, 引理 3。6],我们得到

$$\mathcal{F}_\xi((\mathsf{e}_t)_\sharp\boldsymbol{\pi}) = 0.$$

由于 t 的任意性，第二个结论得证。 □

将本命题中的窄收敛极限取为定理证明中构造的特定最优动力耦合6.1，则有以下结论。

定理 B.2 （良好测地线的存在性）。 假设全局双曲加权利普希茨时空$(M, g, \mathfrak{m})$在类时分布意义下满足$\mathrm{Ric}_{g,\mathfrak{m},N} \geq K$，其中 $K \in \mathbf{R}$且 $N \in$ [维数 $M, \infty)$。令 $o \in M$。此外，设 $\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$紧支撑且 $\mathfrak{m}$-绝对连续，并满足$\mathrm{d}\mu_1/\mathrm{d}\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$-本质有界的，且 $\{o\} \times$支集$\mu_1 \subset I$。那么对每个 $q \in (0, 1)$，存在

- 一个 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$ 从 $\mu_0 := \delta_o$ 到 μ_1 和
- 常数 $\vartheta \in$ **实数集**$_+$ 和 $\rho \in$**实数集**$_+$

满足以下性质，对每个 $t \in (0, 1]$.

(i)我们有

$$\mathcal{S}_N((\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\pi} \mid \mathfrak{m}) \leq -\int_M \tau_{K,N}^{(t)} \circ l_o \left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N} \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

(ii)测度 $(\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\pi}$ 是 $\mathfrak{m}$-绝对连续的，且

$$\left\| \frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_t)_\sharp \boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})} \leq \frac{1}{t^N} \mathrm{e}^{\vartheta\sqrt{\rho N/(N-1)}} \left\| \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \right\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})}.$$

每个满足上一条定理结论的最优动力耦合，都将被非正式地称为良好测地线。

B.2. **一个 Brenier–McCann 定理**。 一个关键点是 Beran 等人结果的类似版本。 [6, 定理 5。19],该定理针对洛伦兹距离函数的幂这一较简单情形作了具体说明。它与定理 3.19相呼应，但不依赖指数映射，因为在利普希茨时空中指数映射一般并不存在。

命题 B.3 (Brenier–McCann 定理)。 固定一个指数 $q \in (0, 1)$。设$o \in M$，且令 $\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ 在 $I^+(o)$中具有紧支撑并且是 $\mathfrak{m}$-绝对连续的。设 $\boldsymbol{\pi}$ 是从 $\mu_0 := \delta_o$ 到 μ_1的一个 ℓ_q-最优动力耦合。那么 $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处的 γ 满足

$$\left|\nabla \frac{l_o^q}{q}\right|(\gamma_1) = l(\gamma_0, \gamma_1)^{q-1}.$$

证明直接应用命题 2.19 （根据假设的绝对连续性，该断言有意义）、链式法则以及推论 2.20。

B.3. **定理6.5 和6.6的证明**。

命题 B.4 （水平与垂直微分）。令 $o \in M$。此外，令 $\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ 在 $I^+(o)$ 中紧支撑，且绝对连续于 $\mathfrak{m}$，其$\mathrm{d}\mu_1/\mathrm{d}\mathfrak{m}$本质有界。给定 $q \in (0,1)$，令 $\boldsymbol{\pi}$ 为一个 ℓ_q-最优动力耦合，它定义了从 μ_0 到 μ_1 的一条良好测地线。最后，令 $f\colon M \to$ **实数集**是一个支撑在 $I^+(o)$中的利普希茨连续函数。于是，记 $q' < 0$ 为 q 的共轭指数，

$$\lim_{t\to 1^-} \int \frac{f(\gamma_1) - f(\gamma_t)}{1-t} \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) = \int_M \mathrm{d}f(\nabla l_o)\, |\nabla l_o|^{q'-2}\, \mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp \boldsymbol{\pi}.$$

简言之，这一结果仿照了光滑框架中的一个事实：右侧的被积函数可以通过两种方式计算：要么考虑“竖直”扰动（对所讨论的函数稍作扰动）， l_o 要么沿着 f 所建立的输运射线方向，取 $\boldsymbol{\pi}$的“水平”导数。关于这一简单认识带来的更多推论，请参阅 Braun [9] 的综述。以下证明略显冗长，沿用了 Beran 等人 [6, 定理 4.15、4.16],的思路，初读时可以跳过。

命题*B.4*的证明。我们首先断言

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-}\int\frac{l_o(\gamma_1)^q-l_o(\gamma_t)^q}{q(1-t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ =\int_M\frac{1}{q'}\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}+\int\frac{l(\gamma_0,\gamma_1)^q}{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\end{aligned}\tag{B.3}$$

首先回顾一下，几乎处处满足 $\boldsymbol{\pi}$ γ $\gamma_0=o$。因此，给定 $t\in[0,1]$,

$$l_o(\gamma_1)^q-l_o(\gamma_t)^q=l(\gamma_0,\gamma_1)^q-l(\gamma_0,\gamma_t)^q=\big[1-t^q\big]\,l(\gamma_0,\gamma_1)^q.$$

因此，勒贝格控制收敛定理、 q 与 q'的共轭性以及命题B.3给出了所需的恒等式

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-}\int\frac{l_o(\gamma_1)^q-l_o(\gamma_t)^q}{q(1-t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)&=\int l(\gamma_0,\gamma_1)^q\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &=\int_M\frac{1}{q'}\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}+\int\frac{l(\gamma_0,\gamma_1)^q}{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\end{aligned}$$

设 $U\subset M$ 是 $\operatorname{spt}f$ 的一个固定的相对紧开邻域，且其紧致包含于 $I^+(o)$ 中。我们断言存在 $\vartheta>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对于每个 $\varepsilon\in$ **实数集** $\setminus\{0\}$，只要满足 $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$，就有

$$g\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f,\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f\Big]\ge\vartheta\quad\mathfrak{m}\llcorner U\text{-a.e.}\tag{B.4}$$

为此，我们简记

$$\begin{aligned}\vartheta_1&:=\inf\{l_o(y):y\in\operatorname{cl}U\},\\ \vartheta_2&:=\sup\{l_o(y):y\in\operatorname{cl}U\},\end{aligned}$$

根据我们对 U 的选取以及 l_+的连续性，这些都是正的有限常数，参见定理 2.3。回顾命题 2.19 可知， l_o 在$I^+(o)$上局部 Lipschitz 连续。由链式法则和推论2.20，在 l_o 于 $I^+(o)\setminus U$中的每个可微点处，我们很容易得到以下关系

$$g\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f,\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f\Big]=g\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q},\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big]=l_o^{2q-2}\,g(\nabla l_o,\nabla l_o)\ge\vartheta_1.$$

无论 ε 取何值。另一方面，再由命题 2.19、链式法则、推论 2.20、假设的 f 的利普希茨连续性，以及 g 在紧集 $\operatorname{cl}U$ 上的系数一致有界，可知存在常数c_1， $c_2>0$，使得在 l_o 于 U 中的每个可微点处，

$$\begin{aligned}&g\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f,\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f\Big]\\ &\qquad=l_o^{2q-2}\,g(\nabla l_o,\nabla l_o)+2\varepsilon\,l_o^{q-1}g(\nabla l_o,\nabla f)+\varepsilon^2\,g(\nabla f,\nabla f)\\ &\qquad\ge\vartheta_2^{2q-2}-2\varepsilon\,c_1-c_2\,\varepsilon^2.\end{aligned}$$

如所声称，当 ε 充分小时，右端一致为正。接下来，我们声称，对于上述给定的 ε，

$$\begin{aligned}\operatorname*{liminf}_{t\to 1^-}\int\frac{l_o^q(\gamma_1)+q\varepsilon\,f(\gamma_1)-l_o^q(\gamma_t)-q\varepsilon\,f(\gamma_t)}{q(1-t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ \ge\int_M\frac{1}{q'}\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\,\nabla f\Big|^{q'}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}+\int\frac{l(\gamma_0,\gamma_1)^q}{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\end{aligned}\tag{B.5}$$

由引理 2.18 和阿尔泽拉-阿斯科利定理， $\boldsymbol{\pi}$ 的支集是等度连续的。因此，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得 $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处 γ满足 $\gamma_t\in U$对每个 $t\in[1-\delta,1]$均成立。

对于这样的 t，微积分基本定理（可由命题 2.19和定理 B.2应用）以及反向柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式可推出

$$\begin{aligned}
&\int \frac{l_o^q(\gamma_1)+q\varepsilon f(\gamma_1)-l_o^q(\gamma_t)-q\varepsilon f(\gamma_t)}{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\quad\geq \iint_{[t,1]} \mathrm{d}\Big[\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon f\Big](\dot\gamma_s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\quad\geq \iint_{[t,1]} \frac{1}{q'}\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_s)_\sharp\boldsymbol{\pi}\,\mathrm{d}s+\iint_{[t,1]}\frac{|\dot\gamma_s|^q}{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\quad= \iint_{[t,1]} \frac{1}{q'}\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}\,\frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_s)_\sharp\boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad+(1-t)\int\frac{l(\gamma_0,\gamma_1)^q}{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).
\end{aligned}\tag{B.6}$$

只需证明以下恒等式

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to1^-}\frac{1}{1-t}\iint_{[t,1]}\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}\,\frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_s)_\sharp\boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\,\mathrm{d}s\\
=\int_M\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi},
\end{aligned}\tag{B.7}$$

因为此时将 (B.6) 除以 $1-t$ 并令 $t\to1^-$ 趋于无穷，即可得到 (B.5)。一方面，得益于定理 B.2，密度 $\mathrm{d}(\mathsf{e}_s)_\sharp\boldsymbol{\pi}/\mathrm{d}\mathfrak{m}$ 在 $s\in[1-\delta,1]$ 上一致地几乎处处有界。另一方面，根据 (B.4)、q' 的负性以及我们对 δ 的选择，被积函数 $|\nabla l_o^q/q+\varepsilon\nabla f|^{q'}$ 属于 $L^1(M,\mathfrak{m})$。当 $s\to1^-$ 趋于无穷时，$(\mathsf{e}_s)_\sharp\boldsymbol{\pi}\to(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}$ 的窄收敛显然推出

$$\lim_{t\to1^-}\frac{1}{1-t}\int_{[t,1]}\frac{\mathrm{d}(\mathsf{e}_s)_\sharp\boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}$$

对 $L^1(M,\mathfrak{m})$ 中的函数成立。这就证明了 (B.7)。

最后，用不等式 (B.5) 减去恒等式 (B.3)，得到

$$\liminf_{t\to1^-}\varepsilon\int\frac{f(\gamma_1)-g(\gamma_t)}{1-t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\geq\int_M\frac{1}{q'}\Big[\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}-\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'}\Big]\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}.$$

将此不等式除以 ε，然后令 $\varepsilon\to0$ 趋于无穷，这会根据 ε 的符号得到两个不等式。一方面，利用 $\mathfrak{m}$-几乎处处有界性$\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}/\mathrm{d}\mathfrak{m}$、命题 2.19 以及勒贝格控制收敛定理，

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t\to1^-}\varepsilon\int\frac{f(\gamma_1)-g(\gamma_t)}{1-t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\quad\geq\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_M\frac{1}{q'\varepsilon}\Big[\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}-\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'}\Big]\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}\\
&\quad=\int_M\mathrm{d}f\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}.
\end{aligned}$$

另一方面，类似的论证表明

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to1^-}\varepsilon\int\frac{f(\gamma_1)-g(\gamma_t)}{1-t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\
&\quad\geq\lim_{\varepsilon\to0^-}\int_M\frac{1}{q'\varepsilon}\Big[\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}+\varepsilon\nabla f\Big|^{q'}-\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'}\Big]\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}\\
&\quad=\int_M\mathrm{d}f\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\,\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}.
\end{aligned}$$

结合前面的估计即可得到所要证明的结论。 □

现在我们可以证明定理6.5 和6.6。

定理 *6.5* 的证明。 给定 $\alpha > 0$，令 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ 定义为

$$\begin{aligned}\mu_0 &:= \delta_o,\\ \mu_1 &:= \big[c_\alpha\,(\phi+\alpha)\big]^{N/(N-1)}\,\mathfrak{m}\llcorner \operatorname{spt}\phi,\end{aligned}$$

其中 $c_\alpha > 0$ 是一个归一化常数。显然，我们有 支集 $\mu_0 \times$ 支集 $\mu_1 \subset I_\circ$。根据定理 B.2，存在一个 ℓ_q-最优动力耦合 $\boldsymbol{\pi}$，其边缘分布为 μ_0 和 μ_1，并在这两个边缘分布之间定义了一条良好测地线；特别地，给定 $t \in (0,1]$,

$$\mathcal{S}_N(\mu_t \mid \mathfrak{m}) \le -\int_M \tau_{K,N}^{(t)} \circ l_o \left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N} \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

经过简单的代数运算可得

$$\frac{\mathcal{S}_N(\mu_1 \mid \mathfrak{m}) - \mathcal{S}_N(\mu_t \mid \mathfrak{m})}{1-t} \ge -\int \frac{1-\tau_{K,N}^{(t)} \circ l_o}{1-t} \left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N} \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{B.8}$$

现在将 $t \to 1^-$ 代入这个恒等式，并从右端开始。由于 ϕ 在 I_K^+ 中具有紧支撑，$N(o)$ 且 $\boldsymbol{\pi}$ 集中于类时仿射参数化极大测地线上，根据定理 5.1 以及 l_+ 的连续性， l_o 这一论证$\pi_{K/(N-1)}$在 $\boldsymbol{\pi}$的支集上（一致地远离 μ_1）。另一方面，根据 $(\mathrm{d}\mu_1/\mathrm{d}\mathfrak{m})^{1-1/N}$ 的构造，函数 ϕ在 τ的支集上有界。相关的 $[0,\pi_{K/(N-1)})$-畸变系数在 上的光滑性以及勒贝格控制收敛定理因此推出

$$\begin{aligned}-\liminf_{t\to 1^-} \int \frac{1-\tau_{K,N}^{(t)} \circ l_o}{1-t} \left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N} \mathrm{d}\mathfrak{m} &= -\int_M \tilde{\tau}_{K,N} \circ l_o \left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]^{1-1/N} \mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &= -c_\alpha \int_{\operatorname{spt}\phi} \tilde{\tau}_{K,N} \circ l_o\,(\phi+\alpha)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

现在我们处理左侧。定义 s_N：**实数集**$_+ \to$ **实数集**$_-$ 如下：

$$s_N(r) := -r^{1-1/N}.$$

利用 s_N 的凸性，我们得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to 1^-} \frac{\mathcal{S}_N(\mu_1 \mid \mathfrak{m}) - \mathcal{S}_N(\mu_t \mid \mathfrak{m})}{1-t}\\ &\quad= \limsup_{t\to 1^-} \int_M \frac{1}{1-t}\left[s_N \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} - s_N \circ \frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\quad\le \limsup_{t\to 1^-} \int_M \frac{1}{1-t}\, s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\left[\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} - \frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right]\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\quad= \limsup_{t\to 1^-} \int \frac{1}{1-t}\left[s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1) - s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_t)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\end{aligned}$$

命题B.4 推出

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to 1^-} \int \frac{1}{1-t}\left[s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_1) - s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}(\gamma_t)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &\quad\le \int_M \mathrm{d}\Big[s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\Big]\Big[\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\mathrm{d}(\mathsf{e}_1)_\sharp\boldsymbol{\pi}\\ &\quad= \int_M \mathrm{d}\Big[s_N' \circ \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\Big]\Big[\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\quad= \frac{c_\alpha}{N}\int_M \mathrm{d}\phi\Big[\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla \frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\mathrm{d}\mathfrak{m},\end{aligned}$$

其中最后一个等式由直接计算和链式法则得出。从由这些对（ c_α 展开得到的不等式中消去B.8），得到

$$-\int_M \mathrm{d}\phi\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\le N\int_{\operatorname{spt}\phi}\tilde{\tau}_{K,N}\circ l_o\,(\phi+\alpha)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

将 $\alpha\to 0^+$ 与 $\mathfrak{m}$-可积性结合起来，并按照上文所述考察 $\operatorname{spt}\phi$ 上的 $\tilde{\tau}_{K,\,N}\circ l_o$，即可得到所需结论。□

定理 *6.6* 的证明。令 $q\in(0,1)$ 为 q'的共轭指数。由命题 2.19 ，并且由于 ϕ 的支撑集是紧致的且与 o相离，函数 ϕ/l_o 再次是利普希茨连续、非负且具有紧支撑。由定理 6.5，

$$\int_M \frac{N\,\tilde{\tau}_{K,N}\circ l_o}{l_o}\,\phi\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\ge-\int_M \mathrm{d}\frac{\phi}{l_o}\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{B.9}$$

作为（余）切向量之间的恒等式，链式法则给出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\frac{\phi}{l_o}&=\frac{1}{l_o}\,\mathrm{d}\phi-\frac{\phi}{l_o^2}\,\mathrm{d}l_o\quad \mathfrak{m}\llcorner I^+(o)\text{-a.e.},\\ \nabla\frac{l_o^q}{q}&=l_o^{q-1}\,\nabla l_o\qquad\qquad \mathfrak{m}\llcorner I^+(o)\text{-a.e.}\end{aligned}$$

接下来，直接计算，并利用 q 与 q'的共轭性以及推论 2.20 ，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\frac{\phi}{l_o}\Big[\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big]\Big|\nabla\frac{l_o^q}{q}\Big|^{q'-2}&=\mathrm{d}\phi(\nabla l_o)-\frac{\phi}{l_o}\,|\nabla l_o|^2\\&=\mathrm{d}\phi(\nabla l_o)\,|\nabla l_o|^{q'-2}-\frac{\phi}{l_o}\quad \mathfrak{m}\llcorner I^+(o)\text{-a.e.}\end{aligned}$$

将其代入（B.9）并整理各项，即得所述结论。 □

参考文献

[1] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré，《度量空间及概率测度空间中的梯度流》，第二版，苏黎世联邦理工学院数学讲义，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2008。MR2401600[2] L. Andersson、G. J. Galloway 和 R. Howard，《宇宙学时间函数》，Classical Quantum Gravity **15** 1998 2, 309 322 1606594 ( )，第 – 期。MR E. Aubry，《几乎正里奇[3]曲率下的有限性与几何不等式》，Ann. Sci. École Norm. Sup. (4 **40** 2007 4, 675 695 2191529) ( )，第 – 期。MR R. Bartnik，[4]《关于宇宙学时空与常平均曲率曲面的评注》，Comm. Math. Phys. **117** 1988 4, 615 624 953823 ( )，第 – 期。MR J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和[5]K. L. Easley，《全局洛伦兹几何》，第二版，纯粹与应用数学专著和教材，第 202 卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约，1996。MR1384756[6] T. Beran、M. Braun、M. Calisti、N. Gigli、R. J. McCann、A. Ohanyan、F. Rott 和 C. Sämann，《度量测度时空上的非线性达朗贝尔比较定理与因果微分演算》，预印本，arXiv:2408.15968。[7] M. Braun，《满足类时曲率-维数条件的良好测地线》，Nonlinear Anal. **229** 2023 113205, 30 4528587 ( )，论文编号，页码。MR《洛伦兹空间上的[8]Rényi 熵。类时曲率 - 维数条件》，J. Math. Pures Appl. (9 **177** 2023 46 128 4629751) ( )，–。MR《广义相对论中的达朗贝尔算子[9]新视角：导论》，Indag. Math.，即将刊出。[10] ，《洛伦兹距离函数的精确达朗贝尔算子》，预印本，arXiv:2408.16525。[11] M. Braun 和 M. Calisti，《通过最优传输研究低正则性时空中的类时里奇曲率界》，Commun. Contemp. Math. **26** 2024 9, 2350049, 30 4793142 ( )，第[12]期，论文编号。MR M. Braun 、 N. Gigli 、 R. J. McCann 、 A. Ohanyan 和 C. Sämann，《连续可微度量与权函数的洛伦兹分裂定理》，预印本，arXiv:2507.06836。[13] ，《洛伦兹几何分裂定理的椭圆型证明》，预印本，arXiv:2410.12632。[14] M. Braun 和 R. J. McCann，《通过可变类时里奇曲率界给出的因果收敛条件》，Mem. Eur. Math. Soc.，即将刊出。

[15] M. Braun 和 S. Ohta，《芬斯勒时空中的最优传输与类时里奇曲率下界》，Trans. Amer. Math. Soc. **377** 2024 5, 3529 3576 4744787 ( )，第 – 期。[16] **53** 1967 MR H. Busemann，《类时空间》，Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) ( )，52。MR220238[17] M. Calisti、M. Graf、E. Hafemann、M. Kunzinger 和 R. Steinbauer，《利普希茨洛伦兹度量的霍金奇点定理》，Comm. Math. Phys. 406 (2025)，第 9 期，论文编号 207, 31 4940197 。MR E. Caputo、F. Nobili 和 T. Rossi，[18]《通过局部化研究具有可积里奇曲率下界的非光滑空间中的比较估计》，预印本，arXiv:2509.22514。[19] G. Carron，《加藤类里奇曲率流形的几何不等式》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **69** 2019 7, 3095 3167 4286831 ( )，第 – 期。MR G. Carron 和 C. [20] Rose，《基于谱里奇曲率假设的几何与谱估计》，Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 2021 (2021)，第 772 期，121–145。[21] F. Cavalletti 和 E. Milman，《曲率-维数条件的整体化定理》，Invent. Math. **226** 2021 1, 1 137 4309491 ( )，第 – 期。MR F. Cavalletti 和 A. Mondino，[22]《本质非分支空间中的最优映射》，Commun. Contemp. Math. **19** 2017 6, 1750007, 27 3691502 ( )，第 期。MR《类时里奇曲率界的洛伦兹合[23] 成理论综述》，Gen. Relativity Gravitation 54 (2022)，第 11 期，论文编号 137，共 39 页。MR4504922 [24] ———，《洛伦兹合成空间中的最优传输、合成类时里奇曲率下界及其应用》，Camb. J. Math. 12 (2024)，第 2 期，417–534。MR4779676[25] ，《满足类时里奇曲率下界的洛伦兹空间中的尖锐等周型不等式》，预印本，arXiv:2401.03949。[26] J. Cheeger 和 D. G. Ebin，《黎曼几何中的比较定理》，North-Holland Mathematical Library，第 9 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-牛津；American Elsevier Publishing Co., Inc.，纽约，1975 458335 。MR Y. [27] Choquet-Bruhat，《一般爱因斯坦时空，引力冲击》，Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) **8** 1968 327 338 233576 ( )，–。MR P. T. Chruściel 和 J. D. E. Grant，《连[28] 续度量下的洛伦兹因果性》，Classical Quantum Gravity **29** 2012 14, 145001, 32 2949547 ( )，第 期。MR M. Eckstein 和 T. Miller，[29]《非局部现象的因果性》，《亨利·庞加莱年刊》18 (2017)，第 9 期，3049–3096。MR3685983[30] P. E. Ehrlich，《洛伦兹几何中的比较理论》，讲义，艾萨克·牛顿研究所，2005。[31] P. E. Ehrlich、Y.-T. Jung 和 S.-B. Kim，《洛伦兹流形的体积比较定理》，Geom. Dedicata **73** 1998 1, 39 56 1651891 ( )，第 – 期。MR P. E. Ehrlich 和 M. [32] Sánchez，《若干半黎曼体积比较定理》，Tohoku Math. J. (2 **52** 2000 3, 331 348 1772801) ( )，第 – 期。MR J.-H. Eschenburg，《满足强能量[33] 条件的时空分裂定理》，J. Differential Geom. **27** 1988 3, 477 491 940115 ( )，第 – 期。MR A. F. Filippov，[34]《右端不连续的微分方程》，数学及其应用（苏联丛书），第 18 卷，Kluwer Academic Publishers Group，Dordrecht，1988。译自俄文。MR1028776[35] G. J. Galloway，《不假设完备性的洛伦兹分裂定理》，J. Differential Geom. **29** 1989 2, 373 387 982181 ( )，第 – 期。MR L. García-Heveling，[36]《广义相对论中的体积奇点》，Lett. Math. Phys. 114 (2024)，第 3, 71 4751750 期，论文编号。MR R. Geroch 和 J. Traschen，《广义相对论中的弦及其[37] 他分布型源》，Phys. Rev. D (3 **36** 1987 4, 1017 1031 904839) ( )，第 – 期。MR N. Gigli，[38]《度量测度空间的微分结构及其应用》，Mem. Amer. Math. Soc. **236** 2015 1113, $+91$ 3381131 ( )，第 vi 页。MR M. Graf，《C -度量的体积比[39] 较》，Ann. Global Anal. Geom. 50 3，209 2016 235 3554372 ( )，第 – 期。MR[40] ，《$C^1_{1,1}$-洛伦兹度量的奇点定理》，Comm. Math. Phys. 378 (2020)，第 2 期，1417–1450。MR4134950[41] M. Graf 和 E. Ling，《Lipschitz 时空中的极大化子非类时即为零》，Classical Quantum Gravity **35** 2018 8, 087001, 6 3789523 ( )，第 期。MR M. Grosser、M. Kunzinger、[42] M. Oberguggenberger 和 R. Steinbauer，《广义函数的几何理论及其在广义相对论中的应用》，数学及其应用，第 537 卷，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，2001。MR1883263

[43] S. W. Hawking 和 G. F. R. Ellis, 《时空的大尺度结构》, 剑桥数学物理专著, 第 1 卷, 剑桥大学出版社, 伦敦—纽约, 1973年。MR424186[44] S. W. Hawking, 《宇宙学中奇点的出现》III: 因果性与奇点, 《伦敦皇家学会会刊 A 辑: 数学与物理科学》300（1967）, 第 1461 期, 187–201 页。[45] W. Israel, 《广义相对论中的奇异超曲面与薄壳》, 《新西门托物理学杂志 B 辑》（1965–1970）44（1966）, 第 1 期, 1–14 页。[46] C. Ketterer, 《具有可变曲率界的度量测度空间的几何》, 《几何分析杂志》 **27** 2017 3, 1951 1994 3667417 （）, 第 – 期。[47] MR 具有积分 Ricci 曲率界的度量测度空间的稳定性, 》《泛函分析杂志》 **281** 2021 8, 109142, 48 4271791 （）, 论文编号 。MR S. Khakshournia 和 R. Mansouri, 《时空流形的粘合艺术——方法与应用》, 《物理学 SpringerBriefs》, 施普林格出版社, Cham, [2023] 2023 4697132 © 。MR B. Klartag, 《黎曼几何中的针分解》, 《美国数学会回忆录》249（ 2017 1180, +77 3709716 ）, 第 v 期。MR M. Kunzinger、M. Oberguggenberger 和 J. A. Vickers, 《合成与分布意义下的 Ricci 曲率下界》, 《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》 154 （ 2024 ）, 第 5 期, 1406–1430 页。MR4806282[51] M. Kunzinger 、 A. Ohanyan 和 A. Vardabasso, 《非光滑黎曼与半黎曼度量的 Ricci 曲率界与刚性》, 《数学手稿》176（2025）, 第 4 期, 论文编号 53, 39 4936063 。MR M. Kunzinger 和 C. Sämann, 《洛伦兹长度空间》, 《全球分析与几何年刊》54（2018）, 第 3 期, 399–447 页。MR3867652[53] M. Kunzinger、R. Steinbauer、M. Stojković 和 J. A. Vickers, 《 C^1 的霍金奇点定理, 1-度量》, Classical Quantum Gravity **32** 2015 7, 075012, 19 3322151 （）, 第 期。MR C. Lange、A. Lytchak 和 C. Sämann, 《洛伦兹遇上 Lipschitz》, 《理论与数学物理进展》25（ 2021 8, 2141 2170 4489478 ）, 第 – 期。MR A. Lichnerowicz, 《引力与电磁学的相对论理论。广义相对论与统一场论》, Masson et Cie, 巴黎, 1955 71917 。MR J. Lott 和 C. Villani, 《通过最优传输研究度量测度空间的 Ricci 曲率》, 《数学年刊》（ 2 **169** 2009 3, 903 991 2480619 ）（）, 第 – 期。MR M. Manzano 和 M. Mars, 《时空匹配问题与零薄壳的抽象表述》, 《物理评论 D》 **109** 2024 4, 044050, 28 4718174 （）, 论文编号 。MR R. J. McCann, 《玻尔兹曼熵的位移凸性刻画了广义相对论中的强能量条件》, 《剑桥数学杂志》8（2020）, 第 3 期, 609–681 页。MR4192570[59] ,《以椭圆性换取线性: 爱因斯坦引力理论及洛伦兹分裂定理的非光滑方法》, 《2024 年菲尔兹奖之后》会议论文集, 即将出版。[60] E. Minguzzi 和 S. Suhr, 《洛伦兹度量空间及其格罗莫夫–豪斯多夫收敛》, 《数学物理快报》 **114** 2024 3, 73 4752400 （）, 论文编号 。MR E. Minguzzi, 《闭锥结构的因果性理论及其应用》, 《数学物理评论》 **31** 2019 5, 1930001, 139 3955368 （）, 第 期。MR《洛伦兹因果性理论》, 《相对论评论》22（2019）, 第 3 期, 共 202 页。[63] A. Mondino 和 V. Ryborz, 《分布意义与合成意义下 Ricci 曲率下界的等价性》, 《泛函分析杂志》 **289** 2025 8, 111035, 82 4903405 （）, 论文编号 。MR A. Mondino 和 S. Suhr, 《广义相对论爱因斯坦方程的最优传输表述》, 《欧洲数学会杂志》（JEMS） **25** 2023 3, 933 994 4577957 （）, 第 – 期。MR R. P. A. C. Newman, 《S.-T. Yau 分裂猜想的证明》, 《微分几何杂志》 **31** 1990 1, 163 184 1030669 （）, 第 – 期。MR K. Nomizu 和 H. Ozeki, 《完备黎曼度量的存在性》, 《美国数学会会刊》 **12** 1961 889 891 133785 （）, –。MR R. Penrose, 《引力坍缩与时空奇点》, 《物理评论快报》14（1965）, 57–59 页。MR172678[68] ,《冲击引力波的几何》, 《广义相对论》（纪念 J. L. Synge 论文集）, 1972, 101 115 503490 第 – 页。MR P. Petersen 和 G. Wei, 《具有积分曲率界的相对体积比较》, 《几何与泛函分析》 **7** 1997 6, 1031 1045 1487753 （）, 第 – 期。MR P. Petersen 和 C. Sprouse, 《积分曲率界、距离估计及其应用》, 《微分几何杂志》 **50** 1998 2, 269 298 1684981 （）, 第 – 期。MR T. Rajala, 《满足 Sturm 曲率—维数条件的度量空间中具有有界密度的插值测度》, 《泛函分析杂志》 **263** 2012 4, 896 924 2927398 （）, 第 – 期。MR A. D. Rendall, 《爱因斯坦方程的存在性与整体动力学定理》, 《相对论评论》5（2002）, 2002–6, 62。MR1932418

[73] C. Rose, 《Kato 意义下几乎为正的 Ricci 曲率——迈尔斯定理的推广》, 《数学研究快报》 **28** 2021 6, 1841 1849 4477675 (), 第 – 期。MR C. Sämann, 《连续[74]
度量时空的全局双曲性》, 《亨利·庞加莱年刊》 **17** 2016 6, 1429 1455 3500220 (), 第 –
期。MR C. Sämann 和 R. Steinbauer, 《低正则性下的测地线》, 《物理学杂志：会议系列》 968 (
2018), 012010, 14。MR3919953[75] C. Sprouse, 《积分曲率界与有界直径》, 《分析与几何通讯》8
(2000), 第 3, 531 543 1775137 – 期。MR K.-T. Sturm, 《度量测度空间的几何》I, 《数
学学报》196 1, 65 2006 131 2237206 (), 第 – 期。MR[77] [78] ,《度量测度空间的几何》II, 《数学
学报》196 (2006), 第 1 期, 133–177 页。MR2237207[79] J.-H. Treude, 《黎曼与洛伦兹几何中的
Ricci 曲率比较》, 硕士论文, 2011。[80] J.-H. Treude 和 J. D. E. Grant, 《洛伦兹流形中超曲面的体积比较
与奇点定理》, 《全球分析与几何年刊》 **43** 2013 3, 233 251 3027611 (),
[81]
第 – 期。MR C. Villani, 《最优传输》, 《数学科学基础丛书》, 第 338 卷, 施普林格出版社, 柏林,
2009。新旧论述。MR2459454

数学研究所, 洛桑联邦理工学院, 瑞士洛桑 1015电子邮箱地址:
mathias.braun@epfl.ch

维也纳大学数学系, 奥地利维也纳 1090电子邮箱地址:
marta.salamo.candal@univie.ac.at