arXiv:2603.24300v1 [math.CT] 25 Mar 2026

增强左三角范畴

XIAOFA CHEN

Abstract. 在这篇短文中，我们研究具有同伦核的 dg 范畴，其同伦范畴已知具有自然的左三角结构。这类 dg 范畴的典型例子是正合 dg 范畴的 dg 商。我们证明，这类 dg 范畴的同伦范畴的稳定化可通过其有界导出 dg 范畴获得规范的 dg 增强。

1. Introduction

Kelly 的研究中已经出现了 dg 范畴 [4]。它们曾用于有限维代数表示论中的矩阵问题。20世纪90年代，Bondal–Kapranov 注意到，自然出现在代数中的三角范畴的态射空间，是某些复形的零次上同调群。同调代数中如今已成为基本原则（由 Grothendieck 推广）的是，考察复形本身，而非其上同调。因此，他们提出使用 dg 范畴增强三角范畴，并要求三角结构与 dg 结构相容。在 dg 范畴中增强可区别三角的序列，本质上就是分次分裂短正合列。

左三角范畴是三角范畴的单侧类比。左三角范畴由一个加性范畴 $\mathcal{T}$及一个自函子 $\Sigma\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}$，以及一族满足某些公理的正合左三角构成。它们具有三角范畴通常性质的大约一半。由于正合左三角不会导出 Hom 空间的长正合序列（不同于三角范畴中的一个特异三角），因此我们不能指望通过分次分裂短正合列来增强它。

另一方面，基于同伦短正合列这一概念，作者在 [3] 中提出了稳定 *dg* 范畴 这一概念，用以增强三角范畴。同伦短正合列同时是同伦左正合的和同伦右正合的。因此，可以期待基于同伦左正合序列这一概念来增强左三角范畴。Mochizuki 在 [6]中证明了这一点。dg 范畴 $\mathcal{A}$ 是左稳定（= 有限完备） [6, 定义 2.1] ，当且仅当它具有同伦核；也就是说，对于 $Z^0(\mathcal{A})$ 中的任意态射 $j\colon B\to C$，它都具有一个同伦核

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} B \overset{j}{\twoheadrightarrow} C.$$
$$\qquad\qquad h$$

命题 2.17]中证明了，如果 $\mathcal{A}$ 是左稳定 dg 范畴，那么 $H^0(\mathcal{A})$ 带有一个典范的左三角结构。

左稳定 dg 范畴的连通覆盖 $\tau_{\leq 0}(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}$ 仍然是左稳定的，而同伦范畴 $H^0(\mathcal{A})$保持不变。因此，我们总可以假设该

Date: 2026年3月26日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G35、18G25、18E20、16E30、16E45。*Key words and phrases.* 正合 dg 范畴、dg 导出范畴、左稳定 dg 范畴。

左稳定 dg 范畴是连通的。本文旨在证明，左三角范畴 $H^0(\mathcal{A})$ 的稳定化由有界导出 dg 范畴$\mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$增强。

定理 *A*（=定理 *2.3*）。设 $\mathcal{A}$ 是一个左稳定 *dg* 范畴。存在一个泛精确态射 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$，它属于 *Hqe*，且从 $\mathcal{A}$ 指向一个预三角 *dg* 范畴。令$\mathcal{D}^b(\mathcal{A})=H^0(\mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A}))$。此外，若 $\mathcal{A}$ 是连通的，则函子 $H^0(F):H^0(\mathcal{A})\to\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 与稳定化函子 $H^0(\mathcal{A})\to\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$ 相同。

设 Λ 是一个 Artin 代数。经典结论表明，模范畴 mod-Λ 对投射对象取理想商后得到的理想商 mod-Λ 是左三角范畴。我们给出这一结果的增强版本。设 $(\mathcal{B},\mathcal{S})$ 是一个有足够投射对象的连通精确 dg 范畴。我们用 $\mathcal{P}$ 表示 $\mathcal{B}$ 中由投射对象组成的满 dg 子范畴。

定理 B （=定理3.1）。 *dg* 商 $\mathcal{B}/\mathcal{P}$ 是左稳定的。

总之，对于一个有足够投射对象的连通正合 dg 范畴 $\mathcal{B}$，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}/\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{B}/\mathcal{P})\simeq\mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{B})/\text{预三角化}(\mathcal{P}) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
H^0(\mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{B})/[\mathcal{P}] & \longrightarrow & \mathcal{S}(H^0(\mathcal{B})/[\mathcal{P}])\simeq\mathcal{D}^b(\mathcal{B})/\mathrm{tr}(\mathcal{P}).
\end{array}$$

2. Left stable dg categories

dg 范畴 $\mathcal{A}$ 是连通的，当且仅当 $H^{>0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\ B)=0$ 对任意一对对象A、 B 在$\mathcal{A}$中成立。在本节中，设 $\mathcal{A}$ 为一个加性 dg 范畴，即 $H^0(\mathcal{A})$ 是一个加性范畴。

定义 2.1 ([6, 定义 2.1])。 若 dg 范畴 $\mathcal{A}$左稳定（=有限完备），则称其为左稳定（有限完备）的，条件是它具有同伦核，即对于 $Z^0(\mathcal{A})$ 中的任意态射 $j:B\to C$，它具有一个同伦核

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{j}C.\qquad h$$

以下结论很容易验证。

命题 2.2 ([6, 命题 2.17])。 设 $\mathcal{A}$ 为一个左稳定 *dg* 范畴。则 $H^0(\mathcal{A})$带有一个规范的左三角结构。

从 $\mathcal{A}$ 到一个正合 dg 范畴（$\mathcal{B}$，$\mathcal{S}$）的 Hqe 中的态射 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是正合的，条件是 F 将 $\mathcal{A}$ 中的同伦左正合列映射为 $\mathcal{S}$ 中的同伦短正合列。

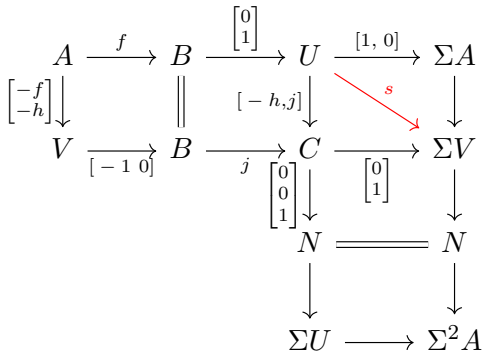
定理 2.3。 设 $\mathcal{A}$ 是一个左稳定 *dg* 范畴。存在一个泛精确态射 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$，在 Hqe 中从 $\mathcal{A}$ 映至一个预三角 *dg* 范畴。若 $\mathcal{A}$ 还是连通的，则函子 $H^0(F):H^0(\mathcal{A})\to\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 与稳定化函子 $H^0(\mathcal{A})\to\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$相一致。

本小节的其余部分旨在证明定理2.3。令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathrm{tr}(\mathcal{A})$ 中由同伦左正合序列的总 dg 模 N 生成的满三角子范畴

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{j}C\ .\qquad h$$

因此， N 由 $\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$中的下图定义

(★)



其中我们省略表示可表 dg 模的符号 $\wedge$，并且

$$s=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ U=\mathrm{Cone}(f),\ V=\Sigma^{-1}\mathrm{Cone}(j)\ \text{and}\ N=\mathrm{Cone}([-h,\ j]).$$

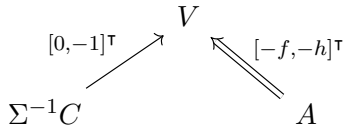
令 $\mathcal{N}_{\mathrm{dg}}$ 为 pretr($\mathcal{A}$) 的满 dg 子范畴，由 $\mathcal{N}$ 中的对象组成。令 F 为从 $\mathcal{A}$ 到 Drinfeld dg 商 pretr($\mathcal{A}$)/$\mathcal{N}_{\mathrm{dg}}$ 的典范态射（回想一下，我们假设 $\mathcal{A}$ 的态射复形是余纤维化的，因而是平坦的）。我们将 F 视为 Hqe 中的一个态射；Hqe 是将小 dg 范畴的范畴对拟等价类局部化后得到的范畴。

引理 2.4. 态射 $F:\ \mathcal{A}\to\mathrm{pretr}(\mathcal{A})/\mathcal{N}_{\mathrm{dg}}$ 是从 $\mathcal{A}$ 到某个预三角 *dg* 范畴的泛精确态射。

证明。设 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})=H^0(\mathrm{pretr}(\mathcal{A})/\mathcal{N}_{\mathrm{dg}})$。我们首先证明 F 是精确的。设 X 是如下的同伦左正合序列

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{j}C\ .$$
$$h$$

我们考虑以下屋顶 $[-f,-h]^{\intercal}\backslash[0,-1]^{\intercal}$:



其中 V 是 Σ^{-1} 的映射锥 $j:\ B\to C$。我们在 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 中有如下三角:

$$\Sigma^{-1}C\xrightarrow{[-f,-h]^{\intercal}\backslash[0,-1]^{\intercal}}A\xrightarrow{f/1}B\xrightarrow{j/1}C.$$

因此，态射 F 是精确的。

我们证明 F 具有泛性质。设 $G:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Hqe 中从 $\mathcal{A}$ 到预三角 dg 范畴 $\mathcal{B}$ 的精确态射。根据 $\mathcal{A}\to$ pretr($\mathcal{A}$) 的泛性质，在 Hqe 中存在唯一一个从 pretr($\mathcal{A}$) 到 $\mathcal{B}$ 的态射，它延拓了 G。由于 G 是精确态射， $H^0(G)$ 将 N 的全化 X 发送到 $H^0(\mathcal{B})$ 中的零对象。根据 Drinfeld dg 商 [7]，的泛性质，在 Hqe 中存在唯一一个从 pretr($\mathcal{A}$)/$\mathcal{N}_{\mathrm{dg}}$ 到 $\mathcal{B}$ 的态射。□

在下文中，我们假设 dg 范畴 $\mathcal{A}$ 是连通的。在这种情况下，我们有

- 左心脏 $\mathcal{D}(\mathcal{A})^{\leq 0}$ 由那些上同调集中在非正次数的 dg 模组成。

• t-结构的心 $\mathcal{H}(\mathcal{D}(\mathcal{A})^{\leq 0}, \mathcal{D}(\mathcal{A})^{\geq 0})$ 等价于 Mod $H^0(\mathcal{A})$，而上同调函子 H^0 将 dg 模 M 映射到 $H^0(M): A \mapsto H^0(M(A))$。
•特别地， H^0 在拟可表 dg 模的满子范畴上是完全忠实的，并且对于每个拟可表 dg 模 M， $H^0(M)$ 在心中是投射对象。

引理 2.5 ([2, 引理 3.6])。 一个三项 *h*-复形

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C, \quad A \xrightarrow{h} C$$

是左正合的，当且仅当其全化 N 属于 $\mathcal{H}$。在这种情况下，全化 N 是 $\mathcal{H}$ 中 $H^0(B) \xrightarrow{H^0(j)} H^0(C)$ 的余核。

我们所考虑的三项 h-复形类，就是同伦左正合序列类。此外，由于 $\mathcal{A}$ 是左稳定的，每个态射 $j: B \to C$ 都有一个同伦核。因此，同伦左正合序列的全化恰好是有限表示的右 $H^0(\mathcal{A})$-模。

根据命题 2.2，范畴 $H^0(\mathcal{A})$ 带有典范的左三角结构。特别地，它有弱核。因此，有限表示右 $H^0(\mathcal{A})$-模范畴 $\mathrm{mod}H^0(\mathcal{A})$ 是 宽的 ，包含于 Mod $H^0(\mathcal{A})$ 中；也就是说，它对扩张、核和余核封闭。

记号 2.6. 我们用 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ 表示同调函子 $H^0: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$下 $\mathcal{N}$ 的本质像。

推论 2.7. $\mathcal{H} \simeq \mathrm{Mod}\, H^0(\mathcal{A})$ 中的对象属于 $\widetilde{\mathcal{N}}$，当且仅当它是有限表示的。 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 上的 *t*-结构 $(\mathcal{D}(\mathcal{A})^{\leq 0}, \mathcal{D}(\mathcal{A})^{\geq 0})$ 限制到 $\mathcal{N}$ 上后是一个有界 *t*-结构。

证明。 令 $\mathcal{N}'$ 为 $\mathcal{N}$ 的满子范畴，它由满足以下条件的对象 N 组成：对于每个 $i \in \mathbb{Z}$ ， $H^i(N)$ 都是有限表示的，并且其中只有有限多个非零。由于 $\mathrm{mod}H^0(\mathcal{A})$ 是 Mod $H^0(\mathcal{A})$ 的宽子范畴， $\mathcal{N}'$ 是 $\mathcal{N}$ 的三角子范畴。它显然包含同伦左正合序列的全化，因此等于 $\mathcal{N}$。因此， $\mathcal{N}$ 中的对象 N 满足以下性质：对于每个$i \in \mathbb{Z}$， $H^i(N)$ 都是有限表示的，并且其中只有有限多个非零。□

定理的证明 *2.3.* 函子 $H^0(F): H^0(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 是从左三角范畴 $H^0(\mathcal{A})$ 到三角范畴 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 的三角函子。根据稳定化的泛性质，存在一个三角函子 G，从$\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$ 到 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$，在同构意义下唯一，并使下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^0(F)} & \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \\ \downarrow & \nearrow_{G} & \\ \mathcal{S}(H^0(\mathcal{A})). & & \end{array}$$

首先证明，三角函子 G 将 $\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$ 中的非零对象映到 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 中的非零对象。 $\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$ 中的对象都是 $H^0(\mathcal{A})$ 中对象的移位。因此，我们只需证明：若函子 G 将 $H^0(\mathcal{A})$ 中的一个对象映到 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 中的零对象，那么该对象在 $\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$ 中为零。注意，由推论 2.7， $\mathcal{N}$ 这一 tr$(\mathcal{A})$ 的三角子范畴具有有界 t- 结构。因此，根据 [5]，它是 Karoubian 的，即幂等元可分裂。令 A 为 $H^0(\mathcal{A})$ 中的一个对象。假设它在函子 $H^0(F)$ 作用下被映到 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 中的零对象。那么，将 A 视为 tr$(\mathcal{A})$ 中的对象时，它属于 $\mathcal{N}$。

由此可得，对于任意对象 A'，若其属于 $\mathcal{A}$ 和 $n >> 0$，则 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{A})}(A', \Sigma^{-n}A) = 0$。我们有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{A})}(A', \Sigma^{-n}A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{A})}(A', \Omega^n(A))$。因此，$\Omega^n(A)$ 是 $H^0(\mathcal{A})$ 中的零对象，从而 A 在 $\mathcal{S}(H^0(\mathcal{A}))$ 中为零。

接下来，我们证明函子 G 是满的。设 A和 B 是 $H^0(\mathcal{A})$中的两个对象。假设给定一个态射 b/s，它属于 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \mathrm{tr}(\mathcal{A})/\mathcal{N}$

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \overset{s}{\swarrow\!\!\swarrow} & & \searrow^{b} & \\ A & & & & B, \end{array}$$

其中 $M := \mathrm{Cone}(s) \in \mathcal{N}$。由于 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{A})}(\Sigma^{-1}A, \mathcal{N}^{\geq 2}) = 0$，我们可以假设 $M \in \mathcal{N}^{\leq 0}$。设对于某个 $n \geq 0$，有 $M \in \mathcal{N}^{[-n,0]}$。我们在 $\mathrm{tr}(\mathcal{A})$ 中有如下关系

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^{-2}M & \dashrightarrow & W_1' & \overset{s_1'}{\dashrightarrow} & \Omega(A) & \longrightarrow & \Sigma^{-1}M \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \Sigma^{-2}M & \longrightarrow & \Sigma^{-1}W & \xrightarrow{\Sigma^{-1}(s)} & \Sigma^{-1}A & \longrightarrow & \Sigma^{-1}M \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \Sigma^{-1}N' & = & \Sigma^{-1}N'. & & \end{array}$$

因此，我们在 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$中得到如下态射

$$\begin{array}{ccccc} & & W_1' & & \\ & \overset{s_1'}{\swarrow\!\!\swarrow} & & \searrow & \\ \Omega(A) & & & & \Sigma^{-1}B. \end{array}$$

如上所述，我们可以假设 $\mathrm{Cone}(s') \in \mathcal{N}^{[-n+1,0]}$。与态射 $\Omega(B) \to \Sigma^{-1}B$复合后，我们在 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 中得到一个态射

$$\begin{array}{ccccc} & & W_2 & & \\ & \overset{s_2}{\swarrow\!\!\swarrow} & & \searrow & \\ \Omega(A) & & & & \Omega(B)。 \end{array}$$

与上文类似，我们可以假设 $\mathrm{Cone}(s_2) \in \mathcal{N}^{[-n+1,0]}$。重复上述过程，我们看到相应的态射在 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccc} & & W_{n+1} & & \\ & \overset{s_{n+1}}{\swarrow\!\!\swarrow} & & \searrow & \\ \Omega^n(A) & & & & \Omega^n(B) \end{array}$$

具有如下性质：$\mathrm{Cone}(s_{n+1})$ 属于 $\mathcal{N}$ 上 t-结构的心。对于 $\mathcal{N}$ 上 t-结构的心中的任意 N，我们有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{A})}(\Omega^{n+1}(A)\ \Sigma^{-1}N) = 0$。因此，映射 $s'_{n+1}: W'_{n+1} \to \Omega^{n+1}(A)$ 是一个分裂满射。现在很容易看出，$\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 中的态射 b/s 来自函子 G 下的某个态射 $\Omega^{n+1}(\mathcal{A}) \to \Omega^{n+1}(B)$。因此，函子 G 是满的。

因此，三角函子 G 是完全忠实的，故为三角范畴之间的等价。□

例 2.8. 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有核的加性范畴，并将其视为集中在零次的 dg 范畴。在此情形下，$\mathcal{A}$是一个左稳定 dg 范畴，其中环函子 Ω与零函子重合。因此，有界导出范畴$\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 为零，$\mathcal{A}$的稳定化也为零。

例 2.9。 设 $\mathcal{T}_{\mathrm{dg}}$ 是一个预三角 dg 范畴， $\mathcal{A}' \subset \mathcal{T}_{\mathrm{dg}}$ 是一个满 dg 子范畴，使得 $H^0(\mathcal{A})$ 是 $H^0(\mathcal{T}_{\mathrm{dg}})$ 中的一个心脏。令 $\mathcal{A} = \tau_{\leq 0}\mathcal{A}'$。则 $\mathcal{A}$ 是一个具有同伦核的连通 dg 范畴。对于 $Z^0(\mathcal{A})$ 中的任意态射 $f: X \to Z$，考虑它在 $\mathcal{T}_{\mathrm{dg}}$ 中的同伦核

$$X \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z.$$

与典范映射 $\tau_{\leq 0}X \to X$ 前复合，便得到 $\mathcal{A}$ 中 f 的同伦核

$$\tau_{\leq 0}X \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z.$$

由此可知，对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 Z，去悬挂 $\Omega(Z)$ 与 $\tau_{\leq 0}\Sigma^{-1}Z$ 同伦等价。若相应的 t-结构有界，则函子 Ω 是幂零的。此时，有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 消失， $H^0(\mathcal{A})$ 的稳定化也消失。

3. Exact dg categories with enough projectives

有了左稳定 dg 范畴的概念，我们便可以更精确地表述 [1,6。37] 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ 是一个连通的、具有足够投射对象的正合 dg 范畴。记 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{B}$ 中由投射对象构成的满 dg 子范畴。本小节的主要目标是证明以下结论。

定理 3.1。dg 商 $\mathcal{B}/\mathcal{P}$ 是左稳定的。

证明。我们首先证明，dg 商函子 $\pi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{P}$ 将正合列映为同伦左正合序列。设 X 是 $\mathcal{B}$ 中的一个冲合

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C.$$
$$\underset{h}{\smile}$$

记 N为其全化。令 $V = \Sigma^{-1}\mathrm{Cone}(j)$。对于$i \in \mathbb{Z}$，有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})}(\mathcal{P}, \Sigma^i N) = 0$。因此，对于 $A' \in \mathcal{B}$和 $i \in \mathbb{Z}$，有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})}(A', \Sigma^i N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})/\mathrm{tr}(\mathcal{P})}(A', \Sigma^i N)$。由于 X是 $\mathcal{B}$中的一个冲合，对于 $A' \in \mathcal{B}$和 $i \leq -1$，有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})}(A', \Sigma^i N) = 0$。因此，对于 $A' \in \mathcal{B}$和 $i \leq -1$，有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})/\mathrm{tr}(\mathcal{P})}(A', \Sigma^i N) = 0$。于是，对于 $A' \in \mathcal{B}$和 $i \leq 0$，有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})/\mathrm{tr}(\mathcal{P})}(A', \Sigma^i A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{tr}(\mathcal{B})/\mathrm{tr}(\mathcal{P})}(A', \Sigma^i V)$。由此可得， X 在 $\mathcal{B}/\mathcal{P}$ 中的像是同伦左正合的。

我们有 $H^0(\mathcal{B}/\mathcal{P}) = H^0(\mathcal{B})/[\mathcal{P}]$。设 $g: B \to C$ be 是 $Z^0(\mathcal{B}/\mathcal{P})$ 中的一个态射。那么 g 的同伦等价类 g 是 $H^0(\mathcal{B})/[\mathcal{P}]$ 中的一个态射，由 $H^0(\mathcal{B})$ 中的一个态射h 表示，其中 h 是 $Z^0(\mathcal{B})$ 中的一个态射。因此， $\pi(h)$ 与 g 作为态射范畴 $\mathrm{Mor}(H^0(\mathcal{B}/\mathcal{P}))$ 中的对象同构。因此， g 与 $\pi(h)$在 $H^0\mathrm{Mor}(\mathcal{B}/\mathcal{P})$ 中同构。于是，我们可以假设 g 由 $Z^0(\mathcal{B})$ 中的一个态射给出。由于 $\mathcal{B}$ 有足够投射对象，

我们有 $\mathcal{B}$ 中的以下图表

$$\begin{array}{ccccc} E & \rightarrowtail & D & \dashrightarrow & B \\ \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ E & \xrightarrow[r]{} & P & \xrightarrow[s]{} & C. \end{array}$$

我们得到一个冲合

$$D \rightarrowtail B \oplus P \twoheadrightarrow C.$$

由于 $B \oplus P \to C$ 与 $g\colon B \to C$ 在 $H^0(\mathrm{Mor}(\mathcal{B}/\mathcal{P}))$中同构，我们推得态射 $g\colon B \to C$ 在 $\mathcal{B}/\mathcal{P}$中存在一个同伦核。这就完成了证明： $\mathcal{B}/\mathcal{P}$存在同伦核且是左稳定的。□

注 3.2. 设 $\mathcal{B}$ 是一个有足够投射对象的连通正合 *dg* 范畴。例如，我们可以直接取 $\mathcal{B}$ 为模范畴 $\mathrm{mod}\text{-}\Lambda$，即某个 *Artin* 代数 Λ上的有限生成模范畴。综上所述，根据上述结果，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}/\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{B}/\mathcal{P}) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{D}^b_{\mathrm{dg}}(\mathcal{B})/\mathrm{pretr}(\mathcal{P}) \\ \downsquigarrow & & \downsquigarrow & & \downsquigarrow & & \downsquigarrow \\ H^0(\mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{B})/[\mathcal{P}] & \longrightarrow & \mathcal{S}(H^0(\mathcal{B})/[\mathcal{P}]) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{D}^b(\mathcal{B})/\mathrm{tr}(\mathcal{P}), \end{array}$$

其中，箭头 $\rightsquigarrow$ 表示上方的范畴为下方的范畴提供 *dg* 增强。

Acknowledgements

作者感谢陈晓武提出的宝贵意见并参与讨论。

References

1. XIAOFA CHEN, *On exact dg categories*, arXiv:2306.08231 [math.RT], 2023。2. , *Exact dg categories II : The embedding theorem*, arXiv:2406.11226 [math.RT], 2024。3. , *Exact dg categories I: Foundations*, 《Advances in Mathematics》**489**（2026），论文编号 110809。4. G. M. Kelly, *Chain maps inducing zero homology maps*, 《剑桥哲学学会会刊》**61**（1965），847–854。5. 乐珏和陈晓武, *Karoubianness of a triangulated category* **310** 2007 1, , 《代数杂志》452 457 ( )，第 – 期。MR 6. 望月直, *Higher-dimensional generalization of abelian categories via DG-categories*, arxiv:2501.06955 [math.CT], 2025。7. Gon.calo Tabuada, *On Drinfeld's dg quotient*, 《代数杂志》**323**（2010），第 5 期，1226–1240。

University of Science and Technology of China, Hefei, P. R. China*Email address*: cxf2011@mail.ustc.edu.cn