arXiv:2603.24462v1 [math.SP] 25 Mar 2026

¨强耦合区间中的连续型 Fibonacci 薛定谔算子

DAVID DAMANIK、MARK EMBREE、JAKE FILLMAN、ANTON GORODETSKI 和 MAY MEI

Abstract. 我们研究实数轴上的薛定谔算子，其势函数由 Fibonacci 替换序列以及一种将符号替换为紧支撑势片段的规则生成。我们考虑其中一个势片段恒等于零的情形，并研究大耦合区间内谱的维数。我们的结果包括对先前研究过的显式例子相关定理的推广，以及一个反例，表明对先前已建立结论的朴素推广并不成立。特别是，在非周期情形下，当耦合常数趋于无穷时，谱的局部豪斯多夫维数未必在紧致子集上一致收敛于零。

1. Introduction

1.1. 主要目标。 自 20 世纪 80 年代初被发现以来，准晶——具有长程有序而无周期性的结构——在材料科学、物理学和数学领域发挥了重要作用。缺乏周期性，同时又具有长程有序，导致其哈密顿量呈现出奇异的谱性质，例如奇异连续谱测度、分形谱和反常量子动力学输运。

Fibonacci 替换序列一直是研究一维准晶体的核心模型，其研究始于物理学文献中的早期工作，例如 [25–27, 39]，，随后数学文献中也开展了大量相关研究，包括 [10, 11, 13, 18–21, 43, 44]；另见 [15, 第 10] 章，以进一步了解斐波那契哈密顿量及其背景，以及 [2]，以进一步了解非周期序数学的背景。将频率从黄金均值的倒数改为其他无理数，会得到其他模型，此时连分数的算术性质发挥着重要作用 [23, 36, 37, 47]。这些工作研究的都是离散紧束缚模型 $\ell^2(\mathbb{Z})$。在这里，我们将注意力转向

D.D. 得到了美国国家科学基金会 DMS–2054752 和 DMS–2349919 项目的部分资助。M.E. 得到了美国国家科学基金会 DMS–2411141 项目以及加州大学伯克利分校西蒙斯计算理论研究所的部分资助。J. F. 得到了美国国家科学基金会 DMS–2513006 项目和西蒙斯基金会 MPS TSM–00013720 项目的部分资助。A.G. 得到了美国国家科学基金会 DMS–2247966 项目的部分资助。

由 $L^2(\mathbb{R})$ 给出的连续模型

$$[H_V\psi] = -\psi'' + V\psi$$

与 $V\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 关于斐波那契序列等变。人们预期，连续 Fibonacci 哈密顿算子具有许多与离散模型相同的特征；该离散模型如今已得到充分理解。不过，由于其无界性以及 Fricke–Vogt 不变量对能量的依赖，这个算子更加微妙。这类算子以及由非周期子移位生成的其他相关模型，最早于 2010 年代得到研究 [16, 31], 但许多重要问题仍未解决。文献 [16] 研究了以下情况下谱的维数： 常 势能片段处于高能、小耦合和强耦合区间。在 [16] 中，作者提出疑问：他们在常势能片段情况下推导出的谱维数渐近行为，是否对一般片段也成立。研究表明，高能和小耦合情况下的结果完全普遍成立（即适用于任意势能片段） [22], 但过去十年来，大耦合区间的情形仍未明朗。本研究的主要目标是证明，文献 [16] 中的高耦合常数 并 不适用于任意势能片段，同时在适当的正性假设下给出一个部分结果。正如我们将从论证和例子中看到的，与小耦合和高能区间相比，一般而言，大耦合情形要微妙得多。

事实上，这是本工作的关键挑战，尤其是与离散情形相比，后者已经得到了更全面的理解 [21]。更具体地说，将 $H_V = H_0 + V$ where $H_0 = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 视为... ...，可以重新理解 $H_{\lambda V}$ 是对 $\lambda^{-1}H_0 + V$ 的重标度。因此，当 λ 较大时， H_0 前面的系数较小。在离散情形中， H_0 有界，因此可以将 $\lambda^{-1}H_0 + V$ 作为对角算子 V 的扰动来有效研究。然而，在当前的连续情形中， H_0 ，因此 $\lambda^{-1}H_0$ 无界，故无论 λ 有多大，都不能将其视为对 V 的微小改变。事实上，带有遍历势能的连续薛定谔算子的大耦合渐近行为似乎普遍相当微妙，[1] 不过也有一些积极结果，例如 [6, 7, 42]。实际上，本工作所需的一项关键基础，是对周期连续薛定谔算子的李雅普诺夫指数和积分态密度（以旋转数的形式表现）的大耦合行为进行研究，而即便是这些结果似乎也是新的。

1.2. 结　果。

Fibonacci 替换序列的一个实例可以写作 as

$$\omega_n = \lfloor (n+1)\alpha + \theta \rfloor - \lfloor n\alpha + \theta \rfloor, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

其中 $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ 表示黄金均值的倒数，且 $\theta \in \mathbb{R}$。为构造相关的连续模型，我们选取函数 $f_0, f_1 \in L^2([0,1))$，并在 $\omega_n = j$ 时将 f_j 的平移副本置于 $[n, n+1)$，以此定义所得势函数

[1] 事实上，离散情形已得到充分研究；关于该情形的结果，参见例如 [1, 35, 41, 42] 。

($j = 0,1$)。更确切地说，我们考虑由下式给出的 $V_\omega = V_{f_0,f_1,\omega}$

$$V_\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{\omega_n}(x-n), \tag{1.2}$$

这里我们稍微滥用一下记号，将其延拓 f_j 为在 $[0,1$之外取零。只要 f_0 和 f_1 定义在长度不同的区间上，也可以通过适当的拼接过程构造这样的势函数；例如 [22,第 1 节2]对此进行了讨论。

我们将谱记为 $\Sigma = \Sigma(f_0,\ f_1)$，它与$\theta \in \mathbb{T}$ [16]的选取无关。在 [16], 中，作者研究了局部常值势$f_0 = 0\cdot\chi_{[0,1)}$ 和 $f_1 = 1\cdot\chi_{[0,1)}$的情形。记 $\Sigma_\lambda := \Sigma(\lambda f_0,\ \lambda f_1)$，则已在 [16,推论 6.6]中证明，对于这组选取的势函数片段，谱的局部豪斯多夫维数满足

$$\lim_{\lambda\to 0}\ \inf_{E\in\Sigma_\lambda}\ \dim_{\mathrm{H}}^{\mathrm{loc}}(E,\Sigma_\lambda) = 1, \tag{1.3}$$

$$\lim_{K\to\infty}\ \inf_{E\in\Sigma_\lambda\cap[K,\infty)}\ \dim_{\mathrm{H}}^{\mathrm{loc}}(E,\Sigma_\lambda) = 1. \tag{1.4}$$

后来，这两个结论都被推广到任意一对函数 $f_0,\ f_1$只要由 (1.1)–(1.2) 给出的势函数是非周期的[2] [22, 定理 1.3 和 1.4]。

在 $f_0 = 0\cdot\chi_{[0,1)}$ 和 $f_1 = 1\cdot\chi_{[0,1)}$的情形下，也有（参见 [16, 推论 6.7]）：

$$\text{for any compact } S\subseteq\mathbb{R},\ \text{we have } \lim_{\lambda\to\infty}\dim_{\mathrm{H}}(\Sigma_\lambda\cap S) = 0. \tag{1.5}$$

这类维数方面的结论颇为有用，因为它们与量子动力学问题相关 [30] ，并且使人们能够（通常需要付出更多努力）获取有关高维模型 [17]的信息。

本文旨在研究（1.5）能否推广，以及这一结论成立还需要哪些附加条件。我们的首个主要结果表明，将以往工作自然地推广到任意势函数片段的做法，在相当彻底的意义上是错误的。记 $C_0([0,1]$为满足以下条件的连续函数$[0,1]\to\mathbb{R}$： $f(0) = f(1) = 0$（并注意，这会产生（ V_ω1.2）中的连续函数。）

The定理 1.1。存在 $f_0\neq f_1\in C_0([0,1])$、 $E\in\mathbb{R}$和 $\lambda_k\uparrow\infty$， 使得

$$E\in\Sigma_{\lambda_k}\ \textit{and}\ \dim_{\mathrm{H}}^{\mathrm{loc}}(\Sigma_{\lambda_k},E) = 1\quad\forall k. \tag{1.6}$$

注 1.2。

(a) 我们再次强调，假设 $f_0\neq f_1$ 意味着由此得到的势函数是非周期的，因此该定理的内容并非平凡。(b) 对于谱中那些测度为零但具有完整局部 Hausdorff 维数的点，“伪带”这一术语最早见于 [3], ，该文研究了 Fibonacci 势函数的 Kronig–Penney 模型；相关结果另见 [28] 。从这个意义上说，定理 1.1中所述的能量可以被

[2]当所得的势为周期性势，即 $f_1 = f_0$ 时，这些结论显然成立。

视为“伪带”，并且在耦合常数任意增大时依然存在。

对于任意紧集 S 包含 E 于其内部，(1.6) 蕴含 $\dim_{\mathrm{H}}(\Sigma_{\lambda_k} \cap S) = 1$对任意 k均成立，因此，特别地，(1.5) 不成立。尽管如此，在适当的定号假设下，仍有一个部分结果成立。

定理 1.3。 设 $f_0 = 0 \cdot \chi_{[0,1)}$， f_1 是连续且非负的，并且 $\{x : f_1(x) = 0\}$ 在 $[0,1]$中无处稠密。在这种情况下，(1.5) 成立。

图 1展示了两个连续体斐波那契算子的周期近似谱（无界）的下部。在这两种情况下， $f_0 = 0 \cdot \chi_{[0,1)}$。左侧， $f_1 = 1 \cdot \chi_{[0,1)}$；右侧 $f_1(x) = \exp(1 + 1/((2x-1)^2 - 1))$，一个 C^∞ 隆起函数，它在整个 $\mathbb{R}$上给出了连续势函数。（我们将在第 4 节讨论用于生成这些图的数值计算。）

注 1.4. 集合 $\{f_1 = 0\}$ 包含某些区间的情形似乎更为复杂；若在这种情形下满足 (1.5)，证明将需要其他论证。事实上，不难看出，在这种情形下，引理 3.1的结论对 $\varphi = f_1$不再成立。

我们在第3 节给出主要定理的证明，之前会在第2节回顾一些背景知识。构造一个（族）反例相当精细，需要对大耦合区间内周期薛定谔算子情形下的 Lyapunov 指数和旋转数进行颇具挑战性的渐近分析。我们认为，为此证明所推导出的渐近行为即使独立于本文的主要结果，也可能具有一定的参考价值。我们需要一个

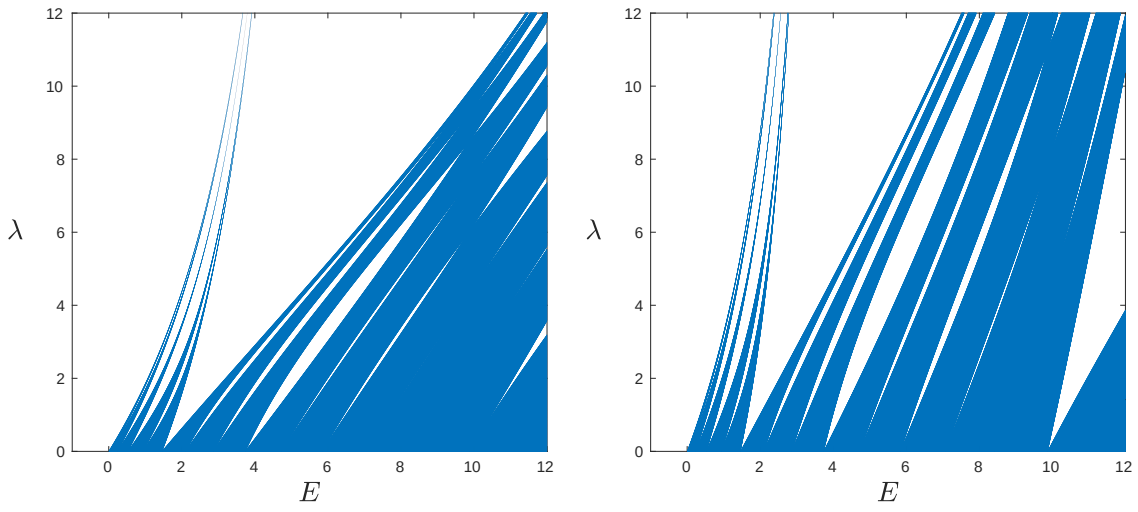

FIGURE 1. 两个连续型斐波那契算子的周期近似（周期为 $p = 13$）的谱下部，其中$f_0 = 0 \cdot \chi_{[0,1)}$， f_1 为常数（左图）， C^∞ 为在 $x \in (0,1)$ 上为正的隆起函数（右图）。对于每个 λ 值，对应的谱都是图中的一条水平切片。

关于 SL(2, $\mathbb{R}$) 矩阵扩张方向的特定事实，我们将在附录A中回顾。第4节将简要回顾 Floquet 理论，以刻画周期近似的谱；随后说明对于分段常数势，这类谱如何描述为一个依赖参数的有限维非线性特征值问题的解。

Acknowledgments

我们感谢美国数学研究所（American Institute of Mathematics）在最近一次 SQuaRE 会议期间给予我们的支持与款待，我们的部分工作正是在会议期间完成的。

2. Background

2.1. 子移位。 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限集合，称为字母表。赋予 $\mathcal{A}$ 离散拓扑，并为全移位 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} := \{(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \omega_n \in \mathcal{A} \text{ （对所有 } n \in \mathbb{Z}\} \text{ ）}$ 赋予相应的乘积拓扑。移位

$$[T\omega]_n \overset{\text{def}}{=} \omega_{n+1}, \quad \omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}},\ n \in \mathbb{Z},$$

将 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 映射到自身，并构成一个同胚。若子集 $\Omega \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 满足 T-不变，即 $T^{-1}\Omega = \Omega$，则称其为 T-不变集。$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的任何紧致 T-不变子集都称为子移位。

我们可以将势函数（从而也将薛定谔算子）与子移位中的元素关联起来，具体如下。对每个 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们固定一个实值函数 $f_\alpha \in L^2([0,1))$。然后，对任意 $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，我们将连续型薛定谔算子$H_\omega$ 在 $L^2(\mathbb{R})$中的作用定义为

$$H_\omega = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_\omega, \tag{2.1}$$

其中势函数 $V_\omega = V_{\{f_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\},\omega}$ 定义为

$$V_\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{\omega_n}(x-n), \tag{2.2}$$

其中，与前文一样，f_α 在 $[0,1)$ 之外延拓为零。这些势属于$L^2_{\text{loc,unif}}(\mathbb{R})$，因此每个 H_ω 都以规范的方式定义了一个作用于$L^2(\mathbb{R})$ 的稠密子空间上的自伴算子。

2.2. 斐波那契子移位。本文研究上述构造的一个特殊情形，即由斐波那契子移位中的元素生成的势。在这种情况下，字母表包含两个符号，$\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{0,1\}$。斐波那契代换是映射

$$S(0) = 1,\ S(1) = 10.$$

此映射可通过串接扩展到 $\mathcal{A}^*$，即 $\mathcal{A}$ 上的自由幺半群（也就是由 $\mathcal{A}$ 构成的有限词集合），以及 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$，即由 $\mathcal{A}$ 构成的（单侧）无限词集合。存在唯一的元素

$$u = 1011010110110\ldots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

满足 $u = S(u)$。容易验证，对于 $n \in \mathbb{N}$， $S^n(1)$ 是 $S^{n+1}(1)$ 的前缀。因此，可以将 u 看作有限词序列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限（取 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 上的乘积拓扑）。斐波那契子移位由所有与 u 具有相同局部因子结构的双侧无限词组成，也就是说，

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \text{every finite subword of } \omega \text{ is also a subword of } u\}.$$

读者可能会注意到，这似乎与（1.1）中引入的范式不同，但请放心，这两个定义是兼容的。[3] 给定实值函数 f_0， $f_1 \in L^2([0,1)$，我们考虑由（¨定义的连续薛定谔算子族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$（2.1）和（2.2）给出。由于（Ω T）是一个极小动力系统，因此存在一个一致闭集 $\Sigma = \Sigma(f_0, f_1) \subseteq \mathbb{R}$ 满足以下性质

$$\operatorname{spec}(H_\omega) = \Sigma \text{ for every } \omega \in \Omega.$$

当然，可以取 $f_0 = f_1$，这意味着每个 V_ω 都是周期势，此时 Floquet 理论表明，谱是若干非退化闭区间的并，因此尤其不是无处稠密的。文献 [16]的主要结果是，势的周期性 V_ω 是康托尔谱唯一可能的障碍。稍后我们将专门讨论情形 $f_0 \equiv 0$。在这种情况下，要确保每个 V_ω 都是非周期的，只需要求 $f_1 \not\equiv 0$ 在 L^2 中（即 f_1 几乎处处不为零）。

定理 2.1 (DFG [16,推论 5。5])。 令 Ω 表示定义在$\mathcal{A} = \{0,1\}$上的 ***Fibonacci*** 子移位。若势函数片段 f_0 和 f_1 的选取使得 V_ω 对某个 $\omega \in$Ω (因而由极小性，对每个 $\omega \in$Ω 都成立)，则 Σ 是一个扩展康托尔集[4]，且勒贝格测度为零。

我们也通过归纳定义 $\ell_k > 0$ 和 $f_k \in L^2([0,\ell_k))$，定义如下：

$$\ell_0 = \ell_1 = 1, \quad \ell_k = \ell_{k-1} + \ell_{k-2} \tag{2.3}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} f_{k-1}(x), & 0 \le x < \ell_{k-1}; \\ f_{k-2}(x - \ell_{k-1}), & \ell_{k-1} \le x < \ell_k. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.3. **谱的迹映射、不变量与局部维数。** 连续斐波那契模型的谱（以及许多谱特征）可以通过一个相关的 $\mathbb{R}^3$上的多项式微分同胚来编码，称为迹映射。下面我们沿用 [16, 22]，明确说明这种对应关系。

To 首先，我们需要建立一些记号。考虑微分方程

$$-y''(x) + f(x)y(x) = Ey(x), \quad E \in \mathbb{C}, \quad x \in I, \tag{2.5}$$

其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，且 $f \in L^2_{\text{loc}}(I)$。给定 $a \in I$，我们记 $u_{f,\,E,\,a}$，$v_{f,\,E,\,a}$ 为满足初始条件

$$u_{f,E,a}(a) = v'_{f,E,a}(a) = 1 \text{ and } u'_{f,E,a}(a) = v_{f,E,a}(a) = 0. \tag{2.6}$$

[3]感兴趣的读者可参阅，例如 [15, 第 10] 章或 [32, 第 2] 章，以详细了解两种视角之间的联系。[4]也就是说，这是一个闭集（但不一定紧致）、完美且无处稠密的集合。

对于 a, $b \in I$，我们接着将传递矩阵 $\mathbf{T}_{[a,b]}(f,\ E)$ 定义为

$$\mathbf{T}_{[a,b]}(f,E) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v'_{f,E,a}(b) & u'_{f,E,a}(b) \\ v_{f,E,a}(b) & u_{f,E,a}(b) \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

并注意到 $\mathsf{T}_{[a,a]}(f,E) = \mathsf{I}$，$\mathsf{T}_{[b,c]}(f,E)\mathsf{T}_{[a,b]}(f,E) = \mathsf{T}_{[a,c]}(f,E)$（由方程 (2.5) 的解的存在唯一性可知），且对任意 a, b, c, f, E，$\det \mathsf{T}_{[a,b]}(f,E) = 1$。

回到斐波那契情形，我们将单值矩阵定义为

$$\mathbf{M}_k(E) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{[0,\ell_k]}(f_k, E), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ E \in \mathbb{C},$$

其中 ℓ_k 且 f_k 如式（2.3）–（2.4）所示。其半迹记为

$$x_k(E) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_k(E)) = \frac{1}{2}\left(u_{f_k,E,0}(\ell_k) + v'_{f_k,E,0}(\ell_k)\right), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ E \in \mathbb{R}.$$

根据定义（以及方程（2.5）解的存在唯一性），可知

$$\mathbf{M}_k(E) = \mathbf{M}_{k-2}(E)\mathbf{M}_{k-1}(E),$$

借助凯莱–哈密顿定理可得

$$x_{k+1} = 2x_k x_{k-1} - x_{k-2} \tag{2.8}$$

对于所有相关的 k。我们可以用如下多项式映射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 表示这一递归：迹映射定义为

$$\mathsf{T}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} (2xy - z, x, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

并且，根据（2.8），可得

$$\mathsf{T}^k(x_2, x_1, x_0) = (x_{k+2}, x_{k+1}, x_k), \quad k \geq 0. \tag{2.9}$$

因此，由 $\gamma(E) \overset{\text{定义}}{=} (x_2(E)\ x_1(E)\ x_0(E))$ 给出的函数 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 称为初始条件曲线。

已知映射 T 有一个第一积分，即所谓的 ***Fricke–Vogt*** 不变量，其定义为

$$I(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

更准确地说，$I \circ \mathsf{T} = I$，因此 T 保持 I 的等值面：

$$S_V \overset{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : I(x,y,z) = V\}, \quad V \in \mathbb{R}.$$

因此，所有形如 $\mathsf{T}^k(x_2(E)\ x_1(E)\ x_0(E))$ 且满足 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的点都位于曲面 $S_{I(\gamma(E))}$ 上。为方便起见，我们记

$$I(E) \overset{\text{def}}{=} I(\gamma(E)) = I(x_2(E), x_1(E), x_0(E)),$$

稍有记号滥用。综合以上各点：

$$I(x_{k+1}(E), x_k(E), x_{k-1}(E)) = I(\gamma(E)) \tag{2.10}$$

对于每个 E 以及每个相关的 k。

当 $V < 0$ 时，集合 S_V 有五个连通分支：一个与二维球面 S^2 微分同胚的紧致连通分支，以及四个无界连通

分支，每个都与开单位圆盘微分同胚。当 $V = 0$ 时，四个无界分支中的每一个都与紧致分支相交，形成四个圆锥奇点。一旦 $V > 0$，这些奇点便会消解；对于这样的 V，曲面 S_V 是光滑且连通的，并与四孔二维球面微分同胚。

迹映射在研究类型为 (2.1 的算子时十分重要，其动力学谱定义为

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{E \in \mathbb{R} : \{\mathsf{T}^k(\gamma(E)) : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \text{ is bounded}\right\},$$

编码了 H的算子论谱，这一点最初由 S¨ut″在离散情形中证明 [43]。

命题 2.2 (DFG [16, 命题 6.3])。 $\Sigma = B$。

连续情形与离散情形之间存在若干重大差异。首先，在离散情形中，Fricke–Vogt 不变量是常数（将其视为关于 E、 $I = I(E)$ 的函数）。然而，在连续情形中，不变量可能依赖于 E，并非平凡； [16]中的例子展示了这一点。这种依赖与连续情形中出现的新现象有关，也使得研究连续情形颇具价值。此外，我们将在命题 2.5 中证明，这种依赖是连续情形不可避免的特征：只要势是非周期的，函数 I 就必定不是常数。

其次，离散情形下 Fricke–Vogt 不变量始终非负（即使在谱之外也是如此），但不能先验地排除 I在连续情形下为负的可能性。然而，文献 [16] 证明了，任何满足$I(E) < 0$ 的能量都必须属于相应连续 Fibonacci 哈密顿算子的预解集。

命题 2.3 (DFG [16, 命题 6.4])。对每个 $E \in \Sigma$，都有 $I(E) \geq 0$。

为研究谱的分形维数，我们将使用以下定理。该定理出自 [16], ，它将谱中能量 E 附近的局部分形特征与 E 处的不变量值联系起来。

定理 2.4 (DFG [16, 定理 6.5])。存在一个连续映射 $D : [0, \infty) \to (0, 1]$ ，它在 $\mathbb{R}_+$ 上实解析，并具有以下性质：

(i) 维数$^{\text{loc}}{}_{\text{H}}(\Sigma; E) = D(I(E))$ 对每个 $E \in \Sigma$;

(ii) 我们有 $D(0) = 1$ 以及 $1 - D(I) \sim \sqrt{I}$ 当 $I \downarrow 0$ 时；(iii) 我们有$\lim_{I \to \infty} \frac{D(I)}{\text{对数 } I} = \frac{2}{\text{对数}(1+\sqrt{2})}$.

因此，要研究谱的局部分形维数，只需理解不变量 I。

让我们回到上文提到的一个难点：在当前设定下，不变量原则上可能是非常数（能量的函数）。事实上， I 不仅可能是非常数；当且仅当 $f_0 \neq f_1$ 时，它才是非常数（即，势 V_ω 是非周期的）。

命题 2.5. 在上述设定下， $I(E)$ 是常数，当且仅当 $f_0 = f_1$，此时它恒等于零。

证明。 借助凯莱–哈密顿定理，可以验证

$$I(\tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{A}, \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{B}, \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{AB}) = \tfrac{1}{4}(\operatorname{Tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}) - 2), \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}). \tag{2.11}$$

特别地，对于 $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$,

$$I(\tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{A}, \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{B}, \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{AB}) = 0 \text{ whenever } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}. \tag{2.12}$$

一方面，若 $f_0 = f_1$，则 $\mathbf{M}_0(E) = \mathbf{M}_1(E)$，它们显然对每个$E$都可交换，从而得到 $I \equiv 0$。

另一方面，若 I 为常数，那么根据 [22, 第 3], 节，该常数必为零。由此，证明 $f_0 = f_1$ 与 [9, 定理 2.1]的证明相似，并受其启发。为使本文自成一体，我们给出详细证明。考虑$E \in \mathbb{R}$。由（2.11）可得 $\operatorname{Tr}\left(\mathbf{M}_0(E)^{-1}\mathbf{M}_1(E)^{-1}\mathbf{M}_0(E)\mathbf{M}_1(E)\right) = 2$; 由于涉及的所有矩阵均属于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，因此这意味着

$$[\mathbf{M}_0(E), \mathbf{M}_1(E)] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_0(E)\mathbf{M}_1(E) - \mathbf{M}_1(E)\mathbf{M}_0(E)$$

具有非平凡核，因此$\mathbf{M}_0(E)$ 和 $\mathbf{M}_1(E)$ 至少有一个公共特征向量，这是线性代数中的标准论证（参见 [40, 定理 405]的证明）。现在，对于每个 E 使得 $\mathbf{M}_0$ 为椭圆型的情形，其特征向量可选为互为复共轭，因此，对于所有这类$\mathbf{M}_0(E)$ 和 $\mathbf{M}_1(E)$ 可同时对角化 E。因此，

$$\mathbf{M}_0(E)\mathbf{M}_1(E) - \mathbf{M}_1(E)\mathbf{M}_0(E) \tag{2.13}$$

是关于 E 的解析函数，它在一个非退化闭区间上为零，因此恒等于零。

等价地，$\mathbf{T}^{[0,2]}(f_0 \star f_1, E) \equiv \mathbf{T}^{[0,2]}(f_1 \star f_0, E)$，其中记 $f_0 \star f_1$ 为.....的拼接，由 f_0 和 f_1 (比较（2.4）)。根据博格–马尔琴科定理（参见[5, 8, 34]），可得 $f_0 \star f_1 \equiv f_1 \star f_0$，从而 $f_0 = f_1$。
□

3. Proofs of Main Results

我们先给出一个关于大耦合区域内非负势函数的预备结果。下述引理强调，只要势函数 φ 不在任何非平凡区间上恒为零，结论就成立（不过，它允许在一个正测度集合上为零）。

引理 3.1。 假设 $\varphi\colon [a,b] \to [0,\infty)$ 是连续的，且 $\{x\colon \varphi(x) = 0\}$ 在 $[a,b]$ 中无处稠密。令 $\mathbf{M}_{E,\lambda} = \mathbf{T}^{[a,b]}(\lambda\varphi, E)$ 为与下列方程相关的单值矩阵

$$-y''(x) + \lambda\varphi(x)y(x) = Ey(x), \ x \in [a,b], \tag{3.1}$$

定义见 (2.7)。则对于任意 $K \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\operatorname{Tr}\mathbf{M}_{E,\lambda} \to \infty \ as \ \lambda \to \infty,$$

关于 $E \le K$ 一致。特别地，当 λ 足够大时，$\mathbf{M}_{E,\,\lambda}$ 是双曲的。

为证明引理 3.1，我们将一些主要的比较估计进一步拆分为三个引理。

引理 3.2. 设

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad x \in [a,b]$$

是一个具有非负元素的连续矩阵值函数，并且

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

是一个具有非负元素的常矩阵，满足 $b_{ij} \le a_{ij}(x)$， $i,j = 1,2$ 对所有 $x \in [a,b]$均成立。设 $w \in \mathbb{R}^2$ 是一个非零向量，满足 $w_1 \ge 0, w_2 \ge 0$，并考虑柯西问题的解 y 和 z：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)y, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathbf{B}z, \qquad y(a) = z(a) = w.$$

那么对所有 $x \in [a,b]$，均有 $y_i(x) \ge z_i(x)$， $i = 1,2$。

证明。 不妨考虑 $a = 0$的情形。注意， z的柯西问题的解为 $z(x) = e^{xB}w$ ，而 $y - z$ 的柯西问题可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y-z) = \mathbf{A}(x)(y-z) + (\mathbf{A}(x) - \mathbf{B})z, \quad (y-z)(0) = 0.$$

根据对 $\mathbf{A}(\cdot)$、$\mathbf{B}$ 和 w 的假设可知，对于所有 x， $y(x) - z(x)$ 的元素均为非负。□

引理 3.3。 设 $m \ge 1$ ，并令 $y(x) = [y_1\ y_2]^\top$ 是下列方程的一个解

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

使得 $y_1(a) \ge 0$ 且 $y_2(a) \ge 0$。那么，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(y_1^2 + y_2^2) \ge 2(1+m)(y_1^2 + y_2^2). \tag{3.3}$$

证明。 记 $R = y_1^2 + y_2^2$ ，并通过对（3.2）进行直接计算可得

$$\begin{aligned} R'' = 2\big[(y_1')^2 + y_1y_1'' + (y_2')^2 + y_2y_2''\big] &= 2\big(m^2y_2^2 + my_1^2 + y_1^2 + my_2^2\big) \\ &\ge 2(1+m)(y_1^2 + y_2^2), \end{aligned} \tag{3.4}$$

如前所述。 □

引理 3.4。 设 $k > 0$ ，且 $R(x)$、 $x \in [a,b]$ 是一个 C^2-函数，使得

$$\begin{cases} R'' \ge kR, \\ R' \ge 0, \\ R(a) = R_0 > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

那么，对于所有 $x \in [a,b]$， $R(x) \ge \frac{R_0}{2}\left(e^{\sqrt{k}(x-a)} + e^{-\sqrt{k}(x-a)}\right)$。

证明。 对于一个较小的 $\varepsilon > 0$, 考虑一个相关系统 $S'' = kS$, 其初始条件为$S(a)$ $= R_0 - \varepsilon > 0$ 和 $S'(a) = 0$。于是我们有

$$S(x) = \frac{R_0 - \varepsilon}{2}\left(e^{\sqrt{k}(x-a)} + e^{-\sqrt{k}(x-a)}\right).$$

如果 $T(x) = R(x) - S(x)$, 那么我们有 $T'' \geq kT$, $T'(a) \geq 0$, $T(a) = \varepsilon > 0$, 由此可见, 对于所有 $x \in [a, b]$, $T(x) \geq \varepsilon > 0$。因此,

$$R(x) \geq \frac{R_0 - \varepsilon}{2}\left(e^{\sqrt{k}(x-a)} + e^{-\sqrt{k}(x-a)}\right).$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意小, 这就得到了所需的估计。 □

现在我们利用这些结果来证明第一个主要技术引理。

引理 *3.1*的证明。 考虑定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的非自治流

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda\varphi(x) - E \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

并注意到, 当且仅当 $(y', y)^\top$ 是 (3.6) 的解时, y 才是 (3.1) 的解。于是, 狄利克雷解（即满足 $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$ 的解）对应于向量 $(1,0)^\top$ 的动力学, 而诺伊曼解（$y(a) = 1$, $y'(a) = 0$）对应于向量 $(0,1)^\top$ 的动力学。

对于任意向量 $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, 以及任意来自 $[a, b]$ 的 $x_1 < x_2$, 记为

$$F_{[x_1,x_2]}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{[x_1,x_2]}(\lambda\varphi, E)u \in \mathbb{R}^2 \tag{3.7}$$

(3.6) 的解在时刻 x_2, 初始条件为 $y_1(x_1) = u_1$, $y_2(x_1) = u_2$。对于 $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, 定义锥

$$V_t \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \arg v \in \left(0, \frac{\pi}{2} + t\right)\right\}.$$

固定一个很小的 $s > 0$。我们将把证明分成若干个断言。

断言 1. 存在 $\varepsilon = \varepsilon(\varphi, K, s) > 0$, 使得对于任意 $E \leq K$ 和任意 $\lambda \geq 0$, 以下结论成立:

(a) 对于任意向量 $w \in V_0$ 以及任意满足 $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ 的 $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$, 有$F_{[x_1,x_2]}(w) \in V_s$。 (b) 对于任意向量 $w \in V_{-s}$ 以及任意满足 $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ 的 $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$, 有$F_{[x_1,x_2]}(w) \in V_0$。 (c) 在这两种情形下, $|F_{[x_1,x_2]}(w)| > \frac{1}{2}|w|$。

–

断言的证明。假设不失一般性地 $K \geq 1$。考虑 $w \in V_0$ 以及解 $y = (y_1, y_2)^\top$ （3.6）中满足 $y(x_1) = w$。将 $y(x) = (y_1(x)\ y_2(x))^\top$ 用极坐标表示为

$$y_1(x) = r(x)\cos\theta(x), \quad y_2(x) = r(x)\sin\theta(x), \tag{3.8}$$

w其中 $r \geq 0$ 和 θ 在 x 中连续选取，且 $\theta(x_1) \in (0, \pi/2)$。注意到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2 + y_2^2} = \frac{y_1^2 - (\lambda\varphi - E) y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} = \cos^2\theta - (\lambda\varphi - E)\sin^2\theta. \tag{3.9}$$

根据选择 取 $K, \theta'(x) \leq K$，在 x 中一致成立。因此，若 $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon \leq s/(2K)$，

$$\arg F_{[x_1,x_2]}(w) = \theta(x_2) \leq \arg w + K\varepsilon < \arg w + s.$$

此外，(3.9) 还意味着 $\theta'(x) > 0$ 若 $\theta(x) > 0$ 足够小。结合这两个观察可知，任意满足 $\varepsilon > 0$ 且 $\varepsilon \leq s/(2K)$ 的对象都满足 (a) 和 (b)。

为处理 (c) 部分，首先注意到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{r}(y_1 y_1' + y_2 y_2') = r\cos\theta\sin\theta(\lambda\varphi - E + 1). \tag{3.10}$$

因此，对于任意满足 $\theta(x) \in [0, \pi/2]$ 的 x，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log r = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \geq -K. \tag{3.11}$$

为处理 $\theta(x) \in (\pi/2, \pi/2 + s)$ 这一情形，首先注意到，结合 (3.9) 和 (3.10) 可得

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \lambda\varphi - E + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x},$$

因此

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

D记 $x \in (x_1, x_2$ 其中 θ x $>)\pi$ 2由 $(_i, b_i)$ $\equiv\bigcup I_i$ 表示的集合。我们有

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &= -\int_{a_i}^{b_i} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \int_{a_i}^{b_i} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}x \\ &\geq -\int_{\theta(a_i)}^{\theta(b_i)} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta - |I_i|\left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + s\right)\right|.\end{aligned}$$

对于任意满足 $\theta(a_i) = \theta(b_i)$ 的 I_i，第一项会消失。否则，第一项非负，因此可得

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \geq -|I_i|\left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + s\right)\right| \geq -3s|I_i| \tag{3.12}$$

当 $s > 0$ 足够小时。

将 (3.11) 与 (3.12) 合并，即得所需结果。 ♢

断言 2。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在区间 $[a, b]$ 的一个划分，

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b,$$

使得

(a) 对于每个 i，都有 $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$；(b) 如果 $\varphi(t) = 0$ 对于某个 $t \in (t_i, t_{i+1})$ 成立，那么在与 $[t_i, t_{i+1}]$ 相邻的划分中的任意区间上，$\varphi > 0$ 都成立。

断言的证明。取 $[a,b]$ 的一个划分 $a=s_0<\cdots<s_M=b$，使其由长度至多为 $\varepsilon/2$ 的区间组成。于是，对每个 $j=1,\ 2,\ \ldots,\ M$，假设 $\varphi^{-1}(\{0\})$ 无处稠密，便可选取一个非退化区间 $[t_{2j-1},t_{2j}]\subseteq(s_{j-1},\ s_j)$，使得 φ 在其上为正；令 $t_0=a$、$N=2M+1$ 和 $t_N=b$，即可得到所需的 $\{t_i\}$。$\diamondsuit$

断言 3。 若区间 $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$ 满足 $\varphi>0$ 在整个 $[x_1,x_2]$ 上成立，则存在 $\lambda_0=\lambda_0(x_1,\ x_2,\ \varphi,\ K,\ s)$，使得对于任意 $\lambda\geq\lambda_0$ 和任意 $w\in V_s$，都有$F_{[x_1,x_2]}(w)\in V_{-s}$。此外，当 $\lambda\to+\infty$ 时，$|F_{[x_1,x_2]}(w)|\geq\frac{1}{2}|w|$。

断言的证明。取 $C=C(x_1,\ x_2,\ s)>0$ 足够大，使得

$$\sin^2(2s)-C\cos^2(2s)<-4s(x_2-x_1)^{-1}. \tag{3.13}$$

由于 φ 是连续的，因此我们可以选取 $\lambda_0>0$ 足够大，使得 $\lambda\varphi(x)-E\geq C$在整个 $[x_1,x_2]$ 上对所有 $\lambda\geq\lambda_0$均成立。对于任意满足 $x\in[x_1,x_2]$ 且 $|\theta(x)-\pi/2|<2s$ 的 3.9，即可推出

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\cos^2\theta-(\lambda\varphi-E)\sin^2\theta\leq\sin^2(2s)-C\cos^2(2s)<-4s(x_2-x_1)^{-1}. \tag{3.14}$$

利用（3.14）可知，对于任意 $w\in V_s\backslash V_{-s}$，都有 $\arg F_{[x_1,x_2]}(w)<\frac{\pi}{2}-s$。回想一下，当 $\theta'>0$ 足够小的时候，$\theta>0$，这就证明了该断言的第一部分。

现在来证明该断言的第二部分。假设 $w\in V_s\backslash V_{-s}$（否则无需证明，因为当 $r(x)$ 递增，若 $\theta(x)\in(0,\ \pi/2)$ 且 λ 足够大；见（3.10））。由（3.9）和（3.10），对于 $\theta\in\left[\frac{\pi}{2}-s,\frac{\pi}{2}+s\right]$ 且 λ 充分大，有

$$\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|=\left|\frac{r\cos\theta\sin\theta(\lambda\varphi-E+1)}{\cos^2\theta-(\lambda\varphi-E)\sin^2\theta}\right|\leq\frac{r|\cos\theta|}{\left|\frac{\cos^2\theta}{1+\lambda\varphi-E}-\frac{\lambda\varphi-E}{1+\lambda\varphi-E}\sin^2\theta\right|}\leq 2r|\cos\theta|.$$

因此，若 $w\in V_s\backslash V_{-s}$，则

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log r\right|\leq 2|\cos\theta|\leq 2\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|\leq 2s.$$

令 $r_0=|w|$ 和 $r_1=|F_{[x_1,x^*]}(w)|$，其中 $x^*\in[x_1,x_2]$ 满足 $\theta(x^*)=\frac{\pi}{2}-s$。于是有 $\log r_1\geq\log r_0-4s^2$，且 $r_1\geq e^{-4s^2}r_0\geq\frac{1}{2}r_0$，因为 s 很小。由于当 $\theta(x)\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$r(x)$递增，因此可得 $|F_{[x_1,x_2]}(w)|\geq\frac{1}{2}|w|$。$\diamondsuit$

断言 4. 若区间 $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$ 满足：对于所有 $x\in[x_1,x_2]$，$\varphi(x)>0$，则对任意 $w\in V_0$，有 $|F_{[x_1,x_2]}(w)|\to+\infty$，当 $\lambda\to+\infty$ 时，该式关于 $E\leq K$ 一致成立。

断言的证明。该断言可通过将引理 3.2、3.3 和 3.4 应用于（3.6），并采用向量 w 给出的初始条件得出。$\diamondsuit$

综上所述，这些结论表明，单值矩阵 $\mathbf{M}_{E,\lambda}$ 可以表示为若干矩阵的乘积，使得应用该乘积中的第一个或前两个矩阵后，每个单位坐标向量的像都位于第一象限，并且之后始终留在其中；此外，通过选取足够大的 λ，可以使它们的像任意大。这意味着，当 $\lambda\to\infty$ 时，$\mathrm{Tr}\mathbf{M}_{E,\lambda}\to\infty$，且该结论关于 $E\leq K$ 一致。$\square$

利用引理 3.1，我们现在可以证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。固定一个 $S \subseteq \mathbb{R}$紧集，并记 $\mathsf{A} = \mathsf{M}_0$ 和 $\mathsf{B} = \mathsf{M}_1$。注意，$\mathsf{A}$ 与 λ无关；若能量 E 限制在一个固定紧集 S内，则 A 一致有界：存在 $M = M(S) > 1$，使得对每个 $E \in S$都有$\|\mathsf{A}(E)\| \le M$。取 $K \gg M > 1$ 充分大。由引理 3.1 可知，当 λ 足够大时，对所有 $E \in S$ 都有 $|\mathrm{Tr}(\mathsf{B}(E,\lambda))| > 2K$。现在分两种情形讨论。

情形 1： $|\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})| > 2K^{1/3}$。那么，我们有

$$|x_2| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{AB})\right| > K^{1/3}, \quad |x_1| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{B})\right| > K, \quad |x_0| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{A})\right| \le M,$$

其中 $K \gg M$。由此可知，相应的能量 E 具有无界的迹轨道（前提是 K 足够大），根据标准论证（例如 [15, 定理 10.5。4]），因此根据命题 2.2，它不属于谱。

情形 2： $|\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})| \le 2K^{1/3}$。像之前一样定义 $\{x_k\}$，我们有

$$|x_2| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{AB})\right| \le K^{1/3}, \quad |x_1| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{B})\right| > K, \quad |x_0| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{A})\right| \le M,$$

我们可以估计 Fricke–Vogt 不变量的值：

$$I = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1x_2 - 1 \gtrsim K^2.$$

因此，若 $E \in S$ 属于谱，则可通过定理 2.4从上方估计 E 处的局部豪斯多夫维数，且 Hausdorff 维数的上界会随着 $\lambda \to \infty$ 趋于零，因为 $K \to \infty$ 当 $\lambda \to \infty$ 时。□

现在我们转而证明定理 1.1。实际上，我们将证明 C^1 正负交替变化的函数构成一族反例。

定义 3.5。 我们称 $f \in C^1([0,1])$ 为一个分裂函数，若 $f(0) = f(1) = 0$，并且存在 $x_* \in (0,1)$ 使得

(1) $f(x) > 0$ 对于 $0 < x < x_*$；
(2) $f(x) < 0$ 对于 $x_* < x < 1$；
(3) $f'(x_*) < 0$ 且 $f'(1) > 0$。

注意，这些假设迫使 $f(x_*) = 0$。

定理 3.6。 假设 $f_0 = 0 \cdot \chi_{[0,1)}$ 且 $f_1 \in C^1([0,1])$ 是一个分裂函数。那么，存在 $E \in \mathbb{R}$，$\lambda_k \uparrow \infty$ 使得 $E \in \Sigma_{\lambda_k} := \Sigma(\lambda_k f_0, \lambda_k f_1)$ 并且

$$\dim_{\mathrm{H}}^{\mathrm{loc}}(\Sigma_{\lambda_k}, E) = 1 \tag{3.15}$$

对所有 k。

注 3.7. 我们推测，定理 3.6在定义分裂函数时去掉假设 (3) 后仍然成立，但很可能需要采用不同的论证。

按照引理 3.1证明中的方法，将非自治流 (3.6的解写成极坐标形式，并引入 $L=$ 对数 r，则 (3.9) 和 (3.10) 可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1-(\lambda\varphi - E + 1)\sin^2\theta, \\ \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \cos\theta\sin\theta(\lambda\varphi - E + 1). \end{cases} \tag{3.16}$$

我们分别考虑该系统在区间 (0， x_*) 和 (x_*， 1) 上的解。下面的论证会涉及各种可能依赖于f 和 E、但必须与 λ无关的常数。对于这样的常数 C，若 $f \le Cg$ ，我们记作 $f \lesssim g$ ；若 $f \lesssim g$ 和 $g \lesssim f$均成立，则记作 $f \asymp g$ 。这里我们强调，下面引理3.8–3.13 （最终）的应用针对的是固定能量，因此，存在依赖于能量的常数并不会妨碍我们预期的应用。

引理 *3.8.* 假设 φ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b)上严格为正，并固定 $E\in\mathbb{R}$。则 $L(b) - L(a) \gtrsim \sqrt{\lambda}$，其中 $L(x)$ 是系统 *(3.16)* 的任意一个解，且满足 $\theta(a) \in (0,\pi/2)$。

证明。 不失一般性，考虑 $L(a) = 0$。假设 $\theta(a) \in (0, \pi/2)$ 给出 $y(a)\ y'(a) > 0$。首先考虑 φ 在$[a,b]$上严格为正的情形。根据假设，我们可以选取 $C_2 > C_1 > 0$ ，使得对于所有充分大的 λ ，对所有 $x\in[a,b]$，都有

$$C_1\lambda < \lambda\varphi(x) - E + 1 < C_2\lambda.$$

注意，对于这样的 λ，方程（3.16）θ^*（x）右端的任何零点都必须满足

$$\frac{1}{\sin^2\theta^*(x)} = \lambda\varphi(x) - E + 1 \in (C_1\lambda, C_2\lambda). \tag{3.17}$$

我们选取 θ^*（a） $\in(0,\ \pi/2)$ ，然后在 θ^*（a，b）上连续选取。根据（3.17），注意到存在常数 $C_2' > C_1' > 0$ ，使得对于所有 x 以及 λ 所考虑的情形：

$$\theta^*(x) \in \left(\frac{C_1'}{\sqrt{\lambda}}, \frac{C_2'}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{3.18}$$

我们还注意到，如果 $\sin^2\theta(x) < \sin^2\theta^*(x)$，则 $\theta'(x) > 0$（相应地，如果 $\sin^2\theta(x) > \sin^2\theta^*(x)$，则 < 0）。特别地，对于所有 x， $\theta(x)$ 都保持在 $(0,\pi/2)$ 内，因此直接对函数 $R = y$ 应用引理 3.4（并注意到 $L \ge \log y$）即可得到结论。

现在考虑以下情形： φ 通过首先注意到（3.16）可知， $\theta' = 1$ 当 $\theta = 0$ 且 $\theta' \le E + 1$ 处处成立时，θ（a） $\in$（0， $\pi/2$），因此我们可以固定 $\varepsilon > 0$ 使其足够小，从而保证 θ（$a+\varepsilon$） $\in$（0， $\pi/2$）（小量条件取决于 E，在此论证中它是固定的）。随后，我们可以在 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上应用前一种情形中的论证，得到

$$L(b-\varepsilon) - L(a+\varepsilon) \gtrsim \sqrt{\lambda}.$$

在边界区间上，我们有 $L' \geq -E$，因此 L 的总变化量为

$$L(b) - L(a) \gtrsim \sqrt{\lambda} - 2E\varepsilon \gtrsim \sqrt{\lambda}, \tag{3.19}$$

其中，我们允许最终估计中出现一个依赖于 E的常数。 □

现在来研究在 $\varphi \leq 0$成立的区间上会发生什么。

引理 3.9. 假设 φ 在 (c,d) 上连续且严格为负，并且$E > 0$。若 θ 表示方程 (3.16)的一个解，则

$$\theta(d) - \theta(c) \asymp \sqrt{\lambda} \quad \textit{for large } \lambda. \tag{3.20}$$

证明。 先考虑 φ 在整个 $[c,d]$上严格为负的情形。由于 φ严格为负且远离零，因此可以选取 $C > 0$使得$\lambda\varphi(x) - E + 1 \leq -C\lambda$ 对所有充分大的 λ都成立。由（3.16），可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 - (\lambda\varphi - E + 1)\sin^2\theta \geq 1 + C\lambda\sin^2\theta. \tag{3.21}$$

特别地，映射 $x \mapsto \theta(x)$可逆。因此，将 x 视为 θ的函数并作变量替换，可得

$$\begin{aligned} d - c = \int_c^d \mathrm{d}x &= \int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - (\lambda\varphi(x(\theta)) - E + 1)\sin^2\theta} \\ &\leq \int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + C\lambda\sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{C\lambda}\int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta + \frac{1}{C\lambda}}. \end{aligned}$$

由于 $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta + a^2} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}$，利用 π-周期性被积函数，我们得到（3.20）中的下界。完全类似的证明可得（3.20）中的上界，注意到 φ 有界，因此我们可以估计 $\lambda\varphi(x) - E + 1 \geq -C\lambda$ 当$C > 0$ 且 λ 充分大时。

现在考虑 φ 在一个或多个端点处为零的情形。固定 $\varepsilon > 0$，我们可以在 $[c+\varepsilon, d-\varepsilon] \subseteq (c, d)$ 上应用前述论证，从而得到

$$\theta(d-\varepsilon) - \theta(c+\varepsilon) \asymp \sqrt{\lambda}. \tag{3.22}$$

在边界区间上，我们注意到仍有 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x \geq E\sin^2\theta \geq 0$，并且对于适当的 $C > 0$，有单侧界 $\lambda\varphi - E + 1 \geq -C\lambda$，因此可以重复前述论证，推出

$$0 \leq \theta(c+\varepsilon) - \theta(c) \lesssim \sqrt{\lambda}$$

以及关于另一侧边界区间的类似表述，这足以推导出所需的估计。□

最后一项任务是估计 L 在 $[x_*,1]$上的渐近行为，即非正性区间上的渐近行为。这是分析中最为微妙的部分，我们将其进一步分解为更小的步骤。不失一般性，我们可以假设 $\min\varphi=-1$。随后，我们将 $[x_*,1]$ 分为三个区域：对于精心选取的 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$，我们将考察微观（$-\lambda^{\varepsilon_1}\le\lambda\varphi\le 0$）、介观（$-\lambda^{\varepsilon_2}\le\lambda\varphi\le-\lambda^{\varepsilon_1}$）以及宏观（$-\lambda\le\lambda\varphi\le-\lambda^{-\varepsilon_2}$）区域。这里还需注意一个技术性问题：定义各个区域的区间本身取决于 λ，因此，为了恰当地追踪 λ的依赖关系，我们必须在下面的一些估计中纳入这些区间的长度。

引理 3.10。 假设 φ在$[c,d]$ 上连续可微且严格为负，并且 $E>0$。若 $L(x)$ 是 (3.16) 的一个解，那么 $|L(d)-L(c)|\lesssim\log\lambda$ 当$\lambda\to\infty$。

证明。 注意，(3.16)意味着

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta},\tag{3.23}$$

这里利用单调性，将 x视为 θ 的函数，正如引理3.9的证明中所做的那样；因此，我们的目标是作变量代换并使用

$$L(d)-L(c)=\int_{\theta(c)}^{\theta(d)}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta.\tag{3.24}$$

和之前一样，我们可以假设 λ 足够大，使得 $\lambda\varphi(x)-E+1\le-C\lambda$ 对所有x 以及所考虑的 λ 均成立。与引理 3.9的证明一样，利用

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{1-(\lambda\varphi-E+1)\sin^2\theta}\le\frac{1}{1+C\lambda\sin^2\theta},\tag{3.25}$$

在任意形如 $[\pi n,\pi(n+1)]$的 θ 区间上， x 的变化幅度不超过 $\lesssim\lambda^{-1/2}$。

在给定假设下， $\varphi(x)$ 是利普希茨连续的。由引理 3.9， θ 在某个区间 $[\theta(c)\ \theta(d)]$, 上发生变化，其中 $\theta(d)-\theta(c)\asymp\sqrt{\lambda}$。我们将该区间划分为长度为 π 的子区间。注意，如果 φ 为常数，则对 $[\pi n,\pi(n+1)]$ 上 (3.23) 右端进行积分所得结果为零（因为分母关于区间 $[\pi n,\pi(n+1)]$, 的中心对称，而分子反对称）。

由 φ 的利普希茨连续性，我们有

$$\max_{[\pi n,\pi(n+1)]}\varphi(x(\theta))-\min_{[\pi n,\pi(n+1)]}\varphi(x(\theta))\lesssim\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

若 $|\varphi(x(\theta))-\varphi(x(\theta_0))|\lesssim\lambda^{-1/2}$，则 $-\frac{1}{E-\lambda\varphi\ x((\theta))-1}$等于 $-\frac{1}{E-\lambda\varphi\ x((\theta_0))-1}$，误差阶至多为 $\lambda^{-3/2}$。因此，由于

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta_0))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=0,$$

我们断言该积分

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

的阶至多为 $\lambda^{-1/2}$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\
&\quad=\left|\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta-\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta_0))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\
&\quad\lesssim \frac{1}{\lambda^{3/2}}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\cos\theta\sin\theta|}{(a^2+\sin^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

其中 $a^2=\min^{\theta\in[\pi n,\pi(n+1)]}\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}\asymp\frac{1}{\lambda}$。

利用

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{(a^2+\sin^2\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2a^2(a^2+1)},$$

我们得到

$$\left|\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right|\lesssim\frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3.26}$$

由于 $\theta(d)-\theta(c)\asymp\sqrt{\lambda}$，在区间 $[\theta(c)\ \theta(d)]$ 分解为若干形如 $[\pi n,\pi(n+1)]$, 的区间之并的情形下，积分

$$\int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

至多为 $\sqrt{\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1$ 阶。

最后，剩下的任务是对区间 J 上的积分 $\int_J \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$ 进行估计，其中该区间的长度小于 π。由于分子关于形如 $\pi(n+\frac{1}{2})$ 的点呈反对称，而分母不改变符号，因此所讨论的积分的上界为形如以下积分的绝对值

$$\int_{J'} \frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

其中，J' 具有 $[\pi n,\pi(n+1/2)]$ 或 $[\pi(n+1/2)\ \pi(n+1)]$ 的形式，n 为整数。由于 $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)\,a^2+\sin^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{a^2})$，这意味着 $\left|\int_{J'}\frac{\cos\theta\sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1}-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\right|\lesssim\log\lambda$，由此完成了引理的证明。□

现在来讨论函数 φ 在某个区间内部为负、但在边界点处为零的情形。

引理 *3.11.* 假设 φ 在 $[c,d]$上连续可微，在 (c,d) 上严格为负，在端点 c 和 d处等于零，$\varphi'(c) < 0$ 和 $\varphi'(d) > 0$，且$E > 0$。若 $L(x)$ 是 (3.16) 的一个解，则对于足够大的 λ，有

$$|L(d) - L(c)| \lesssim \lambda^{\frac{9}{20}}.$$

我们需要几个结论来证明引理 3.11。

引理 3.12。 假设在区间 $[c,d]$ 上，对于某个 $\varepsilon > 0$，有

$$-\lambda^{\varepsilon-1} \le \varphi \le 0,$$

并设 $L(x)$是方程 (3.16)的一个解。那么当 λ 足够大时，有

$$|L(d) - L(c)| \lesssim \lambda^{\varepsilon}(d-c).$$

证明。 不失一般性，考虑 $L(c) = 0$。当 λ 足够大时，有

$$|\lambda\varphi - E + 1| \lesssim C\lambda^{\varepsilon}.$$

因此，方程 $L' = \cos\theta \sin\theta(\lambda\varphi - E + 1)$的解的增长速度不能超过~方程 $L' = C\lambda^{\varepsilon}$. □的解的增长速度

引理 3.13. 假设在区间 $[c,d]$ 上有

$$-\lambda^{\varepsilon_2-1} \le \varphi \le -\lambda^{\varepsilon_1-1}$$

存在 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \le 1$，并令 $L(x)$ 为方程 (3.16)的一个解，且初始条件为 $L(c) = 0$。则当 λ 充分大时，有

$$|L(d)| \lesssim (d-c)\lambda^{1+\frac{3}{2}\varepsilon_2 - \frac{5}{2}\varepsilon_1} + \log\lambda.$$

证明。 令 J_π 表示长度为 π的区间。我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{1 - (\lambda\varphi - E + 1)\sin^2\theta} \le \frac{1}{C\lambda^{\varepsilon_1}\sin^2\theta + 1}, \tag{3.27}$$

并且由于 $\int_{J_\pi} \frac{\mathrm{d}\theta \sin^2\theta + a^2}{} = \frac{}{a\sqrt{1+a^2}}$，在区间 J_π上，$x = x(\theta)$ 的值变化至多为

$$\int_{J_\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta \lesssim \lambda^{-\frac{\varepsilon_1}{2}}. \tag{3.28}$$

结合 φ的利普希茨连续性，可得

$$\max_{x\in J_\pi}\varphi(x(\theta)) - \min_{x\in J_\pi}\varphi(x(\theta)) \lesssim \lambda^{-\frac{\varepsilon_1}{2}}.$$

因此，对于任意 θ，$\theta_0 \in J_\pi$ 我们有

$$\left|\frac{1}{E - \lambda\varphi(x(\theta)) - 1} - \frac{1}{E - \lambda\varphi(x(\theta_0)) - 1}\right| \lesssim \frac{\lambda\cdot\lambda^{-\varepsilon_1/2}}{\lambda^{2\varepsilon_1}} = \lambda^{1-\frac{5\varepsilon_1}{2}}.$$

因此，重复引理 3.10 证明中的论证，可得，对于任意$\theta_0 \in J_\pi$，有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{J_\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1} - \sin^2\theta} \, \mathrm{d}\theta \right| \\
&\quad = \left| \int_{J_\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1} - \sin^2\theta} \, \mathrm{d}\theta - \int_{J_\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta_0))-1} - \sin^2\theta} \, \mathrm{d}\theta \right| \\
&\quad \lesssim \lambda^{1-\frac{5\varepsilon_1}{2}} \int_{J_\pi} \frac{|\cos\theta \sin\theta|}{(a^2+\sin^2\theta)^2_1} \, \mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

其中 $a^2 = \min_{\theta\in J_\pi} E-\lambda\varphi\ x((\theta))-1 \geq E+\lambda^{\varepsilon_2}-1 \gtrsim {}^{1}_{\lambda^{\varepsilon_2}}$。由于 $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin x\,(a^2+\sin^2 x)^2 \mathrm{d}$ $x = {}_{2a^2}{}^{1}{}_{(a^2+1)}$，我们有

$$\left| \int_{J_\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta}{-\frac{1}{E-\lambda\varphi(x(\theta))-1} - \sin^2\theta} \, \mathrm{d}\theta \right| \lesssim \lambda^{1-\frac{5\varepsilon_1}{2}} \cdot \lambda^{\varepsilon_2} = \lambda^{1+\varepsilon_2-\frac{5\varepsilon_1}{2}}.$$

现在，我们断言

$$\theta(d) - \theta(c) \lesssim \max(1, (d-c)\lambda^{\varepsilon_2/2}).$$

事实上，对于较大的 λ，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 - (\lambda\varphi - E + 1)\sin^2\theta \leq 1 + 2\lambda^{\varepsilon_2}\sin^2\theta,$$

因此

$$\begin{aligned}
d - c = \int_c^d \mathrm{d}x &= \int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - (\lambda\varphi(x(\theta)) - E + 1)\sin^2\theta} \\
&\geq \int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + 2\lambda^{\varepsilon_2}\sin^2\theta} \\
&= \frac{1}{2\lambda^{\varepsilon_2}} \int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{2\lambda^{\varepsilon_2}} + \sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

如果 $\theta(d) - \theta(c) > \pi$，那么，考虑到 $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta + a^2} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}$，我们有

$$\begin{aligned}
d - c \geq \frac{1}{2\lambda^{\varepsilon_2}} \int_{\theta(c)}^{\theta(d)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{2\lambda^{\varepsilon_2}} + \sin^2\theta} &\geq \frac{1}{2\lambda^{\varepsilon_2}} \left(\frac{\theta(d) - \theta(c)}{\pi} - 1 \right) \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{2\lambda^{\varepsilon_2}} + \sin^2\theta} \\
&\gtrsim \lambda^{-\varepsilon_2/2} \left(\frac{\theta(d) - \theta(c)}{\pi} - 1 \right),
\end{aligned}$$

因此 $\theta(d) - \theta(c) \lesssim (d-c)\lambda^{\varepsilon_2/2} + 1$。将 $\theta(d) - \theta(c) \leq \pi$ 的情形也纳入考虑，我们得到

$$\theta(d) - \theta(c) \lesssim \max(1, (d-c)\lambda^{\varepsilon_2/2}).$$

因此，如果区间 $[\theta(c)\ \theta(d)]$ 恰好分割成长度为 π 的区间，我们有

$$|L(d)| \lesssim (d-c)\lambda^{\varepsilon_2/2}\lambda^{1+\varepsilon_2-\frac{5\varepsilon_1}{2}} = (d-c)\lambda^{1+\frac{3}{2}\varepsilon_2-\frac{5}{2}\varepsilon_1}.$$

最后，如果区间 $[\theta(c)\ \theta(d)]$ 不能分割成长度恰为 π 的区间，那么在此估计中会出现一个阶为 $\log\lambda$ 的余项，正如引理3.10的证明中所示。引理的证明至此完成。□

现在我们准备证明引理 3.11。

引理 *3.11*的证明。 固定 $\varepsilon_1 = \frac{29}{40}$和 $\varepsilon_2 = \frac{33}{40}$，令 φ 表示满足该引理假设的函数；不失一般性，不妨设 $\min\varphi = -1$。由于$\varphi'(c) < 0$ 且 $\varphi \in C^1$，存在 $\delta > 0$ 使得 $\varphi' < 0$，因此 φ 在 $[c, c+\delta]$上递减。由此可知，对于任意充分大的 $\lambda > 0$，区间 $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$ 可分割为以下并集

$$[c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup [c_3, d_3]$$

个内部互不相交的区间，使得 $c = c_1$, $d_1 = c_2$, $d_2 = c_3$, $d_3 = \frac{c+d}{2}$，并且满足以下条件：

(1) $-\lambda^{\varepsilon_1-1} \le \varphi \le 0$ 当 $x \in [c_1, d_1]$ 时；(2) $-\lambda^{\varepsilon_2-1} \le \varphi \le -\lambda^{\varepsilon_1-1}$ 当 $x \in [c_2, d_2]$ 时；
(3) $-1 \le \varphi \le -\lambda^{\varepsilon_2-1}$ 当 $x \in [c_3, d_3]$ 时。
对于较大的 $\lambda > 0$，我们有

$$d_1 - c_1 \asymp \lambda^{\varepsilon_1-1}, \qquad d_2 - c_2 \asymp \lambda^{\varepsilon_2-1}, \qquad d_3 - c_3 \asymp 1.$$

应用引理 3.12 于 $[c_1, d_1]$，并将引理 3.13 应用两次（第一次按 $[c_2, d_2]$上所写的方式，第二次将 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 替换为 $(\varepsilon_2, 1)$ 并应用于 $[c_3, d_3]$），即可得到

$$L(d_1) - L(c_1) \lesssim \lambda^{2\varepsilon_1-1}, \qquad L(d_2) - L(c_2) \lesssim \lambda^{\frac{5\varepsilon_2}{2} - \frac{5\varepsilon_1}{2}}, \qquad L(d_3) - L(c_3) \lesssim \lambda^{\frac{5-5\varepsilon_2}{2}}.$$

特别地，对于我们所选取的 ε_1, ε_2 的取值，有

$$2\varepsilon_1 - 1 = \frac{9}{20}, \qquad \frac{5\varepsilon_2}{2} - \frac{5\varepsilon_1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{9}{20}, \qquad \frac{5 - 5\varepsilon_2}{2} = \frac{35}{80} < \frac{9}{20}.$$

因此，$L(d_3) - L(c_1) \lesssim \lambda^{\frac{9}{20}}$。对区间$\left[\frac{c+d}{2}, d\right]$ 应用类似的论证，即完成证明。□

定理 *3.6*的证明。 取 E 为如下形式 $E = 4\pi^2 n^2$，记 $\mathbf{A} = \mathbf{M}_0$, $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1$, 并定义

$$\mathbf{B}_1(E, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{[0, x_*]}(\lambda f_1, E), \quad \mathbf{B}_2(E, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{[x_*, 1]}(\lambda f_1, E). \tag{3.29}$$

由于 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，只需证明我们可以选取 $\lambda_k \to \infty$，使得 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(E, \lambda_k) = \mathbf{B}_2(E, \lambda_k)\mathbf{B}_1(E, \lambda_k)$ 满足 $\mathbf{B}^2 = -\mathbf{I}$。事实上，这意味着 $\mathbf{B}$ 是椭圆型的，因此 E 属于谱。此外，由于 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，可知 $\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$ 对易，因此 $I(E) = 0$，所以谱在 E 处的局部豪斯多夫维数为一。

为此，根据引理3.8，我们注意到 $\log\|\mathbf{B}_1\| \gtrsim \lambda^{1/2}$。由引理3.8 的证明和命题A.1可知，$\mathbf{B}_1$, $U(\mathbf{B}_1)$ 的扩张方向满足

$$\angle(\mathbf{B}_1 U(\mathbf{B}_1), e_1) \lesssim \exp(-\lambda^{1/2}), \tag{3.30}$$

其中 $e_1 = (1,0)^\top$。由引理 3.11，$\log \|\mathbf{B}_2\| \lesssim \lambda^{9/20}$，因此 $\log \|\mathbf{B}\| \gtrsim \lambda^{1/2} - \lambda^{9/20} \gtrsim \lambda^{1/2}$对于 $\mathbf{B}_1 U(\mathbf{B}) \approx (1,0)^\top$ 同样成立。然后，利用引理 3.9，我们可以从任意大的 λ 值开始增加，直到达到一个 λ 使得

$$\mathbf{B}U(\mathbf{B}) = \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1 U(\mathbf{B}) = S(\mathbf{B}). \tag{3.31}$$

由于$\mathbf{B}U(\mathbf{B}) = S(\mathbf{B}^{-1})$ 与 $U(\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{B}S(\mathbf{B})$ 正交，因此$\mathbf{B}$ 会交换子空间 $\{U(\mathbf{B}), S(\mathbf{B})\}$，故 $\operatorname{Tr} \mathbf{B} = 0$，由凯莱–哈密顿定理可得$\mathbf{B}^2 = -\mathbf{I}$，论证至此完成。□

4. A Nonlinear Eigenvalue Formulation

4.1. **Floquet 理论简述**。设 $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 p-周期的，且 $p > 0$ 和

$$\int_0^p |V(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{4.1}$$

让我们回顾 Floquet 理论中的几个概念。证明请参见 [33, 第 11]章；关于更多背景和上下文，请参见 [29]。为研究$L_V = -\partial_x^2 + V$的谱性质，考虑以下由参数 $\vartheta \in [0,\pi]$索引的边值问题：

$$-y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x), \quad y(p) = e^{i\vartheta}y(0),\ y'(p) = e^{i\vartheta}y'(0). \tag{4.2}$$

对于每个 E 和 ϑ，方程（4.2）的解空间可以是 0、1 或 2 维。给定 V、 p和 $\vartheta \in [0,\pi]$，记 $E_1(\vartheta; V, p) \le E_2(\vartheta; V, p) \le \cdots$为方程（4.2）的谱，也就是说，列出所有满足方程（ $E \in \mathbb{R}$ （计重数）使得方程（4.2）存在非平凡解的值。

我们有以下事实：

- 每个 $E_j(\,\cdot\,; V, p)$ 在 $[0,\pi]$ 上都是单调的。事实上， E_j 若 j 为奇数，则递增；若 j 为偶数，则递减。
- L_V 的谱为

$$\operatorname{spec}(L_V) = \{E_j(\vartheta; V, p) : \vartheta \in [0,\pi],\ j \ge 1\}. \tag{4.3}$$

结合这两点，

$$\operatorname{spec}(L_V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Big([E_{2j-1}(0), E_{2j-1}(\pi)] \cup [E_{2j}(\pi), E_{2j}(0)] \Big). \tag{4.4}$$

特别地，要确定 L_V 的谱，只需确定满足 $\vartheta \in \{0,\pi\}$ 的点 $E_j(\vartheta)$，此外，还有

$$\operatorname{spec}(L_V) = \{E \in \mathbb{R} : \operatorname{Tr} \mathbf{T}_{[0,p]}(V, E) \in [-2, 2]\}. \tag{4.5}$$

4.2. **周期近似的非线性特征值问题。** 现在我们回到斐波那契情形。当 f_0 和 f_1 允许为 $-y''(x) + \lambda f_j(x)y(x) = Ey(x)$ ¨给出精确解公式时，连续体斐波那契算子的周期近似的谱的弗洛凯刻画可表述为一个参数化的非线性特征值问题。这种方法类似于 Mennicken 和 M¨oller 提出的框架，例如，该框架应用于串联梁 [38, 第 10 节。4] 和弦网络 [4], ，以及动态刚度矩阵的 Wittrick–Williams 方法 [46]。

我们首先考虑常势函数 $f_0 = 0 \cdot \chi_{[0,1)}$ 和 $f_1 = \lambda \cdot \chi_{[0,1)}$ 在 $k = 2$的情形，即周期 $p = 2$。令 y_1, y_2： $[0,1] \to \mathbb{C}$ 表示在子区域 2.5上方程 ($[0,1]$ 和 $[1,2]$上的解。[5] 对于给定的势函数，方程 (2.5) 要求

$$-y_1''(x) + \lambda y_1(x) = Ey_1(x), \qquad -y_2''(x) = Ey_2(x). \tag{4.6}$$

这些常系数方程的通解为（对于 $E \neq \lambda$）

$$\begin{aligned} y_1(x) &= A_1 \sin(\sqrt{E-\lambda}\, x) + B_1 \cos(\sqrt{E-\lambda}\, x) \\ y_2(x) &= A_2 \sin(\sqrt{E}\, x) + B_2 \cos(\sqrt{E}\, x). \end{aligned}$$

在子域界面处，连续性和光滑性（$y_1(1) = y_2(0)$, $y_1'(1) = y_2'(0)$）要求

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\sqrt{E-\lambda}) + B_1 \cos(\sqrt{E-\lambda}) &= B_2 \\ A_1\sqrt{E-\lambda}\cos(\sqrt{E-\lambda}) - B_1\sqrt{E-\lambda}\sin(\sqrt{E-\lambda}) &= A_2\sqrt{E}. \end{aligned}$$

在区域两端，弗洛凯条件 (4.2) 要求 $y_2(1) = e^{i\vartheta}y_1(0)$ 和$y_2'(1) = e^{i\vartheta}y_1'(0)$，从而得到

$$\begin{aligned} A_2 \sin(\sqrt{E}) + B_2 \cos(\sqrt{E}) &= B_1 e^{i\vartheta} \\ A_2\sqrt{E}\cos(\sqrt{E}) - B_2\sqrt{E}\sin(\sqrt{E}) &= A_1 e^{i\vartheta}\sqrt{E-\lambda}. \end{aligned}$$

将最后这四个方程整理成标准形式

$$\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{E-\lambda}) & \cos(\sqrt{E-\lambda}) & 0 & -1 \\ \sqrt{E-\lambda}\cos(\sqrt{E-\lambda}) & -\sqrt{E-\lambda}\sin(\sqrt{E-\lambda}) & -\sqrt{E} & 0 \\ 0 & -e^{i\vartheta} & \sin(\sqrt{E}) & \cos(\sqrt{E}) \\ -e^{i\vartheta}\sqrt{E-\lambda} & 0 & \sqrt{E}\cos(\sqrt{E}) & -\sqrt{E}\sin(\sqrt{E}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

我们寻找使得 E 左侧矩阵$\mathbf{T}_{\lambda,\,\vartheta}(E)$ 为奇异矩阵的值（且微分方程的相应解非平凡）。这类实数值 E通常有无穷多个。求这些特征值的算法种类繁多；例如，参见 G¨uttel 和 Tisseur [24]。（事实上，这一系列示例可为这些算法提供有用的测试问题。）

这一周期 2 的情形可容易地推广到周期 $p = F_k$，其中 F_k 是第k个斐波那契数（$F_0 = F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$）。令 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 表示

[5]在第二种情况下，我们平移自变量，使得 y_2 是定义在 $[0,1]$, 上而非 $[1,2]$上的函数。

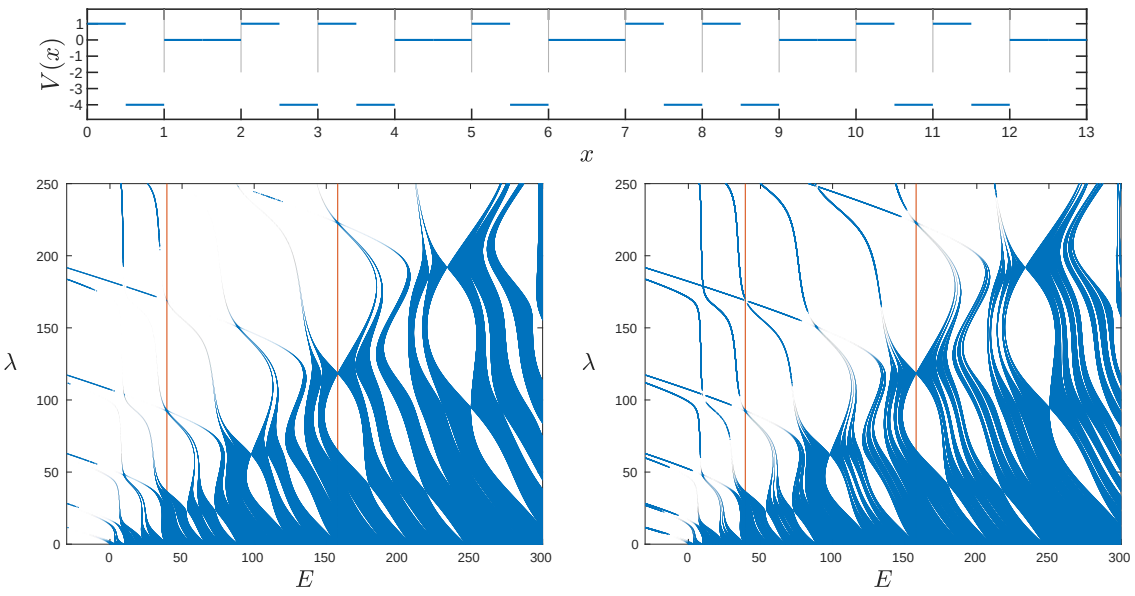

FIGURE 2. 对于具有 $c = 4$ 的分段常数势函数（见上图），下方的图展示了周期近似的部分谱（左图为 $p = F_4 = 5$；右图为 $p = F_6 = 13$）。竖直红线表示 $E = 4\pi^2$ 和 $E = 16\pi^2$ 的值。

周期为 F_k 的序列，由（1.1）确定，但将 α 替换为 $\alpha_k := F_k/F_{k+1}$（以及 $\theta = 0$）。引入

$$\varphi_n(E) = \begin{cases} \sqrt{E}, & \omega_n = 0; \\ \sqrt{E-\lambda}, & \omega_n = 1. \end{cases}$$

令 $e_j \in \mathbb{C}^{2F_k}$ 表示单位矩阵的第 j 列。于是，我们可以将非线性特征值函数表示为 $\mathbf{T}_{\lambda,\,\vartheta}(E) : \mathbb{C}^{2F_k} \to \mathbb{C}^{2F_k}$，其中

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\lambda,\vartheta}(E) \;=\; & \sum_{n=1}^{F_k} \Big(\sin(\varphi_n(E)) e_{2n-1} e_{2n-1}^\top + \cos(\varphi_n(E)) e_{2n-1} e_{2n}^\top \Big) \\ & + \sum_{n=1}^{F_k} \Big(\varphi_n(E) \cos(\varphi_n(E)) e_{2n} e_{2n-1}^\top - \varphi_n(E) \sin(\varphi_n(E)) e_{2n} e_{2n}^\top \Big) \\ & - \sum_{n=1}^{F_k-1} e_{2n-1} e_{2n+2}^\top - \sum_{n=1}^{F_k-1} \varphi_{n+1}(E) e_{2n} e_{2n+1}^\top \\ & - e^{i\vartheta} e_{2F_k-1} e_2^\top - \varphi_1(E) e^{i\vartheta} e_{2F_k} e_1^\top . \end{aligned}$$

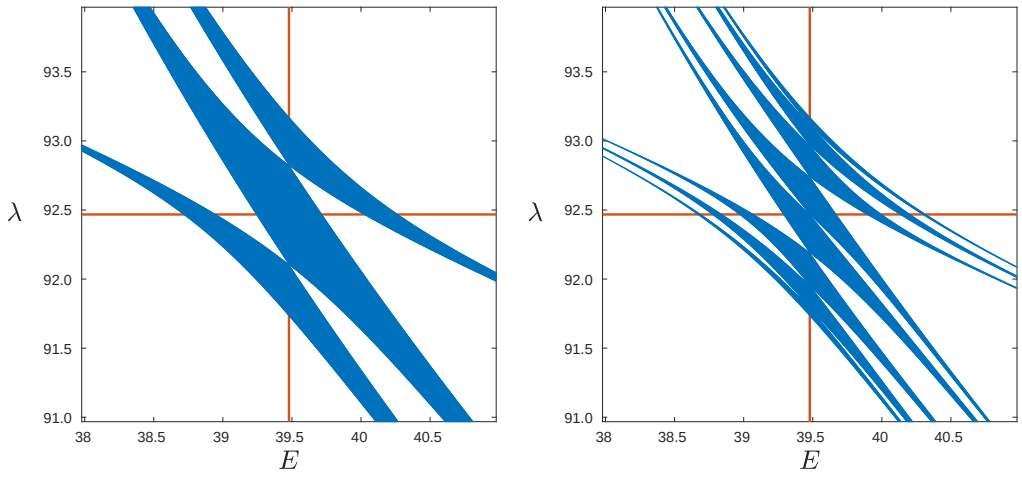

FIGURE 3. 对于图2中的势函数，此处聚焦于 $E = 4\pi^2$ （红色竖线）附近的谱，以及第一个 $\lambda > E$ 使得 $\mathbf{Tr}\,\mathbf{B}(E,\lambda) = 0$ （红色横线）对应的值，对于周期近似（$p = F_4 = 5$，左；$p = F_6 = 13$，右）。我们在这些图中观察到 $F_3 = 3$ 和$F_5 = 8$ 能带。

受定理 3.6 的启发，我们考虑 $f_0 = 0 \cdot \chi_{[0,1)}$ 和 f_1 一个简单的分裂函数离散版本：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1/2 \\ -c & 1/2 \le x < 1, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 $c > 0$ 是一个适当的常数。当然，f_1 并非 C^1，因此也不是真正的分裂函数，但顺便指出，证明定理 3.6 的论证经过调整后也适用于这种 f_1 的选取，从而为我们的计算提供了一个有用的基准。由于这个势函数在每个子区域 $[j/2,(j+1)/2]$ 上都是分段常数（$j \in \mathbb{Z}$），我们可以应用刚才描述的方法来刻画周期近似的谱。在这种情况下，在半单位子区域上求解微分方程会更方便（尽管稍显浪费），这样，阶数为 $p = F_k$ 的周期近似就会导出一个阶数为 $4F_k$ 的非线性特征值问题（而非之前的 $2F_k$）。这一表述可用于研究适当势函数的精细谱结构。例如，图2展示了长度为 $p = F_5 = 8$ 且 $p = F_6 = 13$ （$c = 4$）的周期近似的一部分谱。存在一个无界序列 $\{\lambda_k\}$，使得 $E = 4\pi^2$ 属于谱 Σ_k。为研究这一现象，图3聚焦于 $E = 4\pi^2$ 附近，以及使得 $\mathbf{B}(E,\lambda) = 0$ 的第一个 $\lambda > E$ 值；红线表示 $\lambda = 92.46773$ 和 $E = 4\pi^2$。（这些后续图形类似于离散斐波那契算子的周期近似谱，见图 4] 中的 [12, 。）在图4中，我们用真正的分裂函数替换分段常数的 f_1

$$f_1(x) = 50x(x - 1/3)(x - 1).$$

我们观察到类似的谱特征，这与定理3.6的预期一致。

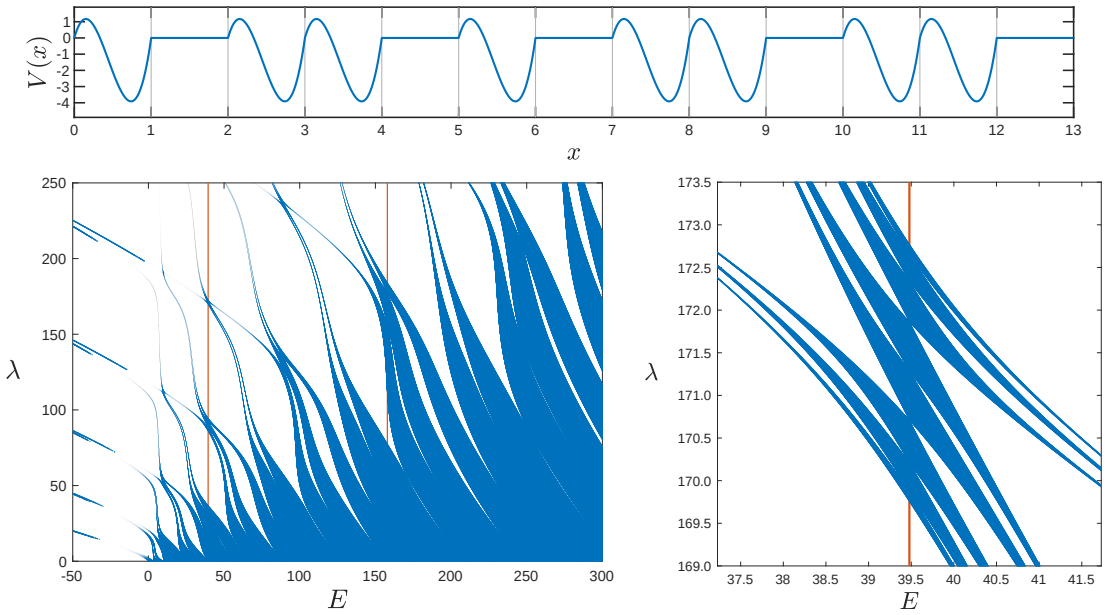

FIGURE 4. 对于涉及分裂函数 f_1（见上图）的光滑势函数，底部图展示了周期近似的部分谱，其中 $p = F_4 = 5$（左图），以及 $p = F_6 = 13$ 的放大图（右图），显示了$E = 4\pi^2$（红色竖线）附近 $F_5 = 8$ 谱带的汇聚。

为了进行数值研究，我们采用分段切比雪夫伪谱离散 [45] 来离散这些微分方程。本文中的所有图均使用这一方法绘制。该方法的优点是可以处理非分段常数的势函数，如图1左图和图4所示。非线性特征值表述提供了一种基准测试方法，可通过分段常数势的示例来评估离散方法的精度。

APPENDIX A. SINGULAR VECTORS OF HYPERBOLIC MATRICES

我们需要关于双曲 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 矩阵的扩张方向和扩张特征空间的以下初等结论。这里回顾一下，任意满足 $\|\mathbf{A}\| > 1$ 的$\mathbf{A} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，都有扩张方向和收缩方向 $U(\mathbf{A})$ $S(\mathbf{A}) \in \mathbb{RP}^1$，使得

$$|\mathbf{A}u| = \|\mathbf{A}\|, \quad |\mathbf{A}s| = \|\mathbf{A}\|^{-1} \tag{A.1}$$

对于任意单位向量 $u \in U(\mathbf{A})$， $s \in S(\mathbf{A})$。

命题 A.1. 设$\mathbf{A} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 是双曲的，其特征值为 $\lambda^{\pm 1}$，其中$|\lambda| > 1$。令 $U(\mathbf{A})$ 表示 $\mathbf{A}$ 扩张最显著的方向， $V(\mathbf{A})$ 表示

特征值为 λ的特征空间。那么，

$$\angle(V(\mathbf{A}), \mathbf{A}U(\mathbf{A})) \leq \frac{\pi}{2|\lambda|\|\mathbf{A}\|}. \tag{A.2}$$

证明。 对于任意单位向量 $v \in V(\mathbf{A})$，有

$$\left|\mathbf{A}^{-1}v\right| = |\lambda|^{-1}. \tag{A.3}$$

因此，将 [14, 命题 1.13。5] 应用于 $\mathbf{A}^{-1}$ 其中 $R = |\lambda|^{-1}$ 并利用 $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{A}\|$，可得

$$\angle(V(\mathbf{A}), \mathbf{A}U(\mathbf{A})) = \angle(V(\mathbf{A}), S(\mathbf{A}^{-1})) \leq \frac{\pi}{2|\lambda|\|\mathbf{A}\|},$$

正如预期。 □

References

[1] J. Avron、W. Craig 和 B. Simon。紧束缚一维随机系统中李雅普诺夫指数的大耦合行为。《J. Phys. A: Math. Gen.》，16(7):L209–L211，1983年。[2] M. Baake 和 U. Grimm。《非周期序》。第1卷，《数学及其应用百科全书》第149卷。剑桥大学出版社，剑桥，2013年。[3] M. Baake、D. Joseph 和 P. Kramer。准周期克罗尼格–潘尼模型谱中的周期聚集。《Phys. Lett. A》，168(3):199–208，1992年。[4] J. P. Baker。机械结构的振动：用于模态计算的源定位与非线性特征值问题。博士论文，弗吉尼亚理工大学，2023年。[5] C. Bennewitz。局部博格–马尔琴科定理的证明。《数学物理通讯》，218:131–132，2001年。[6] K. Bjerkl¨ov。连续准周期薛定谔方程的正李雅普诺夫指数。《J. Math. Phys.》，47(2):022702，4页，2006年。[7] K. Bjerkl¨ov。具有两个基本频率的连续一维准周期薛定谔方程的正李雅普诺夫指数与极小性。《Ann. Henri Poincar´e》，8(4):687–730，2007年。[8] G. Borg。 $y'' + (\lambda - q(x))$的谱理论中的唯一性定理。载于《Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress》，特隆赫姆，1949年，第276–287页。Johan Grundt Tanums Forlag，奥斯陆，1952年。[9] V. Bucaj、D. Damanik、J. Fillman、V. Gerbuz、T. VandenBoom、F. Wang 和 Z. Zhang。连续型安德森模型的正李雅普诺夫指数与大偏差定理（简述）。《泛函分析杂志》，277(9):3179–3186，2019年。[10] S. Cantat。Bers、H´enon、Painlev´e 与薛定谔。《Duke Math. J.》，149(3):411–460，2009年。[11] M. Casdagli。准周期薛定谔方程重整化映射的符号动力系统。《数学物理通讯》，107(2):295–318，1986年。[12] D. Damanik、M. Embree 和 A. Gorodetski。准晶研究中出现的薛定谔算子的谱性质。载于 J. Kellendonk、D. Lenz 和 J. Savinien 编，《非周期序的数学》，第307–370页。Birkh¨auser，巴塞尔，2015年。[13] D. Damanik、M. Embree、A. Gorodetski 和 S. Tcheremchantsev。斐波那契哈密顿量谱的分形维数。《数学物理通讯》，280(2):499–516，2008年。[14] D. Damanik 和 J. Fillman。《一维遍历薛定谔算子——I. 一般理论》，《数学研究生教程》第221卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022年。[15]D. Damanik 和 J. Fillman。《一维遍历薛定谔算子——II. 特定类别》，《数学研究生教程》第249卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2024年。

[16] D. Damanik、J. Fillman 和 A. Gorodetski。与非周期子移位相关的连续薛定谔算子。《Ann. Henri Poincar´e》，15(6):1123–1144，2014年。[17] D. Damanik、J. Fillman 和 A. Gorodetski。谱包含一条半直线和一个康托尔集的多维薛定谔算子。《泛函分析杂志》，280(7):论文编号108911，共38页，2021年。[18] D. Damanik 和 A. Gorodetski。弱耦合斐波那契哈密顿量的谱性质与量子动力学性质。《数学物理通讯》，305(1):221–277，2011年。[19] D. Damanik 和 A. Gorodetski。弱耦合斐波那契哈密顿量的态密度测度。《几何与泛函分析》，22(4):976–989，2012年。[20] D. Damanik 和 A. Gorodetski。斐波那契哈密顿量积分态密度的赫尔德连续性。《数学物理通讯》，323(2):497–515，2013年。[21]D. Damanik、A. Gorodetski 和 W. Yessen。斐波那契哈密顿量。《数学发明》，206(3):629–692，2016年。[22] J. Fillman 和 M. Mei。连续斐波那契薛定谔算子的谱性质。《Ann. Henri Poincar´e》，19(1):237–247，2018年。[23] A. Girand。本原可逆替换生成势函数的离散薛定谔算子的动力学格林函数。《Nonlinearity》，27(3):527–543，2014年。[24] S. G¨uttel 和 F. Tisseur。非线性特征值问题。《数值学报》，第1–94页，2017年。[25] M. Kohmoto。一维准周期薛定谔方程相关的动力系统。《J. Statist. Phys.》，66:791–796，1992年。[26] M. Kohmoto、L. P. Kadanoff 和 C. Tang。一维局域化问题：映射与逃逸。《Phys. Rev. Lett.》，50(23):1870–1872，1983年。[27] M. Kohmoto、B. Sutherland 和 C. Tang。一维准晶体模型的临界波函数与康托尔集谱。《Phys. Rev. B (3)》，35(3):1020–1033，1987年。[28] J. Koll´ar 和 A. S¨ut˝o。斐波那契格点上的 Kronig–Penney 模型。《Physics Letters A》，117(4):203–209，1986年。[29]P. Kuchment。周期椭圆算子概述。《Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)》，53(3):343–414，2016年。[30] Y. Last。量子动力学与奇异连续谱的分解。《泛函分析杂志》，142(2):406–445，1996年。[31]D. Lenz、C. Seifert 和 P. Stollmann。连续一维准晶体的零测度康托尔谱。《J. Differ. Equ.》，256(6):1905–1926，2014年。[32] M. Lothaire。《词上的代数组合学》，《数学及其应用百科全书》第90卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[33] M. Luki´c。《谱理论初级课程》，《数学研究生教程》第226卷。美国数学会，2022年。[34] V. A. Marchenko。关于二阶微分算子理论。《苏联科学院通报》(新辑)，72:457–460，1950年。[35] F. Martinelli 和 L. Micheli。二元合金中李雅普诺夫指数的大耦合常数行为。《J. Statist. Phys.》，48(1–2):1–18，1987年。[36] M. Mei。本原可逆替换势函数的离散薛定谔算子的谱。《J. Math. Phys.》，55(8):082701，22页，2014年。[37] M. Mei 和 W. Yessen。三对角替换哈密顿算子。《Math. Model. Nat. Phenom.》，9(5):204–238，2014年。[38] R. Mennicken 和 M. M¨oller。《非自伴边界特征值问题》。爱思唯尔，阿姆斯特丹，2003年。[39]S. Ostlund、R. Pandit、D. Rand、H. J. Schellnhuber 和 E. D. Siggia。具有几乎周期势函数的一维薛定谔方程。《Phys. Rev. Lett.》，50(23):1873–1876，1983年。

[40] V. V.Prasolov.线性代数问题与定理，《数学专著译丛》第134卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。由 D. A. Leites 从俄文手稿译出。[41] M. Shamis 和 T. Spencer. 通过对态密度进行粗略估计来界定李雅普诺夫指数。《数学物理通讯》，338(2):705–720，2015年。[42] E. Sorets 和 T. Spencer. 具有拟周期势的 Schr¨odinger 算子的正李雅普诺夫指数。《数学物理通讯》，142(3):543–566，1991年。[43] A. S¨ut˝o. 斐波那契哈密顿量在零勒贝格测度康托尔集上的奇异连续谱。《统计物理学杂志》，56(3–4):525–531，1989年。[44]A. S¨ut˝o. 拟周期 Schr¨odinger 算子的谱。《数学物理通讯》，111(3):409–415，1987年。[45] L. N. Trefethen. 《*MATLAB*中的谱方法》。工业与应用数学学会，费城，2000年。[46] W. H. Wittrick 和 F. W. Williams. 计算弹性结构固有频率的一般算法。《力学与应用数学季刊》，24:263–284，1971年。[47]W. N. Yessen. 三对角斐波那契哈密顿量的谱分析。《谱理论杂志》，3(1):101–128，2013年。

Department of Mathematics, Rice University, 6100 S. Main Street, Houston, Texas77005-1892, USA电子邮箱地址: damanik@rice.eduDepartment of Mathematics, Virginia Tech, Blacksburg, VA 24061, USA电子邮箱地址: embree@vt.edu
Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843, USA电子邮箱地址: fillman@tamu.eduDepartment of Mathematics, University of California, Irvine, CA 92697, USA电子邮箱地址: asgor@uci.edu
Department of Mathematics, Denison University, Granville, OH 43023, USA电子邮箱地址: meim@denison.edu