arXiv:2603.24468v1 [cs.FL] 25 Mar 2026

带名称释放的名义自动机

Simon Prucker 埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学 埃尔朗根，德国
simon.prucker@fau.de

Stefan Milius 埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学 埃尔朗根，德国
stefan.milius@fau.de

Lutz Schröder 埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学 埃尔朗根，德国
lutz.schroeder@fau.de

摘要

带绑定符的数据词对并发分配的内存进行形式化。形式语言中的大多数名称绑定机制，例如 λ-演算，都遵循严格嵌套的作用域。相比之下，具有显式内存分配和释放机制的状态式编程语言（如 C）通常会使已分配内存区域的作用域相互交错。动态序列和括号代数等专门形式系统刻画了这一现象，它们同样具有字母的显式分配和释放机制。数据语言的一种经典形式系统是寄存器自动机；已有研究证明，它们与基于名义集合的自动机模型等价。在本文中，我们为具有显式分配和释放机制的数据词语言引入一种名义自动机模型。该模型与动态序列十分相似，并通过添加释放转移扩展了现有的名义自动机模型。我们利用该模型的一种有限非确定有限自动机类型表示，建立了克莱尼定理，证明该模型与一种自然的表达式语言等价。此外，我们还证明，我们的非确定模型可以进行确定化；这在名义自动机和寄存器自动机领域是相当罕见的现象。

1 引言

无限字母表上的形式语言称为*数据语言*，其元素称为*数据词*。在这种观点下，无限字母表被视为对无限（或极大）域中数据的抽象，例如 UUID、理想化的无界堆地址，或编程语言中的变量名。人们已为数据语言开发了众多形式体系，包括逻辑（例如 [4, 5, 9, 10, 13]）和自动机模型（例如 [1, 9, 11, 16]）。就本文而言，最相关的一类形式体系是遵循寄存器范式 [11], 的自动机，它们配备了固定数量的寄存器，可用于存储输入中遇到的数据值。这类自动机等价于各种形式的*名义自动机* [2], ，后者采用*名义集合* [19]这一形式体系。在名义框架中，数据值通常与一个固定的*名称*集合相对应，而名义集合的元素则可被视为包含有限多个名称。

名义自动机和转移系统通常涉及显式的名称分配（或*名称绑定*）（例如 [18, 21]），这可以看作是对资源分配的抽象，例如内存位置或通道名称的分配。显式释放则见于许多具体编程语言中，如以下 C 代码片段所示

```
int *num1 = malloc(sizeof(int));
...
free(num1);
```

在抽象形式系统中很少出现。一个值得注意的例外是*动态序列* [8], ，其中已分配的名称可以被释放顺序任意（即不遵循任何嵌套规则）；更多参考文献请参见相关工作段落。

我们引入了动态序列的一种小幅变体，并为这类序列的语言提出了一种专用的自动机模型——*非确定性释放自动机*（*NDA*）。后者扩展了正则非确定性名义自动机（RNNA）的名称分配自动机模型 [21], ，其区别在于还具有*释放转移*。我们为 NDA 配备了*字母语义*，它以被接受词的 α等价类来定义；还配备了*局部新鲜性语义*，它以通过擦除显式绑定符而从字母语言得到的数据语言来定义。在后一种语义下，NDA 与 RNNA 在表达能力上等价。关于 NDA，我们的主要结果有两项：一方面，克莱尼定理表明，按照字母语义，NDA 等价于我们所称的*正则释放表达式*；另一方面，我们给出了按照局部新鲜性语义进行确定化的构造。在正则自动机和名义自动机领域，这种现象颇为罕见，因为非确定性模型通常具有严格高于其确定性限制的表达能力 [2, 21]。简言之，我们的确定化结果表明，只需在 RNNA 中加入显式释放，就能使其实现确定化。

除了 NDA 的定义之外，本文的主要贡献包括：(1) 构造一种 NDA，使其语言在α-等价关系下封闭（名称丢弃修改，第 6 节）；(2) 通过一种正则表达式形式，对 NDA 的接受语言给出完备的代数规范（克莱尼定理，第 7 节）；以及 (3) 构造一种保留局部新鲜性语义的确定化方法（符号确定化，第 8 节）。这些结果还借助与 RNNA 的表达能力等价性，体现了良好的算法可处理性，例如，语言包含的判定是可判定的。

相关工作。 如上所述，我们以正则非确定性名义自动机（RNNA）模型 [21], 为基础。该模型一方面与带名称分配的自动机模型有关，这类模型在名义克莱尼代数方面仅有部分克莱尼结果 [7, 14, 15]；另一方面，RNNA 本身也满足关于*正则条表达式* [21]的（完整）克莱尼定理。与非确定性寄存器模型通常具有的计算困难性或不可判定性形成鲜明对比的是，RNNA（可视为具有有损性特征的寄存器自动机子类）能够在以寄存器数量为参数的参数化多项式空间内进行包含性判定。我们的确定化结果最终或可为名义释放自动机建立类似的复杂度界限提供思路。

Gabbay 等人引入了动态序列 [8]，并为其配备了 α-等价的概念以及一种关系

语义。Brunet 和 Silva [3] 提出了另一种通过名称创建和销毁来表示数据语言的方法， [3] 他们证明了一个克莱尼定理，将其表达式的<款 id='2'>有限记忆有理表达式 </款>的数据语义与非确定性轨道有限自动机（NOFA）联系起来 [2],，后者等价于具有非确定性重新分配功能的寄存器自动机 [12]。这意味着有限记忆有理表达式继承了完整寄存器自动机模型的计算复杂性；在局部新鲜性语义下，NDA 与 RNNA 表达能力相同，也就是说，与后者一样，它们以牺牲表达能力换取计算上的易处理性（我们的确定化结果或许也表明了这一点）。

2 预备知识

我们假定读者已基本了解自动机理论和名义集合；下面简要回顾所需的概念和记号。

名义集合。固定一个可数无限的名称集合 $\mathbb{A}$。我们用 Perm($\mathbb{A}$) 表示 $\mathbb{A}$ 上有限置换所成的群。对于交换 a 和 b 的置换，我们记作 $(a\,b) \in$ Perm($\mathbb{A}$)。集合 X 上的作用是指运算 Perm($\mathbb{A}$) $\times X \cdot\!\!\longrightarrow X$。如果子集 $S \subseteq \mathbb{A}$ 中的每个元素都被所有逐一固定

$$\pi\ x = x \quad \forall \pi \in \mathbb{A} \quad x \in X \quad a = a \Rightarrow \text{中每个元}$$

素的置换所固定，那么 $S \subseteq \mathbb{A}$ 支撑元素 $x \in X$： (Perm( ). ($\forall a \in S.\ \pi($)) $\cdot$). 如果每个元素都有有限支撑，那么该集合就是名义集合。在这种情况下，存在最小有限支撑 supp(x)（下文简称支撑）。如果名称 c 满足 $c \notin$ supp(x)，则称其对 x 是新鲜的，记作 $c\#\ x$。在由 $\pi \cdot a = \pi(a)$ 定义的作用下，集合 $\mathbb{A}$ 是名义集合。名义集合的乘积 $X \times Y$ 在逐坐标作用下仍是名义集合。名义集合 X 的有限支撑子集在通常的群作用下构成一个名义集合：对于每个有限支撑的 $Y \subseteq X$，有 $\pi \cdot Y = \{\pi \cdot y \mid y \in Y\}$。如果名义集合 X 的子集 A 的支撑等于其元素支撑的并集，即 $\operatorname{supp}(A) = \bigcup_{x \in A} \operatorname{supp}(x)$，则称 A 一致有限支撑。我们用 P ( ) 表示 X 的有限幂集，也就是 X 的有限子集所成的集合；X 的每个有限子集都是一致有限支撑的。若映射 f: $X \to Y$ 是名义集合之间的等变映射，则对于所有 $x \in X$ 和 $\pi \in$ Perm($\mathbb{A}$)，都有 $f(\pi \cdot x) = \pi \cdot f(x)$；由此可得，对于所有 $x \in X$，有 supp $f(x) \subseteq$ supp(x)。结合一致有限支撑性，我们得到以下简单性质：

引理 2.1. 设 f: $X \to \mathcal{P}_\omega(Y)$ 是等变的。那么，对于所有 $x \in X$, $y \in f(x)$，都有支撑(y) $\subseteq$ 支撑(x)。

名义集合 X 的子集 S 是等变的，当且仅当 $\pi \cdot S \subseteq S$。我们用 $\uparrow_{\mathrm{eq}} S$ 表示 S 在等变性下的闭包：$\uparrow_{\mathrm{eq}} S = \bigcup_{\pi \in \mathrm{Perm}(\mathbb{A})} \pi \cdot S$。对于 $x \in X$，集合 $\mathrm{O}_x = \uparrow_{\mathrm{eq}}\{x\} \subseteq X$ 是 x 的轨道。对于两个元素 x_1、$x_2 \in X$，它们的轨道 O_{x_1} 和 O_{x_2} 要么相等，要么不相交。名义集合 X 是轨道有限的，当且仅当它只有有限多个轨道。名义集合之间的映射 f: $X \to Y$ 由 $S \subseteq \mathbb{A}$ 支撑，当所有 $x \in X$ 以及所有满足对任意 $s \in S$ 都有 $\pi(s) = s$ 的 $\pi \in$ Perm($\mathbb{A}$) 均满足 $f(\pi \cdot x) = \pi \cdot f(x)$ 时成立。若映射 f 由有限集合 S 支撑，则称其为有限支撑的。（注意，因此等变映射恰好是由空集支撑的映射。）在名义集合 $\mathbb{A} \times X$ 上，我们定义如下等价关系：$(a, x) \sim (b, y)$ 当且仅当对于某个（等价地，对于所有）满足 $c\#\ a, b, x, y$ 的名称 c，有 $(a\,c) \cdot x = (b\,c) \cdot y$；我们有时也较为宽泛地将此关系称为 α-等价。抽象集合 $[\mathbb{A}](\cdot)$ 定义为商集 $\mathbb{A} \times X/\sim$。$(a, x) \in \mathbb{A} \times X$ 的 $\sim$-等价类记作 ax。若 $b \in$ supp(x)，则 ax 不会在 $[\mathbb{A}]X$ 中等于任何 $x' \in X$ 的 bx'；此时，我们称在 ax 中将 a 重命名为 b 是受阻的。关于名义集合的更多细节，请参阅 Pitts 的书 [19]。

条语言、*RNNA* 与 *bar NFA*。 数据词是 $\mathbb{A}$ 上的有限词；和往常一样，我们用 $\mathbb{A}^*$ 表示所有数据词的集合。数据语言是 $\mathbb{A}^*$ 的子集。我们用置于名称前的条符号（‘ ’）表示，下一个字母将被绑定，直至词末。条字符串是字母表 $\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \{\ a \mid a \in \mathbb{A}\}$ [21] 上的有限词。我们有一个由 $w\ av \equiv_\alpha w\ bu$ 生成的 α-等价概念：若 $av = bu$ 属于 $[\mathbb{A}]\bar{\mathbb{A}}^*$，则……。我们用 $[w]_\alpha$ 表示条字符串 w 的 α-等价类。因此，条字符串 w 表示一个数据词集合，该集合由移除 $[w]_\alpha$ 中所有词的所有条符号后得到。条语言可由*bar NFA* 或*RNNA*识别：前者是普通的非确定有限自动机（NFA），其输入字母表是 $\bar{\mathbb{A}}$ 的一个（必然有限的）子集；后者是无限但可有限表示的自动机 $A = (Q,\ \Delta,\ i,\ F)$，它具有一个状态轨道有限名义集 Q、一个在 α-重命名下保持不变的等变转移关系 Δ、一个初始状态 i，以及一个等变的终态子集 $F \subseteq Q$。

3 显式释放

接下来，我们介绍显式释放词的概念，以及与之相关的 α-等价概念。如上所述，这些概念与动态序列 [8] 中的概念有关。$\mathbb{A}$ 的元素可以配备绑定符 [$\cdot$ 和标记],，从而为名称集合 $S \subseteq \mathbb{A}$ 得到 $\hat{}S = \{[a, a, d], [d] \mid a \in S\}$。我们据此构造一个新的字母表 $\mathbb{A}$，它是一个名义集合，在 Perm($\mathbb{A}$) 的作用下，按照预期方式扩展对 $\mathbb{A}$ 的作用：$\pi \cdot [a = [\pi(a),\ \pi \cdot [d] = [\pi(a)], \pi \cdot a] = \pi(a)]$。于是，$\hat{}\mathbb{A}^*$ 上所有词构成的集合 $\hat{}\mathbb{A}$ 是一个名义集合，Perm($\mathbb{A}$) 对词中字母的作用如上所述。我们将名称视为资源的一种抽象表示。在这一视角下，我们将字母 $[a$ 理解为开启或分配名称 a；将字母 a 理解为使用已分配或预先存在的名称 a；将字母 $d]$ 理解为关闭或释放名称 a；将字母 $[d]$ 理解为分配名称 a 后立即释放它。

基于这一观点，可以定义给定词中分配或释放的名称多重集。从技术上说，按照从左向右或从右向左遍历该词时名称首次出现的类型来区分名称，会更加方便。特别是，我们将用这些概念来定义右侧（非）遮蔽的概念。具体而言，我们引入词的右闭、左开和左闭 名称这些概念。若名称 a 在词 w中是右闭 的，则其在 w 中（从左向右读取）的最后一次出现带有标记（即为 $d]$ 或 $[d]$）。类似地，若名称在词 w 中是左闭 的，则其在 w 中（从左向右读取）的首次出现带有绑定符（即为 $[a$ 或 $[d]$）。此外，若名称 a 在 w 中是左开 的，则其首次出现不带绑定符（即为 a 或 $d]$）。表1给出了词 w的所有右闭、左开和左闭名称集合 RC(w)、LO(w) 和 LC(w) 的递归定义。如上所述，我们用这些概念来形式化右侧遮蔽的概念：若名称 a 在 v 中是右闭的，且在 u中是左开的，则复合词 vu 是右侧遮蔽的，也就是说，带标记的 a 的某次出现遮蔽了其右侧一个不带标记的 a 的某次出现

w'	$\mathrm{RC}(w')$	$\mathrm{LO}(w')$	$\mathrm{LC}(w')$
ϵ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$a\,w$	$\mathrm{RC}(w)$	局部轨道$(w)\ \cup\{a\}$	$\mathrm{LC}(w)\setminus\{a\}$
$\rangle\!\rangle aw$	$\mathrm{RC}(w)$	局部轨道$(w)\setminus\{a\}$	$\mathrm{LC}(w)\ \cup\{a\}$
$a\rangle\!\rangle w$	$\mathrm{RC}(w)$ if $a\in\mathrm{LC}(w)\ \cup$ 局部轨道(w) $\mathrm{RC}(w)\ \cup\{a\}$ 否则	局部轨道$(w)\ \cup\{a\}$	$\mathrm{LC}(w)\setminus\{a\}$
$[a]w$	$\mathrm{RC}(w)$ 如果 $a\in\mathrm{LC}(w)\ \cup$ 局部轨道(w) $\mathrm{RC}(w)\ \cup\{a\}$ 否则	局部轨道$(w)\setminus\{a\}$	$\mathrm{LC}(w)\ \cup\{a\}$

表1：通过对 w'进行分类讨论，定义子集$\mathrm{RC}(w')$,局部轨道(w'), $\mathrm{LC}(w')\subseteq\mathbb{A}$。

绑定符。因此，若对每个分解 $w=uv$ 都满足 $\mathrm{RC}(u)\cap\mathrm{LO}(v)=\emptyset$，则词 w 是右非遮蔽 的。我们用 $\mathrm{RNS}(\hat{}\mathbb{A})$ 表示带绑定子的字母表 $\hat{}\mathbb{A}$ 上所有右非遮蔽词构成的集合。

例 3.4 对所有这些概念都进行了说明。

引理 3.1. 对于复合词 $w=uv$，我们有
(1) $\mathrm{RC}(w)=(\mathrm{RC}(u)\setminus(\mathrm{LC}(v)\cup\mathrm{LO}(v)))\cup\mathrm{RC}(v)$,
(2) $\mathrm{LC}(w)=\mathrm{LC}(u)\cup(\mathrm{LC}(v)\setminus\mathrm{LO}(u))$，且(3)
$\mathrm{LO}(w)=\mathrm{LO}(u)\cup(\mathrm{LO}(v)\setminus\mathrm{LC}(u))$。

由此立即可得

引理 3.2。 对于右非遮蔽词 w 的一个分解 $w=uv$，有 $\mathrm{RC}(w)=(\mathrm{RC}(u)\setminus\mathrm{LC}(v))\cup\mathrm{RC}(v)$。

接下来，我们利用这些连接恒等式，证明右非遮蔽词在连接运算下具有闭包性质。根据右非遮蔽词的定义可知，连接两个词 w 和 u，只有当 w 中右闭的名称与 u 中左开的名称发生冲突时，才会在右侧引入遮蔽；下一个引理中的条件 $\mathrm{RC}(w)\cap\mathrm{LO}(u)=\emptyset$ 排除了这种情况：

ˆ引理 3.3。 设 $w,u\in\mathrm{RNS}(\mathbb{A})$ 是右非遮蔽词，且满足 $\mathrm{RC}(w)\cap$局部轨道$(u)=\emptyset$。则连接 wu 也是右非遮蔽词。

例 3.4. 下面给出一些词的例子，并列出如上所定义的相关名称集合，同时指出它们是否为右非遮蔽（rns）：

w	局部轨道(w)	$\mathrm{RC}(w)$	$\mathrm{LC}(w)$	rns
$[ab]a]$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	yes
$[a][b$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,\ b\}$	yes
$a[a]a$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	no
$bab]a]$	$\{a,b\}$	$\{a,\ b\}$	$\emptyset$	yes

通常，对词中受约束名称进行重命名会引出α-等价的概念：

ˆ定义 3.5 （α-等价）。 $\mathrm{RNS}(\mathbb{A})$ 上的关系 $\equiv_\alpha$ 由以下规则 1 至 5 及传递性闭包归纳定义：

1. $\dfrac{}{\epsilon\equiv_\alpha\epsilon}$　2. $\dfrac{\langle a\rangle\,w=\langle b\rangle\,w'}{\rangle\!\rangle a\,w\equiv_\alpha\rangle\!\rangle b\,w'}$
3. $\dfrac{w\equiv_\alpha w'\qquad\gamma\in\{a,\rangle\!\rangle a\}}{\gamma w\equiv_\alpha\gamma w'}$
4. $\dfrac{w\equiv_\alpha w',a\notin\mathrm{LO}(w)}{a\rangle\!\rangle w\equiv_\alpha a\rangle\!\rangle w'}$
5. $\dfrac{w\equiv_\alpha w',\{a,b\}\cap(\mathrm{LO}(w))=\emptyset}{\rangle\!\rangle a\rangle\!\rangle w\equiv_\alpha\rangle\!\rangle b\rangle\!\rangle w'}$

（规则 4. 的表述与规则 3. 分开，仅为确保词 $a\rangle\!\rangle w$ 是右非遮蔽的。）字面语言是语言 $L_0\in\mathrm{P}(\mathrm{RNS}(\hat{}\mathbb{A}))$。我们用 $[w]_\alpha$ 表示 w 的 α-等价类。ˆ字母语言是右非遮蔽词的 α-等价类集合 $L_\alpha\subseteq\mathrm{RNS}(\mathbb{A})/{\equiv_\alpha}$。数据语言是数据词集合 $L_D\in\mathrm{P}(\mathbb{A}^*)$。

我们用 $\uparrow_\alpha(L_0)$ 表示字面语言 L_0在关于 α-等价下的闭包，即与某个属于 L_0 的词 α-等价的词的集合 $\{w\in\mathrm{RNS}(\hat{}\mathbb{A})\mid w\equiv_\alpha w'$，其中 $w'\in L_0\}$。

ˆ事实 3.6。对于 $w\in\mathrm{RNS}(\mathbb{A})$，$[w]_\alpha$ 的支撑为 $\mathrm{supp}([w]_\alpha)=\mathrm{LO}(w)$；特别地，若 $w\equiv_\alpha w'$，则 $\mathrm{LO}(w)=\mathrm{LO}(w')$。

引理 3.7。 以下规则对 α-等价是可容许的：

$$\frac{\langle a\rangle[w]_\alpha=\langle b\rangle[w']_\alpha}{\rangle\!\rangle aw\equiv_\alpha\rangle\!\rangle bw'}$$

根据对从两侧绑定的字母 $[a\rangle$ 的 α-等价定义可知，绑定字母的身份无关紧要：在词 $[a\rangle w$ 中，字母 a 可以替换为任何在 w中不是左开的其他名称。我们称该字母为未知 ，并采用以下替代记法：

记法 3.8。 当 $u[a\rangle v$ 是右非遮蔽时，我们用 $u?v$ 代替 $u[a\rangle v$。

注3.9。 我们接下来真正关注的仅是右非遮蔽词；例如请注意，我们只在右非遮蔽词上定义了 α-等价。从技术上说，这一性质对于维持我们的名义自动机模型（见定义5.1）对词的可解释性至关重要；本质上可以看出，在我们的任一自动机中有运行的词都必须是右非遮蔽的。允许左侧遮蔽（如 $[a[a$，它是右非遮蔽的）但不允许右侧遮蔽，这符合我们对 $[a$ 和$a\rangle$ 分别表示资源分配和释放的直觉理解：连续两次分配同一资源而中间没有释放，会被视为不良风格（另见第4节关于规约词的讨论），但在技术上往往仍有可能；这对应于诸如 $[a[a$ 这样的词是右非遮蔽词。相反，像 $a\rangle a\rangle$, 这样两次释放同一资源，或像 $a\rangle a$这样在释放后再次使用某项资源，理应被视为技术上不可能，因为资源释放后就不应再可用；这对应于 $a\rangle a\rangle$ 和 $a\rangle a$ 是右侧遮蔽词。

4 语义

为了使用带绑定符的语言来表达数据语言，我们将RNS(ˆ𝔸)中的词解释为 $\mathbb{A}^*$中的词。具体而言，我们使用一个去括号化函数db，将字面词转换为它所表示的数据词，方法是移除定界符。我们将函数db: RNS(𝔸) $\to \mathbb{A}^*$ 定义为对词的字母替换扩展，该替换将字母 $a, [a, a]$ 分别替换为 a。沿用先前的工作 [6, 20, 21, 23], ，我们通过取语言中各 α-等价类的所有右非遮蔽代表元，再进行去括号化，来定义字母语言 L_α 的局部新鲜性语义D(L_α)；形式化地说：

$$\mathcal{D}(L_\alpha) = \{\mathrm{db}(w) \mid [w]_\alpha \in L_\alpha\}.$$

将 a 理解为解除分配一个先前已存在或先前已分配的资源 a，这种直觉引出了一种内存安全规约：我们要求每项资源一旦不再需要，就应立即解除分配，也就是在最后一次使用时解除分配。例如，词$[a[ba$会造成资源 a泄漏，因为该资源虽已分配，却再也不会被使用；在内存安全规约下，我们会要求立即解除分配 a，也就是说，该词应为 $[a[ba]a]$。类似地，$[a[bab$ 会导致 a 和 b都泄漏，而 $[a[ba]a]b]$ 则是其一种符合内存安全要求的改写。我们将相关的形式化定义表述如下。

ˆ**定义 4.1.** 如果对于每个分解 $w = uv$ $a \in LC\,u \cup LO\,u \Rightarrow a \in RC\,u \vee a \in RC\,v \wedge a \notin LC\,v$，都有 $(L(\mathbb{A}))(RC\,u)(LO\,v)$，则词 w 在 $\mathbb{A}$ 上是规整的 。如果 L中的每个词都满足这一条件，则 ˆ上的语言是规整的 。给定一个 ˆ$\mathbb{A}$ 上的词 w，我们递归地构造一个规整词 $\mathrm{disc}(w)$，如下所示：$\mathrm{disc}(\epsilon) = \epsilon$，若 $a \in \mathrm{LO}(w)$，则 $\mathrm{disc}(aw) = a\mathrm{disc}(w)$；否则 $\mathrm{disc}(aw) = a\mathrm{disc}(w)a$；$\mathrm{disc}([aw) = [a\mathrm{disc}(w)a$；若 $a = w$ LO( )，则 $\mathrm{disc}([aw) = [a\mathrm{disc}(w)$；否则 $\mathrm{disc}([\,) = []\mathrm{disc}(\,)$；$\mathrm{disc}(]w) =]\mathrm{disc}(\,)$。

引理 4.2. 对于每个词 $w \in \hat{}\mathbb{A}^*$，以下结论成立。(1) 词$\mathrm{disc}(w)$ 是规整的。(2) 局部轨道$(\mathrm{disc}(w))$ =局部轨道(w)。

例 4.3. </style}词 $w_1 = [a[ba$和 $w_2 = [a[bab$确实不是规整的，例如，其分解 $w_1 = ([a)([ba$ 和 $w_2 = ([a[b)(ab)$ 就能说明这一点。函数 disc 对这些词的作用如上所示，即 $\mathrm{disc}(w_1) = [a[ba$ 和 $\mathrm{disc}(w_2) = [a[ba]a]$。

关键在于，转换为规范词不会影响局部新鲜性语义：

ˆ**引理 4.4**。 对于 $w \in \mathrm{RNS}(\mathbb{A})$，我们有

$$\mathcal{D}(\{[w]_\alpha\}) = \mathcal{D}(\{[\mathrm{disc}(w)]_\alpha)\}).$$

5 释放自动机

现在我们将介绍一种带有释放转移的自动机模型。该模型将分配、显式释放及其即时组合（即 $[a]$）内化为一等转移。

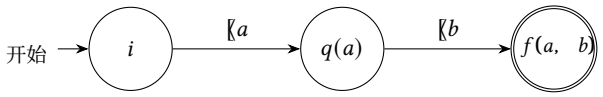
定义 5.1。 非确定性释放自动机 (*NDA*) 是一个元组 $A = (Q, \Delta, i, F)$，其中 Q是一个轨道有限的状态集，ˆ$\Delta \subseteq Q \times \mathbb{A} \times Q$ 是等变转移关系，$i \in Q$ 是初始 状态，而 $F \subseteq Q$ 是一个等变的终止 状态集。我们记作 $q \xrightarrow{\gamma} q'$ 既表示 $\Delta \subseteq Q \times \hat{}\mathbb{A} \times Q$ 中的相应元素，也表示陈述 ($q \xrightarrow{\gamma} q'$) $\in \Delta$，该陈述可以为真或假；我们将 $q \xrightarrow{\gamma} q'$ 称为转移。根据其标记字母，我们将转移称为自由 (a)、分配 ($[a$)、释放 ($a]$)、未知 ($[a]$)。我们对 Δ施加以下条件：

- 左 α-不变性：设 $q, q', q'' \in Q$和 $a, b \in \mathbb{A}$满足 $a\ q' = b\ q''$。则以下结论成立：– 若 $q \xrightarrow{\langle a} q'$，则 $q \xrightarrow{\langle b} q''$。– 若 $q \xrightarrow{\langle a]} q'$，则 $q \xrightarrow{\langle b]} q''$。
- 名称擦除：若 $q \xrightarrow{a\rangle} q'$ 或 $q \xrightarrow{\langle a]} q'$，则 $a \# q'$。
- 有限分支：在左 α-不变性意义下，每个状态只有有限多个出边：对于每个 $q \in Q$，集合 $\{(a, q') \mid (q, a, q') \in \Delta\}, \{aq' \mid (q, [a, q') \in \Delta\}, \{(a, q') \mid (q, a], q') \in \Delta\}$, 以及 $\{aq' \mid (q, [a], q') \in \Delta\}$ 都是有限的。

状态 q 接受词 w，当且仅当在通常意义下存在一条关于 w 的接受运行，即一系列连续的转移，其标签序列为 w，从 q 开始并在某个终态结束。若初始状态 i 接受 w，则 NDA A 接受词 w。NDA A 的字面语言是被 A接受的词的集合 $L_0(A)$，其字母语言 $L_\alpha(A)$ 是被 A接受的词的 α-等价类集合：$L_\alpha(A) = \{[w]_\alpha \mid w \in L_0(A)\}$。NDA A 的数据语言是集合 $L_D(A) = \mathrm{db}[L_0(A)] \subseteq \mathbb{A}^*$。 A的局部新鲜性语义（即字母语言的局部新鲜性语义）是集合 $\mathrm{D}(L_\alpha(A))$。轨道有限名义集 X的度为 $\deg(X) = \max_{n \in X} |\mathrm{supp}(x)|$。NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$ 的度 $\deg(A)$ 为 $\deg(Q)$。

上文引入的语言概念在例 5.2 中以图示呈现。

例 5.2. 设 $A = (\{i, q(a)\ f(a, b) \mid a, b \in \mathbb{A}, a \neq b\}, \{i \xrightarrow{[a} q(a)\ q(a) \xrightarrow{[b} f(a, b) \mid a, b \in \mathbb{A}, a \neq b\}\ i, \{f(a, b) \mid a, b \in \mathbb{A}, a \neq b\})$ 为下图所示的 NDA：



对于 A，其字面语言为 $L_0(A) = \{[a[b \mid a, b \in \mathbb{A}, a \neq b\}$，字母语言为 $L_\alpha(A) = \{[[a[b]_\alpha \mid a, b \in \mathbb{A}\}$，数据语言为 $L_D(A) = \{ab \mid a, b \in \mathbb{A}, a \neq b\}$，而其（字母语言的）局部新鲜性语义由 $\mathrm{D}(L_\alpha(A)) = \{ab \mid a, b \in \mathbb{A}\}$ 给出。请注意：对于 $L_0(A)$ 和 $L_D(A)$，a 与 b 不相等，因为从 $q(a)$ 出发没有以 $[a$ 标记的出边；但在 $L_\alpha(A)$ 和 $\mathrm{D}(L_\alpha(A))$ 中，由于 α-等价重命名，它们可能相同。我们已在第 2 节非正式地回顾了正则非确定性名义自动机（*RNNA*）[21]；现在可以正式地将 RNNA 定义为不含解除分配或未知转移的 NDA。

左 α-不变性的右手类比可由名称擦除和等变性推出：

引理 5.3 (右 α-不变性)。 设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 *NDA*，并设 $q, q', q'' \in Q, a, b \in \mathbb{A}$ 满足 $\langle a\rangle\ q = \langle b\rangle\ q''$。则有以下结论：

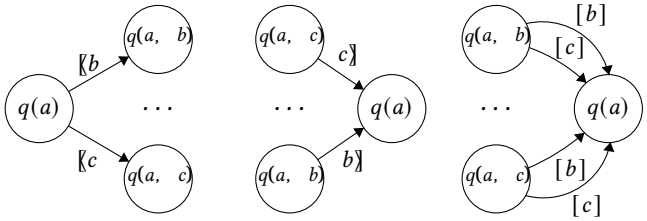


图1：NDA 转移在 α-等价下的不变性

(1) *If* $q \xrightarrow{a⟧} q'$ *in A, then also* $q'' \xrightarrow{b⟧} q'$.

(2) *If* $q \xrightarrow{⟦a⟧} q'$ *in A, then also* $q'' \xrightarrow{⟦b⟧} q'$.

我们在图1中阐释 NDA 的 α-不变性。

注 5.4。对于未知转移，左 α-不变性等价地表示：只要 $q \xrightarrow{[\langle a]} q'$，那么对于每个 $b \notin \mathrm{supp}(q')$，都有 $q \xrightarrow{[\langle b]} q'$（同时我们明确允许 $b \in \mathrm{supp}(q)$）。相应地，未知转移上的有限分支等价地表示：对于每个状态 q，集合 $\{q' \mid q \xrightarrow{[\langle a]} q'$，其中某个 $a \in \mathbb{A}$成立$\}$ 是有限的。

我们注意到，引理 5.3 的逆命题也成立；也就是说，在对 NDA 施加的其他条件下，根据引理 2.1，右 α- 不变性蕴含名称擦除；详细证明见附录。名称擦除印证了这样一种直觉：已释放的名称应当被真正遗忘。因此，它等价于形式上自然的右 α-不变性这一性质。

与词的情况类似，我们引入统一记号来表示未知转移：

记号 5.5。我们用 $q \xrightarrow{?} q'$ 表示 NDA 中的所有转移 $q \xrightarrow{[\langle a]} q'$。

例 5.6。我们使用 NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$ 对一个小型日志系统进行建模，该系统由 $Q = \{s\} \times \mathbb{A}^2 \cup \{q_1\} \times \mathbb{A}^3 \cup \{q_2\} \times \mathbb{A}^4$, $i = s(a, d)$, $F = \{s\} \times \mathbb{A}^2$ 和 Δ 构成；其转移如图 2 所示，并默认满足 NDA 对转移关系的所有要求（图中仅展示了 $s(c, d)$, $q_1(a, c, d)$, $q_1(b, c, d)$ 和 $q_2(a, b, c, d)$ 对应的部分）。

无限字母表 $\mathbb{A}$ 表示用户的标识符。因此，自动机中某个状态的支撑可以理解为当前已知的用户。登录和注销分别表示为绑定和解除分配相应的标识符。该示例支持两名新用户同时登录，其标识符为 a 和 b（q_4 上的 ?-转移表示其他用户登录失败，因为登录人数会超出容量）。全局识别的 ID 已包含在初始状态的支撑中。在我们的示例中，这实现了允许列表和阻止列表：ID 为 c 的用户是管理员；她不会登录或注销，并且可以不受状态机状态的影响执行操作（以循环的自由 c-转移表示）。另一方面，ID 为 d 的用户被排除在日志系统之外；她在任何状态下都无法执行操作（即自由 d-转移），也无法登录或注销。形式上，这是因为将 $[a$ 或 $[b$ 重命名为 $[d$ 的转移处处受阻，参见第 2 节。接受的词

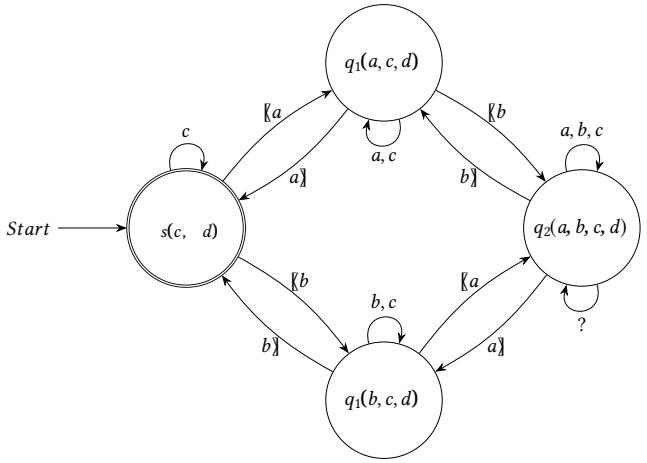


图2：一个 NDA 示例，它接受参与者（a 和 b）不超过两人且有一名管理员（c）的会话的有效日志。该 NDA 接受所有最终除管理员外的所有用户均已注销的日志。

由 A 接受的词，恰好是每位用户都已正确登录和注销的有效日志。

我们记录 NDA 的一些基本性质。首先，根据引理 2.1，等变性和有限分支性意味着以下关于转移后继状态支撑的估计：

引理 5.7（支撑引理）。对于所有 *NDA* $A = (Q, \Delta, i, F)$、q, $q' \in Q$ 和 $a \in \mathbb{A}$，我们有：

(1) *If* $q \xrightarrow{a} q' \in \Delta$, *then* $\mathrm{supp}(q') \cup \{a\} \subseteq \mathrm{supp}(q)$,

(2) *If* $q \xrightarrow{⟦a} q' \in \Delta$, *then* $\mathrm{supp}(q') \subseteq \mathrm{supp}(q) \cup \{a\}$,

(3) *If* $q \xrightarrow{⟦a⟧} q' \in \Delta$, *then* $\mathrm{supp}(q') \subseteq \mathrm{supp}(q) \setminus \{a\}$, $a \notin \mathrm{supp}(q)$,

(4) *If* $q \xrightarrow{a⟧} q' \in \Delta$, *then* $\mathrm{supp}(q') \subseteq \mathrm{supp}(q) \setminus \{a\}$.

也就是说，支撑沿着转移演化，这与寄存器范式类似：只有当 a 位于内存（即支撑）中时，才能执行 a 或 $\hat{a}$ 的转移；名称 a 通过转移 $[a$添加到内存中，也就是说，概括而言，是通过从输入中读取 a；而在 $\hat{a}$ 或 $[\hat{a}$ 下的转移会从内存中删除 a。由此可知，如注3.9所示，非确定有限自动机只处理右非遮蔽词：

命题5.8。*NDA* 接受的每个词都是右非遮蔽的。

为方便起见，我们在 NDA 中引入 ϵ-转移 。带有的 *NDA* ϵ-转移 的定义与 NDA 相同，但还可以具有ϵ-转移，即形如 $q \xrightarrow{\epsilon} q'$ 的转移；这些转移也必须满足等变性和有限分支条件，也就是说，对于每个 q，集合 $\{q' \mid q \xrightarrow{\epsilon} q'\}$ 必须是有限的；这意味着支撑引理（引理 5.7）可以扩展为：只要 $q \xrightarrow{\epsilon} q'$，那么 $\mathrm{supp}(q') \subseteq \mathrm{supp}(q)$。接受的定义与带有 ϵ-转移的自动机模型中的通常定义相同，即接受运行可以包含ϵ-转移，而这些转移不会消耗输入词中的字母。（形式上，词 w 上的接受运行具有如下形式

$i \xrightarrow{v_1} q_1 \xrightarrow{v_2} q_2 \dots \xrightarrow{v_n} q_n \in F$其中每个 v_1 要么是来自 $\hat{\mathbb{A}}$ 的单个字母，要么是 ϵ，并且 $v_1 \dots v_n = w$。）

引理 5.9 (ϵ-消除)。 对于每个具有 ϵ-转移的 *NDA*，都存在一个接受相同字面语言的 *NDA*。

证明概要。按照 NFA 中常用的ϵ-消除方法；容易验证，将这一构造应用于具有ϵ-转移的 NDA 确实会得到一个 NDA。□

由转移关系和终态集合的等变性可立即得出，词的接受性也是等变的：

引理 5.10。 如果 *NDA* 的状态 q 接受词 w，那么 $\pi \cdot q$ 接受 $\pi \cdot w$。

如上所述，RNNA 可以看作是不含解除分配或未知转移的 NDA。在局部新鲜性语义下，反向包含也成立：

命题 5.11. 在局部新鲜性语义下，*NDA* 和 *RNNA* 表达能力等价。

证明概要。在所有转移中，将 $[a\rangle$ 替换为 a，并将 $[a]$ 替换为 $[a$。□

从 NDA 构造与其数据语言等价的 RNNA 非常简单，因此在局部新鲜性语义下，NDA 继承了 RNNA 在语言包含方面的算法可处理性 [21, 推论 7.4]：

定理 5.12. 在局部新鲜性语义下，*NDA* 的语言包含问题是可判定的，且可在指数空间内求解；事实上，若以度为参数，则可在参数化多项式空间内求解。

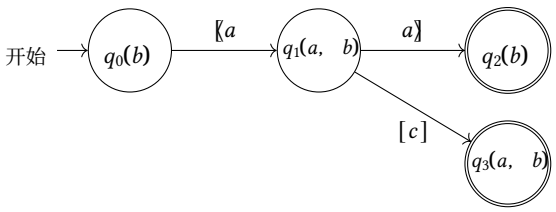
这里我们指出，在名义自动机模型与寄存器自动机之间的转换中 [2, 21], , 度对应于寄存器的数量。

6 名称丢弃与关于α-等价的闭包

NDA 转移关系的左不变性和右不变性似乎引入了足够的结构对称性，从而确保接受语言在 α-等价下闭包。对于某些 NDA，确实如此，以下引理说明了这一点：

引理 6.1. 设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 *NDA*。假设每个状态$q \in Q$ 的支撑恰好是被 q接受的每个词的左开名称，记作：支撑$(q) =$ 局部轨道(w) 对所有 $w \in L_0(q)$均成立。则 $L_0(A)$ 在 α-等价下闭包。

然而，一般来说，对 α-等价的闭包可能不成立。考虑如下图示的 NDA：



该 NDA 接受词 $[aa]$，但不接受与之 α-等价的词$[bb]$, ，因为将 $[a$-转移重命名为 $[b$ 会受到 $b \in \mathrm{supp}(q_1(a, b))$ 的阻碍。同样，词 $[a[a]$ 被接受，但与之α-等价的词 $[a[b]$, 不被接受，因为将 $[a$ 重命名为 $[b$ 会受到 $b \in \mathrm{supp}(q_1(a, b))$ 的阻碍。就引理 6.1 的条件而言，注意到 $a \in L_0(q_1(a, b))$，且 $b \in \mathrm{supp}(q_1(a, b))$，但 $b \notin \mathrm{LO}(a)$; 类似地，$\epsilon \in L_0(q_3(a, b)$，且 $b \in \mathrm{supp}(q_3(a, b))$，但 $b \notin \mathrm{LO}(\epsilon)$。

接下来，我们将在 NDA 上给出一种构造，使其在 α-等价下对语言封闭；类似的构造也曾以相近方式用于相关工作 [6, 20, 21]。该构造所依据的原理不同于引理 6.1；我们将在第 8 节回到后者。

首先，我们证明不妨假设 NDA 的名义状态集具有更明确的描述。为此，回顾一下：如果对于所有 $x \in X$ 和 $\pi \in \mathrm{Perm}(\mathbb{A})$，都有 $\pi \cdot x = x$ 当且仅当 π 固定 $\mathrm{supp}(x)$ 中的每个元素，则称名义集合 X 是强的 [22]。（“如果”方向对每个名义集合都成立。）此外，如果对于每个 $x \in X$，都有 $\mathrm{supp}(f(x)) = \mathrm{supp}(x)$，则称等变映射 $f\colon X \to Y$ 是支撑反射的（回顾一下，$\mathrm{supp}(f(x)) \subseteq \mathrm{supp}(x)$ 始终成立）。对于每个名义集合 Q，都有一个支撑反射的、满射且等变的映射 $e\colon P \twoheadrightarrow Q$，其具有强名义定义域 P；当 Q 为轨道有限时， P 可以取为轨道有限的 [17, 完整版，推论 B.27.1]。例如，名义集合 $\mathbb{A}^{\#n}$、 $\mathbb{A}^n$ 和 $\mathbb{A}^*$ 都是强的，其中 $\mathbb{A}^{\#n}$ 表示 n 元新鲜积 $\mathbb{A}$ 与自身的乘积，即由 $\mathbb{A}$ 中元素两两不同的 n 元组组成的集合。在同构意义下，轨道有限强名义集恰好是余积 $\coprod_{j=1}^{n} \mathbb{A}^{\#n_j}$，其中 $n_j \in \mathbb{N}$，且 n 是该名义集合的轨道数（例如参见 [17, 完整版，推论 B.27]）。

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathbb{A}^{\$n}$表示部分单射 $[n] \rightharpoonup \mathbb{A}$构成的名义集合，其中 $[n]$表示集合 $\{1, \dots, n\}$。如预期，$\mathrm{Perm}(\mathbb{A})$ 在 $\mathbb{A}^{\$n}$上的群作用是逐点进行的：若 $f(j)$ 有定义，则 $(\pi \cdot f)(j) = \pi(f(j))$；否则，$(\pi \cdot f)(j)$ 无定义。我们可以将 $\mathbb{A}^{\#n}$ 中的元素视为全单射 $[n] \to \mathbb{A}$，从而使 $\mathbb{A}^{\#n}$成为 $\mathbb{A}^{\$n}$的名义子集。若全单射 $\bar{f} \in \mathbb{A}^{\#n}$对每个 $j = 1, \dots, n$都满足：只要 $f(j)$ 有定义，就有 $\bar{f}(j) = f(j)$，则称其扩展了元素 $f \in \mathbb{A}^{\$n}$。注意， $\mathbb{A}^{\$n}$是轨道有限的，但与 $\mathbb{A}^{\#n}$不同，它有多个轨道。通常，我们将和 $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}^{\$n_j}$或 $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}^{\#n_j}$中的元素写成 (j, f) 的形式，其中 $f\colon [n_j] \rightharpoonup \mathbb{A}$。

命题 6.2。 对于每个 *NDA*，都存在一个具有强名义状态集的 *NDA*，接受相同的文字语言（因此也接受相同的字母语言）。

在下文中，我们默认 NDA 的状态集是强名义集。

构造 6.3 （名称丢弃修改）。 给定一个具有强名义状态集 $Q = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}^{\#n_j}$ 的 NDA$A = (Q, \Delta, i, F)$，其名称丢弃修改 $A_\perp$ 是由以下数据定义的 NDA（$Q_\perp, \Delta_\perp, i, F_\perp$）：

（1）状态的名义集合为 $Q_\perp = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}^{\$n_j}$;
(2) $(j,\ f)$ 在 $A_\perp$ 中是终结的，当且仅当对于扩展 $\bar{f}$（根据终结性的等变性，这与所选扩展 $\bar{f}$ 无关），$(j,\ \bar{f})$ 在 A 中是终结的；

(3) $(j,\ f) \xrightarrow{a} (k,\ g)$ 在 $\Delta_\perp$ 中，当且仅当 $\mathrm{supp}(f) \supseteq \{a\} \cup \mathrm{supp}(g)$，且存在某个 $\bar{f}$，使得 $(j,\ \bar{f}) \xrightarrow{a} (k,\ \bar{g})$ 在 A 中，并分别扩展 f 和 g；

(4) $(j,f) \in \xrightarrow{a} (k,g)$ 属于 $\Delta_\perp$，若 $\mathrm{supp}(f) \cup \{a\} \supseteq \mathrm{supp}(g)$，且 $(j,\bar{f}) \xrightarrow{[b} \langle (k,\bar{g})$ 属于 A，其中存在 $b \in \mathbb{A}$、$g' \in Q_\perp$ 使得 $bg' = ag$，并且存在分别扩张 f 和 g' 的全单射 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$；

(5) 对于 $a \in \mathrm{supp}(f)$，$(j,f) \xrightarrow{a]} \rangle (k,g)$ 属于 $\Delta_\perp$，若 $\mathrm{supp}(f) \supseteq \mathrm{supp}(g)$，且 $(j,\bar{f}) \xrightarrow{a]} \rangle (k,\bar{g})$ 属于 A，其中存在 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$，分别扩张 f 和 g（因此也有 $a \notin \mathrm{supp}(k,g)$）。

(6) $(j,f) \xrightarrow{[a]} (k,g)$ 属于 $\Delta_\perp$，当且仅当 $\mathrm{supp}(f) \supseteq \mathrm{supp}(g)$，且对于 $b \in \mathbb{A}, f, g' \in Q_\perp$，存在满足 $bg' = ag$ 的 $j, \bar{f}$，使得 $(j,\bar{f}) \xrightarrow{[b]} (k,\bar{g})$ 属于 A，其中某些 $\bar{f}$和 $\bar{g}$分别扩展了 f和 g'（即，对于每个 $a \notin \mathrm{supp}(k,g)$，都有转移 $(j,f) \xrightarrow{[a]} (k,g)$ 属于 $\Delta_\perp$）。

引理 6.4。*NDA* 的名称丢弃修改仍是一个 *NDA*。

证明概要。我们验证 $A_\perp$ 满足 NDA 的条件。名义集合 $Q_\perp$ 是轨道有限的，因为它是有限个轨道有限名义集合 $\mathbb{A}^{\$n}$ 的有限余积。利用 Δ 的等变性，并注意到定义中的支撑侧条件在群作用下保持不变，即可得出 $\Delta_\perp$ 的等变性。结合 Δ 的 α不变性与 $\Delta_\perp$ 定义中的抽象，可得出左、右α不变性。最后，有限分支性成立，因为对于固定的 $(j,f) \in Q_\perp$，可选的扩张 $\bar{f}$ 只有有限个；在α不变性下，A 中的后继只有有限个；而从这些后继的支撑中丢弃名称的方式也只有有限种。□

引理 *6.5.* 设 $(j,r) \in Q_\perp$ 是 *NDA* $A = (Q, \Delta, i, F)$ 的名称丢弃修改 $A_\perp = (Q_\perp, \Delta_\perp, i, F_\perp)$ 的一个状态。那么，(j,r) 接受每个满足 $LO(w) \subseteq supp(r)$、且被某个 $(j,\bar{r}) \in Q$ 接受的词 w，其中 $\bar{r}$扩展了 r；记作：

$$\{w \in L_0(j,\bar{r}) \mid (j,\bar{r}) \in Q, \bar{r}\ extends\ r, \mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{supp}(r)\} \subseteq L_0(j,r).$$

接下来要证明，名称丢弃所引入的额外转移，恰好使字面语言对 α-等价封闭。

引理 6.6. 名称丢弃修改的字面语言对 α-等价封闭。

证明概要。将断言加强为适用于 $A_\perp$ 的所有状态 (j,r)，并对词的长度进行归纳。给定 $w = \gamma v \equiv_\alpha \delta v' = w'$ 和首个转移 $(j,r) \xrightarrow{\gamma} (k,r_1)$，利用归纳假设，由后继状态中接受 v' 推得接受 v。若 $\gamma \in \{a, \bar{a}\}$，则 $\delta = \gamma$，无需重命名。若 $\gamma = [a]$，则 $w' = [\bar{a}v'$，其中 b 对 v 是新鲜的；利用 $\Delta_\perp$ 的左 α-不变性，将 $[\bar{a}$-转移替换为指向同一目标的 $[\bar{b}$-转移。若 $\gamma = [a$，则 $\delta = [b$ 且 $v' = (ab) \cdot v$；首先用引理 6.5 从后继状态的支撑中丢弃重命名后的名称，然后沿等变性传递接受性，最后应用左 α-不变性，将分配字母从 $[a$ 改为 $[b$。□

以下引理为构造 6.3 的第 (3) 至 (6) 条提供了另一种刻画：根据定义，NDA 的每个转移都可能产生多个转移，位于名称丢弃修改中对应任意一个丢弃名称的状态。不过，从名称丢弃修改中的一个状态出发，我们也可以追溯构造过程，从而为原始 NDA 中该状态的每个扩展获得一个转移。

引理 6.7。设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 *NDA*，$A_\perp = (Q_\perp, \Delta_\perp, i, F_\perp)$ 是其名称丢弃修改。

(1) 若 $(j,r) \xrightarrow{\gamma} (k,r') \in \Delta_\perp$ 对于 $\gamma = a, a], [\langle a]$, 成立，则对于每个扩展 r 的 $\bar{r}$，都存在某个转移 $(j,\bar{r}) \xrightarrow{\gamma} (k,\bar{r}') \in \Delta$，其中 $\bar{r}'$扩展 r'。

(2) 若 $(j,r) \in \xrightarrow{a} (k,r') \in \Delta_\perp$，则对于每个扩展 r 的 $\bar{r}$，都存在一个对，新鲜的名称 $b \in \mathbb{A}$ r j k $\in$，以及某个转移 $(,\bar{r}) \xrightarrow{[b} \langle (,\bar{r}'')$，其中 $''$扩展 $()\cdot$。

引理 6.8. 一个 *NDA* 与其名称丢弃修改接受相同的字母语言。

证明概要。包含关系 $L_\alpha(A) \subseteq L_\alpha(A_\perp)$ 是显然的，因为 $A_\perp$ 包含 A。反过来，我们证明：若 $A_\perp$ 接受一个词 w，则原自动机 A 接受某个 $w' \equiv_\alpha w$。对 $w = \gamma v$的长度进行归纳，其中 $w = \gamma v$是状态 $(j,\ r) \in Q_\perp$ 在 $A_\perp$中的全扩张。利用引理 6.7，将 $A_\perp$ 中接受运行的第一步转移提升为 A 中的相应转移，并应用归纳假设。分配情形需要更改绑定符名称；为此，我们选择引理 6.7 提供的一个新鲜名称 b。□

定理 6.9. 名称丢弃修改使 *NDA* 的语言在 α-等价下封闭。

证明。名称丢弃修改的字面语言 $A_\perp$ 根据引理 6.6 在 α-等价下封闭，且其字母语言与 A的字母语言根据引理 6.8 相同。因此，$A_\perp$恰好接受那些可由 α-重命名得到、且被 A按字面接受的词。□

7 NDA 的 Kleene 定理

我们提出一个克莱尼定理，确立了 NDA 与关于 $\mathbb{A}$ 的正则释放表达式之间的精确对应关系，也就是对 NDA 可表达语言的代数描述。为此，我们将引入一种将 NDA 表示为 *D-NFA* 的方法；D-NFA 是一种在转移上附加了约束的（经典）非确定有限自动机（NFA）。因此，我们的结果可以实现 NDA、正则释放表达式与 D-NFA 之间的相互转换，如图 3 所示。

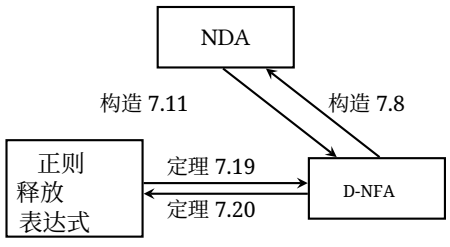


图 3：正则释放表达式、D-NFA 和 NDA 之间的对应关系。由此可得 NDA 的克莱尼定理。

我们回顾一下正则表达式的定义：（经典）正则表达式 r 关于 $\mathbb{A}$ 由以下文法生成

$$r ::= \emptyset \mid \epsilon \mid \gamma \mid r \cdot r \mid r + r \mid r^*, \qquad \text{where } \gamma \in \hat{\mathbb{A}}.$$

$\hat{}$ 字面语言 $L(r) \subseteq \mathbb{A}^*$ 按标准方式定义如下：

- $L(\emptyset) = \emptyset$、$L(\epsilon) = \{\epsilon\}$，以及 $L(\gamma) = \{\gamma\}$，其中字母为 γ；
- $L(r+r') = L(r) \cup L(r')$、$L(r \cdot r') = L(r) \cdot L(r')$，以及 $L(r^*) = L(r)^*$。

给定一个正则表达式 r，r的所有右闭名称的集合 $\mathrm{RC}(r)$由所有满足以下条件的名称 a组成：存在一个词$w \in L(r)$，其中 a 是右闭的。

类似地，r的所有左开 名称的集合 $\mathrm{LO}(r)$由所有满足以下条件的名称 a组成：存在一个词 $w \in L(r)$，其中 a 是左开的。最后，r的所有左闭 名称的集合 $\mathrm{LC}(r)$由在每个 $L(r)$的词中均为左闭的所有名称组成。用符号表示为

$$\mathrm{RC}(r) = \bigcup_{w \in L(r)} \mathrm{RC}(w), \quad \mathrm{LO}(r) = \bigcup_{w \in L(r)} \mathrm{LO}(w), \quad (1)$$
$$\mathrm{LC}(r) = \bigcap_{w \in L(r)} \mathrm{LC}(w).$$

我们关注只生成右非遮蔽词的正则表达式，并将在引理 7.3 中证明，这类表达式具有以下语法刻画。

定义 7.1. 正则释放表达式 是一个在 $\mathbb{A}$ 上的正则表达式 r，由以下文法生成

$$r, r_1, r_2, r_3 := \emptyset \mid \epsilon \mid ⟦a \mid a⟧ \mid a \mid ? \mid r_1 \cdot r_2 \mid r + r \mid (r_3)^*,$$

其中 $\mathrm{RC}(r_1) \cap$局部轨道$(r_2) = \emptyset$，且 $\mathrm{RC}(r_3) \cap$局部轨道$(r_3) = \emptyset$.

此外，我们将对应的字母语言记作 $L_\alpha(r) = \{[w]_\alpha \mid w \in L(r)\}$。

$\hat{}$引理 *7.2. </style}*判定给定的一个在 $\mathbb{A}$ 上的正则表达式是否为定义 *7.1* 所述的正则释放表达式，是可判定的。

证明概要。我们给出 $\mathrm{RC}(r)$ 的递归子句（$\mathrm{LO}(r)$ 和 $\mathrm{LC}(r)$ 的递归子句见附录）：

$$\mathrm{RC}(\emptyset) = \mathrm{RC}(\epsilon) = \mathrm{RC}(⟦a) = \mathrm{RC}(a) = \mathrm{RC}(?) = \emptyset$$
$$\mathrm{RC}(a⟧) = \{a\}$$
$$\mathrm{RC}(r_1 \cdot r_2) = \mathrm{RC}(r_2) \cup (\mathrm{RC}(r_1) \setminus \mathrm{LC}(r_2))$$
$$\mathrm{RC}(r_1 + r_2) = \mathrm{RC}(r_1) \cup \mathrm{RC}(r_2)$$
$$\mathrm{RC}(r_3^*) = \mathrm{RC}(r_3)$$

由于 r 只包含有限个名称出现，所有中间集合都是有限的（基础情形 $\mathrm{LC}(\emptyset) = \mathbb{A}$ 中的集合为 $\mathbb{A}$）。因此，只需在每个连接和星号运算出现处检查有限交集 $\mathrm{RC}(r_1) \cap \mathrm{LO}(r_2)$ 和 $\mathrm{RC}(r_3) \cap \mathrm{LO}(r_3)$，即可判定定义 7.1 文法中的侧条件。 □

引理 7.3。 设 r 是字母表 $\hat{}\mathbb{A}$ 上的经典正则表达式 r。则以下条件等价。

$\hat{}$(1) 由 r 定义的、字母表为 $\mathbb{A}$ 的语言中的所有词都是右非遮蔽的
(2) 表达式 r 是定义 *7.1* 意义下的正则释放表达式。

证明概要。我们对 r进行结构归纳。基本情形（$\emptyset$、ϵ和 $\gamma \in \hat{}\mathbb{A}$）显然成立。对于和式，分别由$L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$处理。对于连接，我们使用引理 3.1 和反证法；星号运算的情形类似。□

定义 7.4。 设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是字母表 $\hat{}\mathbb{A}$ 上的经典非确定有限自动机。状态 $q \in Q$ 的右闭名称集 $\mathrm{RC}_A(q)$ 和左开名称集 $\mathrm{LO}_A(q)$ 归纳定义为满足以下条件的最小集合族：

- if $q \xrightarrow{a⟧} q'$, then $\mathrm{RC}_A(q) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_A(q')$ and $\mathrm{LO}_A(q) \supseteq \{a\} \cup \mathrm{LO}_A(q')$,
- if $q \xrightarrow{a} q'$, then $\mathrm{LO}_A(q) \supseteq \mathrm{LO}_A(q') \cup \{a\}$ and $\mathrm{RC}_A(q) \setminus \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_A(q')$,
- if $q \xrightarrow{⟦a⟧} q'$, then $\mathrm{RC}_A(q) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_A(q')$, $\mathrm{LO}_A(q) \supseteq \mathrm{LO}_A(q')$, and
- if $q \xrightarrow{⟦a} q'$, then $\mathrm{LO}_A(q) \supseteq \mathrm{LO}_A(q') \setminus \{a\}$ and $\mathrm{RC}_A(q) \setminus \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_A(q')$.

如果上下文清楚，我们会省略下标 A。若对每个状态 $q \in Q$，都有 $\mathrm{RC}_A(q) \cap \mathrm{LO}_A(q) = \emptyset$，则称 A为释放非确定有限自动机 （简称*D-NFA*）。 A的字面语言 $L(A)$是它作为非确定有限自动机时的语言。 A的字母语言 $L_\alpha(A)$是商集 $L_\alpha(A) = \{[w]_\alpha \mid w \in L(A)\}$。 A的数据语言 $L_D(A)$是集合 $L_D(A) = \mathrm{db}[L(A)]$。

注 7.5。 直观而言，这一定义可以理解如下。集合 $\mathrm{RC}(q)$ 和 $\mathrm{LO}(q)$ 分别包含为使给定的非确定有限自动机能够实现为 NDA 而必须不在或必须在 q 支撑中的名称。显然，这两个集合必须不相交。定义这些集合的规则反映了引理 5.7 中所述的支撑性质。同时，$\mathrm{RC}(q)$ 包含在某个运行终止于 q的词中右闭的名称，而 $\mathrm{LO}(q)$ 包含在某个运行始于 q的词中左开的名称，因此，不相交这一性质保证了自动机中从任意状态出发的运行所对应的词都是右非遮蔽的；NDA 也保证了这一性质。

为了便于在定理 7.19 中根据正则释放表达式构造 D-NFA，我们在经典带 ϵ-转移的非确定有限自动机的概念基础上，在 D-NFA 中引入 ϵ-转移。不过，正如我们将在下文中证明的那样，这并不会增强 D-NFA 的表达能力。

定义 7.6。 设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个带 ϵ-转移的非确定有限自动机（$(q, \epsilon, q') \in \Delta$）。集合 $\mathrm{RC}(q)$ 和 $\mathrm{LO}(q)$ 的定义与之前类似，但除了定义 7.4 中给出的包含关系外，我们还要求对每个 $(q \xrightarrow{\epsilon} q') \in \Delta$，都有 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(q')$ 且 $\mathrm{RC}(q) \subseteq \mathrm{RC}(q')$。若对所有 $q \in Q$，$\mathrm{RC}(q) \cap \mathrm{LO}(q) = \emptyset$，则称 A 为带 ϵ-转移的 *D-NFA* 。

引理 7.7。 对于 *D-NFA*，ϵ-转移是可接受的，也就是说，对于每个带有 ϵ-转移的 *D-NFA* $A = (Q, \Delta, i, F)$，都存在一个 *D-NFA* A'（不带 ϵ- 转移），使得 $L(A') = L(A)$。

证明概要。通过 ϵ-闭包 $E(q)$，并采用构造等价的 ϵ-自由非确定有限自动机的标准构造，消除底层非确定有限自动机中的 ϵ-转移。定义 $\mathrm{RC}(E(q)) := \mathrm{RC}(q)$ 和 $\mathrm{LO}(E(q)) := \mathrm{LO}(q)$。对 RC 和 LO 中的 ϵ-转移所施加的额外约束确保

商构造中的每个可见转移仍满足定义 7.4 中的定义性包含关系。因此，$\preceq$ RC ∩LO ∅ □ 的不相交性得以保留，所得结果仍是一个 D-NFA。

接下来，我们给出 NDA 与 D-NFA 之间的一种转换，该转换保持字母语言不变。

构造 7.8（名义化）。设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 D-NFA。我们固定左投影的一个截面 $\iota : Q \to Q \times \mathbb{A}^*$ 使得对于 Q，$\iota(q) = (q, a_1 \dots a_n)$，其中 $\mathrm{LO}(q) = \{a_1, \dots, a_n\}$（换言之，对于每个 q，我们固定 $\mathrm{LO}(q)$ 中元素的一个枚举）。然后，A 的名义化是 NDA $A' = (\uparrow_{\mathrm{eq}} Q', \uparrow_{\mathrm{eq}} \Delta', i', \uparrow_{\mathrm{eq}} F')$，定义如下

$$Q' = \iota[Q] \subseteq Q \times \mathbb{A}^*, \qquad F' = \iota[F], \qquad i' = \iota(i),$$

并且 Δ' 由以下转移组成：

- a transition $\iota(q) \xrightarrow{\alpha} \iota(q')$ whenever $(q \xrightarrow{\alpha} q') \in \Delta$ and $\alpha \in \hat{\mathbb{A}}$ has the shape $\alpha = a$, $\alpha = \langle\!\langle a$, or $\alpha = a \rangle\!\rangle$; and
- a transition $\iota(q) \xrightarrow{\langle\!\langle a} (q', s)$ whenever $(q \xrightarrow{\langle\!\langle c} q') \in \Delta$ and $\langle a \rangle (q', s) = \langle c \rangle \iota(q')$.

这里，等变闭包 $\uparrow_{\mathrm{eq}}$ 和抽象均是相对于乘积 $Q \times \mathbb{A}^*$ of Q 来理解的，其中 $Q \times \mathbb{A}^*$ of Q 被视为离散名义集，而 $\mathbb{A}^*$ 是名义集合。

引理 7.9. *D-NFA 的名义化是一个 NDA。*

证明概要。由于 Q 和 Δ 都是有限的，并且转移中出现的名称只有有限多个，因此 $\mathrm{LO}(q)$只有有限种可能的支撑，进而由截面 ι选出的元组也只有有限多个；因此 Q' 是有限的，其等变闭包是有限轨道的。根据构造，$\uparrow_{\mathrm{eq}} \Delta'$ 是等变的。左 α-不变性成立，因为 Δ' 的构造恰好体现了定义 5.1 中的要求。名称擦除由 RC 的各项规则以及 D-NFA 所要求的不相交性质保证。有限分支继承自 Δ 的有限性以及 Q' 有限这一事实。□

引理 7.10. *对于 D-NFA A 及其名义化 A'，有 $L_\alpha(A') = L_\alpha(A)$。*

证明概要。一个方向的包含关系显然成立，因为 A 的每个转-移都会在所选代表元 $\iota(q)$之间诱导出相应的转移，所以 A 的每个接受运行都能提升为 A' 在同一个词上的接受运行。对于反向包含，我们将 A' 的运行投影回其第一分量，从而得到 A 的一个运行。唯一可能出现的不匹配来自分配转移和未知转移，此时名义化可能会选择不同的新鲜名称。利用 NDA 中接受关系的等变性（引理 5.10），以及 α-等价的定义规则，将 A' 中该运行的词转换为一个与之 α-等价且被 A接受的词。□

构造 7.11 (S-限制)。设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 NDA。固定一个集合 $S \subseteq \mathbb{A}$，使得 $\mathrm{supp}(i) \subseteq S$ 且 $|S| = \deg(A) + 1$。A 的 S-限制 A_S 定义为 $A_S = (Q_S, \Delta_S, i, F_S)$，其中

$$Q_S = \{q \in Q \mid \mathrm{supp}(q) \subseteq S\},$$
$$\Delta_S = \{q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta \mid q, q' \in Q_S, \mathrm{db}(\gamma) \in S\},$$
$$F_S = F \cap Q_S.$$

引理 7.12。*NDA 的 S限制 A_S 是一个 D-NFA A .*

NDA 的限制接受相应受限的字面语言：

引理 7.13。*NDA A 的 S-限制 A_S 接受 $L_0(A)$ 限制在由 $\hat{}S$ 构成的词上，也就是说，$L(A_S) = L_0(A) \cap \hat{}S^*$。*

证明概要。我们通过对接受运行的长度进行归纳来证明这一点，并利用引理 5.7：在词 $w \in \hat{}S^*$ 上的每个运行都保持在 A_S 中。□

由引理 7.13 可立即推出数据语言也具有类似性质：

引理 7.14。*将 NDA A 限制到 S，会将 $L_D(A)$限制为由 S 构成的词，即 $L_D(A_S) = S^* \cap L_D(A) = \{\mathrm{db}(w) \mid w \in L_0(A_S)\}$。*

另一方面，重要的是，字母语言在限制下不会改变：

命题 7.15。*NDA 的 S-限制 A_S A接受相同的字母语言：$L_\alpha(A_S) = L_\alpha(A)$。*

正如注 7.5 中所阐述的，以下两个引理更精确地刻画了 D-NFA 中状态 q 对应的集合 $\mathrm{RC}(q)$ 和 $\mathrm{LO}(q)$。

$\hat{}$引理 7.16。设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是定义在 $\mathbb{A}$ 上的一个非确定有限自动机，$q, q' \in Q$ 是一对状态。那么对于非确定有限自动机 $A' = (Q, \Delta, q, \{q'\})$，有 $\bigcup_{w \in L(A')} RC(w) \subseteq RC(q')$，且 $\bigcup_{w \in L(A')} LO(w) \subseteq LO(q)$。

显然，反向包含关系不成立，因为状态 q 的 $\mathrm{RC}(q)$ 和 $\mathrm{LO}(q)$ 的取值是转移结构的性质，因此与初态和终态的选择无关。例如，简单的 D-NFA

$$A = (\{q, q'\}, \{q \xrightarrow{a} q'\}, q, \{q\})$$

接受语言 $L(A) = \{\epsilon\}$，其局部轨道为 $\mathrm{LO}(\epsilon) = \emptyset$，而我们有 $\mathrm{LO}(q) = \{a\}$。然而，若考虑所有可能的入向和出向运行，而不局限于分别以某个特定终态结束或从初始状态开始的运行，则反向包含确实成立：

*$\hat{}$**引理 7.17.** 设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是字母表为 $\mathbb{A}$ 的非确定有限自动机，且 $q \in Q$是一个状态。此外，记 $O(q)$ 为在 A 中存在一条从 q开始的运行的所有词的集合，记 $I(q)$ 为在 A 中存在一条以 q结束的运行的所有词的集合。那么有*

$$\bigcup_{w \in I(q)} \mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(q) \quad \textit{and} \quad \bigcup_{w \in O(q)} \mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(q).$$

注记 7.18. 注意，所有词 w 共有的左闭名称集合（其中存在一条从某个状态 q 出发或到达该状态的运行）为空：由于空字 ϵ在每个状态都有一条起始并终止于该状态的运行，因此有 $\bigcap_{w \in I(q)} \mathrm{LC}(w) = \emptyset = \bigcap_{w \in O(q)} \mathrm{LC}(w)$.

现在我们已经准备好展示本截面的主要结果：正则释放表达式与 D-NFA 之间的相互转换。

定理 7.19. *对于每个正则释放表达式 r，都存在一个 D-NFA A，使得 $L_\alpha(r) = L_\alpha(A)$。*

证明概要。我们对定义 7.1 中的文法进行结构归纳来构造 A。基础情形是直接的。对于归纳情形，我们使用带有 ϵ-转移的标准 NFA 克莱尼构造（连接、星号运算和并集），并验证定义 7.4 中对 RC 和局部轨道所施加的条件。□

定理 7.20。 对于每个 *D-NFA* A，存在一个正则释放名称表达式 r，使得 $L(r) = L(A)$。

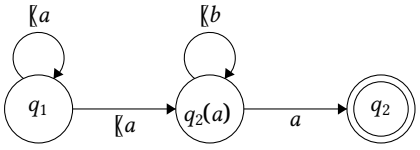
证明概要。我们通过对其转移关系的子集进行归纳，为 A 得到一个正则表达式：从空转移子集开始，每一步加入一个缺失的转移$\delta = q \xrightarrow{\gamma} q'$，扩展子自动机，并将表达式更新为 $r'' = r' + r'_{(i,\ \{q\})}(\gamma r'_{(q',\ \{q\})})^{*}\gamma r'_{(q'F)}$，概括所有反复迭代 δ 的路径。这里，$r_{(x,\ Y)}$表示根据归纳假设，由上一步得到的、对应初始状态 x 和终态 Y 的正则表达式。持续迭代，直到加入所有转移，即可得到所需的 r。□

总之，正则释放表达式与 D-NFA 的表达能力等价。

8 NDA 的确定化

接下来我们证明 NDA 可以确定化。回顾一下，在局部新鲜性语义下，NDA 与 RNNA 等价（命题 5.11），但 RNNA 无法确定化，下一例将对此加以说明。

例 8.1. 考虑由所有这类词组成的数据语言：其中最后一个字母此前曾出现过。以下 RNNA 在局部新鲜性语义下接受该语言：



假设存在一个确定性 RNNA A接受同一语言，并令 k为 A的度。我们先假设 A的初始状态具有空支撑。令 $a_i \in \mathbb{A}$、 $i = 0, \ldots k$ 两两不同。那么每个词 $a_0 a_1 \cdots a_k a_i$都属于给定的数据语言，因此 A必须对每个词 $a_0\ a_1 \cdots\ a_k a_i$都有一个接受运行，其中 $i = 0, \ldots\ldots, k$（因为自动机显然无法接受 $a_0\ a_1 \cdots\ a_k\ a_i$）。由于 A是确定性的，对于前缀 $a_0\ a_1 \cdots\ a_k$，它只有一条运行，该运行以状态 q结束，记为 q。根据引理 5.7，为了能够对每个 $i = 0, \ldots\ldots, k$都有一条标记为 a_i、通向终态的转移，q的支撑必须包含所有字母 $a_0, \ldots\ldots, a_k$。这与 $|\mathrm{supp}(q)| \leq k$ 矛盾。

现在假设初始状态 s 的 A 具有非空支撑。那么论证基本保持不变，只是上述字符串中可能包含一些没有横线的字母（至多有$|\mathrm{supp}(s)|$ 个）。

然而，存在一个确定性 NDA 接受来自例 8.1 的数据语言；只需将 RNNA 的循环上的标签分别替换为 $[a]$ 和 $[b]$, 即可。

直观地说，RNNA 无法确定化，因为它们依赖非确定性名称丢弃来维持表达能力：由于 RNNA 缺少显式释放，名称只能在转移期间通过非确定性地丢弃来从内存中移除。NDA 继承了这种非确定性名称丢弃（例如，分配转移 $q \xrightarrow{[a} q'$ 可能会保留也可能不会保留 a于支撑(q')中），但关键的是，它们还增加了通过释放转移显式丢弃名称的能力。

为了避免 NDA 中的非确定性名称丢弃，我们在构造 8.3 中引入了自动机行为的规约概念。具体而言，我们要求自动机仅在转移标签表明应丢弃名称时才丢弃名称：$[a$ 总是分配 a, $a]$ 总是释放 a，自由 a 转移总是在内存中保留已知名称 a，而 $[a]$ 总是立即分配并释放 a（对于 $a]$ 和 $[a]$,，这一点在每个 NDA 中本来就成立）。

这种规范是实现确定化的关键。正如我们已经指出的，对于任何名义自动机模型而言，能够进行确定化都相当了不起；尤其引人注目的是，只需显式释放即可实现这一点。

接下来我们介绍确定性自动机模型。

定义 8.2。 A确定性释放自动机（DDA）是一个 NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$，其中 Δ 是（部分）确定的：对于所有$q \in Q$和 $\gamma \in \hat{\mathbb{A}}$，至多存在一个 $q' \in Q$ 使得 $q \xrightarrow{\gamma} q'$。

我们将根据局部新鲜性语义，确立非确定自动机与确定自动机之间的对应关系：我们将给出一种构造，把给定的 NDA A 转换为 DDA A'，使得 $\mathrm{D}(L_\alpha(A)) = L_D(A')$。这里，$A'$ 是以α-闭方式生成的（通过整体构造中的名称丢弃），因此该结论统一适用于每个 NDA A。

由于绝大多数应用都特别关注闭语言，至少为了与其他自动机模型进行比较，我们将研究范围限定为闭语言（例如例 8.1 中的语言）。

从现在起，我们只考虑 NDA 的名称丢弃修改（例如，S-限制总是名称丢弃修改的一种）。这确保了应用下文定义的规整策略所需的所有状态确实存在。

构造 8.3 （规整的 S-限制）。 给定一个 NDA，按构造 7.11 固定集合 $S \subseteq \mathbb{A}$。设 $A_S = (Q, \Delta, i, F)$ 是 NDA A 的名称丢弃修改的 S-限制。 A的规整的 S-限制 是非确定有限自动机 $A_D = (Q, \Delta_D, i, F_D)$，其转移定义如下

$$
\begin{aligned}
&q \xrightarrow{\llparenthesis a} q' \text{ in } A_D \text{ if } q \xrightarrow{\llparenthesis a} q' \text{ in } A_S, && a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q), \quad a \in \mathrm{LO}_{A_S}(q'),\\
&q \xrightarrow{a} q' \text{ in } A_D \text{ if } q \xrightarrow{a} q' \text{ in } A_S, && a \in \mathrm{LO}_{A_S}(q'),\\
&q \xrightarrow{a\rrparenthesis} q' \text{ in } A_D \text{ if } q \xrightarrow{a\rrparenthesis} q' \text{ in } A_S, \text{ or}\\
&\qquad\qquad \text{if } q \xrightarrow{a} q' \text{ in } A_S, && a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q'),\\
&q \xrightarrow{\llparenthesis a\rrparenthesis} q' \text{ in } A_D \text{ if } q \xrightarrow{\llparenthesis a\rrparenthesis} q' \text{ in } A_S, \text{ or}\\
&\qquad\qquad \text{if } q \xrightarrow{\llparenthesis a} q' \text{ in } A_S, && a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q), \quad a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q').
\end{aligned}
$$

终态集合为 $F_D = \{f \in F \mid \text{局部轨道}_{A_S}(f) = \emptyset\}$.

引理 8.4. *NDA* 的规整的 *S*-限制是一个 *D-NFA*。

如果一个 D-NFA 的字面语言是规整的，我们就称它是规整的。

引理 8.5. *NDA* 的 *S*-限制与其对应的规整的 *S*-限制接受相同的数据语言。

证明概要。对于 $L_D(A_D) \subseteq L_D(A_S)$，注意到 Δ_D 中的每个转移都是由 Δ 中的一个转移得到的，可能会改变绑定符和标记，但应用 db 后底层名称绝不会改变；因此，A_D 中的每个运行都对应于 A_S 中一个具有相同去括号化结果的运行，该运行作用于一个

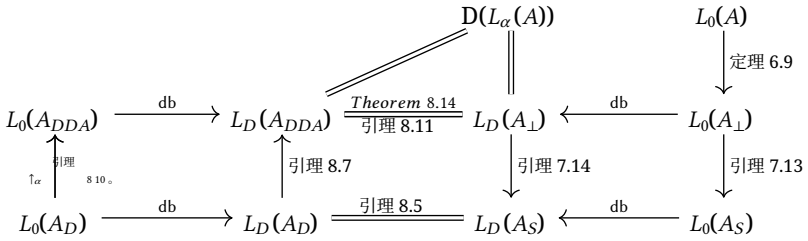


图 4：定理 8.14 的证明概要。

词。对于 $L_D(A_S) \subseteq L_D(A_D)$，取 A_S 在某个词 w 上的一个接受运行，并通过逐一检查每个转移，将其转换为 A_D 在 $\mathrm{disc}(w)$ 上的一个运行：每当后继状态的支撑不需要某个名称时，我们就将该步骤替换为释放（或未知）；否则保留该步骤。由于 $\mathrm{db}(\mathrm{disc}(w)) = \mathrm{db}(w)$，这不会改变数据词。□

接下来，我们考虑经典的幂集构造，其应用方式与普通非确定有限自动机相同；关键在于，我们将幂集自动机限制在其可达部分。NDA 的规整的 S-限制是 over S 上的特定非确定有限自动机；因此，标准的幂集构造可得到一个接受相同字面语言的确定有限自动机。如果其转移关系是偏函数，则 D-NFA 称为释放确定有限自动机（释放确定有限自动机）。接下来我们观察到，根据定义 7.4，D-NFA 的条件在幂集构造下得以保留：

引理 8.6。 幂集构造保留 *D-NFA*。

现在，我们已确保自由转移和分配转移始终将其标签存储在支撑中，这使我们能够在等变性下对自动机取闭包，同时保留其字母语言；这里使用的是构造 7.8 中给出的等变性闭包。

引理 8.7. 规整的 *D-DFA* 的名义化会得到一个 *DDA*。

给定一个 NDA A，我们将这个 DDA 记作 A_{DDA}，并称其为 A的确定化 。

注记 8.8. 请注意，这个结果对 RNNA 不成立。对 bar NFA 应用幂集构造，确实会得到一个接受相同 bar 语言的 bar DFA；但该 bar DFA 在等价关系下的闭包不满足 α-不变性，而将转移关系在 α-不变性下闭包以得到 RNNA，则会产生一个非确定的转移关系。

引理 8.9. 设 $A_{\mathrm{DDA}} = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个确定化。那么对每个状态 $q \in Q$和每个词 $w \in L_0(q)$，局部轨道(w) = 支撑(q)。

证明概要。设 $w \in L_0(q)$ 通过运行 $q \xrightarrow{*} f$ 被接受。由支撑引理（引理 5.7）可立即得出包含关系 $\mathrm{LO}(w) \subseteq$ 支撑(q)；我们证明支撑$(q) \subseteq \mathrm{LO}(w)$。因此，设 $a \in$ 支撑(q)。由于 A_{DDA} 中的终态支撑为空，a 必须在运行过程中某处从支撑中移除；根据构造 8.3，这只能发生在 q-步。因此，a 出现在 w 中，其首次出现不可能是 $[a$ 或 $[q,$，所以它要么是 a，要么是 $q,$，即 $a \in \mathrm{LO}(w)$。□

引理 8.10。 设 A_D 是一个 *NDA* 的规整 S-限制，并设 A_{DDA} 是相应的确定化（即对 A_D 的幂集构造进行名义化）。

(1) A_{DDA} 的字面语言在 α-等价下闭合。

(2) A_{DDA} 的字面语言与 A_D 的字面语言相同。

(3) A_{DDA} 的字面语言是对 A_D 的字面语言取关于 α-等价的闭包：$L_0(A_{\mathrm{DDA}}) = \uparrow_\alpha(L_0(A_D))$。

证明概要。(1)：由引理 6.1 和 8.9 立即可得。(2)：由引理 7.10 可得。(3)：由 (1) 和 (2) 立即可得。□

引理 8.11。 设 L 和 L' 是字面语言，且 $S \subseteq \mathbb{A}$ 是名称集，使得 $\uparrow_\alpha(L' \cap \hat{}S^*) = L'$ 且 $\uparrow_\alpha(L \cap \hat{}S^*) = L$。若

$$L' \cap \hat{S}^* = \{\mathrm{disc}(w) \mid w \in L \cap \hat{S}^*\},$$

则 $\mathrm{db}[L] = \mathrm{db}[L']$。

引理 8.12。 设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个规整的 *S-restriction*。那么对于每个 $q \in Q$ 和 $w \in L(q)$，有 局部轨道(q) = 局部轨道(w)。

引理 8.13。 设 A_S 是 *NDA* A 按照构造 *8.3* 进行名称丢弃修改后得到的 *S-restriction*，而 A_D 是其规整的 *S-restriction*。那么 $L_0(A_D) = \mathrm{disc}[L_0(A_S)]$。

现在，我们已经为证明本节的主要结果做好了所有准备。总而言之，针对 NDA 的确定化过程包含以下步骤：给定一个 NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$，固定一个集合 $S \subseteq \mathbb{A}$，使得 $\mathrm{supp}(i) \subseteq S$ 且 $|S| = \deg(A_\perp) + 1$。

(1) 对 A 作名称丢弃修改 $A_\perp$ （构造 6.3）；

(2) 对 $A_\perp$ 作 S-限制 A_S（构造 7.11）；
(3) 构造相应的规整 S-限制 A_D（构造 8.3）；

(4) 执行幂集构造，得到一个与（D-）NFA A_D 等价的确定有限自动机；
(5) 对该确定有限自动机作名义化 A_{DDA} （构造 7 .8).

定理 8.14 (NDA 的可确定化性)。 对于任意 *NDA* A，都存在一个 *DDA* A_{DDA}，使得 $L_D(A_{\mathrm{DDA}}) = \mathcal{D}(L_\alpha(A))$。

证明概要。我们沿着图 4 展开证明：从 A 开始，首先应用名称丢弃修改，以获得 $A_\perp$。根据定理 6.9，$L_0(A_\perp) = \uparrow_\alpha(L_0(A))$，因此 D($L_\alpha$(A)) L_D $A_\perp$ S S A_S ( )。使用 -限制将范围限制在一个有限名称集内；根据引理 7.13 和 7.14，这不会改变 S 上的数据语言。接下来，对自动机施加约束以得到 A_D；这不会改变

引理 8.5 保证数据语言不变。通过幂集构造将 A_D 确定化（根据引理 8.6 保持 D-NFA 性质），然后将其名义化；根据引理 8.7，结果是一个 DDA。这使该字面语言对 α-等价封闭（引理 8.10），最后，我们通过引理 8.11 将等式从 S-限制提升回完整字母表。□

推论 8.15. 初始状态具有空支撑的 *RNNA*，在数据语言方面可以确定化为 *NDA*。

9 结论

我们提出了一种新颖的自动机模型，即用于带绑定符的数据语言的非确定性释放自动机（NDA）。该模型通过释放转移和未知转移扩展了正则非确定性名义自动机（RNNA）。这一新模型建立在名义集合框架之上。利用将其表示为非确定性有限自动机的方式，我们为 NDA 定义了正则表达式，并证明了相应的克莱尼定理：在字面语言语义下，正则表达式与 NDA 表达能力等价。此外，我们还证明，可以将接受闭语言的 NDA 确定化，同时保持其数据语言不变；这在名义自动机领域是一种罕见的特性。

未来的工作包括分别研究这些语言和自动机模型的代数语义与余代数语义，探讨相关判定问题的复杂度，并将这一框架扩展到无限字。

致谢

我们感谢 Thorsten Wißmann 对本文早期稿件提出的宝贵意见并参与讨论。

参考文献

[1] Mikołaj Bojańczyk、Claire David、Anca Muscholl、Thomas Schwentick 和 Luc Segoufin。2011 年。数据词上的二变量逻辑。*ACM Trans. Comput. Log.* 1970405 [2] Mikołaj Bojańczyk、Bartek Klin 和 Sławomir Lasota。2014 年。名义集合上的自动机理论。*Log. Methods Comput. Sci.* 10, 3 (2014). doi:10.2168/LMCS-10(3: 4 2014) Paul Brunet 和 Alexandra Silva。2019 年。名义自动机的 Kleene 定理。载于第 *46* 届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2019*）（莱布尼茨国际信息学会议录（信息学论文集），第 *132* 卷），Christel Baier、Ioannis Chatzigiannakis、Paola Flocchini 和 Stefano Leonardi（编）。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，德国 Dagstuhl，107:1–107:13。doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2019.107[4] Thomas Colcombet 和 Amaldev Manuel。2014 年。广义数据自动机与不动点逻辑。载于软件技术与理论计算机科学基础，*FSTTCS 2014*（信息学论文集，第 *29* 卷）。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 267 278 10 4230 2014 267 – 。doi: 。/LIPIcs.FSTTCS. 。[5] Stéphane Demri 和 Ranko Lazić。 2009 。。带冻结量词和寄存器自动机的 LTL。*ACM Trans. Comput. Log.* 10, 3 (2009), 16:1–16:30. doi:10.1145/ 1507244.1507246[6] Florian Frank、Daniel Hausmann、Stefan Milius、Lutz Schröder 和 Henning Urbat。2025 年。带名称分配的交替名义自动机。arXiv: 2408 03658 [ ] 2408 03658 . [7] cs.FL https://arxiv.org/abs/ 。Murdoch James Gabbay 和 Vincenzo Ciancia。 2011 。。带名称的轨迹集合中的新鲜性与名称限制。载于软件科学与计算结构基础，*FOSSACS 2011*（计算机科学讲义，第 *6604* 卷）。施普林格，365–380。doi:10.1007/978-3-642-19805-2[8] Murdoch James Gabbay、Dan R. Ghica 和 Daniela Petrisan。2015 年。离巢：适用于具有交错作用域变量的名义技术。载于计算机科学逻辑，*CSL 2015*（信息学论文集，第 *41* 卷）。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik，374–389。[9] Orna Grumberg、Orna Kupferman 和 Sarai Sheinvald。2012 年。使用参数化原子命题对系统和规范进行模型检查。载于 自动化验证与分析技术，*ATVA 2012* (计算机科学讲义，第 *7561* 卷)。施普林格， 122 136 10 1007 978 3 642 33386 6_11 –。doi: 。/---- Daniel Hausmann、[10] Stefan Milius 和 Lutz Schröder。2021 年。带名称分配的线性时间名义 μ演算。载于 计算机科学数学基础，*MFCS 2021* (信息学论文集，第 *202* 卷)，Filippo Bonchi 和 Simon J. Puglisi（编）。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心，58:1–58:18。doi:10.4230/LIPICS.MFCS.2021.58[11] Michael Kaminski 和 Nissim Francez。1994 年。有限记忆自动机。理论计算机科学 134, 2 1994 329 363 10 1016 0304 3975 94 90242 9 ( ), –。doi: 。/-( )-[12] Michael Kaminski 和 Daniel Zeitlin。 2010 。。带非确定性重新分配的有限记忆自动机。国际计算机科学基础杂志21，5（2010），741–760。doi:10.1142/S0129054110007532[13] Bartek Klin 和 Mateusz Łełyk。2019 年。带原子的标量和向量 μ演算。计算机科学逻辑方法 15, 4 2019 10 23638 15 4 5 2019 ( )。doi: 。/L[14] MCS-(:) Dexter Kozen、Konstantinos Mamouras、Daniela Petrisan 和 Alexandra Silva。2015 年。名义 Kleene 余代数。载于 自动机、语言与编程，*ICALP 2015* 9135 286 298 10 1007 978 3 662 47666 6 (计算机科学讲义，第)。施普林格，–。doi: 。/---- Dexter Kozen、Konstantinos Mamouras 和 Alexandra Silva。 。名义 Kleene 代数中的完备性与不完备性。载于 计算机科学中的关系与代数方法，*RAMiCS 2015* (计算机科学讲义，第 *9348* 卷)。施普林格，51–66。[15] 2015 doi:10.1007/978-3-319-24704-5[16] Amaldev Manuel、Anca Muscholl 和 Gabriele Puppis。2016 年。在数据词上行走。理论计算机系统 59, 2 2016 180 208 10 1007 00224 014 9603 3 ( ), –。doi: 。/[17] s--- Stefan Milius 和 Henning Urbat。 2019 。。带结构的代数的等式公理化。载于 软件科学与计算结构基础，*FOSSACS 2019* (计算机科学讲义，第 *11425* 卷)，Mikolaj Bojanczyk 和 Alex Simpson（编）。施普林格，400–417。doi:10.1007/978-3-030-17127-8_23 完整版本可在 arXiv 上获取：http://arxiv.org/abs/1812.02016。[18] Joachim Parrow、Johannes Borgström、Lars-Henrik Eriksson、Ramunas Fors-berg Gutkovas 和 Tjark Weber。2021 年。名义迁移系统的模态逻辑。计算机科学逻辑方法17，1（2021），6:1–6:49。[19] Andrew Pitts。2013 年。名义集合：计算机科学中的名称与对称性。剑桥大学出版社。[20] Simon Prucker 和 Lutz Schröder。2024 年。带名称分配的名义树自动机。*CoRR* abs/2405.14272（2024）。arXiv:2405.14272 doi:10.48550/ARXIV。2405.14272[21] Lutz Schröder、Dexter Kozen、Stefan Milius 和 Thorsten Wißmann。2017 年。带名称绑定的名义自动机。载于 软件科学与计算结构基础，*FOSSACS 2017* (计算机科学讲义，第 *10203* 卷)。124–142。doi:10.1007/978-3-662-54458-7 8[22] ¯Nikos Tzevelekos。2007 年。名义通用引用的完全抽象。载于 第二十二届 *IEEE* 计算机科学逻辑年度研讨会论文集(*LICS 2007*)（波兰弗罗茨瓦夫）。IEEE计机学会出版社，399–408。[23] Henning Urbat、Daniel Hausmann、Stefan Milius 和 Lutz Schröder。2021 年。带名称分配的名义 Büchi 自动机。载于 并发理论，*CONCUR 2021*(信息学论文集，第 *203* 卷)，Serge Haddad 和 Daniele Varacca（编）。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心，4:1–4:16。doi:10.4230/LIPICS.CONCUR.2021.4

A 省略的证明与更多细节 引理 3.1 的证明

我们通过对词 w的长度进行归纳，同时证明这三个陈述。证明涉及直接但大量的技术细节。特别地，我们证明对于每个分解 $w = uv$，都有

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(uv) &= (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v),\\ \mathrm{LC}(uv) &= \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u)),\\ \mathrm{LO}(uv) &= \mathrm{LO}(u) \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)).\end{aligned}$$

对于基础情形 $w = \epsilon$，我们有平凡的分解 $\epsilon = \epsilon\epsilon$。根据定义，我们有

$$\mathrm{RC}(\epsilon) = \mathrm{LC}(\epsilon) = \mathrm{LO}(\epsilon) = \emptyset.$$

因此断言成立。

对于归纳步骤，设 $w = \gamma w'$ 是一个非空词，其中$\gamma \in \hat{}\mathbb{A}$ 是第一个符号，后缀为 w'。我们假设该断言对 w 的每个真后缀都成立，特别是对 w'也成立。

设 $w = uv$ 是 w 的一个分解。如果 $u = \epsilon$，那么令 $\mathrm{RC}(\epsilon)$ =LC(ϵ) =LO(ϵ) = $\emptyset$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w) &= (\emptyset \setminus \emptyset) \cup \mathrm{RC}(w) = (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \text{局部轨道}(v))) \cup \mathrm{RC}(v),\\ \mathrm{LC}(w) &= \emptyset \cup (\mathrm{LC}(w) \setminus \emptyset) = \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \text{局部轨道}(u)),\\ \text{局部轨道}(w) &= \emptyset \cup (\text{局部轨道}(w) \setminus \emptyset) = \text{局部轨道}(u) \cup (\text{局部轨道}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)).\end{aligned}$$

若改为 $v = \epsilon$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w) &= (\mathrm{RC}(w) \setminus \emptyset) \cup \emptyset = (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \text{局部轨道}(v))) \cup \mathrm{RC}(v),\\ \mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}(w) \cup (\emptyset \setminus \text{局部轨道}(u)) = \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \text{局部轨道}(u)),\\ \text{局部轨道}(w) &= \text{局部轨道}(w) \cup (\emptyset \setminus \mathrm{LC}(u)) = \text{局部轨道}(u) \cup (\text{局部轨道}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)).\end{aligned}$$

因此，假设 u和 v均非空。由于 $w = \gamma w'$， u和 v之间的分割发生在 w'中，因此存在 $w' = u'v$使得$u = \gamma u'$。根据归纳假设，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w') &= (\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v),\\ \mathrm{LC}(w') &= \mathrm{LC}(u') \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u')),\\ \mathrm{LO}(w') &= \mathrm{LO}(u') \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u')).\end{aligned}$$

我们通过对 γ进行分类讨论来继续。

- $\gamma = a$：根据表1，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w) &= \mathrm{RC}(aw') = \mathrm{RC}(w'),\\ \mathrm{RC}(u) &= \mathrm{RC}(au') = \mathrm{RC}(u'),\\ \mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}(aw') = \mathrm{LC}(w') \setminus \{a\},\\ \mathrm{LC}(u) &= \mathrm{LC}(au') = \mathrm{LC}(u') \setminus \{a\},\\ \mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}(aw') = \mathrm{LO}(w') \cup \{a\},\\ \mathrm{LO}(u) &= \mathrm{LO}(au') = \mathrm{LO}(u') \cup \{a\}.\end{aligned}$$

  对于 RC，我们计算得出

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w) &= \mathrm{RC}(w')\\ &= (\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v)\\ &= (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v),\end{aligned}$$

  对于 LC，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}(w') \setminus \{a\}\\ &= (\mathrm{LC}(u') \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u'))) \setminus \{a\}\\ &= (\mathrm{LC}(u') \setminus \{a\}) \cup ((\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u')) \setminus \{a\})\\ &= \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus (\mathrm{LO}(u') \cup \{a\}))\\ &= \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u)),\end{aligned}$$

  对于局部轨道，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}(w') \cup \{a\}\\ &= (\mathrm{LO}(u') \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u'))) \cup \{a\}\\ &= \mathrm{LO}(u') \cup \{a\} \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus (\mathrm{LC}(u') \setminus \{a\}))\\ &= \mathrm{LO}(u) \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)).\end{aligned}$$

- $\gamma = [a$：根据表1，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w) &= \mathrm{RC}([aw') = \mathrm{RC}(w'),\\ \mathrm{RC}(u) &= \mathrm{RC}([au') = \mathrm{RC}(u'),\\ \mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}([aw') = \mathrm{LC}(w') \cup \{a\},\\ \mathrm{LC}(u) &= \mathrm{LC}([au') = \mathrm{LC}(u') \cup \{a\},\\ \mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}([aw') = \mathrm{LO}(w') \setminus \{a\},\\ \mathrm{LO}(u) &= \mathrm{LO}([au') = \mathrm{LO}(u') \setminus \{a\}.\end{aligned}$$

  对于 RC，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(w) &= \mathrm{RC}(w')\\ &= (\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v)\\ &= (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v).\end{aligned}$$

  对于 LC，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}(w') \cup \{a\}\\ &= \big(\mathrm{LC}(u') \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u'))\big) \cup \{a\}\\ &= (\mathrm{LC}(u') \cup \{a\}) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u'))\\ &= \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u'))\\ &= \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u)),\end{aligned}$$

  其中在最后一步，我们注意到 LO(u') 和 LO(u) 之间唯一可能的差异是元素 a，而无论如何它都包含在 LC(u) 中。对于局部轨道，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}(w') \setminus \{a\}\\ &= (\mathrm{LO}(u') \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u'))) \setminus \{a\}\\ &= (\mathrm{LO}(u') \setminus \{a\}) \cup \big((\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u')) \setminus \{a\}\big)\\ &= \mathrm{LO}(u) \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus (\mathrm{LC}(u') \cup \{a\}))\\ &= \mathrm{LO}(u) \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)).\end{aligned}$$

- $\gamma = \overline{a}$: 由表1可知

$$\begin{aligned}\mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}(\overline{a}w') = \mathrm{LC}(w') \setminus \{a\},\\ \mathrm{LC}(u) &= \mathrm{LC}(\overline{a}u') = \mathrm{LC}(u') \setminus \{a\},\\ \mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}(\overline{a}w') = \mathrm{LO}(w') \cup \{a\},\\ \mathrm{LO}(u) &= \mathrm{LO}(\overline{a}u') = \mathrm{LO}(u') \cup \{a\}.\end{aligned}$$

此外，我们还可以
得到

$$a \in \mathrm{RC}(w) \iff a \in \mathrm{RC}(w') \text{ or } a \notin (\mathrm{LC}(w') \cup \mathrm{LO}(w')),$$
$$a \in \mathrm{RC}(u) \iff a \in \mathrm{RC}(u') \text{ or } a \notin (\mathrm{LC}(u') \cup \mathrm{LO}(u')).$$

我们区分以下情况：

(1) 若 $a \in (\mathrm{LC}(w') \cup \mathrm{LO}(w'))$，则 $\mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(w') = (\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v)$。回想一下，根据归纳法，$\mathrm{LC}(w') = \mathrm{LC}(u') \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u'))$ 且 $\mathrm{LO}(w') = \mathrm{LO}(u') \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u'))$，因此 $\mathrm{LC}(w') \cup \mathrm{LO}(w') = \mathrm{LC}(u') \cup \mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(u') \cup \mathrm{LO}(v)$，我们进一步按 a 区分情况：

(a) 若 $a \in \mathrm{LC}(u')$ 或 $a \in \mathrm{LO}(u')$，则 $\mathrm{RC}(u) = \mathrm{RC}(u')$，因此 $(\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v) = (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v)$。(b) 若 $a \in \mathrm{LC}(v)$ 或 $a \in \mathrm{LO}(v)$，则 $\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v)) = (\mathrm{RC}(u') \cup \{a\}) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))$，因此 $(\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v) = (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \mathrm{LO}(v))) \cup \mathrm{RC}(v)$。

(2) 如果 $a \notin (\mathrm{LC}(w') \cup \text{局部轨道}(w'))$，那么我们立即得到 $\mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(w') \cup \{a\} = (\mathrm{RC}(u') \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \text{局部轨道}(v))) \cup \mathrm{RC}(v) \cup \{a\} = (\mathrm{RC}(u) \setminus (\mathrm{LC}(v) \cup \text{局部轨道}(v))) \cup \mathrm{RC}(v)$。
对于 LC，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}(w') \setminus \{a\} \\ &= \big(\mathrm{LC}(u') \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u'))\big) \setminus \{a\} \\ &= (\mathrm{LC}(u') \setminus \{a\}) \cup ((\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u')) \setminus \{a\}) \\ &= \mathrm{LC}(u) \cup \big(\mathrm{LC}(v) \setminus (\mathrm{LO}(u') \cup \{a\})\big) \\ &= \mathrm{LC}(u) \cup (\mathrm{LC}(v) \setminus \mathrm{LO}(u)),\end{aligned}$$

对于局部轨道，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}(w') \cup \{a\} \\ &= \mathrm{LO}(u') \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u')) \cup \{a\} \\ &= \mathrm{LO}(u') \cup \{a\} \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus (\mathrm{LC}(u') \setminus \{a\})) \\ &= \mathrm{LO}(u) \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)),\end{aligned}$$

- $\gamma = [a$: 最后，对于 $\gamma = [a$，我们结合上述模式。根据 LC 和局部轨道的表1，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{LC}(w) &= \mathrm{LC}([a]w') = \mathrm{LC}(w') \cup \{a\}, \\ \mathrm{LC}(u) &= \mathrm{LC}([a]u') = \mathrm{LC}(u') \cup \{a\}, \\ \mathrm{LO}(w) &= \mathrm{LO}([a]w') = \mathrm{LO}(w') \setminus \{a\}, \\ \mathrm{LO}(u) &= \mathrm{LO}([a]u') = \mathrm{LO}(u') \setminus \{a\},\end{aligned}$$

因此，证明与上述 $\gamma = [a$ 情形的证明相同。对于 RC，$[a$ 与 $a]$ 的行为相同，因此我们可以重复该情形中的论证。□

引理 3.3 的证明

设 $wu = xy$ 是一个分解。我们要证明 $\mathrm{RC}(x) \cap \mathrm{LO}(y) = \emptyset$。若 $x = w$ 且 $y = u$，则由假设可得结论。否则，该分解会在 w 或 u 处分裂。我们分情况讨论：

首先，假设分割位于 w 内。那么存在一个词 w'，使得 $w = xw'$，因此 $y = w'u$。由于 w 是右非遮蔽的，分解 $w = xw'$ 得出 $\mathrm{RC}(x) \cap \text{局部轨道}(w') = \emptyset$。

此外，根据引理 3.1，我们得到

$$\mathrm{LO}(y) = \mathrm{LO}(w'u) = \mathrm{LO}(w') \cup (\mathrm{LO}(u) \setminus \mathrm{LC}(w')),$$

接下来只需排除 $\mathrm{RC}(x) \cap (\mathrm{LO}(u) \setminus \mathrm{LC}(w'))$ 中的元素。反设 $a \in \mathrm{RC}(x) \cap (\mathrm{LO}(u) \setminus \mathrm{LC}(w'))$。于是 $a \in \mathrm{RC}(x)$、$a \in \mathrm{LO}(u)$ 且 $a \notin \mathrm{LC}(w')$，再次由引理 3.1 可得

$$\mathrm{RC}(w) = (\mathrm{RC}(x) \setminus \mathrm{LC}(w')) \cup \mathrm{RC}(w').$$

因此，我们有 $a \in \mathrm{RC}(w)$，并且由于 $a \in \mathrm{LO}(u)$ 成立，可得 $a \in \mathrm{RC}(w) \cap \mathrm{LO}(u)$，这与我们的假设 $\mathrm{RC}(w) \cap \mathrm{LO}(u) = \emptyset$ 矛盾。因此，在这种情况下，$\mathrm{RC}(x) \cap \mathrm{LO}(y) = \emptyset$。

现在假设分裂发生在 u 内部。则存在一个词 u'，使得 $u = u'y$，从而 $x = wu'$。由于 u 是右侧非遮蔽的，分解 $u = u'y$ 给出 $\mathrm{RC}(u') \cap \mathrm{LO}(y) = \emptyset$。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}(x) &= \mathrm{RC}(wu') = (\mathrm{RC}(w) \setminus \mathrm{LC}(u')) \cup \mathrm{RC}(u'), \\ \mathrm{LO}(u) &= \mathrm{LO}(u'y) = \mathrm{LO}(u') \cup (\mathrm{LO}(y) \setminus \mathrm{LC}(u')).\end{aligned}$$

令 $a \in \mathrm{RC}(x) \cap \mathrm{LO}(y) = \mathrm{RC}(wu') \cap \mathrm{LO}(y)$。若有 $a \in \mathrm{RC}(u')$，则 $a \in \mathrm{RC}(u') \cap \mathrm{LO}(y)$，这与 u 是右非遮蔽的矛盾。因此，$a \notin \mathrm{RC}(u')$，从而 $a \in \mathrm{RC}(w) \setminus \mathrm{LC}(u')$ 成立。特别地，我们有 $a \notin \mathrm{LC}(u')$，所以 $a \in \mathrm{LO}(y) \setminus \mathrm{LC}(u')$，因此根据上述 $\mathrm{LO}(u)$ 的表达式可得 $a \in \mathrm{LO}(u)$。由此可知 $a \in \mathrm{RC}(w) \cap \mathrm{LO}(u)$，与我们的假设矛盾。因此，在这种情况下也有 $\mathrm{RC}(x) \cap \mathrm{LO}(y) = \emptyset$，由此 wu 是右非遮蔽的。□

引理 3.7 的证明

设 d 对 a、b、w、w' 是新鲜的。那么，前件展开为 $(ad) \cdot [w]_\alpha = (bd) \cdot [w']_\alpha$。由等变性，$[(ad) \cdot w]_\alpha = [(bd) \cdot w']_\alpha$，因此 $(ad) \cdot w \equiv_\alpha (bd) \cdot w'$。在前面加上 $[d$，并使用定义 3.5 的规则 (2)，得到 $[d(ad) \cdot w \equiv_\alpha [d(bd) \cdot w'$。由于 d 对 w、w' 是新鲜的，我们有 $d(ad) \cdot w = aw$ 和 $d(bd) \cdot w' = bw'$，根据定义 3.5 的规则 (3) 及传递性，可得 $[aw \equiv_\alpha [bw'$。□

引理 4.4 的证明

根据 disc 的定义进行归纳即可立即得到：基础情形是平凡的，而归纳步骤中唯一的非平凡情形是 $w = [aw'$ with $a \notin$ 局部轨道(w')，此时我们有 $\mathrm{disc}([a\ w'\ a \notin w'\ b \notin w')$ $\mathrm{disc}(\ )$。由于局部轨道$(\ )$，对于每个局部轨道$(\ )$，我们都有$[aw' \equiv_\alpha [bw'$ 成立；根据 α-等变性的定义，还有 $[d\mathrm{disc}(w') \equiv_\alpha [d\mathrm{disc}(w')$。于是我们有 $\mathrm{D}(\{[[aw]_\alpha\}) = \mathrm{D}(\{[[d\mathrm{disc}(w)]_\alpha\})$。□

引理 5.3 的证明

不失一般性，假设 $a \neq b$。我们使用引理 5.7。我们同步证明两个断言。于是令 $(q \xrightarrow{\gamma} q') \in \Delta$ 其中 $\gamma = d$ 或 $\gamma = [d$。根据名称擦除，$a\#\ q'$。由于 $aq = bq''$，我们有 $(ab) \cdot q = q''$ 以及 $b\#\ q$。由引理 5.7可知，$b\#\ q'$。由 Δ 的等变性，我们因此有 $(ab) \cdot (q \xrightarrow{\gamma} q') = (((ab) \cdot q) \xrightarrow{(ab)\cdot\gamma} ((ab) \cdot q')) = (q'' \xrightarrow{\beta} q') \in \Delta$ 其中 $\beta = d$ 或 $\beta = [d$，分别对应上述两种情形。□

注 5.4 的详细说明

我们证明 d 的名称擦除；$[d$ 的名称擦除也可类似证明。注意，由于右 α-不变性，等变映射 $\mathbb{A} \times$

$Q \to \mathrm{P}_\omega Q, (a,\ q) \mapsto \{q' \mid q \overset{a\rangle}{\longrightarrow} q'\}$ 可经由商映射 $\mathbb{A} \times Q \to [\mathbb{A}]Q, (a,\ q) \mapsto aq$ 分解。然后应用引理 2.1，并利用 $a \notin \mathrm{supp}(aq)$。□

引理 5.7 的证明

将引理 2.1 应用于以下映射，以证明各项断言：

(1) $Q \to \mathrm{P}_\omega(\mathbb{A} \times Q),\ q \mapsto \{(a,\ q') \mid q \xrightarrow{a} q'\}$;

(2) $Q \to \mathrm{P}_\omega([\mathbb{A}]Q),\ q \mapsto \{aq' \mid q \overset{[a}{\longrightarrow} q'\}$;

(3) $Q \to \mathrm{P}_\omega(Q),\ q \mapsto \{aq' \mid q \xrightarrow{[a]} q'$ 对于某个 $a\}$;

(4) $Q \to \mathrm{P}_\omega(\mathbb{A} \times Q),\ q \mapsto \{q' \mid q \overset{a\rangle}{\longrightarrow} q'\}$.

对于断言（3）和（4），还要用到名称擦除；对于断言（2），还要用到 $\mathrm{supp}(aq') \subseteq \mathrm{supp}(q') \setminus a$。

□

命题 5.8 的证明

设 w 是一个被 NDA 接受的词，并设 $w = uv$ 是 w 的任意分解。我们证明 $\mathrm{RC}(u) \cap \mathrm{LO}(v) = \emptyset$。若 $a \in \mathrm{RC}(u)$，则 a 在 u 中被解除分配（或为未知），因此处理完 u 后，a 会从状态支撑中移除。根据引理 5.7，一旦 a 从支撑中移除，就不可能再对 a 执行自由转移或释放转移，因此它不会再次出现在剩余词 v 中，尤其不可能在 v 中左开。因此 $\mathrm{RC}(u) \cap \mathrm{LO}(v) = \emptyset$。 □

引理 5.9 的证明

我们采用标准的 ϵ-消除方法。设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个带有 ϵ-转移的 NDA；我们构造一个不带 ϵ-转移、且接受相同语言的 NDA $A' = (Q, \Delta', i, F)$。定义 Δ'：对于 $q, q' \in q$，令 $(q \xrightarrow{\gamma} q') \in \Delta'$，并令 $\gamma \in \hat{\mathbb{A}}^*$，当且仅当存在 $q_0, \ldots, q_n \in Q$，使得 $q = q_0 \xrightarrow{\epsilon} q_1 \ldots \xrightarrow{\epsilon} q_n \xrightarrow{\alpha} q'$ 在 A 中。根据 A 中接受运行的定义，显然 A' 接受与 A 相同的字面语言（A 中的每个接受运行都会导出 A' 中的一个接受运行，反之亦然）。剩下只需证明 A' 确实是一个 NDA。等变性显然；根据针对 ϵ-转移的支撑引理，名称擦除性质由 A 继承。左 α-不变性直接由 A 继承。最后，由于定义 5.1 中列出的相关后继集合根据支撑引理是一致有限支撑的，而 Q 是轨道有限的，因此有限分支性质成立。□

命题 5.11 的证明

只需给定一个 NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$，构造一个 RNNA $B = (Q, \Delta', i, F)$，使其接受与 A 相同的数据语言，即 $L_D(A) = L_D(B)$。我们将转移关系 Δ' 定义如下：

- 当 $(q, a, q') \in \Delta$ 或 $(q, a, q') \in \Delta$ 时，引入一个转移 $(q, a, q') \in \Delta'$；并且
- 当 $(q, [a, q') \in \Delta$ 或 $(q, [a, q') \in \Delta$ 时，引入一个转移 $(q, [a, q') \in \Delta'$。

那么显然，B 在 α-等价意义下是有限分支的，且具有左 α-不变性。此外，对于 Δ 中的每个转移 $q \xrightarrow{\gamma} q'$，在 Δ' 中都存在一个转移 $q \xrightarrow{\beta} q'$，使得 $\mathrm{db}(\gamma) = \mathrm{db}(\beta)$。由此可知，$A$ 中的任意词 $w \in \mathbb{A}^*$ 上的每次运行，都能导出某个词 w'（不含任何字母 a 和 $[a$）B，使得 $\mathrm{db}(w) = \mathrm{db}(w')$。反过来，对于 B 中某个词 w（不含任何字母 a 和 $[a$）的一次运行，存在 A 中某个词 $w' \in \mathbb{A}^*$ 上的一次运行，使得 $\mathrm{db}(w) = \mathrm{db}(w')$。因此，我们得到 $L_D(A) = L_D(B)$。□

引理 6.1 的证明

我们将推广到 A 的状态 q 的语言 $L_0(q)$，并按照定义 3.5 对 $w' \equiv_\alpha w$ 的推导进行归纳，证明只要 $w \in L_0(q)$，就有 $w' \in L_0(q)$。传递性和规则 1 的情形显然。其余情形中，对于某个 $\gamma \in \hat{\mathbb{A}}$，有 $w = \gamma v$，且 $q \xrightarrow{\gamma} q'$，其中 q' 接受 v。

- 规则 2：在此情况下，$\gamma = [a$ 和 $w' = [bv'$，其中 a、$b \in \mathbb{A}$ 且 $bv' = av$。不失一般性，假设 $a \neq b$，则有 $v' = (ab) \cdot v$ 且 $b \notin$ 支撑 (v)，特别是 $b \notin$ 局部轨道(v)。根据假设可知 $b \notin$ 支撑 q'，因此对于 $q'' = (ab) \cdot q'$，有 $bq'' = aq'$。由接受关系的等变性（引理 5.10），q'' 接受 v'；又由左 α- 不变性，$q \overset{[b}{\longrightarrow} q''$，因此 q 接受 $[bv'$。

- 规则 3：在此情况下，γ 的形式为 $\gamma = a$ 或 $\gamma = [a$，其中 $a \in \mathbb{A}$，且 $w' = \gamma v'$，其中 $v \equiv_\alpha v'$。于是，根据归纳假设，q' 接受 v'，因此 q 接受 w'。
- 规则 4：与规则 3 类似。
- 规则 5：在此情况下，$\gamma = [a$ 和 $w' = [bv'$，其中 $v \equiv_\alpha v'$ 且 $\{a, b\} \cap$ 局部轨道 $(v) = \emptyset$。根据归纳假设，q' 接受 v'。由于 q' 接受 v，我们根据假设有 $\mathrm{supp}(q') =$ 局部轨道(v)，因此 $b \notin \mathrm{supp}(q')$。根据左 α-不变性，我们得到 $q \overset{[b]}{\longrightarrow} q'$，因此 q 接受 w'。□

命题 6.2 的证明

给定一个 NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$，我们选取一个支撑反射、满射且等变的映射 $e\colon P \twoheadrightarrow Q$，其中 P 是强且轨道有限的。我们通过选取某个 $i' \in P$ 使得 $e(i') = i$，定义 $A' = (P, \Delta', i', F')$，令 $F' = \{f \in P \mid e(f) \in F\}$，并

$$\Delta' = \{p \xrightarrow{\gamma} q \in P \times \hat{\mathbb{A}} \times P \mid e(p) \xrightarrow{\gamma} e(q) \text{ in } \Delta\}.$$

(1) 我们验证这确实定义了一个 NDA。

- 等变性：如果 $p \xrightarrow{\gamma} q$ 属于 Δ'，那么 $e(p) \xrightarrow{\gamma} e(q)$ 属于 Δ，对于每个置换 π $e \xrightarrow{\pi\gamma} \pi e = e \pi \pi \xrightarrow{\pi\gamma} \pi \Delta$，根据 和 Δ 的等变性，可得 $(\cdot) \cdot (p) \cdot (q) (\cdot q)$，因此 $(\cdot p) \cdot (\cdot q)$ 属于 $'$。
- 左 α-不变性：假设 $p \xrightarrow{\gamma} q$ 属于 Δ'，$\gamma = [a$ 或 $\gamma = [a$，且 $a q = bq''$。根据 e 的等变性，$ae(q) = be(q'')$。由 $e(p) \xrightarrow{\gamma} e(q)$ 以及 Δ 的左 α-不变性，可得 $e(p) (ab) \cdot \xrightarrow{\gamma} e(q'')$，因此 $p (ab) \cdot \xrightarrow{\gamma} q''$ 属于 Δ'。
- 右侧 α-不变性：若 $p \xrightarrow{\gamma} q, \gamma = a$ 或 $[a$ 且 $ap = bp''$，则 $ae(p) = be(p'')$。由 $e(p) \xrightarrow{\gamma} e(q)$ 以及 Δ 的右侧 α- 不变性，可得 $e(p'') (ab) \cdot \xrightarrow{\gamma} e(q)$，因此 $p'' (ab) \cdot \xrightarrow{\gamma} q$ 属于 Δ'。

- 有限分支：设 $p \in P$。根据定义，集合 $\{(a, q') \mid e(p) \xrightarrow{a} q'\}$、$\{aq' \mid e(p) \xrightarrow{a]} q'\}$、$\{(a, q') \mid e(p) \xrightarrow{a]} q'\}$ 和 $\{aq' \mid e(p) \xrightarrow{[a]} q'\}$ 都是有限的。对于每个这样的后继 q'，集合 $\{q \mid e(q) = q'\}$ 都是有限的。此外，e 是支撑反射的，

因此，对于每个 $q \in e^{-1}(q')$，我们都有 $\mathrm{supp}(q) = \mathrm{supp}(q')$。在轨道有限名义集中，具有相同支撑的元素只有有限多个，因此，对于每种转移类型，p 在 A' 中的后继集合都是有限的。

最后，$F' = e^{-1}(F)$ 是等变的，因为 F 和 e 都是等变的。

(2) 我们验证 A' 接受与 A 相同的字面语言：$L_0(A') = L_0\ A$()。

- $L_0(A') \subseteq L_0(A)$：如果 $p \xrightarrow{\gamma} q$ 属于 A'，那么根据 Δ' 的定义，$e(p) \xrightarrow{\gamma} e(q)$ 属于 A，并且 $e(i') = i$，$e(F') \subseteq F$。因此，e 将 A' 的接受运行映射为 A 的接受运行。
- $L_0(A) \subseteq L_0(A')$：设 $i = q_0 \xrightarrow{\gamma_1} q_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} q_n \in F$ 是 A 中的一次接受运行。选择满足 $e(p_0) = q_0$ 的 $p_0 = i'$。归纳地，给定满足 $e(p_k) = q_k$ 的 p_k 以及 A 中的一个转移 $q_k \xrightarrow{\gamma_{k+1}} q_{k+1}$，任取 $p_{k+1} \in e^{-1}(q_{k+1})$；则根据 Δ' 的定义，我们有 $p_k \xrightarrow{\gamma_{k+1}} p_{k+1}$ 属于 A'。由于 $q_n \in F$ 蕴含 $p_n \in F'$，这就得到 A' 中的一次接受运行。

因此，我们有 $L_0(A) = L_0(A')$，从而 $L_\alpha(A) = L_\alpha\ A'$□()。

引理 6.4 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 NDA，并设 $A_\perp = (Q_\perp, \Delta_\perp, i, F_\perp)$ 是其按照构造 6.3 中定义的名称丢弃修改。我们证明 $A_\perp$ 是一个 NDA。

- 状态集合是轨道有限的：根据定义，我们有 $Q_\perp = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{\$} n_j$，它是轨道有限名义集合的有限余积，因此是轨道有限的。

- 转移关系 $\Delta_\perp$ 是等变的：设 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g) \in \Delta_\perp$ 且 $\pi \in \mathrm{Perm}(\mathbb{A})$。– $\gamma = a, \bar{a}$：根据 $\Delta_\perp$ 的定义，存在 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$，它们分别是 f 和 g 的扩展，使得 $(j, \bar{f}) \xrightarrow{\gamma} (k, \bar{g}) \in \Delta$。由于 Δ 是等变的，我们有 $(j, \pi\cdot \bar{f}) \xrightarrow{\pi\gamma} \cdot (k, \pi\cdot \bar{g}) \in \Delta$。由于 $\pi\cdot \bar{f}$ 扩展了 $\pi\cdot f$，且 $\pi\cdot \bar{g}$ 扩展了 $\pi\cdot g$，根据名称删除修改的定义，我们有 $(j, \pi\cdot f) \xrightarrow{\pi\gamma} \cdot (k, \pi\cdot g) \in \Delta_\perp$。因此，$\Delta_\perp$ 是等变的。– $\gamma = [a$：根据 $\Delta_\perp$ 的定义，我们有 $\mathrm{supp}(f) \cup \{a\} \supseteq \mathrm{supp}(g)$，并且存在 $b \in \mathbb{A}, g' \in Q_\perp$，满足 $bg' = ag$，以及全单射 $\bar{f}, \bar{g}$，它们分别扩展 f 和 g'，使得 $(j, \bar{f}) \xrightarrow{[b} (k, \bar{g}) \in \Delta$。由于 Δ 是等变的，我们得到 $(j, \pi\cdot \bar{f}) \xrightarrow{[\pi(b}\longrightarrow (k, \pi\cdot \bar{g}) \in \Delta$.。此外，$\pi\cdot \bar{f}$ 和 $\pi\cdot \bar{g}$ 分别扩展 $\pi\cdot f$ 和 $\pi\cdot g'$；根据名称抽象的等变性，我们有 $\pi(b)(\pi\cdot g') = \pi\cdot bg' = \pi\cdot ag = \pi(a)(\pi\cdot g)$。支撑条件在置换下保持不变，因为 $\mathrm{supp}(\pi\cdot f) \cup \{\pi(a)\} = \pi(\mathrm{supp}(f) \cup \{a\}) \supseteq \pi(\mathrm{supp}(g)) = \mathrm{supp}(\pi\cdot g)$。因此，根据 $\Delta_\perp$ 的定义，我们得到 $(j, \pi\cdot f) \xrightarrow{[\pi(a}\longrightarrow (k, \pi\cdot g) \in \Delta_\perp$，即 $(j, \pi\cdot f) \xrightarrow{\pi\gamma} \cdot (k, \pi\cdot g) \in \Delta_\perp$。– $\gamma = [a]$：根据 $\Delta_\perp$ 的定义，我们有 $\mathrm{supp}(f) \supseteq \mathrm{supp}(g)$，并且存在 $b \in \mathbb{A}$ 和 $f'g' \in Q_\perp$，满足 $bf' = af$ 以及 $bg' = ag$；此外，全单射 $\bar{f}, \bar{g}$ 分别扩展 f' 和 g'，使得 $(j, \bar{f}) \xrightarrow{[b]} (k, \bar{g}) \in \Delta$。根据等变性 Δ 的等变性，我们得到 $(j, \pi\cdot \bar{f}) \xrightarrow{[\pi\ b\ ]} (k, \pi\cdot \bar{g}) \in \Delta$，其中 $\pi\cdot \bar{f}$ 和 $\pi\cdot \bar{g}$ 分别扩展 $\pi\cdot f'$ 和 $\pi\cdot g'$。名称抽象的等变性给出 $\pi(b)(\pi\cdot f') = \pi\cdot bf' = \pi\cdot af = \pi(a)(\pi\cdot f)$；同理，$\pi(b)(\pi\cdot g') = \pi\cdot bg' = \pi\cdot ag = \pi(a)(\pi\cdot g)$。支撑条件同样保持不变，因为 $\mathrm{supp}(\pi\cdot f) = \pi(\mathrm{supp}(f)) \supseteq \pi(\mathrm{supp}(g)) = \mathrm{supp}(\pi\cdot g)$。因此，根据 $\Delta_\perp$ 的定义，我们得到 $j\ \pi\ f \xrightarrow{\pi\gamma} k\ \pi\ g \in \Delta_\perp$，即 $(\cdot)\cdot(\cdot) \xrightarrow{[\pi\ a\ ]} (\cdot)\cdot(\cdot)$。

- 转移关系是左 α-不变的：设 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g) \in \Delta_\perp, \gamma = [a$ 或 $\gamma = [\bar{a}, a(k, g) = b(k, g')$。根据定义，存在扩张 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$，分别扩张 f 和 g''，且 $cg'' = ag$，使得 $(j, \bar{f})\ (\xrightarrow{ac}\ \gamma)\cdot (k, \bar{g}) \in \Delta$。由 Δ 的左 α-不变性，对于 $b \in \mathbb{A}$ 和满足 $a(k, \bar{g}) = b(k, \bar{g'})$ 的 $(k, \bar{g'})$，我们有 $(j, \bar{f})\ (\xrightarrow{ac}\ \gamma)\cdot (k, \bar{g'}) \in \Delta$，其中 $\bar{g'}$ 扩张 g'。特别地，存在某个 $\pi \in \mathrm{Perm}(\mathbb{A})$，使得 $\pi\cdot \bar{g} = \bar{g'}$ 且 $\pi\cdot g = g'$。于是，根据构造，$(j, f)\ (ab)\cdot\longrightarrow^{\gamma} (k, g') \in \Delta_\perp$。因此，$\Delta_\perp$ 满足左 α-不变性。

- 转移关系具有右 α 不变性：设 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g) \in \Delta_\perp, \gamma = a]$ 或 $\gamma = [\bar{a},$，且 $a(j, f) = b(j, f')$。根据定义，存在 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$，它们分别是 f'' 和 g 的扩张，并且满足 $cf'' = af$，使得 $(j, \bar{f}) \xrightarrow{\gamma} (k, \bar{g}) \in \Delta$。由 Δ 的右 α 不变性，对于某个 $b \in \mathbb{A}$ 和 $(j, \bar{f'})$，其中 $\bar{f'}$ 扩展了 f'，并且满足 $a(j, \bar{f}) = b(j, \bar{f'})$，有 $(j, \bar{f'})\ (ab)\cdot \longrightarrow^{\gamma} (k, \bar{g}) \in \Delta$。于是根据构造，$(j, f')\ (ab)\cdot\longrightarrow^{\gamma} (k, g) \in \Delta_\perp$。因此，$\Delta_\perp$ 满足右 α 不变性。

- 名称丢弃修改是有限分支的：给定一个状态 $(j, f) \in Q_\perp$，我们需要证明，除去左 α-不变性后，它只有有限多个出边 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g) \in \Delta_\perp$。考虑关于 γ 的以下几种情况：– $\gamma = a, \bar{a}$：在 NDA A 中，只有有限多个 $(j, \bar{f}) \xrightarrow{\gamma} (k, \bar{g}) \in \Delta$，其中 $\bar{f}$ 是 f 的任意扩展。此外，对于每个 $(k, \bar{g}) \in Q$，从支撑中丢弃名称后，得到的状态 $(k, g) \in Q_\perp$ 只有有限多个。因此，对于每个 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g)$，满足 $\bar{g}$ 扩展 g 的 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g) \in \Delta_\perp$ 只有有限多个。– $\gamma = [a, [\bar{a}$：除去左 α-不变性后，转移 $(j, f) \xrightarrow{\gamma} (k, g)$ 的数量，上界为 f 的扩展 $\bar{f}$ 数量，乘以等价类 $\{a(j, \bar{g}) \mid (j, \bar{f}) \xrightarrow{\gamma} (k, \bar{g}) \in \Delta\}$ 的数量，再乘以满足 $\bar{g}$ 扩展 g 的状态 (k, g) 的数量。这三个数都是有限的，因此结论成立。□

引理 6.5 的证明

我们对词 w 的长度进行归纳。基础情形是显然的。对于归纳步骤，设 $S = \mathrm{supp}(j, r)$ 和 $(j, \bar{r})$ 接受某个词 $w = \gamma w'$，使得局部轨道$(w) \subseteq S$。我们通过区分以下情形来证明 (j, r) 也接受 w：

- $\gamma = a$：我们证明 (j, r) 接受 $w = aw'$。由于 $(j, \bar{r})$ 在 A 中接受w，因此存在一个转移 $(j, \bar{r}) \xrightarrow{a} (k, \bar{r'}) \in \Delta$，使得 $(k, \bar{r'})$ 接受 w'（在 A 中）。基于这一事实以及名称丢弃修改的构造

，存在 $(k, r_\iota) \in Q_\perp$，其 $\mathrm{LO}(w') \subseteq$支撑$(r') \subseteq S$，且 $\bar{r}_\iota$扩展 r_ι。因此，根据归纳假设，(k, r_ι) 接受 w'（在 $A_\perp$ 中）。由于我们有支撑$(r') \subseteq S$，再次根据名称丢弃修改的构造，我们有 $(j, r) \xrightarrow{a} (k, r') \in \Delta_\perp$，因此 (j, r) 接受 w。

- $\gamma = \natural$: 此情形与前一情形类似。对于 $w = a]w_\iota$，我们有 $\mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(w_\iota) \cup \{a\}$，以及 $a \notin \mathrm{LO}(w_\iota)$；这反映在释放转移的条件中：$a \in$supp$(r)$、supp$(r) \supseteq$supp$(r_\iota)$，且 $a \notin$ supp(r_ι)，如名称丢弃修改的构造中所述（即在 $\Delta_\perp$ 中）。
- $\gamma = [a$: 状态 $(j, \bar{r})$ 接受 w，因此我们有一个转移 $(j, \bar{r}) \overset{a}{\longmapsto} (k, \bar{r}') \in \Delta$，使得 $(k, \bar{r}')$ 接受 w'（在 A 中）。根据 $Q_\perp$ 的构造，我们可以选择 $(k, r') \in Q_\perp$，其中 $\bar{r}'$ 扩展 r'，且 supp$(k, r') = \mathrm{LO}(w')$。根据归纳假设，$(k, r')$ 接受 w'（在 $A_\perp$ 中）。此外，我们有 $\mathrm{LO}(w) \cup \{a\} \supseteq \mathrm{LO}(w')$。因此，利用 $\mathrm{LO}(w) \subseteq$ supp(j, r)，可得 supp$(j, r) \cup \{a\} \supseteq$supp$(p, r')$。再次根据名称丢弃修改的构造，存在一个转移 $(j, r) \overset{a}{\longmapsto} (k, r') \in \Delta_\perp$，因此 (j, r) 接受 w，正如所需。
- $\gamma = [\natural$: 此情形依次重复了分配转移和释放转移情形中的模式。

□

引理 6.6 的证明

令 $A_\perp = (Q_\perp, \Delta_\perp, i, F_\perp)$ 为 NDA $A = (Q, \Delta, i, F)$ 的名称丢弃修改。我们对词的长度进行归纳，并加强归纳假设，断言每个状态 $(j, r) \in Q_\perp$ 的语言 $L_0(j, r)$ 在 α-等价关系下封闭。基础情形显然成立。对于归纳步骤，令 $w = \gamma v \equiv_\alpha \delta v' = w'$ 为一对 α-等价的词，并假设 $w \in L_0(j, r)$。我们通过对 γ 分类讨论，证明 $w' \in L_0(j, r)$:

- $\gamma = a, \natural$: 根据 α-等价的定义，我们有 $\delta = \gamma$ 和 $v \equiv_\alpha v'$，且 $\mathrm{LO}(v) = \mathrm{LO}(v')$。由于 (j, r) 在 $A_\perp$ 中接受 w，因此存在一个转移 $(j, r) \xrightarrow{\gamma} (k, r')$，使得 (j, r') 接受 v（在 $A_\perp$ 中）。根据归纳假设，(k, r') 也接受 v'，因此 (j, r) 在 $A_\perp$ 中接受 $\gamma v' = \delta v' = w'$。
- $\gamma = [\overset{a}{[}b]v = \delta v \quad b \in \mathbb{A} \quad v \equiv_\alpha v \quad a\ b \cap \overset{w}{v} = \emptyset]$: 根据等价的定义，对于某个 满足 $'$ 和 $\{, \}$ 局部轨道$(\,)$ 的 ，我们有 $'$ $'$。由于 (j, r) 在 $A_\perp$ 中接受 w，因此存在一个转移 $(j, r) \xrightarrow{[a]} (k, r')$ $\in \Delta_\perp$，使得 (k, r') 接受 v（在 $A_\perp$ 中）。根据归纳假设，(k, r') 也接受 v'。根据引理 6.4，$\Delta_\perp$ 是左 α-不变的，因此由 $(j, r) \xrightarrow{[a]} (k, r')$ 可得一个转移 $(j, r) \xrightarrow{[b]} (k, r'') \in \Delta_\perp$，其中某个状态 (k, r'') 满足 $a(k, r') = b(k, r'')$。根据引理 5.7，我们有 $a \notin$支撑(k, r')，因此可得 $(k, r') = (k, r'')$，从而 (j, r) 在 $A_\perp$ 中接受 $w' = [\natural v'$。
- $\gamma = [a$: 根据 α-等价的定义，我们有 $\delta = [b$且 $av = bv'$，即 $v' = (a\ b) \cdot v$，其中某个 $b \in \mathbb{A}$ 满足此条件。由于 (j, r) 在 $A_\perp$ 中接受 w，因此存在一个转移 $(j, r) \overset{a}{\longmapsto} (k, r') \in \Delta_\perp$，使得 (k, r') 接受 v(在 $A_\perp$ 中)。根据构造，令 $(k, r'') \in Q_\perp$，使得 r' 扩展 r''，且 supp$(r'') =$ supp$(r') \setminus \{b\}$。由于 (k, r') 接受 v，我们有 $\mathrm{LO}(v) \subseteq$supp(k, r')。此外，由于 $av = bv'$，我们有 $b \notin \mathrm{LO}(v)$。因此，$\mathrm{LO}(v) \subseteq$supp(k, r'')，从而 (k, r'') 根据引理 6.5 接受 v。根据接受的等变性，$(a\ b) \cdot (k, r'')$ 接受 $(a\ b) \cdot v = v'$。由于 $(j, r) \overset{a}{\longmapsto} (k, r') \in \Delta_\perp$，根据构造，我们有一个转移 $(j, r) \overset{a}{\longmapsto} (k, r'') \in \Delta_\perp$。根据 α-不变性 $\Delta_\perp$，存在一个转移 $(j, r) \xrightarrow{[b} (a\ b) \cdot (k, r'') \in \Delta_\perp$。因此，$(j, r)$ 接受 $[bv' = w'$。

□

引理 6.7 的证明

(1) 设 $(j, r) \xrightarrow{\gamma} (k, r') \in \Delta_\perp$ for $\gamma = a, \natural, [\natural$ and $(j, \bar{r}) \in Q$ with $\bar{r}$extends r. 根据名称丢弃修改的构造，存在某个 $\bar{r}''$，它扩展 r，使得 $(j, \bar{r}'') \xrightarrow{\gamma} (k, \bar{r}') \in \Delta$，且 $\bar{r}'$ 扩展 r'。取 $\pi \in$Perm$(\mathbb{A})$ 使得 $\pi \cdot \bar{r}'' = \bar{r}$；这样的 π 存在，因为 $\bar{r}''$ 和 $\bar{r}$ 都是扩展 r 的全函数，且属于名义状态集 Q 的同一单轨道分量 $\mathbb{A}^{\#n_j}$。因此，由等变性，从 $(j, \pi \cdot \bar{r}'') = (j, \bar{r})$ 可得 $(j, \bar{r}) \xrightarrow{\pi\ \gamma} \cdot (k, \pi \cdot \bar{r}') \in \Delta$。下面对 γ 分情况讨论。若 $\gamma = a$ 或 $\gamma = \natural$ 且 $(j, r) \xrightarrow{\gamma} (k, r') \in \Delta_\perp$，则 $a \in$supp(r)，因此 π 固定 a，从而 $\pi \cdot \gamma = \gamma$。若 $\gamma = [\natural,$，则根据 α 对 $[\natural$-转移的左 Δ-不变性，从 $(j, \bar{r}) \xrightarrow{\pi\ \gamma} \cdot (k, \pi \cdot \bar{r}')$ 可得一条转移 $(j, \bar{r}) \xrightarrow{\gamma} (k, \tilde{r}) \in \Delta$，其中某个 $\tilde{r}$ 扩展 r'。在所有情况下，都存在一条转移 $(j, \bar{r}) \xrightarrow{\gamma} (k, \tilde{r}) \in \Delta$，其中 $\tilde{r}$ 扩展 r'。

(2) 令 $(j, r) \overset{a}{\longmapsto} (j, r') \in \Delta_\perp$ 且 $(j, \bar{r}) \in Q$，其中 $\bar{r}$扩展了 r。根据名称丢弃修改的构造，存在某个 $(j, \bar{r}') \in Q$，其中 $\bar{r}'$扩展了 r，以及 $(j, \bar{r}') \overset{c}{\longmapsto} (k, \bar{r}''') \in \Delta$，其中 $\bar{r}'''$扩展了某个 $r''' \in Q_\perp$，使得 $ar' = cr'''$。与前一种情况一样，取 $\pi \in$Perm$(\mathbb{A})$，使得 $\bar{r} = \pi \cdot \bar{r}'$，并令 $b = \pi(c)$。由 Δ的等变性可知，$\pi \cdot ((o, \bar{r}') \overset{c}{\longmapsto} (p, \bar{r}''')) = (o, \bar{r}) \xrightarrow{[b} (p, \pi \cdot \bar{r}''') \in \Delta$。令 $r'' = \pi \cdot r'''$。由于 $\bar{r}'''$扩展了 r'''，因此 $\bar{r}'' = \pi \cdot \bar{r}'''$扩展了 $\pi \cdot r''' = r''$。此外，由于 $\pi \cdot \bar{r}' = \bar{r}$对 $\bar{r}'$和 $\bar{r}$成立，且二者都扩展了 r，π固定 supp$(r) \supseteq$supp$(r') \backslash \{a\}$。由 $ar' = cr'''$可得 $br'' = b(\pi \cdot r''') = ar'$。这意味着 $r'' = (a\ b) \cdot r'$，且 b对 r'是新鲜的。□

引理 6.8 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 NDA，$A_\perp = (Q_\perp, \Delta_\perp, i, F_\perp)$ 是其名称释放版本。包含关系 $L_\alpha(A) \subseteq L_\alpha(A_\perp)$ 显然成立，因为 NDA A 是 $A_\perp$ 的子自动机。

接下来证明 $L_\alpha(A_\perp) \subseteq L_\alpha(A)$：我们证明，对于 $A_\perp$ 接受的每个词 w，都存在一个与之 α-等价、且被 A 接受的词 $w' \equiv_\alpha w$。我们对词的长度使用归纳法。基础情形显然成立（因为释放名称后，终态仍然是终态）。在归纳步骤中，设 $w = \gamma v$ 被某个 $(j, r) \in Q_\perp$ 接受。我们将归纳假设加强为：对于某个接受 w 的状态 $(j, r) \in Q_\perp$，每个满足 $\bar{r}$ 扩展 r 的 $(j, \bar{r}) \in Q$ 都接受某个 $w' \equiv_\alpha w$。我们针对 γ 分情况讨论：

- $\gamma = a, \natural$: 令 $(j, \bar{r}) \in Q$满足 $\bar{r}$扩展 r。我们证明 $(j, \bar{r})$ 接受某个 $w \equiv_\alpha w \quad j\ r \quad k\ r \in \iota$。存在一个 $\Delta_\perp \quad k\ r_\gamma \quad v \quad A_\perp \quad 67$ 转移 $(\ ,\ ) \longrightarrow (,\ ,)$，其中 $(,\ ,)$ 接受（在 中）。根据引理 ，我们还有一个转移 $(j, \bar{r}) \xrightarrow{\gamma} (k, \bar{r}_\iota) \in \Delta$，其中 $\bar{r}_\iota$扩展 r_ι。根据

归纳假设，$(k,\ \ r')$ 接受某个 $v' \equiv_\alpha v$.
因此，$(j,\ \bar{r})$ 接受 $w' = \gamma v' \equiv_\alpha \gamma v = w$。

- $\gamma = [\![a]\!]$: 设 $(j, \bar{r}) \in Q$，其带有 $\bar{r}$ 扩展 r .
由于 (j,r) 接受 $w = [\![a]\!]v$ 在 $A_\perp$ 中，因此存在一个转移 $(j,r) \xrightarrow{[\![a]\!]} (k,r') \in \Delta_\perp$，其中 (k,r') 接受 v（在 $A_\perp$ 中）。由引理 6.7，我们得到一个转移 $(j,\bar{r}) \xrightarrow{[\![a]\!]} (k,\bar{r}') \in \Delta$，其中 $\bar{r}'$ 扩展了 r'。根据归纳假设，$(k,\bar{r}')$ 接受某个 $v' \equiv_\alpha v$，因此最终得到 $w' = [\![a]\!]v' \equiv_\alpha [\![a]\!]v = w$，且 $(j,\bar{r})$ 接受 w'。
- $\gamma = [\![a]$: 设 $(j,\bar{r}) \in Q$，其中 $\bar{r}$ 扩展了 r，我们证明 $(j,\bar{r})$ 接受某个 $w' \equiv_\alpha w$。由于 (j,r) 接受 w，存在一个转移 $(j,r) \overset{a}{\longmapsto} (k,r') \in \Delta_\perp$，其中 (k,r') 接受 v。由引理 6.7，我们得到一个名称 $b \in \mathbb{A}$ 和一个转移 $(j,\bar{r}) \xrightarrow{[\![b]\!]} (k,\bar{r}'') \in \Delta$，其中 $\bar{r}''$ 扩展了 $(a\ b)\cdot r'$。选取某个 $\bar{r}'$ 扩展 r'，使得 $a\bar{r}' = b\bar{r}''$。根据归纳假设，$(k,\bar{r}')$ 接受某个 $v'' \equiv_\alpha v$。我们有 $(a\ b)\cdot \bar{r}' = \bar{r}''$。由接受关系的等变性，我们有 $\bar{r}''$ 接受 $(a\ b)\cdot v''$。因此，$(j,\bar{r})$ 接受词 $w' = [\![b(a\ b)\cdot v'']\!]$。最后，由于 $a\bar{r}' = b\bar{r}''$ 且 $v'' \in L(\bar{r}')$ 蕴含 $b \notin$局部轨道(v'') 和 $a \notin$局部轨道$((ab)\cdot v'')$，我们有 $av'' = b((ab)v'')$。由于 $v \equiv_\alpha v''$ 成立，我们也有 $av \equiv_\alpha [\![b\ a\ b\ \ v\ \ = w$ $\square[v]_\alpha = b[$ $(a\ b)\cdot'']_\alpha$，因此最终得到 $w = [\ (\ )\cdot''\ '$。

引理 7.2 的证明

为了得到一个判定过程，我们首先给出 $\mathrm{RC}(r)$、$\mathrm{LO}(r)$ 和 $\mathrm{LC}(r)$ 的递归定义：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RC}(\emptyset) = \mathrm{RC}(\epsilon) = \mathrm{RC}([\![a) = \mathrm{RC}(a) = \mathrm{RC}(?) &= \emptyset \\
\mathrm{RC}(a]\!]) &= \{a\} \\
\mathrm{RC}(r_1 \cdot r_2) &= \mathrm{RC}(r_2) \cup (\mathrm{RC}(r_1) \setminus \mathrm{LC}(r_2)) \\
\mathrm{RC}(r_1 + r_2) &= \mathrm{RC}(r_1) \cup \mathrm{RC}(r_2) \\
\mathrm{RC}(r_3^*) &= \mathrm{RC}(r_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LO}(\emptyset) = \mathrm{LO}(\epsilon) = \mathrm{LO}([\![a) = \mathrm{LO}(?) &= \emptyset \\
\mathrm{LO}(a]\!]) = \mathrm{LO}(a) &= \{a\} \\
\mathrm{LO}(r_1 \cdot r_2) &= \mathrm{LO}(r_1) \cup (\mathrm{LO}(r_2) \setminus \mathrm{LC}(r_1)) \\
\mathrm{LO}(r_1 + r_2) &= \mathrm{LO}(r_1) \cup \mathrm{LO}(r_2) \\
\mathrm{LO}(r_3^*) &= \mathrm{LO}(r_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LC}(\emptyset) &= \mathbb{A} \\
\mathrm{LC}(\epsilon) = \mathrm{LC}(a]\!]) = \mathrm{LC}(a) = \mathrm{LC}(?) &= \emptyset \\
\mathrm{LC}([\![a) &= \{a\} \\
\mathrm{LC}(r_1 \cdot r_2) &= \mathrm{LC}(r_1) \cup (\mathrm{LC}(r_2) \setminus \mathrm{LO}(r_1)) \\
\mathrm{LC}(r_1 + r_2) &= \mathrm{LC}(r_1) \cap \mathrm{LC}(r_2) \\
\mathrm{LC}(r_3^*) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

我们断言，对于每个正则表达式 r，根据这些递归定义得到的集合与先前定义的集合一致。

我们通过对正则表达式 r进行结构归纳，同时证明这三个等式。基本情形如下：

- $r = \emptyset$: 那么 $L(r) = \emptyset$，因此根据 RC 的定义，$\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w) = \emptyset = \mathrm{RC}(\emptyset)$。类似地，$\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{LO}(w) = \emptyset = \mathrm{LO}(\emptyset)$，且 $\bigcap_{w\in L(r)} \mathrm{LC}(w) = \mathbb{A} = \mathrm{LC}(\emptyset)$。
- $r = \epsilon$: 那么 $L(r) = \{\epsilon\}$，因此根据定义，$\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(\epsilon) = \emptyset = \mathrm{RC}(\epsilon)$。对 LO 和 LC，同样成立。
- $r = \gamma$其中 $\gamma \in \mathbb{A}$: 那么 $L(r) = \{\gamma\}$，因此$\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(\gamma)$。同样，根据引理 7.2 中的定义，若 $\gamma = a$ 或 $\gamma = [\![a$，则 $\mathrm{RC}(\gamma) = \emptyset$；若 $\gamma = a]\!]$，则 $\mathrm{RC}(\gamma) = \{a\}$。这与 $\mathrm{RC}(\gamma)$ 直接吻合。对 LO 和 LC 也适用同样的推理。

对于归纳步骤，我们以 RC 为例展示分类讨论；对局部轨道和 LC 的论证也类似成立。

- $r = r_1 + r_2$: 根据定义，$L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w) &= \left(\bigcup_{w\in L(r_1)} \mathrm{RC}(w)\right) \cup \left(\bigcup_{w\in L(r_2)} \mathrm{RC}(w)\right) \\
&= \mathrm{RC}(r_1) \cup \mathrm{RC}(r_2) = \mathrm{RC}(r),
\end{aligned}
$$

其中，第二个等式由归纳假设得出。r_2 = r_1 $v \in$

- $r = r_1 \cdot L$ 3 1 : 根据定义，$L() = L(\,)\cdot L(\,)\,\{uv \mid u \in L(\,)\,(r_2)\}$。利用引理 . 和归纳假设：

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w) &= \bigcup_{u\in L(r_1)} \bigcup_{v\in L(r_2)} \mathrm{RC}(uv) \\
&= \bigcup_{u\in L(r_1)} \bigcup_{v\in L(r_2)} ((\mathrm{RC}(u) \setminus \mathrm{LC}(v)) \cup \mathrm{RC}(v)) \\
&= \left(\bigcup_{u\in L(r_1)} \mathrm{RC}(u) \setminus \bigcap_{v\in L(r_2)} \mathrm{LC}(v)\right) \cup \\
&\quad \bigcup_{v\in L(r_2)} \mathrm{RC}(v) \\
&= (\mathrm{RC}(r_1) \setminus \mathrm{LC}(r_2)) \cup \mathrm{RC}(r_2) = \mathrm{RC}(r).
\end{aligned}
$$

- $r = r_1^*$: 根据定义，我们有

$$L(r) = L(r_1)^* = \{\epsilon\} \cup L(r_1) \cup L(r_1)L(r_1) \cup \cdots.$$

接下来计算：

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w) \\
&= \mathrm{RC}(\epsilon) \cup \bigcup_{w\in L(r_1)} \mathrm{RC}(w) \cup \bigcup_{w_1,w_2\in L(r_1)} \mathrm{RC}(w_1 w_2) \cup \cdots \\
&\subseteq \mathrm{RC}(\epsilon) \cup \bigcup_{w\in L(r_1)} \mathrm{RC}(w) \cup \\
&\quad \bigcup_{w_1,w_2\in L(r_1)} (\mathrm{RC}(w_1) \cup \mathrm{RC}(w_2)) \cup \cdots \\
&= \bigcup_{w\in L(r_1)} \mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(r_1) = \mathrm{RC}(r)
\end{aligned}
$$

包含关系 $\mathrm{RC}(r) = \mathrm{RC}(r_1) \subseteq \bigcup_{w\in L(r)} \mathrm{RC}(w)$ 由归纳法可得，因为 $L(r_1) \subseteq L(r)$。

由于正则表达式是有限的，而且给定的 r中只出现有限多个名称，因此两个集合 $\mathrm{RC}(r)$ 和 $\mathrm{LO}(r)$ 都是有限的，而集合 $\mathrm{LC}(r)$ 要么是有限的，要么等于 $\mathbb{A}$。因此，可以轻松地递归计算这三个集合，以检查定义 7.1 中文法的连接和 Kleene 星号的附加条件。由此，我们得到该文法的一个判定过程。□

引理 7.3 的证明

我们对正则表达式 r进行结构归纳。

对于基本情形 $r \in \{\emptyset, \epsilon, a, [\![a, a]\!]\}$，断言显然成立：定义 7.1 中的文法将所有这些表达式都视为正则释放表达式，并且 $L(r)$中的每个词长度都至多为一，因此是右非遮蔽的。

对于和式 $r = r_1 + r_2$，有 $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$，且文法不施加任何附加条件。因此，$r$ 是正则释放表达式，当且仅当 r_1 和 r_2 是正则释放表达式；根据归纳假设，这显然成立。

对于连接 $r = r_1 \cdot r_2$，我们证明两个方向的蕴含。

首先假设 r 是正则释放表达式。那么 r_1 和 r_2 是正则释放表达式，并且根据定义 7.1，$\mathrm{RC}(r_1) \cap \mathrm{LO}(r_2) = \emptyset$。由归纳假设，对于 $i = 1, 2$，有 $L(r_i) \subseteq \mathrm{RNS}(\hat{\mathbb{A}})$。令 $w = w_1 w_2 \in L(r)$，其中 $w_i \in L(r_i)$。根据式 (1) 中 $\mathrm{RC}(r_1)$ 和 $\mathrm{LO}(r_2)$ 的定义，我们有 $\mathrm{RC}(w_1) \cap \mathrm{LO}(w_2) = \emptyset$。因此，根据引理 3.3，$w$ 是右非遮蔽的。所以，$L(r) \subseteq \mathrm{RNS}(\hat{\mathbb{A}})$ 成立。

反过来，假设 $L(r) \subseteq \mathrm{RNS}(\hat{\mathbb{A}})$。设存在某个 $a \in \mathrm{RC}(r_1) \cap \mathrm{LO}(r_2)$。根据式 (1)，存在词 $w_1 \in L(r_1)$ 和 $w_2 \in L(r_2)$，使得 $a \in \mathrm{RC}(w_1) \cap \mathrm{LO}(w_2)$。于是，对于分解 $w_1 w_2 = w_1 \cdot w_2$，我们得到 $\mathrm{RC}(w_1) \cap \mathrm{LO}(w_2) \neq \emptyset$，所以 $w_1 w_2$ 不是右非遮蔽的，这与 $L(r) \subseteq \mathrm{RNS}(\hat{\mathbb{A}})$ 矛盾。因此，我们有 $\mathrm{RC}(r_1) \cap \mathrm{LO}(r_2) = \emptyset$。由归纳假设，$r_1$ 和 r_2 是正则释放表达式，因此 r 也是。

情形 $r = (r_3)^*$ 的证明类似：利用 r_3 的归纳假设，以及上述关于有限连接 $w = w_1 \cdots w_n$（其中每个都是 $w_i \in L(r_3)$）的论证，可知定义 7.1 中的条件 $\mathrm{RC}(r_3) \cap \mathrm{LO}(r_3) = \emptyset$ 成立，当且仅当 $L(r_3^*) \subseteq \mathrm{RNS}(\hat{\mathbb{A}})$。 □

引理 7.7 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个带有 ϵ-转移的 D-NFA，使得对每个 $q \xrightarrow{\epsilon} q' \in \Delta$，均有 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(q')$ 且 $\mathrm{RC}(q) \subseteq \mathrm{RC}(q')$。

我们首先通过非确定有限自动机的标准 ϵ-消除法，移除底层非确定有限自动机中的 ϵ-转移。定义状态的 ϵ-闭包为

$$E(q) = \{q' \in Q \mid q \xrightarrow{\epsilon^*} q'\},$$

其中 $\xrightarrow{\epsilon^*}$ 表示任意多个连续的 ϵ-转移。令 $A' = (Q', \Delta', E(i), F')$，其中

$$Q' = \{E(q) \mid q \in Q\},$$

$$E(q) \xrightarrow{\gamma} E(q') \in \Delta' \quad \text{if } \exists p \in E(q).\, p \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta \text{ and } \gamma \neq \epsilon,$$

$$F' = \{E(q) \in Q' \mid E(q) \cap F \neq \emptyset\}.$$

那么，A' 是一个不含 ϵ转移的非确定有限自动机，使得 $L(A) = L(A')$。

接下来需要证明 A' 是一个 D-NFA，也就是说，定义 7.4 中关于 RC 和局部轨道的条件得以保留。我们断言，$\mathrm{RC}(E(q)) = \mathrm{RC}(q)$ 和局部轨道$(E(q))$ = 局部轨道(q) 在转移关系 Δ' 上满足定义 7.4 的各项条件。

取一个转移 $E(q) \xrightarrow{\gamma} E(q') \in \Delta'$。根据构造，存在一个状态 $p \in E(q)$，使得

$$q \xrightarrow{\epsilon^*} p \xrightarrow{\gamma} q'$$

是 A 中具有相同可见字母 γ 的一条路径。根据假设，对于这条路径上的每个 ϵ-转移 $r \xrightarrow{\epsilon} r'$，都有 $\mathrm{LO}(r) \supseteq \mathrm{LO}(r')$ 且 $\mathrm{RC}(r) \subseteq \mathrm{RC}(r')$。在步骤 $p \xrightarrow{\gamma} q'$，定义 7.4 中的条件对 A 成立。因此，我们很容易得到转移 $E(q) \xrightarrow{\gamma} E(q')$ 中 $\mathrm{RC}(E(q))$、$\mathrm{LO}(E(q))$ 与 $\mathrm{RC}(E(q'))$、$\mathrm{LO}(E(q'))$ 之间所需的条件。例如，我们展示 $\gamma = a$ 的情形；其他情形均可类似处理：$\mathrm{RC}(E(q)) \cup \{a\} = \mathrm{RC}(q) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}(p) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}(q') = \mathrm{RC}(E(q'))$ and

局部轨道$(E(q)) =$ 局部轨道$(q) \supseteq$ 局部轨道$(p) \supseteq \{a\} \cup$ 局部轨道$(q') = \{a\} \cup$局部轨道$(E(q'))$。

因此，令所有 $q \in Q$ 都满足 $\mathrm{RC}(E(q)) = \mathrm{RC}(q)$ 且 $\mathrm{LO}(E(q)) = \mathrm{LO}(q)$，则 RC 和 LO 对转移关系 Δ' 也满足定义 7.4 的所有定义不等式。特别地，对于所有 $q \in Q$，仍有 $\mathrm{RC}(q) \cap \mathrm{LO}(q) = \emptyset$，这意味着对于所有 $E(q) \in Q'$，$\mathrm{RC}(E(q)) \cap \mathrm{LO}(E(q)) = \emptyset$，因此 A' 是一个 D-NFA。 □

引理 7.9 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 D-NFA，令 $A' = (\uparrow_{\mathrm{eq}} Q', \uparrow_{\mathrm{eq}} \Delta', i', \uparrow_{\mathrm{eq}} F')$ 为按照构造 7.8 构造得到的它的名义化。我们证明 A' 是一个 NDA。由于 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个非确定有限自动机，集合 Q 和 Δ 均为有限集，并且 Δ 的转移标签中只出现有限多个名称。令 $N \subseteq \mathbb{A}$ 为这个有限名称集。根据定义 7.4 中局部轨道(q) 和 $\mathrm{RC}(q)$ 的定义，对于每个 $q \in Q$，都有局部轨道$(q) \subseteq N$；并且对于每个 $q \in Q$，只有有限多个元组 $r = (a_1, \ldots, a_n)$ 满足局部轨道$(q) = \{a_1, \ldots, a_n\}$，因此 Q' 是有限集。由此，$\uparrow_{\mathrm{eq}} Q'$ 是一个轨道有限名义集。

$\hat{}$ 根据构造，我们有 $\Delta' \subseteq \uparrow_{\mathrm{eq}} Q' \times \mathbb{A} \times \uparrow_{\mathrm{eq}} Q'$，因此 $\uparrow_{\mathrm{eq}} \Delta'$ 是 $(\uparrow_{\mathrm{eq}} Q') \times \hat{\mathbb{A}} \times (\uparrow_{\mathrm{eq}} Q')$ 的等变子集。定义 5.1 中对转移关系的条件是等变的，因此只需验证 Δ' 中的转移；根据构造，这显然成立：

- 左 α-不变性：设 $(q, r) \xrightarrow{\gamma} (q's)$，$\gamma = [a$ 或 $\gamma = [\natural$，是 Δ' 中的一次转移，并假设有 $(q' u) \in \uparrow_{\mathrm{eq}} Q'$，且 $q\ r \quad q\ u \in \Delta \quad \Delta \quad c \quad t \quad q \xrightarrow{ac} \gamma\ q \in \Delta\ b$。我们需要证明存在 $(,)\ (ab) \cdot \longrightarrow^{\gamma} (')'$。根据 $'$ 的定义，存在 和 使得 $()\cdot'$，(q, r)，$(q' t) \in Q'$，且 $as = ct$。显然我们也有 $bu = ct$，因此根据构造有 $(q, r)\ (ab) \cdot \longrightarrow^{\gamma} (q' u) \in \Delta'$。

- 名称擦除：设 $(q, r) \xrightarrow{\gamma} (q's)$ 是 Δ' 中的一条转移，且带有 $\gamma = [\natural$ 或 $\gamma = [\natural$。由构造 7.8 可得，$q \xrightarrow{\gamma} q'$ 属于 Δ，且 $(q, r) = \iota(q)$，同时 $(q's) = \iota(q')$。在这两种情况下，由定义 7.4 可得 $\mathrm{RC}(q) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}(q')$，因此 $a \in \mathrm{RC}(q')$。由于 A 是 D-NFA，$\mathrm{RC}(q') \cap \mathrm{LO}(q') = \emptyset$，故 $a \notin \mathrm{LO}(q')$。根据 ι 的定义，元组 s 枚举了 $\mathrm{LO}(q')$，因此 a 不会出现在 s 中，从而 $a \# (q's)$。对于 $\uparrow\mathrm{eq}\ \Delta'$ 中的转移，断言由新鲜性的等变性得出。
- 有限分支：固定 $(q, r) \in Q'$。对于自由转移和释放转移，出边的数量分别由 Δ 中 q 的自由转移和释放转移数量给出，因此是有限的。分配转移同样如此：对于每个转移 $q \xrightarrow{[\ c} q' \in \Delta$，我们构造一个等价类 $c(q's)$，使得 $(q, r) \xmapsto{c} (q's)$ 属于 Δ'。类似地，Δ' 中的转移 $(q, r) \xrightarrow{[a]} (q's)$ 是由转移 $q \xrightarrow{[c]} q' \in \Delta$得到的。尽管这样的转移 $q \xrightarrow{[c]} q' \in \uparrow\mathrm{eq}\Delta'$ 有无限多个（每个新鲜 c 对应一个），但它们所到达的状态数量 $\{((q's) \mid ((q, r), [\natural, (q's)) \in \Delta'\}$ 是有限的，因为 Q' 和 Δ 都是有限的。

最后，A' 的初始状态是唯一的 $i' = (i, r) \in Q'$。A' 的终态集合为 $F' = \{(f, r) \mid f \in F\}$，该集合是等变的，因此 A' 是一个 NDA。□

引理 7.10 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 D-NFA，并设 $A' = (\uparrow_{\mathrm{eq}} Q', \uparrow_{\mathrm{eq}} \Delta', i', \uparrow_{\mathrm{eq}} F')$ 是它的名义化，其中 $Q' \subseteq Q \times \mathbb{A}^*$、$\Delta' \subseteq \uparrow_{\mathrm{eq}} Q' \times \mathbb{A} \times \uparrow_{\mathrm{eq}} Q'$、$i' \in Q'$ 和 $F' \subseteq Q'$ 如构造 7.8 所给定。我们通过证明两个包含关系来证明 $L_\alpha(A') = L_\alpha(A)$。

“$\supseteq$”：对于 A 的每个接受运行，A' 都存在一个在同一词上的接受运行。这显然成立，因为 A 本质上是 A' 的一个子自动机：设

$$\sigma = i \xrightarrow{\gamma_1} q_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} f$$

是 A 在 $w = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ 上的一个接受运行。那么，

$$\rho = \iota(i) \xrightarrow{\gamma_1} \iota(q_1) \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} \iota(f)$$

根据构造，是 A' 在 w 上的一个接受运行。

“$\subseteq$”：我们更一般地证明，对于每个接受词 w 的状态 $(q, r) \in Q'$，状态 $q \in Q$ 都接受某个 $w' \equiv_\alpha w$。我们对 w 进行归纳。

基础情形很简单：如果 $(f, r) \in Q'$ 接受 $w = \epsilon$，那么有 $(f, r) \in F'$，因此 $f \in F$，所以 f 接受 ϵ。

归纳步骤：设 $(q, r) \in Q'$ 接受 $w = \gamma w'$。我们根据 γ 分情况讨论：

- $\gamma = a$：于是存在 $(q, r) \xrightarrow{a} (q's) \in \Delta'$，其中 $(q's)$ 接受 w'。根据构造 7.8，这个转移源自一个自由转移 $q \xrightarrow{a} q' \in \Delta$。根据归纳假设，$q'$ 接受某个 $v \equiv_\alpha w'$，因此 q 接受 av；根据定义 3.5，有 $av \equiv_\alpha aw' = w$。

- $\gamma = [a$：我们有一个转移 $(q, r) \xmapsto{a} (q's) \in \Delta'$，其中 $(q's)$ 接受 w'。根据构造 7.8，存在某个分配转移 $q \xrightarrow{[c} q' \in \Delta$ with $as = ct$ for $(q't) \in Q'$；根据引理 5.10，$(q't)$ 接受 w''，且 $w'' = (ac) \cdot w'$。根据归纳假设，q' 接受一个词 $v \equiv_\alpha w''$，因此 q 接受 $[cv$。根据 α-等价的定义（定义 3.5），我们得到 $[cv \equiv_\alpha [cw'' \equiv_\alpha [aw' = w$。

- $\gamma = [\natural$：那么 $(q, r) \xrightarrow{[a]} (q's) \in \Delta'$，其中 $(q's)$ 接受 w'。根据构造 7.8 中 Δ' 的构造，转移 $(q, r) \xrightarrow{[a]} (q's) \in \Delta'$ 是对 A 中的某个转移 $\iota(q) \xrightarrow{[c]} \iota(q')$ 应用某个置换得到的。由归纳假设，q' 接受某个 $v \equiv_\alpha w'$，因此 q 接受 $[\natural v$；还需证明 $[c]v \equiv_\alpha [\natural w'$。我们有 $c \in \mathrm{RC}(q')$，因而 $c \notin \mathrm{LO}(q')$，因为 A 是 D-NFA。此外，我们已经证明 A' 是 NDA（引理 7.9），因此 $a \notin \mathrm{supp}(s)$，进而根据支撑引理（引理 5.7）和事实 3.6，$a \notin \mathrm{supp}([w']_\alpha) = \mathrm{LO}(w')$。此外，$c \notin \mathrm{LO}(w')$，因为 $c \in \mathrm{RC}(q')$，且 w' 是在一次右非遮蔽运行中从 $(q's)$ 读取的，所以 $\{a, c\} \cap \mathrm{LO}(w') = \emptyset$。因此，根据 α- 等价的定义，q 接受 $[c]v \equiv_\alpha [\natural w' = w$。

- $\gamma = \natural]$：最后，假设 (q, r) 接受 $w = \natural w'$。那么存在 $(q, r) \xrightarrow{a]} (q's) \in \Delta'$，其中 $(q's)$ 接受 w'。根据构造 7.8，这一步来自一个释放转移 $q \xrightarrow{a]} q' \in \Delta$。由归纳假设，$q'$ 接受某个 $v \equiv_\alpha w'$。如上所述，由于 $a \notin \mathrm{supp}(s)$，我们有 $a \notin \mathrm{LO}(w')$。因此，根据定义 3.5，我们有 $\natural v \equiv_\alpha \natural w' = w$，且 q 接受 $\natural v$。

最后，由于对于每个接受状态 $(q, r) \in Q'$，状态 $q \in Q$ 都接受某个 $w' \equiv_\alpha w$，因此这对 i' 和 i 尤其成立，从而得到 $L_\alpha(A') = L_\alpha(A)$。□

引理 7.12 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 NDA，且 $A_S = (Q_S, \Delta_S, i, F_S)$ 是其 S-限制。为证明 A_S 是一个 D-NFA，我们需要证明对于 A_S 中的每个状态 q，集合 $\mathrm{LO}(q)$ 与 $\mathrm{RC}(q)$ 不相交。为此，我们证明 $\mathrm{LO}(q) \subseteq \mathrm{supp}(q)$，且 $\mathrm{RC}(q) \subseteq \mathbb{A} \backslash \mathrm{supp}(q)$。只要证明由 LO′、RC′ 定义的集合族 $\mathrm{LO}'(q) = \mathrm{supp}(q)$、$\mathrm{RC}'(q) = \mathbb{A} \setminus \mathrm{supp}(q)$ 满足定义 7.4 中 LO、RC 的定义条件即可。这可直接由支撑引理（引理 5.7）得出。□

引理 7.13 的证明

令 A_S restrict A to S，我们证明 $L(A_S) = L_0(A) \cap \hat{}S^*$。由于 A_S 是 A 的真子自动机，因此包含关系的一个方向显然成立。于是，设 $w \in \hat{}S^*$，使得 A 接受 w。我们加强断言 $\hat{}$，并证明 A_S 中的每个 q 都接受 A 中 q 所接受的所有 $w \in S^*$，并对接受运行的长度进行归纳。

对于基础情形，设 $q \in Q_S$ 在 A 中接受 $w = \epsilon$，则 $q \in F$，因此 $q \in F_S$，且 q 在 A_S 中接受 w。对于从 $\hat{}w$ 到 $\gamma w \in S^*$ 的归纳步骤，设 $q \in Q_S$，并设 σ 是 A 在 γw 上、从 q 开始的一次接受运行。于是 σ 在 A 中具有 $\sigma = q \xrightarrow{\gamma} q' \overset{\sigma'}{\longrightarrow} f$ 的形式。由于 $\gamma \in \hat{}S$，我们有 $q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta_S$，接下来只需证明 $q' \in Q_S$，便可由归纳法得出结论。但这由支撑引理（引理 5.7）立即可得。□

命题 7.15 的证明

从左到右的包含关系显然，因为 A_S 是 A 的子自动机。对于反向包含，设 $w \in L(A)$，并选择 $w' \equiv_\alpha w$ 使得 $w' \in \hat{}S^*$。由于 $\deg(A) \geq |\bigcup_{v \in L_0(q)} \text{局部轨道}(v)|$，且我们选取了 $|S| = \deg(A) + 1$，因此这样的 w' 存在。由引理 7.13，w' 被 A_S 接受。□

引理 7.16 的证明

我们证明这些包含关系

$$\bigcup_{w \in L(A')} \mathrm{RC}(w) \subseteq \mathrm{RC}(q') \text{ and } \bigcup_{w \in L(A')} \mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{LO}(q)$$

通过对 A' 中接受运行的长度进行归纳，同时证明。设

$$\rho = q_0 \xrightarrow{\gamma_1} q_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} q_n$$

是 A' 在 $w = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ 上的一次接受运行，其中 $q_0 = q$ 且 $q_n = q'$。对于 $n = 0$，我们有 $w = \epsilon$，因此 $q = q'$。根据表1，$\mathrm{RC}(\epsilon) = \mathrm{LO}(\epsilon) = \emptyset$，所以该断言成立。

对于归纳步骤，设 $w = \gamma u$ 且

$$\rho = q \xrightarrow{\gamma} p \xrightarrow{*} q'$$

对于某个状态 p 和 u 的 $n-1$ 后缀 $p \xrightarrow{*} q'$ 是在词 u 上长度为 Δ 的接受运行。根据归纳假设，对于 $A'' = (Q, \Delta, p, \{q'\})$，我们得到

$$\mathrm{RC}(u) \subseteq \mathrm{RC}(q') \quad \text{and} \quad \mathrm{LO}(u) \subseteq \mathrm{LO}(p).$$

现在我们按 γ 区分情况：

- $\gamma = a$：由表1可知，$\mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(u) \cup \{a\}$ 且 $\mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(u)$。由于 $q \xrightarrow{a} p \in \Delta$，根据定义 7.4 可得 $\mathrm{RC}(q) \supseteq \mathrm{RC}(p) \cup \{a\}$ 且 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(p)$。因此，根据归纳假设，$\mathrm{RC}(w) \subseteq \mathrm{RC}(q') \cup \{a\}$ 且 $\mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{LO}(q)$。
- $\gamma = [a$：此处，表1给出 $\mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(u) \setminus \{a\}$ 且 $\mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(u)$。由 $q \xrightarrow{[a} p$，我们得到 $\mathrm{RC}(q) \supseteq \mathrm{RC}(p) \setminus \{a\}$ 且 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(p)$，因此同样有 $\mathrm{RC}(w) \subseteq \mathrm{RC}(q') \cup \{a\}$ 且 $\mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{LO}(q)$。
- $\gamma = a]$：根据表1，$\mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(u) \cup \{a\}$，且 $a \in \mathrm{RC}(w)$ 当且仅当 $a \in \mathrm{RC}(u)$ 或 $a \notin \mathrm{LC}(u)$。由于 $q \xrightarrow{a]} p$，定义 7.4 蕴含 $\mathrm{RC}(q) \cup \{a\} \supseteq \mathrm{RC}(p)$，且 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(p) \cup \{a\}$。利用归纳假设以及引理 3.1 中词的 RC 与 LC 之间的关系，我们得到 $\mathrm{RC}(w) \subseteq \mathrm{RC}(q')$，且 $\mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{LO}(q)$。
- $\gamma = ?$：最后，若 $q? \longrightarrow p$，则定义 7.4 给出 $\mathrm{RC}(q) \supseteq \mathrm{RC}(p)$，且 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(p)$。根据表1，我们有 $\mathrm{RC}(w) = \mathrm{RC}(u)$ 和 $\mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(u)$，因此由归纳假设可得该断言。□

引理 7.17 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个在 $\mathbb{A}$、$q \in Q$ 上的非确定有限自动机，且 $O(q)$ 和 $I(q)$ 如上所定义。包含关系

$$\bigcup_{w \in I(q)} \mathrm{RC}(w) \subseteq \mathrm{RC}(q) \quad \text{and} \quad \bigcup_{w \in O(q)} \mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{LO}(q)$$

由引理 7.16 得证，因此只需证明

$$\bigcup_{w \in I(q)} \mathrm{RC}(w) \supseteq \mathrm{RC}(q) \quad \text{and} \quad \bigcup_{w \in O(q)} \mathrm{LO}(w) \supseteq \mathrm{LO}(q).$$

我们考虑 RC。LO 的论证是对偶的，因此省略。设 $R(q) = \bigcup_{w \in I(q)} \mathrm{RC}(w)$。我们断言，$R(q)$ 满足定义 7.4 中 $\mathrm{RC}(q)$ 的各项条件。由于 $\mathrm{RC}(q)$ 被定义为满足定义 7.4 中要求 q 的最小集合，因此这意味着 $\mathrm{RC}(q) \subseteq R(q)$，从而 $\mathrm{RC}(q) = R(q)$。

设 $q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta$ 是 A 中的一个转移。我们按 γ 进行分类讨论：

- $\gamma = a]$：我们需要证明 $R(q) \cup \{a\} \subseteq R(q')$。设 $b \in R(q)$。那么存在一条运行 $p \xrightarrow{*} q$，它在某个词 w 上满足 $b \in \mathrm{RC}(w)$。由此得到一条运行 $p \xrightarrow{*} q \xrightarrow{a]} q'$，其输入为 $wa]$，因此 $wa] \in I(q')$。根据引理 3.1，我们有 $\mathrm{RC}(wa]) = \mathrm{RC}(w) \cup \{a\}$，因此 $b \in \mathrm{RC}(wa])$，进而 $b \in R(q')$，并且 $a \in R(q')$。
- $\gamma = a$：这里，我们需要证明 $R(q) \setminus \{a\} \subseteq R(q')$。设 $b \in R(q)$，$a \neq b$由一条运行 $p \xrightarrow{*} q$ 见证，该运行在 w 上运行，且满足 $b \in \mathrm{RC}(w)$。那么，在 wa 上运行且满足 $b \in \mathrm{RC}(wa)$的运行 $p \xrightarrow{*} q \xrightarrow{a} q'$ 可推出 $b \in R(q')$。
- $\gamma = [a$：我们需要证明 $R(q) \setminus \{a\} \subseteq R(q')$。设 $b \in R(q)$，$a \neq b$，则存在一条运行 $p \xrightarrow{*} q$，它在 w 上运行且满足 $b \in \mathrm{RC}(w)$。由此可得一条运行 $p \xrightarrow{*} q \xrightarrow{[a} q'$，它在 $w[a$上运行，因此 $w[a \in I(q')$。根据表1和引理 3.1，有 $\mathrm{RC}(w[a) = \mathrm{RC}(w) \setminus \{a\}$，因此 $b \in \mathrm{RC}(w[a)$ 且 $b \in R(q')$。
- $\gamma = [a]$：我们需要证明 $R(q) \cup \{a\} \subseteq R(q')$。设 $b \in R(q)$。于是存在一个运行 $p \xrightarrow{*} q$，它在某个词 w 上满足 $b \in \mathrm{RC}(w)$。由此得到一个运行 $p \xrightarrow{*} q \xrightarrow{[a]} q'$，它在 $w[a]$上运行，因此 $w[a] \in I(q')$。根据引理 3.1，我们有 $\mathrm{RC}(w[a]) = (\mathrm{RC}(w) \setminus (\mathrm{LC}([a]) \cup \text{局部轨道}([a]))) \cup \mathrm{RC}([a])$。由于 $\mathrm{LC}([a]) = \{a\}$，局部轨道$([a]) = \emptyset$，且 $\mathrm{RC}([a]) = \{a\}$，我们得到 $\mathrm{RC}(w[a]) = (\mathrm{RC}(w) \setminus \{a\}) \cup \{a\} \supseteq \mathrm{RC}(w)$，因此 $b \in \mathrm{RC}(w[a])$，从而 $b \in R(q')$，并且 $a \in \mathrm{RC}(w[a])$，以及 $a \in R(q')$。□

定理 7.19 的证明

我们证明，对于每个正则释放表达式 r，都存在一个带有 ϵ-转移的 D-NFA $A = (Q, \Delta, i, \{f\})$，它只有一个终态 f，使得 $L(r) = L(A)$。由引理 7.7 可得一个没有 ϵ-转移的 D-NFA A'，使得 $L(A') = L(A) = L(r)$。

我们对定义 7.1 中文法里的 r 的推导进行结构归纳。

基本情形：

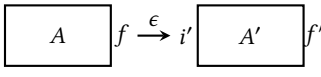
- $r = \emptyset$: $A = (\{q, f\}, \emptyset, q, \{f\})$.
- $r = \epsilon$: $A = (\{q\}, \emptyset, q, \{q\})$.
- $r = a$: $A = (\{q, f\}, \{q \xrightarrow{a} f\}, q, \{f\})$.
- $r = [\![a$: $A = (\{q, f\}, \{q \xrightarrow{[\![a} f\}, q, \{f\})$.
- $r = a]\!]$: $A = (\{q, f\}, \{q \xrightarrow{a]\!]} f\}, q, \{f\})$.
- $r = [\![a]\!]$: $A = (\{q, f\}, \{q \xrightarrow{[\![a]\!]} f\}, q, \{f\})$.

我们逐一检查每种情形中的 A 都是一个 D-NFA。在 $r = \emptyset$ 和 $r = \epsilon$ 的情形中，不存在转移，因此 $\mathrm{RC}(q) = \text{局部轨道 LO}(q) = \emptyset = \mathrm{RC}(f) = \text{局部轨道 LO}(f)$。对于 $r = a$，有 $\mathrm{LO}(f) = \mathrm{RC}(f) = \emptyset$，并且 $\mathrm{LO}(q) = \{a\}$，以及 $\mathrm{RC}(q) = \emptyset$。对于 $r = [a$，有 $\mathrm{RC}(q) = \text{局部轨道 LO}(q) = \mathrm{RC}(f) = \text{局部轨道 LO}(f) = \emptyset$。对于 $r = a]$，有 $\mathrm{LO}(f) = \emptyset$，并且 $\mathrm{RC}(f) = \{a\}$，以及 $\mathrm{LO}(q) = \{a\}$ 和 $\mathrm{RC}(q) = \emptyset$。对于 $r = [a]$，有 $\mathrm{LO}(q) = \emptyset = \text{局部轨道 LO}(f) = \mathrm{RC}(q)$，以及 $\mathrm{RC}(f) = \{a\}$。在所有情形中，对于 A 中的每个状态 q，都有 $\mathrm{RC}(q) \cap \text{局部轨道 LO}(q) = \emptyset$。

归纳步骤：我们分情况讨论：

- $r \cdot r'$：根据归纳假设，设 $A = (Q, \Delta, i, \{f\})$ 和 $A' = (Q', \Delta', i', \{f'\})$ 是具有 ϵ-转移的 D-NFA，使得 $L(r) = L(A)$ 且 $L(r') = L(A')$。不失一般性，假设 Q 和 Q' 不相交。我们构造非确定有限自动机 $A'' = (Q \cup Q', \Delta'', i, \{f'\})$，其中

$$\Delta'' = \Delta \cup \Delta' \cup \{f \xrightarrow{\epsilon} i'\}.$$



显然，根据非确定有限自动机的标准 Kleene 定理，我们有 $L(A'') = L(r \cdot r')$。我们针对状态 q 在 A'' 中所属的自动机，给出集合 $\mathrm{RC}(q)$ 和局部轨道(q) 的以下上界，具体取决于它来自哪种

自动机。对于 $\mathrm{RC}_{A''}$，我们断言：

$$\mathrm{RC}_{A''}(q) \subseteq \begin{cases} \mathrm{RC}_A(q) & \text{if } q \in Q \\ \mathrm{RC}_{A'}(q) \cup (\mathrm{RC}_A(f) \setminus \mathrm{LO}_{A'}(q)) & \text{if } q \in Q' \end{cases}$$

以及对于 $\mathrm{LO}_{A''}$：

$$\mathrm{LO}_{A''}(q) \subseteq \begin{cases} \mathrm{LO}_A(q) \cup (\mathrm{LO}_{A'}(i') \setminus \mathrm{RC}_A(q)) & \text{if } q \in Q \\ \mathrm{LO}_{A'}(q) & \text{if } q \in Q' \end{cases}$$

令 $A''' = (Q, \Delta, q, \{f\})$ 为 D-NFA A，其初始状态为 q。根据引理 7.17，我们有 $\mathrm{LO}_{A''}(q) = \bigcup_{w \in O(q)} \mathrm{LO}(w)$。回顾引理 7.17，$O_A(q)$ 表示能够在 A 中从 q 开始运行的词的集合。根据构造，对于每个 $w \in O_{A''}(q)$，要么有 $w \in O_A(q)$，要么有 $w = vu$：在 v 上存在 σ_v，其在 A 中从 q 运行到 f（即 $v \in L(A''')$）；并且在 u 上存在 σ_u，其从 i' 运行到 A' 中的某个 $p \in Q'$。利用这一观察，我们计算得：

$$\begin{aligned} \mathrm{LO}_{A''}(q) &= \bigcup_{w \in O(q)} \mathrm{LO}(w) \\ &= \bigcup_{w \in O_A(q)} \mathrm{LO}(w) \cup \bigcup_{u \in L(A''')} \bigcup_{v \in O_{A'}(i')} \mathrm{LO}(uv) \\ &= \mathrm{LO}_A(q) \cup \bigcup_{u \in L(A''')} \bigcup_{v \in O_{A'}(i')} \mathrm{LO}(u) \cup (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)) \\ &= \mathrm{LO}_A(q) \cup \bigcup_{u \in L(A''')} \bigcup_{v \in O_{A'}(i')} (\mathrm{LO}(v) \setminus \mathrm{LC}(u)) \\ &= \mathrm{LO}_A(q) \cup \mathrm{LO}_{A'}(i') \setminus \Big(\bigcap_{u \in L(A''')} \mathrm{LC}(u) \Big) \end{aligned}$$

在这里，我们注意到如下事实：如果 $a \in \mathrm{LO}(i') \subseteq \mathrm{LO}(f)$，那么对于某个词 w，有 $a \in \mathrm{LO}(w)$，且该词具有从 i' 开始的运行。此外，如果 $a \notin (\bigcap_{u \in L(A''')} \mathrm{LC}(u))$，那么存在一个词 u，其具有从 q 到 i' 的运行，并且满足 $a \notin \mathrm{LC}(u)$。现在不可能有 $a \in \mathrm{RC}(q)$，因为否则将存在一个词 v，其运行以 q 结束，并满足 $a \in \mathrm{RC}(v)$，从而在一个右影词 vuw 上产生运行。因此，我们得出 $\mathrm{LO}(i') \setminus (\bigcap_{u \in L(A''')} \mathrm{LC}(u)) \subseteq \mathrm{LO}(i') \setminus (\bigcup_{u \in I(q)} \mathrm{RC}(u)) = \mathrm{LO}(i') \setminus \mathrm{RC}(q)$，从而有

$$\mathrm{LO}_{A''}(q) \subseteq \mathrm{LO}(q) \cup (\mathrm{LO}(i') \setminus \mathrm{RC}(q)).$$

关于 RC 的推理完全类似。

- $r + r'$：由归纳假设可知，存在 $A = (Q, \Delta, i, \{f\})$ 和 $A' = (Q', \Delta', i', \{f'\})$，使得 $L_\alpha(r) = L_\alpha(A)$ 且 $L_\alpha(r') = L_\alpha(A')$。于是，$A'' = (Q \cup Q' \cup \{i_{\text{new}}, f_{\text{new}}\}, \Delta \cup \Delta' \cup \{i_{\text{new}} \xrightarrow{\epsilon} i, i_{\text{new}} \xrightarrow{\epsilon} i', f \xrightarrow{\epsilon} f_{\text{new}}, f' \xrightarrow{\epsilon} f_{\text{new}}\}, i_{\text{new}}, \{f_{\text{new}}\})$，其中 $i_{\text{new}}, f_{\text{new}} \notin Q \cup Q'$。$\epsilon$ 是新状态，$L_\alpha(r + r') = L_\alpha(A)$，$\mathrm{LO}(i_{\text{new}}) = \mathrm{LO}(i) \cup \mathrm{LO}(i')$，$\mathrm{RC}(i_{\text{new}}) = \emptyset$。我们有 $\mathrm{LO}(i_{\text{new}}) = \mathrm{LO}(i) \cup \mathrm{LO}(i')$，$\mathrm{RC}(i_{\text{new}}) = \emptyset$ 且 $\mathrm{RC}(f_{\text{new}}) \subseteq \mathrm{RC}(f) \cup \mathrm{RC}(f')$，因为右侧均满足定义 7.4 中的所有不等式；此外，原有状态的右闭名称集和左开名称集保持不变。这意味着所需的不相交性成立，因此 A'' 是一个 D-NFA（带有 ϵ-转移）。此外，显然 A'' 恰好接受语言 $L(r + r')$。
- r^*：根据归纳假设，我们有 $A = (Q, \Delta, i, \{f\})$，使得 $L_\alpha(r) = L_\alpha(A)$。然后，$A'' = (Q \cup \{q_{\text{new}}\}, \Delta \cup \{q_{\text{new}} \xrightarrow{\epsilon} i, f \xrightarrow{\epsilon} q_{\text{new}}\}, i, \{f\})$ 是一个具有 ϵ-转移的 D-NFA，使得 $L_\alpha(r^*) = L_\alpha(A'')$。与连接的情形类似，可以证明，对于所有 $q \in Q$，$\mathrm{RC}(q) \subseteq \mathrm{RC}(q) \cup (\mathrm{RC}(f) \setminus \text{局部轨道}(q))$，且局部轨道$(q) \subseteq$局部轨道$(i) \setminus \mathrm{RC}(q))$。此外，局部轨道$(q_{\text{new}}) =$ 局部轨道 (i)，且 $\mathrm{RC}(q_{\text{new}}) = \mathrm{RC}(f)$。□

定理 7.20 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 D-NFA。我们对 Δ 的（有限）基数进行归纳，并利用 D-NFA 类在取子自动机以及改变 i 或 F 后仍然封闭这一性质。

归纳基础（$\Gamma = \emptyset$）：在这种情况下，A 接受空语言（用 $r = \emptyset$ 表示），或者接受仅由空字构成的语言（用 $r = \epsilon$ 表示）。

归纳步骤：取 $\delta = (q \xrightarrow{\gamma} q') \in \Delta$，并令 $\Gamma = \Delta \setminus \{\delta\}$。如上所述，存在 D-NFA $A' = (Q, \Gamma, i, F)$ $A'_{i,q} = (Q, \Gamma, i, \{q\})$ $A'_{q',q} = (Q, \Gamma, q', \{q\})$ 以及 $A'_{q',F} = (Q, \Gamma, q', F)$。由归纳法可知，它们对应的正则表达式为 r'、$r'_{i,q}$、$r'_{q',q}$ 以及 $r'_{q',F}$，使得 $L(r') = L(A')$、$L(r'_{i,q}) = L(A'_{i,q})$、$L(r'_{q',q}) = L(A'_{q',q})$ 以及 $L(r'_{q',F}) = L(A'_{q',F})$。现在令

$$r = r' + r'_{i,q}(\gamma r'_{q',q})^* \gamma r'_{q',F}.$$

这是一个正则释放表达式：由于 A 是一个 D-NFA，我们有 $\mathrm{RC}(q) \cap \mathrm{LO}(q) = \emptyset$ 对每个 $q \in Q$都成立。由归纳假设和引理 7.16，通过对 γ进行简单的分类讨论，可得 r 中的连接和克莱尼星号满足相应的不相交条件。

We verify $L(r) = L(A)$:

(1) $L(r) \subseteq L(A)$：设 $w \in L(r)$。根据 r的结构，要么 $w \in L(r')$，要么 w的形式为$w = w_{(i,q)}(\gamma w_{(q'q,i)})_{i \le n} \gamma w_{(q'F)}$，其中$w_{(i,q)} \in L(r'_{i,q}) = L(A'_{i,q})$，$w_{(q'q,i)} \in L(r'_{q',q}) = L(A'_{q',q})$对每个 $i \le n$ $w_{q\,F} \in L\,r_{q\,F} = L\,A'_{q'\,F}$ $w \in$都成立，且 $L\,A' \subseteq L\,A$ (′) (″) (,)。在第一种情况下，由归纳假设可得 ( ) ( )。在第二种情况下，对于 w的每个部分，我们在相应的 A'中都有运行；再结合 δ，对于A 中的 w，存在运行 $i \xrightarrow{*} q \xrightarrow{\gamma} q'(\xrightarrow{*} q \xrightarrow{\gamma} q')^n \xrightarrow{*} f$（其中循环 $q' \xrightarrow{*} q \xrightarrow{\gamma} q'$ 重复 n 次），因此 $w \in L(A)$。(2) $L(r) \supseteq L(A)$：设 $w \in L(A)$，则存在 A中 w的接受运行 σ。设运行 σ经过 δ（若未经过，则由归纳假设有 $w \in L(A') \subseteq L(r')$）。此时 $\sigma_1\ \delta\sigma_{2\,1}\ \ \delta\sigma_{2\,n}\ \sigma_3$ σ_1 w_1 A' 的形式为(,) · · · (,)，并带有一个运行(,) · · · (,)，其中是(i,q)中$i \in$的运行；对于每个$i \in \{1, \ldots, n\}$，我们有$\sigma_{2,i}$是 $A'(q'q)$中$w_{2,i}$的运行，而 σ_3是 $A'(q'F)$中 w_3的运行。由归纳假设可得 $w_1 \in L(r'_{i,q})$，$w_{2,i} \in L(r'q'q)$ 对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$都成立，并且$w_3 \in L(r'q'_F)$，因此根据 $L(r)$的定义，有 $w \in L(r)$。□

引理 8.4 的证明

固定 $S \subset \mathbb{A}$。按照构造 8.3，令 $A_S = (Q, \Delta, i, F)$ 为一个 NDA 的S-限制，令 $A_D = (Q, \Delta_D, i, F_D)$ 为规整的 S-限制。我们证明 A_D 是一个 D-NFA。

由引理 7.12 可知，A_S 是一个 D-NFA。令 $q \in Q$，我们证明 $\mathrm{LO}_{A_D}(q) \| \mathrm{RC}_{A_D}(q)$。

我们断言：

$$\mathrm{LO}_{A_D}(q) \subseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q)$$

and

$$\mathrm{RC}_{A_D}(q) \subseteq \mathrm{RC}_{A_S}(q) \cup \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q) =: R(q).$$

集合 $\mathrm{LO}_{A_S}(q)$ 和 $R(q)$ 显然互不相交，因此我们只需证明它们满足定义 7.4 中给出的不等式。

对于 $q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta_D$，我们按 γ 分情况讨论：

- $\gamma = [a$: 我们证明 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \setminus \{a\}$ 且 $R(q) \setminus \{a\} \subseteq R(q')$。根据构造 8.3，我们有 $q \xrightarrow{[a} q' \in \Delta$。由于 A_S 是一个 D-NFA，我们立即得到 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \setminus \{a\}$。对于第二个包含关系，设 $b \in R(q) \setminus \{a\}$。若 $b \in \mathrm{RC}_{A_S}(q) \setminus \{a\}$，则根据定义 7.4，$b \in \mathrm{RC}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。否则，根据构造 8.3 和 $b \neq a$，我们有 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q)$。于是 $\mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q) \cup \{a\}$，因此 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$，从而 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。
- $\gamma = a$：我们证明 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \cup \{a\}$，且 $R(q) \setminus \{a\} \subseteq R(q')$。由构造 8.3，得 $q \xrightarrow{a} q' \in \Delta$。由于 A_S 是 D-NFA，第一个包含关系显然成立。设 $b \in R(q) \setminus \{a\}$。若 $b \in \mathrm{RC}_{A_S}(q) \setminus \{a\}$，则根据定义 7.4，$b \in \mathrm{RC}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。否则，我们有 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q)$，即 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q)$，并且 $b \neq a$。由于 $\mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q)$，因此 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$，从而得到 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。
- $\gamma = a]$: 我们证明，$\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \{a\} \cup \mathrm{LO}_{A_S}(q')$，且 $R(q) \cup \{a\} \subseteq R(q')$。我们根据这些转移在构造 8.3 中的产生方式分情况讨论：若 $q \xrightarrow{a\rangle} q' \in \Delta$，则所需的两个包含关系均可由 A_S 是一个 D-NFA 立即得出。

  否则，我们有 $q \xrightarrow{a} q' \in \Delta$ 且 $a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$。由于 A_S 是一个 D-NFA，因此 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \cup \{a\}$。对于 $R(q)$，令 $b \in R(q) \cup \{a\}$。若 $b = a$，则由 $a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$ 可得 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。若 $b \neq a$ 且 $b \in \mathrm{RC}_{A_S}(q)$，则根据定义 7.4 中关于 $q \xrightarrow{a} q'$ 的条款，有 $b \in \mathrm{RC}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。若 $b \neq a$ 且 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q)$，则由 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \cup \{a\}$ 可得 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$。因此 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。
- $\gamma = [a]$: 我们证明 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \cup \{a\}$ 且 $\mathrm{RC}_{A_S}(q) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_{A_S}(q')$。同样，我们区分构造 8.3 中的两种情况。如果 $q \xrightarrow{[a]} q' \in \Delta$，那么由于 A_S 是一个 D-NFA，我们有 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \cup \{a\}$ 且 $\mathrm{RC}_{A_S}(q) \cup \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_{A_S}(q')$，所需的包含关系便随之成立。否则，我们有 $q \xrightarrow{[a} q' \in \Delta$，$a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q)$，以及 $a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$。由于 A_S 是一个 D-NFA 且 $q \xrightarrow{[a} q'$，我们立即得到 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q') \setminus \{a\} = \mathrm{LO}_{A_S}(q')$。对于 $R(q)$，令 $b \in R(q) \cup \{a\}$。如果 $b = a$，则由 $a \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$ 可得 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。如果 and RC ( )，则由定义 . . 可得 RC (′) (′)。如果 and LO ( )，则由 $\mathrm{LO}_{A_S}(q) \supseteq \mathrm{LO}_{A_S}(q')$ 得到 $b \notin \mathrm{LO}_{A_S}(q')$。因此，我们得到 $b \in \mathbb{A} \setminus \mathrm{LO}_{A_S}(q') \subseteq R(q')$。

□

引理 8.5 的证明

给定构造 8.3 的数据，并使用相同的记号。

“$L_D(A_D) \subseteq L_D(A_S)$”：这个包含关系显然成立，因为每个转移 $q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta_D$ 都是由一个转移 $q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta$ 诱导的，使得 $\mathrm{db}(\gamma) = \mathrm{db}(\gamma)$，因此，对于 A_D 中的某个 w 上的每次运行，都存在 A_S 中的某个 w' 上的运行，使得 $\mathrm{db}(w') = \mathrm{db}(w)$。

“$L_D(A_S) \subseteq L_D(A_D)$”：为证明反方向，我们回顾由名称丢弃修改继承的状态表示为元组 (o, r)，其中 r 是一个偏函数 $[n] \rightharpoonup S$，n 是原始 NDA 中轨道 o 元素的支撑大小。我们通过对词归纳进行证明，并进一步加强断言：对于 Q 中的每个状态 (o, r)，以及由 (o, r) 接受的每个更短的词 w，都存在一个状态 $(o, r') \in Q$，使得 r，扩展 r，$\mathrm{LO}(r') \supseteq \mathrm{LO}(w)$，且 (o, r') 在 A_D 中接受 $\mathrm{disc}(w)$（对此我们有 $\mathrm{db}(\mathrm{disc}(w)) = \mathrm{db}(w)$）。

基础情形 $w = \epsilon$：我们有 (o, r) 是 A_S 和 $w = \epsilon$ 中的一个终态。于是，$(o, r_\perp)$，其中 $r_\perp$ 是处处未定义的偏函数，是 A_D 中的一个终态；r 扩展了 $r_\perp$，$\mathrm{supp}(r_\perp) = \emptyset = \mathrm{LO}(w)$，且 $(o, r_\perp)$ 接受 $\mathrm{disc}(\epsilon) = \epsilon$。

归纳步骤 $w = \gamma u$：设 $(o, r) \in Q$ 接受 $w = \gamma u$。那么存在 (p, s)，使得 $(o, r) \xrightarrow{\gamma} (p, s) \in \Delta$，并且 (p, s) 在 A_S 中接受 u。根据归纳假设，存在 $(p, s_\perp) \in Q$ 接受 $\mathrm{disc}(u)$，且 $\mathrm{supp}(s_\perp) = \mathrm{LO}(u) = \mathrm{LO}(\mathrm{disc}(u))$，并且 s 扩展了 $s_\perp$。我们分情况讨论：

$\gamma = a$：根据名称丢弃修改的定义和 A_S，存在 Δ 中的 $(o, r_\perp) \xrightarrow{a} (p, s_\perp)$，其中某个 $r_\perp$ 由 r 扩展而来。根据引理 5.7，我们有 $a \in \mathrm{supp}(r_\perp)$。如果 $a \in \mathrm{supp}(s_\perp) = \mathrm{LO}(\mathrm{disc}(u))$，那么根据 Δ_D 的定义，存在 Δ_D 中的 $(o, r_\perp) \xrightarrow{a} (p, s_\perp)$；否则 $(o, r_\perp) \xrightarrow{a]} (p, s_\perp) \in \Delta_D$。在前一种情况下，$(o, r_\perp)$ 接受 $a\mathrm{disc}(u) = \mathrm{disc}(w)$；在后一种情况下，$(o, r_\perp)$ 接受 $a]\mathrm{disc}(u) = \mathrm{disc}(w)$。

$\gamma = [a$：根据名称丢弃修改的定义，存在 Δ 中的 $(o, r_\perp) \xrightarrow{[a} (p, s_\perp)$，其中某个 $r_\perp$ 由 r 扩展而来，并且我们选择满足 $a \notin \mathrm{supp}(r_\perp)$ 的 $r_\perp$。如果 $a \in \mathrm{supp}(s_\perp) = \mathrm{LO}(\mathrm{disc}(u))$，那么根据构造 8.3，$(o, r_\perp) \xrightarrow{a} (p, s_\perp) \in \Delta_D$，且 $(o, r_\perp)$ 接受 $[a\,\mathrm{disc}(u) = \mathrm{disc}(w)$。否则，$a \notin \mathrm{supp}(s_\perp)$，因此根据构造 8.3，$(o, r_\perp) \xrightarrow{[a]} (p, s_\perp) \in \Delta_D$，且 $(o, r_\perp)$ 接受 $[a]\mathrm{disc}(u) = \mathrm{disc}(w)$。

$\gamma = a]$：那么，对于某个由 r 扩展得到的 $r_\perp$，有 $(o, r_\perp) \xrightarrow{a]} (p, s_\perp)$。根据定义，相同的转移也存在于 Δ_D 中。此外，根据引理 5.7，$a \notin \mathrm{supp}(s_\perp)$，且 $\mathrm{disc}(w) = a]\mathrm{disc}(u)$，因此 $(o, r_\perp)$ 接受 $\mathrm{disc}(w)$。

$\gamma = [a]$：最后，对于某个由 r 扩展得到的 $r_\perp$，有 $(o, r_\perp) \xrightarrow{[a]} (p, s_\perp)$；根据构造 8.3，$(o, r_\perp) \xrightarrow{[a]} (p, s_\perp)$ 也成立。由于 $\mathrm{disc}([a]u) = [a]\mathrm{disc}(u)$，$(o, r_\perp)$ 接受 $\mathrm{disc}(w)$。□

引理 8.6 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个 D-NFA。对 A 应用幂集构造，得到确定有限自动机 $A' = (Q', \delta, \{i\}, F_P)$，其中 $Q' \subseteq \mathrm{P}(w)$ 是可达宏状态的集合，$\delta : Q' \times S^* \to Q'$ 定义如下：

$$(S, \gamma) \mapsto \{q' \in Q \mid q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta, q \in S\},$$

并且我们有 $F_P = \{S \in \mathrm{P}(Q) \mid S \cap F \neq \emptyset\}$

我们证明该确定有限自动机 A' 是一个 D-NFA。设 $S \in Q'$ 是 A' 中的一个状态。我们断言：

$$\mathrm{LO}_{A'}(S) = \bigcup_{q \in S} \mathrm{LO}_A(q) \quad \text{and} \quad \mathrm{RC}_{A'}(S) = \bigcup_{q \in S} \mathrm{RC}_A(q).$$

我们需要证明：(1) 对每个 $S \in Q'$，$\mathrm{LO}_{A'}(S) \cap \mathrm{RC}_{A'}(S) = \emptyset$；以及 (2) 上述 $\mathrm{LO}_{A'}(S)$ 和 $\mathrm{RC}_{A'}(S)$ 满足 D-NFA 的定义性包含关系。

(1)：反设存在 $a \in \mathrm{RC}_{A'}(S) \cap$ 局部轨道 $_{A'}(S)$。那么存在状态 $q, q' \in S$，使得 $a \in \mathrm{RC}_A(q)$ 且

$a \in$局部轨道$_A(q')$。假设 S在 w上有一条入运行 σ，使得 $a \in \mathrm{RC}(w)$。若不存在这样的运行，则 $\mathrm{RC}_A(S) = \emptyset$成立，这与 $a \in \mathrm{RC}_A(S)$ 矛盾，证毕。由幂集构造可知，S中的所有状态 q在 w上都有一条入运行，尤其是 q'，从而得到 $a \in \mathrm{RC}_A(q')$。如此一来，$a \in$局部轨道$_A(q') \cap \mathrm{RC}_A(q')$，这与 A是一个 D-NFA 矛盾。

(2)：设 $S \xrightarrow{\gamma} S' \in \delta$；我们展示右闭名称以及 $\gamma = a$ 的包含关系；其他所有情况完全类似。我们需要证明 $(\bigcup_{q \in S} \mathrm{RC}_A(q)) \setminus \{a\} \subseteq \bigcup_{q \in S'} \mathrm{RC}_A(q)$。令 $q \in S$ and $b \in \mathrm{RC}_A(q)$。我们需要证明，若 $a \neq b$，则 $b \in \mathrm{RC}_{A'}(S')$。令$q' \in Q$ 满足 $q' \xrightarrow{a} p \in \Delta$，其中 $p \in S'$，这诱导出给定的$S \xrightarrow{a} S' \in \delta$。我们有 $b \in \mathrm{RC}_A(q)$，这意味着对于某个 w，$b \in \mathrm{RC}_A(w)$，且存在一条进入 q 的运行。根据幂集构造，q'在 w 上也有一条进入运行，且 $b \in \mathrm{RC}_A(q')$。由于 A 是 D-NFA，我们有 $\mathrm{RC}_A(q') \setminus \{a\} \subseteq \mathrm{RC}_A(p)$，因此 $b \in \mathrm{RC}_A(p)$，最终 $b \in \bigcup_{q \in S'} \mathrm{RC}_A(q) = \mathrm{RC}_{A'}(S')$。

最后，我们通过非确定有限自动机的标准幂集构造得到 $L(A) = L(A')$。□

引理 8.7 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个受约束的 D-DFA，并设 $A' = (Q', \Delta', i, F_\prime)$ 是它的名义化。根据引理 7.9 和引理 8.6，我们只需验证 Δ' 是确定的；这由 Δ 是确定的可知：设 $q \in Q'$ 和 $\gamma \in \hat{\mathbb{A}}$，$q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta$ 是唯一的。我们验证构造 7.8 不会为 q 在 γ 上引入额外的转移，并对情况进行区分：

- $\gamma = a, [\dot{a}, \dot{a}$：首先，对于 δ，有 $\iota(q) \xrightarrow{\gamma} \iota(q_\prime)$：$q \xrightarrow{\gamma} q_\prime \in \Delta$，这也是唯一的，因为 ι 是单射。接着，由引理 8.6 可知 $\mathrm{LO}(S \in Q) = \bigcup_{q \in S} \mathrm{LO}(q)$，且对于所有 $\delta \in \Delta$，都有 $\mathrm{LO}(q_\prime) \subseteq \mathrm{LO}(q)$，因此等变闭包不会产生从 q 出发的新转移。

- $\gamma = [a$：此情形与上述情形类似；现在我们有 $\iota(q) [\langle \xrightarrow{a} \iota(q_\prime)$，其中 δ：$q [\langle \xrightarrow{c} q'' \in \Delta$，且 $aq_\prime = cq_{\prime\prime}$。由构造 7.8 可知，$\mathrm{LO}(q'') \subseteq \mathrm{LO}(q) \cup \{a\}$，特别地，$a \in \mathrm{LO}(q_{\prime\prime})$。因此，无论是强制满足左 α-不变性，还是等变性，都不会产生具有 $[a$ 的新转移。 □

引理 8.9 的证明

设 $w \in L_0(q)$ 通过运行 $q \xrightarrow{*} f$ 被接受。根据支撑引理（引理 5.7），包含关系 $\mathrm{LO}(w) \subseteq \mathrm{supp}(q)$ 显然成立；下面证明 $\mathrm{supp}(q) \subseteq \mathrm{LO}(w)$。

我们回顾一下，在 A_{DDA} 的名义化步骤中，状态是从前一步构造的确定化规整 S-限制中的状态 q 构造出来的，其方式使得支撑的大小为 $|\mathrm{LO}(q)|$。由于构造 8.3 对规整S-限制中的终态 $f_\prime$ 施加了 $\mathrm{LO}(f_\prime) = \emptyset$，因此 A_{DDA} 中的终态具有空支撑；特别地，$\mathrm{supp}(f) = \emptyset$。

现在令 $a \in \mathrm{supp}(q)$。由于 $a \notin \mathrm{supp}(f)$，给定的运行 $q \xrightarrow{*} f$中必定存在某次转移，使得 a 首次从支撑中移除（在之后的运行过程中，它可能会被重新引入并再次移除任意多次）。根据构造 8.3（规整的 S-限制）和构造 7.8（名义化），这类转移唯一可能的标签是 $\dot{a}$,，而运行中此前的所有转移凡是标签提及 a的转移，都必须是 a-转移（因为 $[a$和 $[\dot{a}$都要求 a不在该转移前态的支撑中，而 $\dot{a}$会将 a 从支撑中移除）。因此，$a \in$局部轨道(w)，正如所需。□

引理 8.10 的证明

（1）：由引理 6.1 和 8.9 立即得到。

（2）：设 $A_D = (Q_D, \Delta_D, i, F_D)$ 是给定 NDA 的规整 S-限制，并设 $A_{\mathrm{DDA}} = (Q_{\mathrm{DDA}}, \Delta_{\mathrm{DDA}}, i, F_{\mathrm{DDA}})$ 是其确定化。我们证明 $L_\alpha(A_{\mathrm{DDA}}) = L_\alpha(A_D)$。

由于 A_D A_{DDA} L_α A_{DDA} $\supseteq$ 是 的子自动机，$L_\alpha A_D$ 我们立即得到 ( )。

对于反向包含，我们证明 $L_\alpha(A_{\mathrm{DDA}}) \subseteq L_\alpha(A_D)$，并对 A_{DDA} 中接受运行的长度进行归纳，同时加强归纳断言：对于所有 $q \in Q_{\mathrm{DDA}}$ 以及所有满足 $p := \pi \cdot q \in Q_D$ 的置换 π，都有 $\pi \cdot L_\alpha(q) = L_\alpha(p)$。

对于基础情形，若 $q \in F_{\mathrm{DDA}}$ $p = \pi$ $q \in Q_D$ $q \in$ 且 ·，则 $p \in F_D$ $\epsilon \in L_0$ q $\epsilon \in L_0$ p ( ) 蕴含，因此 ( ) 当且仅当 ( )。$\uparrow_{\mathrm{eq}} F_D$

对于归纳步骤，设 $w = \gamma v$ $q \in Q_{\mathrm{DDA}}$ n $p = \pi$ $q \in Q_D$ 是 被接受的一个词，其运行长度为，并设 · 是 A_D 中某个状态，其中某个置换为 π。我们证明存在某个被 p 接受的 $w' \equiv_\alpha \pi \cdot w$。我们有 $q \xrightarrow{\gamma} r \in \Delta_{\mathrm{DDA}}$，其中 v 被 r 接受，并对 γ 进行分类讨论，其中大多数情形都很直接：

- $\gamma = a$或 $\gamma = [a$：我们有 $p \xrightarrow{\delta} r_\prime \in \Delta_D$with $\delta = \pi \cdot \gamma$and $r_\prime = \pi \cdot r$。根据归纳假设，$r_\prime$接受某个 $v_\prime \equiv_\alpha \pi \cdot v$，因此 p根据定义 3.5 的规则 2 接受 $\delta v_\prime \equiv_\alpha (\pi \cdot \gamma)(\pi \cdot v) = \pi \cdot (\gamma v) = \pi \cdot w$。

- $\gamma = \dot{a}$：此情形与第一种类似；我们还需验证 $\pi(a) \notin$在局部轨道 $\mathrm{LO}(v_\prime)$ 中。根据 α-等价的定义，我们有 $a \notin$在 $\mathrm{LO}(v)$ 中，因此 $\pi(a) \notin$ 在 $\mathrm{LO}(\pi \cdot v)$ 中，从而 $\pi(a) \notin$ 也在 $\mathrm{LO}(v_\prime)$ 中。

- $\gamma = [\dot{a}$：我们有 $p \xrightarrow{\delta} r' \in \Delta$是 DDA，且 $\delta = [\pi(a)]$and $r' = \pi \cdot r$。尽管我们有 $p, r' \in Q_D$，但对于 $[\dot{a}$-转移，我们有 $a \notin$的支撑 p包含于 $\cup r'$ 的支撑，因此取一个 $b \in S$，使得 $b \notin p$ 的支撑 $\cup$包含于 r' 的支撑。由于可以选取 S满足 $|S| =$ $A + 1$ ab $p \xrightarrow{\delta} r = p \xrightarrow{[b]} \deg( )$，$r \in \Delta_D$ r $v \equiv_\alpha \pi v$ 故此 b存在；于是我们有 ( ) · ( ) ′。根据归纳假设，′ 接受某个 ′ ·，因此根据局部新鲜性规则以及 α-等价的传递性，p接受 $[\dot{b}]v' \equiv_\alpha [\pi(a)]v' \equiv_\alpha \pi \cdot ([\dot{a}]v) = \pi \cdot w$。

$\pi =$ $=$ 将断言中的 $q = i$和 L_α A_D 3 1 2 □ id 实例化，得到 $L_\alpha(A_{\mathrm{DDA}})$（）。（）：这可由（）和（）直接得出。

引理 8.11 的证明

我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{db}[L'] &= \bigcup_{w' \in L' \cap \hat{S}^*} \mathcal{D}(\{[w']_\alpha\}) && \text{(hypothesis)} \\
&= \bigcup_{w \in L \cap \hat{S}^*} \mathcal{D}(\{[\mathrm{disc}(w)]_\alpha\}) && \text{(hypothesis)} \\
&= \bigcup_{w \in L \cap \hat{S}^*} \mathcal{D}(\{[w]_\alpha\}) && \text{(Lemma 4.4)} \\
&= \mathrm{db}[L] && \square
\end{aligned}$$

引理 8.12 的证明

设 $A = (Q, \Delta, i, F)$ 是一个规整的 S-限制。我们证明，对于每个 $q \in Q$和 $w \in L(q)$，都有 $\mathrm{LO}(q) = \mathrm{LO}(w)$。为此，我们

证明我们有

$$\mathrm{LO}(q) \supseteq \bigcup_{w \in L(q)} \mathrm{LO}(w)$$

and

$$\mathrm{LO}(q) \subseteq \bigcap_{w \in L(q)} \mathrm{LO}(w).$$

根据引理 7.16，有 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \bigcup_{w \in L(q)} \mathrm{LO}(w)$。我们证明 $\mathrm{LO}(q) \subseteq \bigcap_{w \in L(q)} \mathrm{LO}(w)$。设 $a \in \mathrm{LO}(q)$，并设 $w \in L(q)$；我们证明 $a \in \mathrm{LO}(w)$。我们对 $w$from q 的接受运行长度进行归纳。如果 $q \in F$，那么根据构造 8.3 中关于终态的定义，$\mathrm{LO}(q) = \emptyset$，因此无需证明。否则，设 $q \xrightarrow{\gamma} q' \xrightarrow{*} f$ 是 $w = \gamma w'$ 的一个接受运行，且 $f \in F$。根据归纳假设，$a \in \mathrm{LO}(q')$ 蕴含 $a \in \mathrm{LO}(w')$。我们根据 γ 分情况讨论：

- $\gamma = b$：根据构造 8.3，有 $b \in \mathrm{LO}(q')$。根据定义 7.4，有 $\mathrm{LO}(q) \supseteq \mathrm{LO}(q') \cup \{b\}$。如果 $a = b$，那么根据表1，$a \in \mathrm{LO}(bw') = \mathrm{LO}(w') \cup \{b\}$。如果 $a \neq b$，那么 $a \in \mathrm{LO}(q')$，因此根据归纳假设，$a \in \mathrm{LO}(w')$，从而 $a \in \mathrm{LO}(bw') = \mathrm{LO}(w') \cup \{b\}$。
- $\gamma = [b$：根据构造 8.3，我们有 $b \notin$ 局部轨道(q) 和 $b \in$ 局部轨道(q')。根据定义 7.4，我们有 局部轨道$(q) \supseteq$ 局部轨道$(q') \setminus \{b\}$。由于 $a \in$ 局部轨道(q) 且 $b \notin$ 局部轨道(q)，因此我们有 $a \neq b$ 且 $a \in$ 局部轨道(q')。根据归纳假设，$a \in$ 局部轨道(w')，因此根据表1，$a \in$ 局部轨道$([b\,w') =$ 局部轨道 $(w') \setminus \{b\}$。
- $\gamma = b]$：根据构造 8.3，要么 $q \xrightarrow{b]} q' \in \Delta$，要么 $q \xrightarrow{b} q' \in \Delta$，且 $b \notin$ 局部轨道(q')。在这两种情况下，由定义 7.4 可得 局部轨道$(q) \supseteq$ 局部轨道$(q') \cup \{b\}$。若 $a = b$，则根据表1，$a \in$ 局部轨道$(bw') =$ 局部轨道$(w') \cup \{b\}$。若 $a \neq b$，则 $a \in$ 局部轨道(q')，因此根据归纳假设，$a \in$ 局部轨道(w')，进而 $a \in$ 局部轨道$(bw') =$ 局部轨道$(w') \cup \{b\}$。
- $\gamma = [b]$：根据构造 8.3，要么是 $q \xrightarrow{[b]} q' \in \Delta$，要么是 $q \xrightarrow{[b} q' \in \Delta$，其中 $b \notin$局部轨道(q) 且 $b \notin$局部轨道(q')。在两种情况下，根据定义 7.4，都有局部轨道$(q) \supseteq$局部轨道(q')。因此 $a \in$局部轨道(q')，所以根据归纳假设，$a \in$局部轨道(w')。由表1可知，局部轨道$([bw') =$局部轨道$(w') \setminus \{b\}$。由于 $b \notin$局部轨道(q') 且 $a \in$局部轨道(q')，我们有 $a \neq b$，从而 $a \in$ 局部轨道$([bw')$。□

引理 8.13 的证明

回顾一下，$A_S = (Q, \Delta, i, F)$ 和 $A_D = (Q, \Delta_D, i, F_D)$ 共享同一个状态集 Q，并且状态 $q = (o, r) \in Q$来自如构造 6.3 中所述的名称丢弃修改。

$L_0(A_D) \subseteq \mathrm{disc}[L_0(A_S)]$：我们对 w进行归纳，证明对于每个 $q \in Q$，如果 q在 A_D中接受 w，那么 q就在 A_S中接受某个 w'，使得 $\mathrm{disc}(w') = w$。

对于基础情形，令 $q \in F_D$。根据 F_D的定义，我们有 $q \in F$。因此，q在 A_S中接受 ϵ，且 $\mathrm{disc}(\epsilon) = \epsilon$。

归纳步骤：设 q通过 $q \xrightarrow{\gamma} q' \in \Delta_D$在 A_D中接受γw，其中 q' 接受 w。根据归纳假设，q'在 A_S中接受某个 w'，使得 $\mathrm{disc}(w') = w$。我们按 γ区分情形：

- $\gamma = a$：根据构造 8.3，我们有 $q \xrightarrow{a} q'$在 A_S中，并且 $a \in$局部轨道$_{A_S}(q')$。因此，q接受 aw'在 A_S中。此外，由于根据引理 4.2 和引理 8.12，有 $\mathrm{LO}(q') = \mathrm{LO}(w) = \mathrm{LO}(w')$，我们有 $a \in$局部轨道(w')，因此 $\mathrm{disc}(aw') = a\mathrm{disc}(w') = aw$。
- $\gamma = a]$：根据构造 8.3，我们有以下两种情况之一：$q \xrightarrow{a\rangle} q' \in \Delta$，或者 $q \xrightarrow{a} q' \in \Delta w$，且 $a \notin$具有局部轨道(q')。在前一种情况下，$wa \notin$局部轨道(w')，因为 $a]w$ $a \notin$ w q = w 是右非遮蔽的，所以 $\mathrm{disc}(]w')]\mathrm{disc}(')$。在后一种情况下，$\mathrm{LO}(')$，因为 $\mathrm{LO}(') \mathrm{LO}(')$，因此 $\mathrm{disc}(aw') = a\mathrm{disc}(w') = a'w$。在这两种情况下，$q$都接受一个词 v在 A_S 中，且 $\mathrm{disc}(v) = a'w$。
- $\gamma = [a$：根据构造 8.3，我们有 $q \xrightarrow{[\langle a} q' \in \Delta$，其中 $a \notin \mathrm{LO}(q)$ 且 $a \in \mathrm{LO}(q')$。由于 $a \in \mathrm{LO}(q') = \mathrm{LO}(w')$，因此 $\mathrm{disc}([a\,w') = [a\mathrm{disc}(w') = [a\,w$。因此，$q$在 A_S中接受 $[a\,w'$。
- $\gamma = [a]$：根据构造 8.3，要么q $q \xrightarrow{[a]} q' \in \Delta$，要么 $q \xrightarrow{[a^a} q' \in \Delta$，且 $a \notin \mathrm{LO}([a]$ w = $[a]w$ $a \notin$ w) 和 $a \notin \mathrm{LO}(')$。在第一种情况下，$\mathrm{disc}([]w')$ $\mathrm{disc}(')$。在第二种情况下，$\mathrm{LO}(')$，因为 $\mathrm{LO}(q') = \mathrm{LO}(w')$，因此 $\mathrm{disc}([a\,w') = [a\mathrm{disc}(w') = [a'w$。两种情况下，$q$ 都接受 A_S 中的一个词 v，且 $\mathrm{disc}(v) = [a'w$。□

$\mathrm{disc}[L_0(A_S)] \subseteq L_0(A_D)$：我们通过对词归纳证明，对于每个 $(o, r) \in Q$，如果 (o, r) 接受 A_S 中的 w，那么满足 $\mathrm{supp}(r_\perp) = \mathrm{LO}(w)$ 的唯一 $(o, r_\perp) \in Q$，并且 r 扩展 $r_\perp$，会接受 A_D 中的 $\mathrm{disc}(w)$。

基础情形：令 $(o, r) \in F$接受 ϵ在 A_S中。由于 $\mathrm{LO}(\epsilon) = \emptyset$，我们有 $r_\perp$处处未定义，因此 $\mathrm{supp}(r_\perp) = \emptyset$。由于 $\mathrm{LO}(o, r_\perp) = \emptyset$根据引理 7.17，我们有 $(o, r_\perp) \in F_D$。因此，$(o, r_\perp)$ 接受 $\mathrm{disc}(\epsilon) = \epsilon$在 A_D中。

归纳步骤：令 (o, r) 接受 γw在 A_S中，经由 $(o, r) \xrightarrow{\gamma} (p, s) \in \Delta$，其中 (p, s) 接受 w。根据归纳假设，$(p, s_\perp)$ 接受 $\mathrm{disc}(w)$ in A_D。我们针对 γ进行分类讨论，并展示$\gamma = a$；所有其他情形都完全类似。根据名称丢弃修改的定义，对于某个由 r扩展的 $r_\perp$，存在 $(o, r_\perp) \xrightarrow{a} (p, s_\perp)$ in Δ。如果 $a \in \mathrm{LO}((p, s_\perp)) = \mathrm{LO}(\mathrm{disc}(w))$，那么根据构造 8.3，$(o, r_\perp) \xrightarrow{a} (p, s_\perp) \in \Delta_D$。因此，$(o, r_\perp)$ 接受 $a\,\mathrm{disc}(w) = \mathrm{disc}(aw)$ in A_D。反之，如果 $a \notin \mathrm{LO}((p, s_\perp))$，那么根据引理 8.12，我们有 $a \notin \mathrm{LO}(\mathrm{disc}(w))$，并且根据构造，$(o, r_\perp) \xrightarrow{a]} (p, s_\perp) \in \Delta$；因此，$(o, r_\perp)$ 接受 $a\mathrm{disc}(w) = \mathrm{disc}(aw)$ in A_D。

对于初始状态 i，我们有 $\mathrm{LO}(i) = \emptyset$，并且对于每个词 $w \in L(A_S)$，都有 $\mathrm{LO}(w) = \emptyset$。因此，特别地，$i$在 A_D中接受 w。

定理 8.14 的证明

令 A为一个 NDA。如图 4 所示，我们按照从 A 到 DDA A_{DDA}的构造。令 $A_\perp$ 为通过构造 6.3 对 A 进行名称丢弃修改后得到的结果。根据定理 6.9，我们有

$$L_0(A_\perp) = \uparrow_\alpha(L_0(A)) \qquad \text{and hence} \qquad \mathcal{D}(L_\alpha(A)) = L_D(A_\perp).$$

固定 $S \subseteq \mathbb{A}$，使得 $\mathrm{supp}(i) \subseteq S$ 且 $|S| = \deg(A_\perp) + 1$，并令 A_S为通过构造 7.11 对 $A_\perp$ 进行的 S-限制。根据引理 7.13 和 7.14，我们有

$$L_0(A_S) = L_0(A_\perp) \cap \hat{S}^* \qquad \text{and} \qquad L_D(A_S) = S^* \cap L_D(A_\perp).$$

令 A_D 为通过构造 8.3 得到的规整的 S-限制。由引理 8.5 和 8.13，我们有

$$L_D(A_D) = L_D(A_S) \qquad \text{and} \qquad L_0(A_D) = \mathrm{disc}[L_0(A_S)].$$

令 A_{DDA} 为 A_D 的幂集确定有限自动机的名义化（引理 8.7）。那么

$$L_0(A_{\mathrm{DDA}}) = \uparrow_\alpha(L_0(A_D))$$

由引理 8.10 可知，且

$$L_D(A_{\mathrm{DDA}}) = \mathcal{D}(L_\alpha(A_{\mathrm{DDA}})) = \mathcal{D}(L_\alpha(A_D))$$

由于根据引理 8 10，$L_\alpha(A_{\mathrm{DDA}}) = L_\alpha(A_D)$，于是引理 4.4 得出 $\mathrm{D}(L_\alpha(A_D)) = \mathrm{D}(L_\alpha(A_S))$，因此

$$L_D(A_{\mathrm{DDA}}) = \mathcal{D}(L_\alpha(A_S)).$$

与 S^* 取交得到

$$L_D(A_{\mathrm{DDA}}) \cap S^* = \mathcal{D}(L_\alpha(A_S)) \cap S^* = L_D(A_S) = S^* \cap L_D(A_\perp).$$

令 $L := L_0(A_\perp)$ 且 $L' := L_0(A_{\mathrm{DDA}})$。那么，如上所示，$\uparrow_\alpha(L \cap \hat{}S^*) = L$ 且 $\uparrow_\alpha(L' \cap \hat{}S^*) = L'$。此外，我们有 $L' \cap \hat{S}^* = \{\mathrm{disc}(w) \mid w \in L \cap \hat{} S^*\}$。因此，应用引理 8.11 可得 $\mathrm{db}[L] = \mathrm{db}[L']$，最终得到所需的等式

$$\mathcal{D}(L_\alpha(A)) = L_D(A_\perp) = L_D(A_{\mathrm{DDA}}). \quad \square$$