arXiv:2603.24313v1 [math.NT] 25 Mar 2026

虚二次域的类数ζ函数

IGOR V. NIKOLAEV[1]

All data are available as part of the manuscript

Abstract. 我们引入一个ζ函数，按类数对虚二次数域进行计数。我们证明，这类函数是有理函数，且仅取决于次数为 1 和 2 的八个单位根。由此可得虚二次域中类数为素数的域的数量下界 $2p\ p$。我们的方法基于对周期点的研究；这些周期点来自希尔伯特空间上有界线性算子对 Drinfeld 模表示论所产生的动力系统。

1. Introduction

按类数对虚二次数域进行分类 $\mathcal{Q}$ 的历史h 可追溯至 [高斯 1801] [3, 的论文 304]；有关最新进展，请参阅综述 [Stark2007] [13]。令 $\#h$ 表示由类数为 $\mathcal{Q}$ 的域组成的子集 h的基数。已知 $\#h$ 是对任意$h \geq 1$ [均有定义的有限数（ 1934] [4, Heilbronn 定理 I]）。本文旨在研究一个由朗伯级数，或等价地由欧拉乘积给出的ζ函数：

$$\zeta_{\mathcal{Q}}(s) := \exp\left(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\#h}{h} \frac{s^h}{1-s^h}\right) = \prod_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(1-s^h)^{\frac{\#h}{h}}}, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{1.1}$$

我们的主要结果是，函数 $\zeta_{\mathcal{Q}}(s)$ 具有有理性，其表达式如下。

定理 1.1。

$$\zeta_{\mathcal{Q}}(s) = \frac{(1+s^2)(1-s^6)}{(1-s)^8}, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{1.2}$$

注 1.2。集合 $\mathcal{Q}$ 排除了一些域，例如 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ [8, 注 1。$\overline{3}$]；因此，$\#h$ 的实际值高于公式（1.1）和（1.2）所预测的值。此外，Dold 定理 2.3意味着（$\#_h{}^h$ ）中（1.1）的比值为整数。此外，函数（ $s=1$ ）的唯一极点（1.2）的阶为 8。同样，（1.2）的所有零点都是 1 次或 2 次单位根；这一事实可视为 ζ函数 $\zeta_{\mathcal{Q}}(s)$ 的黎曼猜想的一个类比。

为便于理解，我们回顾一下主要思路；符号和细节请参阅第 2 节。 $F: Drin_A^r(\mathfrak{k}) \mapsto \mathscr{A}_{RM}^{2r}$ 是一个函子，它将秩为 $r \geq 1$ 的 Drinfeld 模范畴映射到维数为 $2r$ [7, 定理 3.3]。记 $\Lambda_\rho[a]$ 为挠子模

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号11M55；次要分类号46L85。

Key words and phrases. ζ函数、Drinfeld模、非交换环面。

A-模 $\mathfrak{k}_\rho$ 的。已知 $F(\Lambda_\rho[a]) = \{e^{2\pi i\alpha_j}+\log\log\varepsilon \mid 1 \le j \le r\}$，其中 ε 是数域 $\mathbb{Q}(\alpha_j)$ 的一个单位，该数域在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 $2r$。令 k 为数域 $K = \mathbb{Q}(F(\Lambda_\rho[a]))$ 在群 $G \subseteq GL_r(A/aA)$ 的所有元素作用下的不变的极大子域，并令 $k \subset (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \cup \mathbb{Q}$。在此情形下，数域 $K \cong k\left(e^{2\pi i\alpha_j}+\log\log\varepsilon\right)$ 是域 $k \cong \mathbb{Q}(i\alpha_j)$ 的伽罗瓦扩张，且 $Gal(K|k) \cong G$ [7, 推论 3.4]。特别地，当且仅当 $i\alpha_j = e^{2\pi i\alpha_j}+\log\log\varepsilon$ 时，$k \cong K$。换言之，当且仅当 $z_j = 2\pi i\alpha_j$ 是映射 $f(z_j) = \lambda e^{z_j}$ 的不动点时，$k \cong K$，其中 $\lambda = 2\pi\log\varepsilon$。另一方面，类群 $Cl(k) \cong Gal(K|k) \subseteq GL_r(A/aA)$ 是平凡的，当且仅当 $h := |Cl(k)| = 1$。因此，映射 $f(z_j) = \lambda e^{z_j}$ 的不动点统计了满足 $h = 1$ 的域 k 的数量 $\#h$。一般而言，若 $h \ge 1$，则 $\#h$ 等于映射 $f(z_j)$ 的最小 h-周期点的数量（引理 3.1）。

设 k 为一个虚二次域。由于 Drinfeld 模 $r = 1$ 的秩，所研究的是单个函数 $f(z) = \lambda e^z$，其中 $\lambda = 2\pi\log\varepsilon$ 和 $\varepsilon \in U$。集合 $U := \{\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$ 由次数为 1 和 2 的八个单位根组成。考虑定义在黎曼球面 $\mathbb{C} \cup \infty$ 上的函数 $f(z,\varepsilon)$。这样的函数$\sim$在球面的双重覆盖上有一致化 f，该覆盖由四个复环面 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ 的不交并构成（图 1）。已证明，f 的 h-周期点的数目$\sim$等于 Gr¨ossencharacter $\psi(\mathscr{P})$ 在 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ 上的 $\mathscr{P} \to 1$（引理 3.3）。特别是，局部 ζ 函数已知的有理性意味着函数 $\zeta_{\mathcal{Q}}(s)$ 是有理函数。定理 1.1 得证。

根据备注 1.2，可以使用公式（1.1）和（1.2）得到数目 $\#h$的下界。也就是说，令符号 $\lessapprox$ 表示整数之间的近似小于关系。以下结论成立。

推论 1.3。若$\#h$ 表示类数为h的虚二次域的数目，则：

(i) $dh \lessapprox \#h$ *for some* $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$ *and hence* $h \lessapprox \#h$*;*
(ii) if $h = p$ *is a prime number, then* $2p \lessapprox \#p$ *and* $d \ge 3$ *for* $h \ne p$*.*

备注 1.4。读者可以在图 3 中看到一组数据所展示的推论 1.3，这些数据针对 $h \le 100$，由 [Watkins 2004] [14, 表格 4]提供。素数值 h 及其对应的 $\#h$ 值均用方框标出。

本文组织如下。第 2 节简要回顾预备知识。定理 1.1 和推论 1.3 将在第 3 节证明。

2. Preliminaries

我们简要回顾非交换环面、非阿贝尔类域论和动力学 ζ 函数。详细介绍请参阅 [Rieffel 1990] [9], [Rosen 2002] [10,第 12 章及 13], [Smale 1967] [12, I. 4] 以及 [7]。

2.1. 非交换环面。C^*-代数是在 $\mathbb{C}$ 上的一个代数 $\mathscr{A}$，带有一个范数$a \mapsto ||a||$ 和一个对合 $\{a \mapsto a^* \mid a \in \mathscr{A}\}$，使得 $\mathscr{A}$关于该范数是完备的，并且对于每个 a, $b \in \mathscr{A}$，都有 $||ab|| \le ||a||\,||b||$ 和 $||a^*a|| = ||a||^2$。每个交换的 C^*-代数都同构于代数 $C_0(X)$，即某个局部紧豪斯多夫空间 X上的连续复值函数代数。任何其他代数 $\mathscr{A}$ 都可以看作一个非交换拓扑空间。

$M_\infty(\mathscr{A})$指的是 C^*-代数 $M_n(\mathscr{A})$ 在嵌入 $a \mapsto \mathrm{diag}(a, 0)$ 下的代数直极限。直极限 $M_\infty(\mathscr{A})$可以看作由无限维矩阵组成的 C^*-代数，其中除了有限个取自 C^*-代数 $\mathscr{A}$的非零元素外，其余元素均为零。若存在元素 $v \in M_\infty(\mathscr{A})$，使得 $p = v^*v$ 和 $q = vv^*$，则两个投影 p、$q \in M_\infty(\mathscr{A})$称为等价。投影 p 的等价类记作$[p]$。我们用 $V(\mathscr{A})$表示 C^*-代数$M_\infty(\mathscr{A})$中所有投影的等价类，即 $V(\mathscr{A}) := \{[p] : p = p^* = p^2 \in M_\infty(\mathscr{A})\}$。集合 $V(\mathscr{A})$具有阿贝尔半群的自然结构，其加法运算由公式 $[p] + [q] := \mathrm{diag}(p, q) = [p' \oplus q']$定义，其中 $p' \sim p$、$q' \sim q$和 $p' \perp q'$。半群 $V(\mathscr{A})$的单位元为 $[0],$，其中 0 是零投影。对于含单位元的 C^*-代数 $\mathscr{A}$，其 K_0-群 $K_0(\mathscr{A})$指的是阿贝尔半群 $V(\mathscr{A})$的格罗滕迪克群，即通过形式元素 $[p]-[q]$对 $V(\mathscr{A})$进行完备化所得的群。$V(\mathscr{A})$在 $K_0(\mathscr{A})$中的像是正锥 $K_0^+(\mathscr{A})$，它定义了阿贝尔群 $K_0(\mathscr{A})$上的序结构 $\leq$。对 C^*-代数 $\mathscr{A}$ [而言，$\big(K_0(\mathscr{A})\ K_0^+(\mathscr{A})\big)$ 被称为维数群，见 Blackadar 1986] [2, 第三章]。

m维非交换环面 $\mathscr{A}_\Theta^m$是由酉算子 u_1、.....、u_m 生成的通用 C^*-代数，它们满足交换关系

$$u_j u_i = e^{2\pi i \theta_{ij}} u_i u_j, \quad 1 \leq i, j \leq m \tag{2.1}$$

对于反对称矩阵 $\Theta = (\theta_{ij}) \in M_m(\mathbf{R})$ [Rieffel 1990] [9]。已知$K_0(\mathscr{A}_\Theta^m) \cong K_1(\mathscr{A}_\Theta^m) \cong \mathbf{Z}^{2^{m-1}}$。$C^*$-代数上的典范迹 τ定义了从 $K_0(\mathscr{A}_\Theta^m)$到实数域R的同态；在该同态下，$K_0(\mathscr{A}_\Theta^m)$的像是一个Z-模，其生成元 $\tau = (\tau_i)$是θ_{ij}的多项式。若非交换环面 $\mathscr{A}_\Theta^m$ 的所有 θ_{ij} 都是代数数，则称其具有实乘法；此时我们使用记号 $\mathscr{A}_{RM}^m$。正锥由公式 $K_0^+(\mathscr{A}_{RM}^m) \cong \mathbf{Z} + \alpha_1\mathbf{Z} + \cdots + \alpha_m\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$给出，其中 $\alpha_j \in \mathbf{R}$是Q上次数为 m 的代数整数。

2.2. 非阿贝尔类域论。 设 $\mathfrak{k} := \mathbf{F}_q(T)$（分别为 $A := \mathbf{F}_q[T]$）是有限域 $\mathbf{F}_q$ 上一个变量的有理函数域（多项式函数环），其中 $q = p^n$，并设 $\tau_p(x) = x^p$。回顾一下，秩为 $r \geq 1$ 的 Drinfeld 模 $Drin_A^r(\mathfrak{k})$ 是一个同态

$$\rho : A \xrightarrow{r} \mathfrak{k}\langle\tau_p\rangle \tag{2.2}$$

由多项式 $\rho_a = a + c_1\tau_p + c_2\tau_p^2 + \cdots + c_r\tau_p^r$ 给出，其中 $c_i \in \mathfrak{k}$ 且 $c_r \neq 0$，满足对所有 $a \in A$，ρ_a 的常数项为 a，并且至少对一个 $a \in A$ [有 $\rho_a \notin \mathfrak{k}$。Rosen 2002] [10, 第 200] 页。对于每个非零的 $a \in A$，函数域 $\mathfrak{k}(\Lambda_\rho[a])$ 是 $\mathfrak{k}$ 的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群同构于矩阵群 $GL_r(A/aA)$ 的一个子群 G，其中 $\Lambda_\rho[a] = \{\lambda \in \mathfrak{k} \mid \rho_a(\lambda) = 0\}$ 是非平凡 Drinfeld 模 $Drin_A^r(\mathfrak{k})$ [的一个挠子模。Rosen 2002] [10, 命题 12.5]。显然，阿贝尔扩张对应于 $r = 1$ 的情形。

设 G 是由 τ_p 及所有 $a_i \in \mathfrak{k}$ 满足交换关系 $\tau_p a_i = a_i^p \tau_p$ 的左消去半群。换言之，我们省略加法结构，考虑环 $\mathfrak{k}\langle\tau_p\rangle$ 的乘法半群。设 $C^*(G)$ 是半群 C^*-代数 [Li 2017] [5]。对于由（2.6）定义的 Drinfeld 模 $Drin_A^r(\mathfrak{k})$，我们考虑半群 C^*-代数之间的同态：

$$C^*(A) \xrightarrow{r} C^*(\mathfrak{k}\langle\tau_p\rangle). \tag{2.3}$$

已证明（2.3）定义了一个映射 $F:\ \ Drin_A^r(\mathfrak{k}) \mapsto \mathscr{A}_{RM}^{2r}$ [7, 定义 3。1]。

定理 2.1. ([7, 定理 3.3]) 以下结论成立：

(i) 映射 $F:\ \ Drin_A^r(\mathfrak{k}) \mapsto \mathscr{A}_{RM}^{2r}$ 是从 ***Drinfeld*** 模范畴 $\mathfrak{D}$ 到非交换环面范畴 $\mathfrak{A}$的函子，它将任意一对$\overset{\frown}{\ \ }^r$同源（分别为同构）的模 $Drin_A^r(\mathfrak{k})\ \ Drin_A(\mathfrak{k}) \in \mathfrak{D}$ 映射为一对$\overset{\frown}{\ \ }$同态（分别为同构）的环面 $\mathscr{A}_{RM}^{2r}, \mathscr{A}_{RM}^{2r} \in \mathfrak{A}$；

(ii) $F(\Lambda_\rho[a]) = \{e^{2\pi i\alpha_i + \log\log^\varepsilon} \mid 1 \leq i \leq r\}$，其中 $\mathscr{A}_{RM}^{2r} = F(Drin_A^r(\mathfrak{k}))$，$\alpha_i$是 *Grothendieck* 半群 $K_0^+(\mathscr{A}_{RM}^{2r})$的生成元，$\log\varepsilon$是缩放因子，而$\Lambda_\rho(a)$ 是 A-模 $\mathfrak{k}_\rho$的挠子模；

(iii) 伽罗瓦群 $Gal\left(k(e^{2\pi i\alpha_i + \log\log^\varepsilon}) \mid k\right) \subseteq GL_r(A/aA)$，其中 k 是数域 $\mathbf{Q}(e^{2\pi i\alpha_i + \log\log^\varepsilon})$ 的子域。

定理 2.1导出如下非阿贝尔类域论。取一个非零的$a \in A$ 并令 $G := Gal\ (\mathfrak{k}(\Lambda_\rho[a]) \mid \mathfrak{k}) \subseteq GL_r(A/aA)$，其中 $\Lambda_\rho[a]$ 是 A-模 $\mathfrak{k}_\rho$的挠子模。考虑数域 $K = \mathbf{Q}(F(\Lambda_\rho[a]))$。记 k 为 K 的极大子域，它在群 G的所有元素作用下保持不变。

推论 2.2。（非阿贝尔类域论）数域

$$\mathbf{K} \cong \begin{cases} k\left(e^{2\pi i\alpha_j + \log\log\varepsilon}\right), & if\ k \subset (\mathbf{C} - \mathbf{R}) \cup \mathbf{Q}, \\ k\left(\cos 2\pi\alpha_j \times \log\varepsilon\right), & if\ k \subset \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.4}$$

是 k 的伽罗瓦扩张，满足 $Gal\ (K|k) \cong G$。

2.3. **动力学 ζ 函数**。设 $f\colon M \to M$ 是光滑流形 M 上的微分同胚。我们假设对于所有 $m = 1$，2，3，.....，f^m 的不动点数目 N_m 都有限。f 的 Artin-Mazur ζ 函数定义为以下形式幂级数：

$$\zeta_f(s) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} s^m\right), \quad s \in \mathbf{C}. \tag{2.5}$$

f^m 的一些不动点来自 f 的低次幂的不动点。我们用 K_m 表示最小周期为 m 的周期点数，即 f^m 的“新”不动点。整数 K_m 与 N_m 之间的关系由 M¨obius 反演公式给出：

$$K_m = \sum_{l|m} \mu(l) N_{m/l}, \tag{2.6}$$

其中

$$\mu(l) = \begin{cases} 1, & \text{if } l = 1, \\ (-1)^k, & \text{if } l \text{ is product of } k \text{ distinct primes}, \\ 0, & \text{if } l \text{ is divisible by a square number } > 1, \end{cases} \tag{2.7}$$

是 M¨obius 函数 [Smale 1967] [12, 命题 4。2]。

以下结果归功于 Dold。

定理 2.3。 ([12, 第 765]) $K_m \equiv 0$ 模 m。

$\zeta_f(s)$ 的朗伯级数依赖于 K_m，如下所示：

$$\zeta_f(s) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m}{m} \frac{s^m}{1-s^m}\right), \quad s \in \mathbf{C}. \tag{2.8}$$

欧拉乘积公式 $\zeta_f(s)$ 可写成以下优美的形式[Baake、Lau 和 Paskunas 2010] [1]:

$$\zeta_f(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-s^m)^{\frac{K_m}{m}}}, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{2.9}$$

其中比值$\frac{K_m}{m}$总是一个整数（Dold 定理 2.3）。

3. Proofs

3.1. 定理 1.1 的证明。回顾一下第 1 节概述的主要思路。首先，我们证明类数为 h 的虚二次域集合的基数 K_h 等于映射 $f(z) = \lambda e^z$ 的最小 h- 周期点的数量（引理 3.1）。接下来，考虑定义在黎曼球面$\widetilde{\mathbf{C}} \cup \infty$上的函数 $f(z, \varepsilon)$。这类函数在球面的双重覆盖上存在一致化 f，该覆盖由四个复环面 $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$的不交并构成（图 1）。我们证明，$f$ 的 h-周期点数量等于格罗森特征 $\psi(\mathscr{P})$（分别为弗罗贝尼乌斯自同态 Fr_p）在 $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$（分别在椭圆曲线 $\mathscr{E}(\mathbf{F}p)$）上的数量，即 $\mathscr{P} \to 1$（引理 3.3）。最后，我们证明 ζ 函数 $\zeta_f(s)$与 $\mathscr{E}(\mathbf{F}_1)$的局部 ζ 函数一致（引理 3.4）。下面给出详细论证。

引理 3.1. 映射 $f(z) = \lambda e^z$的最小 h-周期点的个数 K_h 等于 $\#h$，即类数为 h 的虚二次域的基数。

证明。(i) 令$\mathbf{K}$ 为虚二次域 k的最大无分歧阿贝尔扩张。由类域论可得 $deg\ (\mathbf{K}|k) = h$，其中 h 是 k 的类数。另一方面，显式公式（2.4）表明 $\mathbf{K} \cong k\left(e^{2\pi i\alpha_j + \log\log^{\varepsilon}}\right)$。代数数 $\{e^{2\pi i\alpha_j + \log\log^{\varepsilon}} \mid 1 \le j \le r\}$是域$\mathbf{K}$的生成元，它们在伽罗瓦群 $Gal\ (\mathbf{K}|k)$的作用下互为共轭。特别地，可得 $r = h$。

(ii) 令 $z_j = 2\pi i\alpha_j$和 $\lambda = 2\pi \log \varepsilon$。根据（2.4），可以写为：

$$\mathbf{K} \cong k\left(\frac{\lambda}{2\pi}e^{z_1}, \ldots, \frac{\lambda}{2\pi}e^{z_h}\right) \cong k\left(\frac{1}{2\pi}f(z_1), \ldots, \frac{1}{2\pi}f(z_h)\right), \tag{3.1}$$

其中 $f(z) = \lambda e^z$。由于 $\mathbf{K}$ 是数域 k 的最大阿贝尔扩张，因此必须满足以下条件：

$$\begin{cases} f(z_1) & \neq & z_1, \\ f(z_2) & \neq & z_2, \\ \vdots & & \\ f(z_{h-1}) & \neq & z_{h-1}, \\ f(z_h) & = & z_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

(iii) 同样，所有 z_j 和 $f(z_j)$ 都是 2π 乘以域 $\mathbf{K}$ 中某个代数数的形式。这类数共有 $2h$ 个，但其中只有 h 个可以线性无关

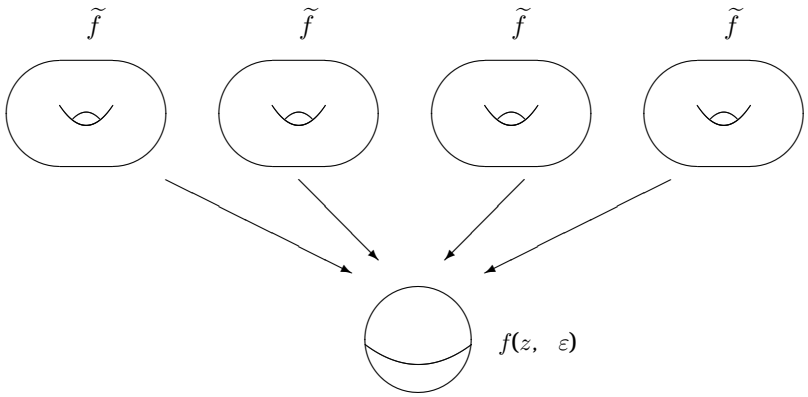

FIGURE 1. 黎曼球面 $\mathbf{C}\cup\infty$ 由四个复环面的不交并 $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$ 构成的双重覆盖

在域 k上。不失一般性，可由 (3.2) 得到以下 h约束关系，关联 z_j 与 $f(z_j)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(z_1) & = & z_2, \\ f(z_2) & = & z_3, \\ \vdots & & \\ f(z_{h-1}) & = & z_h, \\ f(z_h) & = & z_1. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

(iv) 由（3.3）可得 $f^j(z_1)=z_{j+1}$。特别地， $f^h(z_1)=z_{h+1}:=z_1$，即 z_1 是映射 f 的一个周期点，其最小周期为 h。显然，这类点的总数 K_h 等于类数为 h 的虚二次域集合的基数 $\#\ h$。

引理3.1 得证。 □

推论 3.2。 映射 $f(z)=\lambda e^z$ 的 *Artin-Mazur* ζ 函数由下列朗伯级数给出:

$$\zeta_f(s)=\exp\left(\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\#h}{h}\frac{s^h}{1-s^h}\right),\quad s\in\mathbf{C}. \tag{3.4}$$

证明。 引理 3.1 表明，对于所有 $h=K_h$， $h\geq 1$。推论3.2 的结论由公式（2.8）以及 $m=h$可得。 □

回想一下，集合 $U:=\{\pm 1,\pm i,\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$由所有次数为 1 和 2 的单位根组成。考虑一个关于第二个变量 $f(z,\varepsilon)=\lambda e^z$,~的八值函数，其中 $\lambda=2\pi\log\varepsilon$ 且 $\varepsilon\in U$。此类函数可在黎曼球面 $\mathbf{C}\cup\infty$ 的双重覆盖上作一致化，该覆盖由四个互不相交的复环面副本 $\{\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)\mid\tau\in U\}$构成，如图 1 所示。其中一个复环面副本

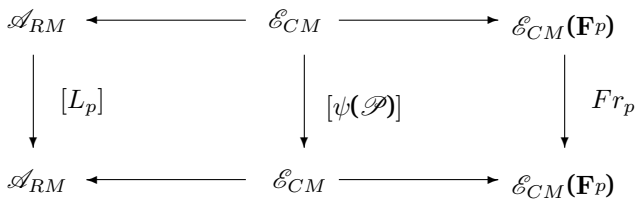

FIGURE 2. 非交换环面上的 Gr¨ossen 特征作用

对应于 τ的一对共轭复数值。 [1] 同样，可以将 C/(Z + Zτ) 视为一个椭圆曲线 $\mathscr{E}_{CM}$，其复乘由域 Q(τ)的整数环给出。考虑后者模好素数 p 上方的素理想 $\mathscr{P}$ 约化所得的 $\mathscr{E}_{CM}$(Fp)，并令 $Fr_{p^m} : x \mapsto x^{p^m}$ 为 $\mathscr{E}_{CM}$(Fp)的弗罗贝尼乌斯自同态。我们用 Fr_{1^m}表示当 $p \to 1$时 Fr_{p^m}的形式极限。

引理 3.3. 映射 f^m 的不动点数等于映射Fr_{1^m}的不动点数。

证明。(i) 记 $\psi(\mathscr{P})$ 为椭圆曲线 $\mathscr{E}_{CM}$在好素数 p上方的素理想 $\mathscr{P}$ 处所关联的 Gr¨ossen 特征。设 $[\psi(\mathscr{P})]$ 是 $\mathscr{E}_{CM}$的一个自同态，对应于模 $\mathscr{P}$ [约化 $\mathscr{E}_{CM}$(Fp) 的弗罗贝尼乌斯自同态 $Fr_p\mathscr{E}_{CM}$ Silverman 第 II 章 §9]。众所周知，图 2 中图表右侧是交换的 [Silverman 第 II 章，命题 10.4]。

(ii) 另一方面，$[\psi(\mathscr{P})]$ 定义了非交换环面 $\mathscr{A}_{RM}$ 的一个自同态 L_p，对应于第 1 节中的 $\mathscr{E}_{CM}$ [6, 3]。我们将 L_p 在群 $K_0(\mathscr{A}_{RM}) \cong \mathbf{Z}^2$ [上的作用记为 $[L_p]$ 1986] [2]Blackadar；参见图 2 中的图表。具体而言，$[L_p] = \begin{pmatrix} tr\,[\psi_{(\mathscr{P}}] & p \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，其中 tr 是$[\psi(\mathscr{P})]$ 作为复数的迹 [6, 第 6.5 节1]。特别地，对于每个 $m \geq 1$，都有 $tr\,[\psi^m(\mathscr{P})] = tr\,[L_p^m]$，同上。*ibid.*

(iii) 根据Lefschetz不动点公式，可得：

$$N_m := |\mathscr{E}_{CM}(\mathbf{F}_{p^m})| = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i tr\,[\psi^m(\mathscr{P})]_i = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i tr\,[L_p^m]_i, \tag{3.5}$$

其中 $tr\,[\psi^m(\mathscr{P})]_0 = tr\,[L_p^m]_0 = 1$，$tr\,[\psi^m(\mathscr{P})]_2 = tr\,[L_p^m]_2 = p^m$ 和 $tr\,[\psi^m(\mathscr{P})]_1 := tr\,[\psi^m(\mathscr{P})] = tr\,[L_p^m]$。

(iv) 记 $[f]$ 为 f 在拓扑环面的第一同调上的作用。由于这样的群同构于 $K_0(\mathscr{A}_{RM})$，因此可以比较 $[f]$和 $[L_p]$。回忆一下，映射 $f(z) = \lambda e^z$的逆由 Lambert W函数 [8]给出。因此，映射 f 和 $[f]$ 均可逆。但 det $[L_p] = p$，因此，$[L_p]$ 是可逆映射当且仅当 $p = 1$。所以需要将 $[L_1]$ 与$[f]$进行比较。

[1]除实数值 $\tau = \pm 1$外。这种情况应视为对应于有理函数 (分子和分母中的公因子1.2) 的一个“幽灵”副本。

~(v) 回忆一下，$[L_1]$ 和 $[f]$ 都是由同一组算术数据 $U=\{\pm 1,\pm i,\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$构造而成。事实上，$\mathscr{E}_{CM}\cong \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ 是由~~$\tau\in\bar{U}$~~定义的，实数值对除外。因此，对于包括 $p=1$ 在内的所有~素数，$[L_p]$ 都取决于集合 U。同样，f是通过对变量 $\varepsilon\in U$进行一致化，由函数 $f(z,\varepsilon)$ 构造而成的，实数值对除外。因此~矩阵 $[f]$由集合 U定义。换言之，$[L_1]$和 $[f]$由群 $GL_2(\mathbf{Z})$ 中相似的~矩阵给出。特别地，$tr\,[L_1^m]=tr\,[f^m]$，其中 $m\geq 1$。

(vi) 证明的其余部分由公式（3.5）在 $p=1$时推出。具体而言，可得$N_m=|\mathscr{E}_{CM}(\mathbf{F}_{1^m})|=\sum_{i=0}^{2}(-1)^i tr\,[\widetilde{f}^m]_i$，即~映射 f^m的不动点数等于弗罗贝尼乌斯映射 Fr_{1^m}的不动点数。

引理3.3 得证。 □

将 $\{\mathscr{E}_i\mid 1\leq i\leq 4\}$ 记为黎曼球面双重覆盖的连通分支（一个椭圆曲线）$\mathbf{C}\cup\infty$，如图 1 所示。令$\zeta_{\mathscr{E}_i(\mathbf{F}_1)}(s)=\prod_{i=0}^{2}\left(char\ Fr_1^i\right)^{(-1)^{i+1}}$为 $\mathscr{E}_i$在 $p=1$处的（形式）局部 ζ 函数，其中 $char$是 i次弗罗贝尼乌斯映射 Fr_1^i（满足 $Fr_1^0=Fr_1^2=s-1$和 $Fr_1^1:=Fr_1$）的特征多项式。

引理 3.4。

$$\zeta_f(s)=\prod_{i=1}^{4}\zeta_{\mathscr{E}_i(\mathbf{F}_1)}(s).$$

~证明。(i) 映射 f^m 的不动点数 N_m 由公式 $N_m=\sum_{i=0}^{4}N_m^i$给出，其中 N_m^i是映射 $\widetilde{f}^m$限制在第 i 个连通分支 $\mathscr{E}_i$上的相应不动点数。

我们来计算 f的 Artin-Mazur ζ 函数。根据引理3.3，可得以下公式：

$$\zeta_f(s)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m^1+\cdots+N_m^4}{m}s^m\right)=$$

$$=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m^1}{m}s^m+\cdots+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m^4}{m}s^m\right)=\prod_{i=1}^{4}\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m^i}{m}s^m\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{4}\zeta_{\mathscr{E}_i(\mathbf{F}_1)}(s).$$

引理3.4 证毕。 □

推论 3.5。

$$\zeta_f(s)=\frac{(1+s^2)(1-s^6)}{(1-s)^8},\quad s\in\mathbf{C}.$$

证明。(i) 回忆一下，$\zeta_{\mathscr{E}_i(\mathbf{F}_1)}(s)=\frac{char\ Fr_1^i}{(1-s)^2}$，其中 Fr_1^i对应于素数 $p=1$处的 Gr¨ossen 特征$\psi_i(\mathscr{P})$，参见图 2。换言之，复数

$[\psi(\mathscr{P})] = \tau \in \{\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$。这些 τ 值是以下特征多项式集合的根：

$$\begin{cases} char\ Fr_1^1 &= 1 - s^2, \\ char\ Fr_1^2 &= 1 + s^2, \\ char\ Fr_1^3 &= 1 - s + s^2, \\ char\ Fr_1^4 &= 1 + s + s^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

（ii）将方程（3.6）代入引理3.4给出的公式，并进行收缩：

$$\zeta_f(s) = \frac{(1+s^2)(1-s^6)}{(1-s)^8}, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{3.7}$$

推论3.5 得证。 □

为了完成定理1.1的证明，我们将（3.4）和（3.7）与由公式（ $\zeta_{\mathcal{Q}}(s)$ 给出的 ζ函数定义进行比较，见（1.1）。

定理1.1 得证。

3.2. **推论1.3的证明：第一部分。**

证明。 推论 1.3 由将 Dold 定理 2.3 应用于引理 3.1而得。

(i) 引理 3.1 表明 $\#h = K_h$，其中 K_h 是映射 h 的最小 f-周期点的个数z（ $= \lambda e^z$）。另一方面，定理 2.3 推出 $\#h = K_h \equiv 0$ 模 h。换言之，

$$\#h = kh, \qquad k \in \{1, 2, 3, \dots\}. \tag{3.8}$$

(ii) 我们回顾一下，我们的方法所覆盖的集合 $\mathcal{Q}$ 不包含某些虚二次域，例如 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$，其类数为 $h = 1$ [8, 备注 **1**。3]。因此，一般而言，方程（3.8）给出下界估计 $kh \lesssim \#h$。

(iii) 推论 1.3 第一部分的第二个陈述由一个显而易见的观察得出，即 $h < kh$ 对所有 $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$均成立。

推论1.3 的第一部分已证。 □

3.3. **推论1.3的证明：第二部分。**

证明。此结果由ζ函数的欧拉乘积公式（2.9）$\zeta_f(s)$ 得出。具体而言，由公式（1.2）、（2.9）和引理3.1 可得以下恒等式：

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(1-s^h)^{\frac{\#h}{h}}} \equiv \frac{(1+s^2)(1-s^6)}{(1-s)^8}, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{3.9}$$

(i) 可以将（3.9）写成如下等价形式：

$$\frac{1}{(1-s)^{\#\{h=1\}}} \prod_{h=2}^{\infty} \frac{1}{(1-s^h)^{\frac{\#h}{h}}} \equiv \frac{1}{(1-s)^8}(1+s^2)(1-s^6). \tag{3.10}$$

比较等式（3.10）的左右两边，可以得出 $\#\{h = 1\} = 8$，也就是说，类数为一的虚二次域的数量

等于八。此结果与 [8, 推论 1.2 的第 (i) 项和注 1 相符。3]作为下界，也与图 3 中的 Watkins 表一致。

(ii) 在等式 $(1-s)^{-8}$ 两边约去公因子 3.10并取倒数后，得到：

$$\begin{array}{rcl} \prod_{h=2}^{\infty}\left(1-s^h\right)^{\frac{\#h}{h}} & \equiv & \frac{1}{(1+s^2)(1-s^6)} \approx \\ & \approx & \left(1-s^2+s^4-\ldots\right)\left(1+s^6+s^{12}+\ldots\right). \end{array} \tag{3.11}$$

(iii) 显然，将等式 (3.11) 右边展开后，可得到如下形式的单项式： $\pm x^{2m_1+6m_2}$, 其中 m_1 和 m_2 是一些非负整数。

(iv) 设等式 (3.11) 左边的 $h=p$ 是一个素数。那么展开 $(1-s^p)^{\frac{\#p}{p}}$ ，可得到单项式 $\pm x^{\#p}$。为使等式 (3.11) 两边相等，右边必须具有形式 $\pm x^{\#p}=\pm x^{2m_1+6m_2}$，即 $\#p=2(m_1+3m_2)$，其中 m_1 和 m_2是一些非负整数。显然，$\#p$ 除 2 和 p外没有其他因子。因此我们得出结论， $2p \lesssim \#p$。

(v) 推论1.3 第 (ii) 项中的第二个结论源于这样一个观察：每当 $h \neq p$ 时，都可以预期 $\#h$ 被互异素数整除的次数更高。因此，比值 $\#_h^h$ 必然增大。

推论 1.3 的第二部分得证。 □

.

Data availability

本文不适用数据共享，因为在本研究期间未生成或分析任何数据集。

Conflict of interest

代表所有合著者，通讯作者声明不存在利益冲突。

Funding declaration

作者获得了 NSF-CBMS 资助项目 2430454 的部分支持。

References

1. M. Baake、E. Lau 和 V. Paskunas, *A note on the dynamical zeta function of general toral endomorphisms* **161** 2010 33 42 , 《Monatsh. Math.》（），-。 2. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, MSRI 出版物，施普林格，1986年。 3. C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 莱比锡，1801年。 4. H. Heilbronn, *On the class-number in imaginary quadratic fields*, 《Quart. J. Math.》**5**（1934年），150-160。 5. X. Li, *Semigroup C^*-algebras*, 《算子代数与应用——2015年 Abel 研讨会》，191-202，Abel Symp.，12，施普林格，2017年。 6. I. V. Nikolaev, *Noncommutative Geometry*, 第二版，《De Gruyter 数学研究丛书》**66**，柏林，2022年。 7. I. V. Nikolaev, *Non-abelian class field theory and higher dimensional noncommutative tori*, 《Algebr. Represent. Theory》**28**（2025年），1041-1053。 8. I. V. Nikolaev, *Lambert W-function and Gauss class number one conjecture*, arXiv:2512.02232

N	#	大	N	#	大	N	#	大	N	#	大	N	#	大型
1	9	163	21	85	61483	$\boxed{41}$	$\boxed{109}$	296587	$\boxed{61}$	$\boxed{132}$	606643	81	228	1030723
$\boxed{2}$	$\boxed{18}$	427	22	139	85507	42	339	280267	62	323	647707	82	402	1446547
$\boxed{3}$	$\boxed{16}$	907	$\boxed{23}$	$\boxed{68}$	90787	$\boxed{43}$	$\boxed{106}$	300787	63	216	991027	$\boxed{83}$	$\boxed{150}$	1074907
4	54	1555	24	511	111763	44	691	319867	64	1672	693067	84	1715	1225387
$\boxed{5}$	$\boxed{25}$	2683	25	95	93307	45	154	308323	65	164	703123	85	221	1285747
6	51	3763	26	190	103027	46	268	462883	66	530	958483	86	472	1534723
$\boxed{7}$	$\boxed{31}$	5923	27	93	103387	$\boxed{47}$	$\boxed{107}$	375523	$\boxed{67}$	$\boxed{120}$	652723	87	222	1261747
8	131	6307	28	457	126043	48	1365	335203	68	976	819163	88	1905	1265587
9	34	10627	$\boxed{29}$	$\boxed{83}$	166147	49	132	393187	69	209	888427	$\boxed{89}$	$\boxed{192}$	1429387
10	87	13843	30	255	134467	50	345	389467	70	560	811507	90	801	1548523
$\boxed{11}$	$\boxed{41}$	15667	$\boxed{31}$	$\boxed{73}$	133387	51	159	546067	$\boxed{71}$	$\boxed{150}$	909547	91	214	1391083
12	206	17803	32	708	164803	52	770	439147	72	1930	947923	92	1248	1452067
$\boxed{13}$	$\boxed{37}$	20563	33	101	222643	$\boxed{53}$	$\boxed{114}$	425107	$\boxed{73}$	$\boxed{119}$	886867	93	262	1475203
14	95	30067	34	219	189883	54	427	532123	74	407	951043	94	509	1587763
15	68	34483	35	103	210907	55	163	452083	75	237	916507	95	241	1659067
16	322	31243	36	668	217627	56	1205	494323	76	1075	1086187	96	3283	1684027
$\boxed{17}$	$\boxed{45}$	37123	$\boxed{37}$	$\boxed{85}$	158923	57	179	615883	77	216	1242763	$\boxed{97}$	$\boxed{185}$	1842523
18	150	48427	38	237	289963	58	291	586987	78	561	1004347	98	580	2383747
$\boxed{19}$	$\boxed{47}$	38707	39	115	253507	$\boxed{59}$	$\boxed{128}$	474307	$\boxed{79}$	$\boxed{175}$	1333963	99	289	1480627
20	350	58507	40	912	260947	60	1302	662803	80	2277	1165483	100	1736	1856563

FIGURE 3. [沃特金斯 2004] [14, 表格 4]

该表数 N 组成 1 的 N 的列基本判别式的数量，以及这类判别式的最大绝对值。所有素数值 p 的 N 以及对应的 # 值 p 均用方框标出，以说明估计 $2p \lessapprox \# p$（推论 1.3）。

9. M. A. Rieffel, *Non-commutative tori – a case study of non-commutative differentiable manifolds*, 《当代数学》（ ），- 。10. M. Rosen, *Number Theory in Function Flelds*, 研究生数学教材 **210**，施普林格，2002年。11. J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, 研究生数学教材 **151**，施普林格，1994 年。12. S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, 《美国数学会通报》 **73**（1967），747-817。13. H. M. Stark, *The Gauss class-number problems*, 解析数论，247-256，克雷数学会议录 **7**，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。14. M. Watkins, *Class numbers of imaginary quadratic fields*, 《数学计算》**73**（2004），907-938。

[1] DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE ST. JOHN'S UNIVERSITY, 8000 UTOPIA PARKWAY NEW YORK NY 11439 UNITED STATES. *Email address*: igor.v.nikolaev@gmail.com