经典物理学中热辐射谱的判据

Timothy H. Boyer

纽约市立大学城市学院物理系

纽约市立大学，纽约州纽约市 *10031**

arXiv:2603.24406v1 [physics.class-ph] 25 Mar 2026

摘要

本文提出了关于相对论波谱的两项判据。零点辐射在闵可夫斯基时空中给出共形群的恒等表示。热辐射则给出闵可夫斯基时空中共形群的不可约表示，该表示恰好涉及一个尺度参数（温度），而且在 Rindler 系中也是时间平稳的。零点辐射是温度趋于零时热辐射的极限。关键的是，零点辐射和热辐射在 Rindler 系中基本具有相同的函数形式。对于相对论标量波，我们在经典理论中完整推导出了包括零点辐射在内的普朗克谱。

*电子邮箱：tboyer@ccny.cuny.edu

I. 引言

热辐射包含一定量的热能，分布在容纳它的盒子体积中。对于相对论 热辐射（质量为零的波），容纳它的盒子中有无限多个正规模，因此其光谱至少需要两个参数。粗略地说，一个参数给出低频下每个正规模的能量，另一个参数给出高频下每个正规模的能量。在经典物理学中，似乎没有判据能够将热辐射与其他随机的相对论性辐射光谱区分开来。自19世纪以来，物理学家一直在寻找一种简单的判据，以区分热辐射谱。

在本文中，我们提出，闵可夫斯基时空中的随机相对论性热辐射，是共形群的协变表示，该表示恰好包含一个可变参数——温度 T，并且在惯性系和 *Rindler*系中都具有时间平稳性。

在一篇较早的文章中，[1]有人提出，热辐射谱是在低温极限下的零点辐射与高温下的瑞利-金斯谱之间“最平滑”的函数。然而，与明确的共形要求相比，“平滑性”这一概念似乎含糊不清。闵可夫斯基时空中的任何相对论性辐射分布都具有共形协变性。然而，不可约表示中可变参数数量的要求会严格限制光谱。另一个重要方面是采用 Rindler系。Rindler系将时间行为与空间行为分离开来，从而为相对论性热辐射提供了一个新视角。Rindler系的特殊之处在于，尽管时空间隔在 Rindler系中只精确到一阶，但与瞬时共动惯性系中的时空间隔一致。事实上，尽管我们常认为自己生活在局部惯性系中，但或许更应将自己视为生活在局部 Rindler系中。

为了在经典理论中解释卡西米尔力，零点辐射必须具有一个常数，其值由实测力确定。然而，在 Rindler 系中，任何函数形式与零点辐射相同的光谱都是时间平稳的。通过重新调整林德勒坐标时间，同时保持实验测得的零点谱不变，我们能够确定

闵可夫斯基惯性系中的热辐射光谱。

本文不讨论达到平衡的机制，只讨论平衡的判据。然而，当库仑势中的带电粒子在电路中运动时，它必然会加速，并通过辐射发射损失能量；与此同时，它又通过经典零点辐射中的反复共振运动获得能量。当绕轨道运动的带电粒子达到平均能量平衡状态时，便形成了平衡状态。[2]

本文首先指出电磁学基本常数以及膨胀协变性的基础。然后，我们讨论经典电磁零点辐射和热辐射的概念。最后，我们转而讨论采用林德勒坐标系的想法，并说明我们的判据如何在经典物理学中导出普朗克谱。

II. 单位与共形对称性

像经典电磁学这样的相对论性经典理论，可以纳入自然界中发现的三个基本电磁常数：元电荷 e、真空光速 c，以及经典零点辐射的尺度 $\hbar$。单位的选择由单位质量 M 的选择决定，从而得到单位长度 $l = e^2/(Mc^2)$，单位时间 $t = e^2/(mc^3)$，以及单位能量 $U = Mc^2$。常数 $\hbar$ 是经典零点辐射的尺度因子。唯一一个与单位质量的选择无关的常数是精细结构常数 $e^2/(\hbar c)$。如果将单位质量从 M 改为 $M' = M/\sigma$，那么所有长度都变为 $l' = \sigma l$，所有时间都变为 $t' = \sigma t$，所有能量都变为 $U' = U/\sigma$。我们称该系统经历了一次 $\sigma_{ltU^{-1}}$ 膨胀或重新定标。不过，精细结构常数在重新定标下保持不变。共形对称性是一个变换群，它既包括庞加莱群 $\acute{e}$ 的变换，也包括对应于改变单位质量选择 M 的连续局部尺度变化。[3][4]

III. R　惯性系中的随机相对论标量场

A. 相对论标量场的哈密顿量

本文讨论的不是矢量电磁场，而是更简单的相对论性标量场 $\phi(ct,\ x,\ y,\ z)$。电磁场还涉及横向电磁波的两个偏振方向，因而更为复杂。因此，标量场常被作为较简单的入门计算对象。计算经典零点辐射的共形不变性时，这一点表现得尤为明显。[5]

四维闵可夫斯基时空中标量场的行为由哈密顿量给出

$$H=\frac{1}{2}\int d^3r\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\left(ct\right)}\right)^2+\left(\nabla\phi\right)^2\right], \tag{1}$$

由此得到标量波动方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(ct\right)^2}-\nabla^2\phi=0. \tag{2}$$

该方程（2）具有各向同性解

$$\phi\left(ct,x,y,z\right)=\int d^3k\,A(k)\cos\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kct+\theta\left(\mathbf{k}\right)\right] \tag{3}$$

其中 $k=|\mathbf{k}|$。由于我们关注的是随机辐射，因此我们将相位 $\theta(\mathbf{k})$视为在区间 $[0,2\pi)$上随机分布，并且对每个由$\mathbf{k}$指定的正规模，其相位分布彼此独立。

B. 辐射正规模的能量 $U(ck)$

如果我们考虑一个频率为 $\omega_{\mathbf{n}}=ck_{\mathbf{n}}$、处于边长为 L，的立方盒中的单个辐射正规模，那么根据方程（1），其能量为

$$\begin{aligned}U\left(ck_{\mathbf{n}}\right)&=\frac{1}{2}\int d^3r\left[A\left(k_{\mathbf{n}}\right)\right]^2 2k_{\mathbf{n}}^2\sin^2\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kct+\theta\left(\mathbf{k}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\int d^3r\left[A\left(k_{\mathbf{n}}\right)\right]^2 k_{\mathbf{n}}^2=\frac{1}{2}L^3k_{\mathbf{n}}^2\left[A\left(k_{\mathbf{n}}\right)\right]^2\end{aligned} \tag{4}$$

C. 膨胀不变谱

为了具有$\sigma_{ltU^{-1}}$-膨胀不变性，我们预期光谱应为

$$U(\omega) = C\omega, \tag{5}$$

其中 C 是一个常数，因为 $U(ck_{\mathbf{n}})$和 $\omega_{\mathbf{n}} = ck_{\mathbf{n}}$ 在膨胀下具有相同的行为， $U' = U/\sigma$, $\omega' = \omega/\sigma$。该方程在任何惯性系中都具有相同的形式。能量与频率之间的这一关系（5）同时具有洛伦兹不变性和共形不变性。[6][5]

D. 卡西米尔力的尺度

式（5）中的表达式仍然包含一个未知常数 C。对于电磁场$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{B}$，随机经典零点辐射会在导电平行板之间产生卡西米尔力，这种力已通过实验测得。[7][8][9][10][11][12][13] 实验结果与以下选择相符（导电板间距和卡西米尔力大小的测量准确度均接近 1%）：每个正规模的电磁能量为

$$U^{elect}(\omega) = (\hbar/2)\,\omega, \tag{6}$$

其中 $\hbar$ 是一个数值常数，其数值与普朗克常数一致。常数 $\hbar$ 最早出现于 1899 年对黑体辐射的经典分析中，而非量子理论中。[14] 式（6）中的经典电磁尺度因子 $\hbar$ 与能量量子毫无关系。然而，有些物理学家只在量子理论的语境中见过 $\hbar$，因此发现它竟然属于一种经典理论时，便感到难以接受。

为了建立电磁场与标量场情形下关联函数之间的自然联系，我们假设方程（3）可以改写为适用于标量零点辐射的形式：

$$\phi^{zp}(ct, x, y, z) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^2 k}} \cos\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - kct + \theta(\mathbf{k})\right]. \tag{7}$$

IV. 零点相关函数

A. 场的两点相关函数

标量零点辐射的二点关联函数为:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \phi^{zp}\left(ct,x,y,z\right)\phi^{zp}\left(ct',x',y',z'\right)\right\rangle_{\theta}\\
&=\left\langle \int d^{3}k\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k}}\cos\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kct+\theta\left(\mathbf{k}\right)\right]\int d^{3}k'\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k'}}\cos\left[\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'-k'ct'+\theta\left(\mathbf{k}'\right)\right]\right\rangle_{\theta}\\
&=\int d^{3}k\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k}}\int d^{3}k'\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k'}}\left\langle \cos\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kct+\theta\left(\mathbf{k}\right)\right]\cos\left[\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'-k'ct'+\theta\left(\mathbf{k}'\right)\right]\right\rangle_{\theta}\\
&=\int d^{3}k\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k}}\int d^{3}k'\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k'}}\cos\left[\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)-k\left(ct-ct'\right)\right]\frac{1}{2}\delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)\\
&=\frac{1}{2}\int d^{3}k\,\frac{\hbar c}{2\pi^{2}k}\cos\left[\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)-k\left(ct-ct'\right)\right],
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中，我们对随机相位求和，得到

$$
\left\langle \cos\left[\theta\left(\mathbf{k}\right)\right]\cos\left[\theta\left(\mathbf{k}'\right)\right]\right\rangle =\left\langle \sin\left[\theta\left(\mathbf{k}\right)\right]\sin\left[\theta\left(\mathbf{k}'\right)\right]\right\rangle =\left(1/2\right)\delta^{3}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\tag{9}
$$

and

$$
\left\langle \cos\left[\theta\left(\mathbf{k}\right)\right]\sin\left[\theta\left(\mathbf{k}'\right)\right]\right\rangle =0.
\tag{10}
$$

现在，我们将 $\cos\psi$ 引入为 $\mathbf{k}$ 与 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 之间的夹角，并对所有角度积分，由式（8）得到

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \phi^{zp}\left(ct,x,y,z\right)\phi^{zp}\left(ct',x',y',z'\right)\right\rangle\\
&=\frac{\hbar c}{4\pi^{2}}\int_{0}^{\infty}dk\,k\left(2\pi\right)\int_{0}^{\pi}d\psi\sin\psi\cos\left[k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\cos\psi-k\left(ct-ct'\right)\right]\\
&=\frac{\hbar c}{2\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\int_{0}^{\infty}dk\left\{\sin\left[k\left\{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|-\left(ct-ct'\right)\right\}\right]+\sin\left[k\left\{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|+\left(ct-ct'\right)\right\}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

式（11）中的最后一行涉及奇异积分，我们通过引入一个很小的收敛因子来计算它们，从而得到

$$
\int_{0}^{\infty}dk\sin\left[kb\right]\exp\left[-ik\epsilon\right]=\left(\frac{-\cos\left[k\left(b-i\epsilon\right)\right]}{b-i\epsilon}\right)_{0}^{\infty}\rightarrow\frac{1}{b}.
\tag{12}
$$

但是，零点辐射的关联函数变为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi^{zp}\left(ct,x,y,z\right)\phi^{zp}\left(ct',x',y',z'\right)\right\rangle \\
&=\frac{\hbar c}{2\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\left(\frac{1}{\left\{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|-\left(ct-ct'\right)\right\}}+\frac{1}{\left\{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|+\left(ct-ct'\right)\right\}}\right) \\
&=\frac{-\hbar c}{\pi}\left(\frac{1}{\left(ct-ct'\right)^{2}-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{2}}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

B. 经典零点辐射的共形不变性

式（13）中零点场的关联函数显然是洛伦兹不变的，并在膨胀下按 $1/\sigma^2$ 变化。它也是共形不变的。标量场 $\phi^{zp}(ct,\ x,\ y,\ z)$ 在闵可夫斯基时空中是共形不变的。事实上，在惯性系中，整个经典电动力学都是共形不变的。麦克斯韦方程组是共形协变的，其解也是如此。[15] 同样，闵可夫斯基时空中的标量波动方程（2）是共形不变的，其解也如此。[5] 本文将考察共形群的均匀 $\sigma_{ltU^{-1}}$-膨胀。齐次波动方程（2）恰好有一个不变参数，即相对论波的速度 c 。

C. 维恩位移定理的共形协变性

现在，我们将从零点辐射的共形不变性 转向惯性系中热辐射的共形协变性 。热力学中的功-能概念[1] 足以推导出维恩位移定理，其中涉及温度 T 和频率 $\omega=c\left|k\right|=ck,$ 的一个未知函数。

$$U^{total}\left(ck\right)=Tf\left(\frac{ck}{T}\right). \tag{14}$$

这里， $U^{total}(ck)$ 是频率为 ck 时每个正规模的平均能量，而 $f(ck/T)$ 是某个未知函数。 $\sigma_{ltU^{-1}}$-膨胀行为是正确的，因为能量 U、温度 T 和频率 ck 都以相同的方式变换。在温度相对于固定频率 ck 不断降低的极限下，我们预期光谱会变为零点辐射光谱，

$$U^{total}\left(ck\right)=Tf\left(\frac{ck}{T}\right)\rightarrow\frac{1}{2}\hbar ck\ \ \text{for}\ T\rightarrow0, \tag{15}$$

如式（6）所示。

V. 零点辐射 与热辐射的判据

有一个明确的判据零点辐射适用于经典物理学：零点辐射是在惯性系中共形不变的相对论随机经典辐射谱。[5] 其尺度常数 $\hbar$由实验确定。

热辐射的判据并不那么明晰；事实上，它似乎尚未得到物理学界的认识。我们认为，热辐射在惯性系和Rindler系中均在封闭箱体内保持时间平稳，并且以温度这一唯一尺度参数呈共形协变。

VI. Rindler系与热辐射

A. Rindler系将空间与时间分离

在闵可夫斯基时空中，空间与时间通过真空光速c联系在一起。然而，还存在另一种时空，其中时间分量与空间分量彼此分离。在Rindler系中，空间间隔不随时间变化，但时间方面与空间方面有所不同。这种情况类似于改用极坐标并保持角度不变，同时注意到长度仅与径向分量相关。

我们考虑一个与闵可夫斯基时空（ct，x，y，z）相关的 Rindler系（η，ξ，y，z），其关系为[16]

$$ct = \xi \sinh \eta, \quad x = \xi \cosh \eta, \quad y = y, \quad z = z. \tag{16}$$

请注意，在惯性系中，时间 ct和空间坐标 x，y，z都会像空间坐标 ξ，y，z一样，在Rindler系中经历 $\sigma_{ltU^{-1}}$膨胀。Rindler时间 η完全独立。这种情况体现了惯性系与Rindler系之间的巨大差异。在地球表面，我们常认为自己生活在局部惯性系中。或许把自己视为生活在局部 Rindler系中更为恰当。如果把东西从窗户扔出去，它会加速。此外，我们的 GPS系统必须对时间间隔的引力效应进行修正。

Rindler系的每个固定 空间坐标 ξ 相对于瞬时共动惯性系具有相同的速度

$$\frac{dx}{d\,(ct)} = \frac{\xi \sinh \eta}{\xi \cosh \eta} = \tanh \eta. \tag{17}$$

然而，Rindler系的每个固定空间坐标 ξ 都具有恒定的加速度，该加速度为

$$a\left(\xi\right)=c^{2}/\xi, \tag{18}$$

并取决于距位于 $\xi=0.$ 处事件视界的距离。在 Rindler系中的某一坐标时间 η ，Rindler系与共动惯性系的时间间隔和空间间隔在间隔的一阶上相符。加速度 $a(\xi)$ $=c^{2}/\xi$ 随距事件视界的距离而变化，这种变化是时间间隔的二阶效应，也是相对论所要求的。

B. 零点辐射与热辐射的对比

Rindler系为理解热辐射提供了一个全新的视角。零点辐射和热辐射看起来大不相同。零点辐射涉及发散的能量密度，并且在每一个惯性系中都具有相同的关联函数。热辐射的能量密度有限，并且只在唯一一个惯性系中处于平衡状态，也就是热辐射在其中达到平衡的约束箱所在的惯性系。在任一频率 $\omega=ck$，总热辐射都包含这两种成分

$$U^{total}\left(\omega,T\right)=U^{T}\left(\omega,T\right)+U^{zp}\left(\omega\right). \tag{19}$$

正如后文将着重指出的，在 Rindler系中的任何盒子里，盒子顶部热辐射的温度低于盒子底部热辐射的温度，但零点辐射则处处相同。

VII. 惯性系和 Rindler 系中的不同正规模

现在，如果将封闭箱体中理想导电壁内的随机辐射表示为具有随机相位的辐射正规模，那么关联函数将不会随时间变化。然而，惯性系和 Rindler系的辐射正规模并不相同，因此，关联函数看起来截然不同。

A. 垂直于事件视界传播的辐射模

1. 惯性系中的辐射模

对于一个特殊情形，我们可以轻易看出这两种情况的差异。考虑一个恰好垂直于事件视界传播的标量平面波。在惯性系中，该平面波为

$$\phi(ct,x,y,z)=A\left(k\right)\cos\left[\pm kx-ckt+\theta\left(\pm k\right)\right]. \tag{20}$$

对应于频率为 $\omega=ck.$ 的正规模。在 $\sigma_{ltU^{-1}}$ 膨胀下，此波变为一个新波 $\phi(ct',\ x',\ y',\ z')$

$$\phi(ct',x',y',z')=A\left(k\right)\cos\left[\pm k\left(\sigma x\right)-ck\left(\sigma t\right)+\theta\left(\pm k\right)\right]. \tag{21}$$

注意 σx 和 σt，而相位 $\theta(\pm k)$ 保持不变。这个方程与式（20）中的旧平面波并不相同。在 Rindler 坐标中，这个平面波（20）变为

$$\begin{aligned}\phi\left(\xi\sinh\eta,\xi\cosh\eta,y,z\right)&=A\left(k\right)\cos\left[\pm k\xi\cosh\eta-k\xi\sinh\eta\right]+\theta\left(k\right)\\&=A\left(k\right)\cos\left[k\xi\exp\left(\mp\eta\right)+\theta\left(k\right)\right].\end{aligned} \tag{22}$$

这个辐射场不是Rindler系中的正规模。

*2. Rindler*系中的辐射模

标量波动方程（2）用 Rindler 坐标表示为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=0. \tag{23}$$

对于 Rindler系 中在封闭箱体内垂直于事件视界传播、两端分别位于 $\xi_{\mathfrak{A}}=\xi_0$ 和 $\xi_{\mathfrak{B}}=\xi_0+l,$ 的正规模，我们得到

$$\phi_n(\eta,\xi,y,z) \tag{24}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\ln\left[\left(\xi_0+l\right)/\xi_0\right]}}\sin\left[\frac{n\pi}{\ln\left[\left(\xi_0+l\right)/\xi_0\right]}\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)\right]\cos\left[\frac{n\pi}{\ln\left[\left(\xi_0+l\right)/\xi_0\right]}\eta+\theta_n\right]. \tag{25}$$

显然，由于 $\ln(1)=0$ 且对于整数 n，$\sin(n\pi)=0$，波在顶面和底面处为零。如果长度单位按 $l\to l'=\sigma l$ 改变，对应于 $\sigma_{ltU^{-1}}$-膨胀，那么 $\xi,\ \xi_0,$ 和 l 都会按相同比例改变，因此正规模保持不变。惯性系和 Rindler系的正规模彼此截然不同。

B. Rindler系中的相关函数

每个时空参考系中的时间坐标都与该参考系中相对论波的频率 $\omega = c|\mathbf{k}|$相关，因此惯性系和 Rindler系中的时间坐标不同，因为一个参考系中的正规模在另一个参考系中并非正规模。因此，Rindler系中观测到的随机辐射，其光谱可能不同于Minkowski参考系中的光谱。特别是，每个固定空间坐标 ξ 的加速度都会导致Rindler系中不同的关联函数。

由于零点函数 $\phi^{zp}(ct,\ x,\ y,\ z)$ 是一个标量场，因此，对于固定的空间坐标 $\xi,\ y,\ z$但不同的时刻 η和 η'，根据式（16）和式（13），Rindler系中的关联函数为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi^{zp}\left(ct,x,y,z\right)\phi^{zp}\left(ct',x,y,z\right)\right\rangle \\
&=\left\langle \phi^{zp}\left(\xi\sinh\eta,\xi\cosh\eta,y,z\right)\phi^{zp}\left(\xi\sinh\eta',\xi\cosh\eta',y,z\right)\right\rangle \\
&=\frac{\hbar c}{\pi}\frac{1}{\xi^{2}\left[\left(\cosh\eta-\cosh\eta'\right)^{2}-\left(\sinh\eta-\sinh\eta'\right)^{2}\right]} \\
&=\frac{\hbar c}{\pi}\frac{-1}{4\xi^{2}\sinh^{2}\left[\left(\eta-\eta'\right)/2\right]}
\end{aligned} \tag{26}$$

这里的关联函数仅取决于 Rindler系中的坐标时间差 $\eta-\eta'$，因此是时间平稳的。此外，在 Rindler系中，前面的常数（$\hbar c/\pi$）可以取任意正值，就像式（5）中的常数 C 一样，并且仍会得到与时间无关的光谱。这种时间不变性的灵活性正是能够产生普朗克热辐射谱的原因。

C. 零点辐射在两个参考系中均具有膨胀不变性

Rindler系中零点辐射的这一表达式（26）与公式（13）中给出的闵可夫斯基惯性系表达式不同。然而，Rindler系与共动惯性系中的零点关联函数一致，因为闵可夫斯基时空中的零点辐射谱是洛伦兹不变的。因此，任何惯性系都会测得零点辐射场相同的关联函数。在时间差较小的情况下 $\eta-\eta'$，Rindler系中的关联函数（26）趋于惯性系中的关联函数（13）；由公式（16）可知，对于.....的一阶项，

差值 $ct = \xi \sinh \eta \approxeq \xi\eta$和 $x = \xi \cosh\ \eta \approxeq \xi$，因此

$$\frac{-\hbar c}{\pi} \frac{1}{(ct - ct')^2} \approxeq \frac{-\hbar c}{\pi} \frac{1}{\xi^2 (\eta - \eta')^2}. \tag{27}$$

注意，对于两个时空点重合的情况， $t' \to t$ 和 $\eta' \to \eta$. 两个关联函数都会发散，这对应于零点能的发散。此外，在惯性系和Rindler系中，关联函数在 $\sigma_{lU^{-1}}$-膨胀下都按照 $1/\sigma^2$ 发生变化。

VIII. 盒子中的随机波

A. S光谱在共动惯性系中仍为零点辐射

经典物理学中，人们已经从不同角度多次考察过涉及零点辐射的情形。[17][18][19] 我们强调，在共动惯性系的单一时刻 t' ，零点辐射的光谱没有特定的长度或能量。

B. Rindler系中的热辐射

1. 零点辐射之上的热辐射

讨论热辐射时，经典零点辐射并不会就此消失。相反，我们认为经典热辐射 $U^T(\omega, T)$ 是在经典零点谱 $U^{zp}(\omega)$之外的辐射，因此两者同时存在，

$$U^{total}(\omega, T) = U^T(\omega, T) + U^{zp}(\omega). \tag{28}$$

如果瞬时共动惯性系中的辐射包含热辐射，我们预计在 Rindler 系中，总辐射谱也会继续包含热辐射。

2. 托尔曼-埃伦费斯特关系

由于热辐射模式在 Rindler 系中是静止的，我们预计它会满足托尔曼-埃伦费斯特关系[20]，该关系将温度与坐标联系起来，如下所示$T\sqrt{|g_{00}|} = const$。对于平直时空中的 Rindler 坐标，其中 $ds^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 - dy^2 - dz^2$，这对应于 $T\sqrt{|g_{00}|} = [T(\xi)]\,\xi = const$。因此，辐射的温度$[T(\xi)] = const/\xi$ 随 Rindler 系中的空间坐标变化：在事件视界附近 ξ 取值较小时温度较高，而远离事件视界、 ξ 取值较大时，温度则平滑地趋近于零。

3. 共动惯性系中的光谱仍表现为热辐射

在瞬时共动惯性系中，时间坐标 t' 与 Rindler 系的时间坐标一致（到一阶近似），此处只有一个温度 $T.$ 。辐射的空间特征恰好显示出一个特殊波长$l_T = const/(k_B T)$，与温度 T相关联。优选惯性系就是盒子的参考系，它同时也是共动参考系。因此，在共动惯性系中，在某一时刻，光谱可以表明存在温度为 T 、具有单一优选波长 l_T的热辐射。空间随机性与瞬时共动惯性系中的情况相同。

4. 时间是坐标系之间的关键方面

Rindler 坐标系中的时间特征与惯性系中的时间特征截然不同。任何惯性系中的所有时钟都彼此同步，并且对于单一温度下的热辐射，都显示出一个优选长度 $l_T = const/(k_B T)$。这个单一温度 T 与加速盒内部空间关联所指示的温度相同。然而，在 Rindler 系中的某一空间点 $(\xi,\ y,\ z)$，总场的关联函数大于零点辐射的关联函数，但会随其与事件视界的距离 ξ 而变化。

如果我们只考虑与 $k_B T$相比极高的频率 $\hbar\omega$ ，那么存在的唯一辐射就是零点辐射 $U^{zp}(\omega)$。在 Rindler系中的一个单一辐射模，并不是瞬时共动惯性系中的正规模。Rindler模将会

在事件视界附近对应较低的惯性频率，而在远离事件视界处对应较高的惯性频率。这由公式（16）中的关系得出，因为对于常数 ξ，我们有 $ct = \xi$ 双曲正弦 η，由此得到（cdt）$= (d\eta)\,\xi$ 双曲余弦 η，或者

$$\frac{d}{dt} = \frac{c}{\xi \cosh \eta} \frac{d}{d\eta}. \tag{29}$$

在远离事件视界处，温度降低，这与在 Rindler系中发现的惯性辐射具有不同频率相一致。

这种令人惊讶的 相对论 特性如今常被物理学家利用，但他们往往并未意识到。因此，手机上的 GPS 定位信息依赖于时间 修正，这些修正考虑到了较低处的时钟在地球引力场中运行得更慢。不过，这些时间修正非常微小，以至于住在高层公寓楼里的人完全没有意识到，底层的时钟比顶层的时钟走得慢。然而，正是这些微小的相对论修正，对于理解相对论性热辐射至关重要。

C. I在 Rindler系中引入共形不变常数 ζ

随着 ξ 的值不断增大，热辐射的温度也会降低，$T(\xi) = const/\xi$。不过，我们希望得到热辐射的光谱。因此，我们将温度写作

$$T(\xi) = \zeta/\xi, \tag{30}$$

其中 ζ 是某个与温度相关的参数。

乘以 ζ 不会改变盒子允许的正规模、盒壁处的狄利克雷边界条件，也不会改变距事件视界的距离 ξ。这仍然是Rindler系中的稳态分布。然而，与时间相关的新常数 ζ确实引入了一个可变的实常数 ζ，供我们选取，并且它应当与温度相关。因此，在方程（26）中，我们将坐标时间差 $\eta' - \eta$改为 $\zeta(\eta' - \eta) = (\zeta/\xi)\,(c\tau' - c\tau)$。我们对固定的 ξ 使用了 $ds^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 - dy^2 - dz^2$，以便将固有时间间隔 $\tau' - \tau$ 与林德勒坐标

时间 $cd\tau = \xi d\eta$联系起来。使用这个新常数 ζ，方程（26）变为

$$\begin{aligned}\left\langle \phi^{total}(ct,\xi,y,z)\phi^{total}\left(ct',\xi,y,z\right)\right\rangle &= \frac{\hbar c}{4\pi}\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^2 \frac{-1}{\sinh^2\left[\zeta\left(\eta'-\eta\right)/2\right]} \\ &= \frac{\hbar c}{4\pi}\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^2 \frac{-1}{\sinh^2\left[\zeta\left(c\tau'-c\tau\right)/\left(2\xi\right)\right]} \end{aligned} \tag{31}$$

在 Rindler系中。我们注意到，当时间间隔很小时， $\tau - \tau'$，常数 ζ消失，关联函数便趋于公式（27）中的零点辐射结果，

$$\begin{aligned}\left\langle \phi^{total}(ct,\xi,y,z)\phi^{total}\left(ct',\xi,y,z\right)\right\rangle &\to \frac{\hbar c}{4\pi}\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^2 \frac{-1}{\left[\zeta\left(c\tau'-c\tau\right)/\left(2\xi\right)\right]^2} \\ &= \frac{\hbar c}{\pi}\frac{-1}{\left(c\tau'-c\tau\right)^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

在瞬时共动惯性系中，固有时（$c\tau' - c\tau$）与局域时间（$c\tau' - c\tau$）一致 $= ct' - ct.$

1. 傅里叶频率变换

对于公式（31）中的关联函数，我们希望了解在闵可夫斯基惯性系中与之对应的频谱，该频谱在 Rindler系中会产生这样的关联函数。函数 $\omega \coth\left[\alpha\omega\right]$ 的傅里叶变换为[21]

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty d\omega\left(\omega\coth\left[\frac{\xi}{\zeta}\frac{\pi\omega}{c}\right]\right)\cos\left[\omega t\right] \\ &= \int_0^\infty d\omega\,\omega\cos\left[\omega t\right] + \int_0^\infty d\omega\left(\frac{2\omega}{\exp\left[2\pi\xi\omega/\left(\zeta c\right)\right]-1}\right)\cos\left[\omega t\right] \\ &= -\frac{1}{t^2} + \left[\frac{1}{t^2} - \left(\frac{\zeta c}{2\xi}\right)^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\zeta c}{2\xi}t\right)\right] = -\left(\frac{\zeta c}{2\xi}\right)^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\zeta c}{2\xi}t\right), \end{aligned} \tag{33}$$

这里我们使用了奇异积分

$$\int_0^\infty dk\,k\cos\left(bk\right) = \operatorname{Re}\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty dk\,k\exp\left[\left(ib-\lambda\right)k\right] = -1/b^2. \tag{34}$$

然后写成 csch(x) $= 1/\left[\sinh\left(x\right)\right],$，公式（31）中的关联函数变为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi^{total}\left(ct,\xi,y,z\right)\phi^{total}\left(ct',\xi,y,z\right)\right\rangle \\
&=\left(\frac{\hbar c}{4\pi}\right)\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{2}\frac{-1}{\sinh^{2}\left[\zeta\left(ct-ct'\right)/\left(2\xi\right)\right]} \qquad (35)\\
&=\left(\frac{\hbar c}{4\pi}\right)\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{2}\left(\frac{2\xi}{\zeta c}\right)^{2}\int_{0}^{\infty}d\omega\left(\omega\coth\left[\frac{\pi\xi}{\zeta c}\omega\right]\right)\cos\left[\omega\left(t-t'\right)\right]. \qquad (36)
\end{aligned}$$

我们注意到 此时，这个依赖于 ζ 的关联函数可以分成两部分 a s

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi^{total}\left(ct,\xi,y,z\right)\phi^{total}\left(ct',\xi,y,z\right)\right\rangle \\
&=\left(\frac{-\hbar}{\pi c}\right)\left\{\left[\left(\frac{\zeta c}{2\xi}\right)^{2}\operatorname{csch}^{2}\left(\frac{\zeta c}{2\xi}\left(t-t'\right)\right)-\frac{1}{\left(t-t'\right)^{2}}\right]+\frac{1}{\left(t-t'\right)^{2}}\right\}. \qquad (37)
\end{aligned}$$

包含方括号的部分在 $(t-t')\ \to\ 0$，处是有限的，对应于热辐射；而部分 $1/(t-t')^2$ 在 $(t-t')\ \to 0$ 处发散，对应于零点辐射。

2. ζ/ξ 与温度的联系

现在，我们要在固定坐标ξ 下，对光谱中有限的热谱部分进行积分，以得到 ζ/ξ 与温度 T 之间的关系，如斯特藩–玻尔兹曼定律$u(T)\ = a_S T^4$所示。减去零点辐射光谱，留下热谱部分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty}d\omega\frac{\omega^{2}}{\pi^{2}c^{3}}\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\coth\left[\frac{\pi\xi}{\zeta c}\omega\right]-\frac{1}{2}\hbar\omega\right)\\
&=\left(\frac{\hbar c}{2\pi^{2}c^{4}}\right)\left(\frac{\zeta c}{\pi\xi}\right)^{4}\int_{0}^{\infty}du\,u^{3}\left(\coth\left[u\right]-1\right)\\
&=\left(\frac{\hbar c}{2\pi^{2}c^{4}}\right)\left(\frac{\zeta c}{\pi\xi}\right)^{4}\frac{1}{8}\frac{\pi^{4}}{15}=a_S T^{4}=\frac{\pi^{2}k_B^{4}}{15\hbar^{3}c^{3}}T^{4}, \qquad (38)
\end{aligned}$$

这里我们代入了数值 $a_S\ =(\pi^2 k_B^4)\ /(15\hbar^3 c^3)$。 因此，与温度的关系为

$$T=\frac{(\zeta c)\,\hbar}{2\pi\xi k_B}. \qquad (39)$$

但现在我们可以用熟悉的温度 T 替换表达式 ζ/ξ。与方程（28）比较，我们恰好得到了包含零点辐射的普朗克谱

$$U^{total}(\omega,T)=U^{T}(\omega,T)+U^{zp}(\omega)=\frac{1}{2}\hbar\omega\coth\left[\frac{\hbar\omega}{2k_{B}T}\right]$$
$$=\frac{\hbar\omega}{\exp\left[\hbar\omega/\left(k_{B}T\right)\right]-1}+\frac{1}{2}\hbar\omega. \tag{40}$$

因此，通过考察 Rindler系中的零点辐射，我们得到了 Minkowski参考系中包含零点辐射的普朗克谱。要使常数 ζ 为正值，就必须存在温度高于零的热辐射。在零温度下，$\zeta/\xi=0$ 要求 $\zeta=0$。

IX. 总结

本文提出了经典物理学中零点辐射和热辐射的判据。依据这些判据，我们推导出相对论性标量波的普朗克谱加零点辐射。我们强调，相对论波在闵可夫斯基时空中满足共形对称性。经典零点辐射是一种随机经典辐射的光谱，它具有共形不变性。另一方面，相对论经典波场的热辐射恰由一个变量参数——温度 T——表征，该参数会随共形群的 $\sigma_{ltU^{-1}}$-膨胀而改变。因此，在经典物理学中，零点辐射和热辐射截然不同；零点辐射在 $\sigma_{ltU^{-1}}$-膨胀下不变，而热辐射则协变，会随尺度变化而改变，如 $T'=T/\sigma$，其中 σ 是正实数。关键在于在 *Rindler*系中，零点辐射和热辐射的函数形式完全相同，只有一个常数（取决于温度）不同。

X. 致谢

我谨向 Daniel C. Cole 教授致谢，感谢他审阅手稿，并指出其中含糊不清的段落和拼写错误。

---

[1] T. H. Boyer, 《谐振子的热力学：维恩位移定律与普朗克谱》, 《美国物理学杂志》**71**, 866-870（2003）。[2] T. H. Boyer, 《随机电动力学：包含经典电磁零点辐射的经典电动力学理论》, 《物理评论D辑》**11**，790-808（1975）。[3] H. A. Kastrup, 《论空间与时间的共形变换的物理解读及表示论分析》, 《莱比锡物理学年刊》**9**，388-428（1962）。[4] A. Zee, 《物理学家速成群论》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2016），第VIII.2章。[5] T. H. Boyer, 《经典电磁零点辐射的共形对称性》, 《基础物理学》**19**，349-365（1989）。[6] T. W. Marshall, 《统计电动力学》, 《剑桥哲学学会会刊》**61**，537-546（1965）。T. H. Boyer, 《不借助量子假设推导黑体辐射谱》, 《物理评论》**182**，1374-1383（1969）。[7] H. B. G. Casimir, 《论两个理想导电板之间的吸引力》, 《荷兰皇家艺术与科学学院会刊》**51**，793-795（1948）。[8] M. J. Sparnaay, 《平板之间吸引力的测量》, 《物理学》（阿姆斯特丹）**24**，751-764（1958）。[9] S. K. Lamoreaux, 《在0.6至 6 μm范围内展示卡西米尔力》, 《物理评论快报》**78**，5-8（1997）；**81**，5475-5476（1998）。[10] U. Mohideen, 《从0.1至0.9 μm范围内对卡西米尔力的精密测量》, 同上。**81**，4549-4552（1998）。[11] H. B. Chan、V. A. Aksyuk、R. N. Kleinman、D. J. Bishop和F. Capasso, 《卡西米尔力对微机电系统的量子力学驱动》, 《科学》**291**，1941-1944（2001）。[12] G. Bressi、G. Carugno、R. Onofrio和G. Ruoso, 《两者之间卡西米尔力的测量

平行金属表面之间的卡西米尔力测量》，《物理评论快报》88，041804(4)（2002）。[13] Madhav Dhital和Umar Mohideen，《近期若干卡西米尔力测量的简要回顾》，《物理学》6(2)，891-904（2024）。[14] T. H. Boyer，《普朗克常数在经典理论与量子理论中的不同作用》，《美国物理学杂志》86，280-283（2018）。[15] E. Cunningham，《电动力学中的相对性原理及其推广》，《伦敦数学学会会刊》8，77-98（1910）；H. Bateman，《电动力学方程的变换》，《伦敦数学学会会刊》8，223-264（1910）。[16] W. Rindler，《相对论基础：狭义、广义与宇宙学》第2版（施普林格出版社，纽约，1977），第49-51页。另见B. F. Schutz，《广义相对论入门》（剑桥大学出版社，1986），第150页。[17] T. H. Boyer，《二维时空中热标量辐射的经典物理学》，《美国物理学杂志》79，644-656（2011）。[18] T. H. Boyer，《随机经典辐射中的加速热效应》，《物理评论D辑》21，2137-2148（1980）。其中有一处印刷错误：式（22）中误将正确的“余弦”写成了“双曲余弦”。[19] T. H. Boyer，《从加速参考系中的热平衡推导相对论性经典标量辐射的普朗克谱》，《物理评论D辑》81，105024(10)（2010）；《经典物理学中黑体辐射谱源于零点辐射与相对论时空的结构》，《基础物理学》42，595-614（2012）；《非惯性系中的经典与量子真空态之比较》，《基础物理学》43，923-947（2013）。[20] R. C. Tolman和P. Ehrenfest，《静态引力场中的温度平衡》，《物理评论》36，1791-1798（1930）。另见R. C. Tolman，《热力学与宇宙学》（多佛出版社，纽约，1987），第318页。[21] I. S. Gradshteyn和I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》（学术出版社，纽约，1965），第494页，第12号
2026 年 3 月 20 日 RindlerPlanck6.tex