arXiv:2603.24473v1 [math.PR] 25 Mar 2026

布朗球面的共形维数为二

JASON MILLER 和 YI TIAN

摘要。度量空间 (X,d) 的共形维数，等于所有与 (X,d) 拟对称的度量空间的豪斯多夫维数的下确界。它是一种重要的拟对称不变量，其取值非严格地介于 (X,d) 的拓扑维数与豪斯多夫维数之间。我们研究布朗球面（又称布朗地图）的共形维数；其概率分布可视为定义在与标准球面 $\mathbf{S}^2$ 同胚、面积为单位面积的度量测度空间上的均匀测度。由于布朗球面的豪斯多夫维数为 4，其共形维数介于 $[2,4]$ 之间。我们的主要结果是，其共形维数等于 2，也就是其拓扑维数。

目录

1. 引言 1 2. 布朗球面与刘维尔量子引力背景 5 3. 布朗平面的估计 10 4. 格罗莫夫双曲几何背景 19 5. 双曲填充 21 6. 构造可容许权重 30 7. 定理 1.1 的证明 40 参考文献 42

1. 引言

本文研究的主要对象是布朗球面（又称布朗地图），其概率律是与二维球面 $\mathbf{S}^2$同胚且面积为单位面积的度量测度空间上的“均匀测度”。这种解释源于 Le Gall [LG13]和 Miermont [Mie13]各自独立的研究：他们证明，布朗球面是来自随机平面图理论、定义在与 $\mathbf{S}^2$ 同胚的曲面上的自然离散均匀测度的 Gromov–Hausdorff–Prokhorov 缩放极限。回顾一下，平面图是将一个连通平面图嵌入二维球面的适当嵌入，并视为在保定向同胚下等价。若每个面恰好与 p 条边相邻（即度数为 p），则称该平面图为 p边剖分。可以通过为每个面配上一个边数等于该面度数的正欧几里得多边形，将平面图视为曲面。Mie13]的研究 [证明了随机四边形剖分收敛到布朗球面，而 [LG13] 证明了 p边剖分在 $p=3$ 或 $p\geq 4$ 为偶数时的收敛。随后不少研究表明，其他类别的随机平面图也收敛到布朗球面；参见 [BJM14, Abr16, ABA17, ABA21]。布朗球面也是亏格为零且具有许多尖点的随机双曲曲面的标度极限 [BC25]。此外， [LG07, LGP08]证明，布朗球面几乎必然与 $\mathbf{S}^2$ 同胚（这一点并非显然，因为与 $\mathbf{S}^2$ 同胚这一性质在 Gromov–Hausdorff–Prokhorov 极限下并不保持；另一种证明见 [Mie08]），且其豪斯多夫维数为 4。

日期：2026年3月26日。

布朗球面也可以等价地描述为 $\sqrt{8/3}$-刘维尔量子引力（LQG）球面 [MS16，MS20，MS21a，MS21b，MS21c]。因此，这些研究表明，若$(\mathcal{S},\ D_{\mathcal{S}},\ \mathcal{M}_{\mathcal{S}})$是一个布朗球面，则存在一个自然同胚 $\mathcal{S}\to\mathbf{S}^2$，它几乎必然由$(\mathcal{S},\ D_{\mathcal{S}},\ \mathcal{M}_{\mathcal{S}})$ 唯一确定，且除与$\mathbf{S}^2$的共形自同构复合外定义唯一。由此，布朗球面具有自然的共形结构，因此可以（在某种意义上）将其视为随机二维黎曼流形。

设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是度量空间。若存在递增同胚 $\eta\colon\mathbf{R}_{\geq 0}\to\mathbf{R}^{\geq 0}$，使得映射 $f\colon(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是拟对称映射，则

$$\frac{d_Y(f(x),f(z))}{d_Y(f(y),f(z))}\leq\eta\left(\frac{d_X(x,z)}{d_X(y,z)}\right),\quad\forall\text{ distinct }x,y,z\in X.$$

若两个度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 之间存在拟对称映射，则称它们拟对称等价。

拟对称映射由 [TV80]引入，作为拟共形映射的一种推广。反过来，拟共形映射推广了经典的共形映射理论，最早由 [Grö20a, Grö20b] 研究，并由 [Ahl35]正式命名。关于该主题的全面介绍，请参阅 [LV65, Leh84,HK95, Hei01,Ahl06, Hei06]。拟对称映射和拟共形映射在数学的许多领域都有应用，此处不一一概述。

共形维数由 Pansu 引入 [Pan89], 是一个重要的拟对称不变量。度量空间的共形维数是所有与之拟对称等价的度量空间的豪斯多夫维数的下确界。根据定义，它的下界是拓扑维数，上界是豪斯多夫维数。若度量空间的共形维数等于其豪斯多夫维数，则称其为共形维数的极小空间。特别地，布朗球面的共形维数位于区间 $[2,4]$内。我们的主要结果表明，其共形维数与其拓扑维数相同。

定理 1.1. 几乎必然，布朗球面的共形维数为2 .

许多自然出现的分形都源自随机过程。然而，据我们所知，在本研究之前，唯一已明确确定共形维数的随机分形是一维布朗运动的图像 [BHL25]。与 [BHL25], 的结果相反，我们发现布朗球面的共形维数等于其拓扑维数2，且严格小于其豪斯多夫维数4。也就是说，布朗球面并非极小。

我们指出，人们通常考虑共形维数的一种变体，称为阿尔福斯正则共形维数；它要求目标空间是阿尔福斯正则的。文献 [Tro21] 证明了布朗球面的阿苏阿德维数是无穷大，因此它无法拟对称地嵌入$\mathbf{R}^n$或任何倍增空间。特别是，它到$\mathbf{S}^2$ 中的典范嵌入不是拟对称的，而且其阿尔福斯正则共形维数是无穷大。

一般而言，如果一个度量空间包含“足够丰富的可求长曲线族”（参见 [MT10，命题 4.1。8]），那么它具有最小共形维数。文献 [LG10] （后来又见 [AKM17、MQ25]）证明了，布朗球面上的测地线具有汇合性质：起点和目标点彼此接近的两条测地线最终必然会合，并在端点的小邻域之外共享一段线段。文献 [MQ25] 还证明了，布朗球面的测地线框架（所有测地线去掉端点后的并集之闭包）等于1，即单条测地线的维数。这些结果强烈暗示，布朗球面缺乏足够丰富的可求长曲线族，因此不具有最小共形维数。

对于那些以受控方式呈现粗糙性和分形特征的曲线与曲面，可以借助拟对称一致化领域的文献；这一理论推广了经典一致化。回顾一下，经典一致化指出，每个单连通二维黎曼流形都与上半平面、复平面或黎曼球面共形等价。其拟对称类比所提出的问题是：度量空间 (X, d_X) 何时与某个“标准”空间 (Y, d_Y) 同胚且与之拟对称等价？对于 $n = 1$, [，TV80] 证明，若一个与 S^1 同胚的度量空间是倍增且线性局部连通（LLC），则它与 S^1 （拟圆）拟对称等价，当且仅当这些条件成立。对于 $n = 2$, [，BK02] 证明，若一个与 S^2 同胚的度量空间是阿尔福斯 2-正则且满足 LLC 性质，则它与 S^2拟对称等价（另见 [Raj17、LW20、MW25、NR23]）。维数为 $n \geq 3$ 的一致化问题目前仍未解决。特别是，拟圆的共形维数为 1，而与 S^2 同胚的阿尔福斯 2-正则 LLC 曲面的共形维数为 2。布朗球面不是阿尔福斯正则的 [Tro21]，也不满足 LLC 性质，因此无法利用 [BK02] 计算它的共形维数。

共形维数在 Gromov 双曲空间理论中十分重要（见第4节），这也是 Pansu 最初引入它的动机 [Pansu89]。具体而言，Gromov 双曲空间之间的拟等距映射会在其格罗莫夫边界上诱导出拟对称映射。因此，格罗莫夫边界的共形维数是 Gromov 双曲空间的拟等距不变量。对于与 $\mathbf{S}^2$, 同胚的边界，这便导出了坎农猜想 [Cannon94]：设 G 是一个格罗莫夫双曲群，其格罗莫夫边界 $\partial_\infty G$ 与 $\mathbf{S}^2$同胚。那么，以下等价命题成立：

> (i) 存在 G 在双曲空间 $\mathbf{H}^3$ 上的等距、适当不连续且余紧的作用。(ii) 格罗莫夫边界 $\partial_\infty G$ 与 $\mathbf{S}^2$ 拟对称等价。

值得注意的是，坎农猜想等价于断言 $\partial_\infty G$ 的阿尔福斯正则共形维数 [BK05]能够取到最小值。

文献中有许多作品研究分形的共形维数，其中包括：

- 任何豪斯多夫维数严格小于1 的度量空间，其共形维数 0 [Kov06]。
- 对于每个 $d \geq 1$，都存在一个豪斯多夫维数为 d 且共形维数极小的度量空间 [BT01]。
- 谢尔宾斯基垫片的共形维数恰为 1 [TW06]。更一般地，任何足够良好且具有足够多局部割点的度量空间，其共形维数为 1[CP14]。
- 谢尔宾斯基地毯的精确共形维数仍然未知；然而，它严格介于1与其豪斯多夫维数 [Tys00、KL04、Kig14、Kwa20]。
- 每个具有均匀纤维的贝德福德–麦克马伦地毯，其共形维数都是极小的[Mac11、BHL25]。
- 分形渗流几乎必然不是共形维数极小的，尽管该维数的具体取值尚未确定 [RS21]。
- 一维布朗运动的图像几乎必然是共形维数极小的 [BHL25]。

鉴于定理 1.1 以及 $\sqrt{8/3}$-LQG 球面与布朗球面的等价性[MS16, MS20, MS21a, MS21b, MS21c]，，考察一般取值为 $\gamma \in (0, 2)$ 的γ-LQG 曲面的共形维数也很自然。在这一一般情形下，相关度量是在 [DDDF20, DFG+20, GM20a, GM20b, GM21]中构造的。我们猜想，对于所有 $\gamma \in (0,2)$， γ-LQG 球面的共形维数几乎必然为 2。

1.1. **证明概要**。 我们的论证受到以下工作的启发： [CP13], 该工作表明，紧致的倍增度量空间的阿尔福斯正则共形维数，等于与其组合模数相关的临界指数。（另请参阅关于 [ESS25] 对 [CP13] 的结果所作的综述。）

[CP13] 高度依赖双曲填充这一技术（更详细的回顾请参见第 5 节）。直观而言，对于一个紧致度量空间 (X, D)，若 $\operatorname{diam}(X; D) < 1$，双曲填充的构造如下。取一个充分小的参数 $\alpha \in (0, 1)$。令$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ 为 X 的有限子集序列，使得每个 A_n 都是极大的 α^n-分离子集。然后，将双曲填充定义为一个图，其顶点为度量球 $B_{\alpha^n}(x; D)$，其中 $n \geq 0$ 且 $x \in A_n$。若满足以下任一条件，则两个顶点 $B_{\alpha^m}(x; D)$ 和 $B_{\alpha^n}(y; D)$ 之间以一条边相连： $m = n$ 且膨胀后的球 $B_{4\alpha^m}(x; D)$ 与 $B_{4\alpha^n}(y; D)$ 相交；或 $|m - n| = 1$ 且球 $B_{\alpha^m}(x; D)$ 与 $B_{\alpha^n}(y; D)$ 相交。由此得到的度量图构成一个格罗莫夫双曲空间，其格罗莫夫边界与 (X, D) 拟对称等价。

一个权函数 是从双曲填充的顶点到非负实数的赋值。若该权函数满足以下条件，则称其为可容许的： 设 $B_{\alpha^{n-1}}(y; D)$ 是一个顶点，且存在一条顶点路径 $B_{\alpha^n}(x_0; D) \sim B_{\alpha^n}(x_1; D) \sim \cdots \sim B_{\alpha^n}(x_N; D)$，使得 $B_{\alpha^{n-1}}(y; D) \cap B_{4\alpha^n}(x_0; D) \neq \emptyset$，且 $(\mathbb{C} \setminus B_{2\alpha^{n-1}}(y; D)) \cap B_{4\alpha^n}(x_N; D) \neq \emptyset$。那么我们必须有 $\sum_{j=0}^{N} \sigma(B_{\alpha^n}(x_j; D)) \geq 1$。沿用 [CP13, ESS25], , 对于每个可容许权函数，我们都可以在 X 上构造一个与 D拟对称等价的度量 D 。直观地说， $B_{\alpha^n}(x; D)$ 的 D-直径大致不超过 $\prod_{j=1}^{n} \sigma(B_{\alpha^j}(x_j; D))$ 的某个常数倍，其中 $x_n = x$和 $B_{\alpha^{j-1}}(x_{j-1}; D)$ 表示 $B_{\alpha^j}(x_j; D)$ 的“父”节点。因此，对于 $p > 2$，要证明 (X, D) 的共形维数至多为 p，只需构造一个可容许权函数 σ ，使得

$$\sum_{x_n \in A_n} \prod_{j=1}^{n} \sigma(B_{\alpha^j}(x_j; D))^p \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.1}$$

现在我们聚焦于 $(X, D) = (\mathcal{S}, D_{\mathcal{S}})$ 为布朗球面的情形。我们构造所需可容许权函数的方法依赖于先验嵌入 $\mathcal{S} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$。一个自然的权函数候选为 $\sigma(B_{\alpha^n}(x; D_{\mathcal{S}})) = \frac{\operatorname{diam}(B_{\alpha^n}(x; D_{\mathcal{S}}))}{\operatorname{inradius}(B_{\alpha^{n-1}/2}(x; D_{\mathcal{S}}))}$，其中
$\operatorname{diam}(\bullet)$ 表示欧几里得直径，而$\operatorname{inradius}(B_{\alpha^{n-1}/2}(x; D_{\mathcal{S}}))$ 定义为 $=$ 上确界$\{R \geq 0 : B_R(x) \subset B_{\alpha^{n-1}/2}(x; D_{\mathcal{S}})\}$ （其中 $B_R(x)$ 表示欧几里得球）。可以立即验证，这一选择满足可容许性条件。然而，采用此定义并不容易验证（1.1）。因此，我们定义

$$\sigma(B_{\alpha^n}(x; D_{\mathcal{S}})) = \frac{\operatorname{diam}(B_{\alpha^n}(x; D_{\mathcal{S}}))}{\operatorname{inradius}(B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/2}(x; D_{\mathcal{S}}))} \mathbf{1}_{E(x,n)} + \mathbf{1}_{E(x,n)^c}$$

对于某个经过精心设计的事件 $E(x, n)$。这里， $B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/2}(x; D_{\mathcal{S}})$ 表示填充度量球，即 $\mathbf{C} \setminus B_{\alpha^{n-1}/2}(x; D_{\mathcal{S}})$ 的无界连通分支的补集。

为了验证 (1.1)，我们首先将分析从布朗球面转移到布朗平面 $(\mathcal{C}, D_{\mathcal{C}}, \mathcal{M}_{\mathcal{C}})$ 的一个度量球，或者等价地，转移到 $\sqrt{8/3}$-LQG 锥；后者是布朗球面的自然无界变体。由于 $(\mathcal{C}, D_{\mathcal{C}})$ 的豪斯多夫维数为 4， A_n （取为布朗平面“原点”处、半径为 $t > 0$ 的度量球 $B_t(0; D_{\mathcal{C}})$（位于 $(\mathcal{C}, D_{\mathcal{C}})$ 中）的一个极大 α^n-分离子集）的基数随 $n \to \infty$ 增长为 $\#A_n = \alpha^{-(4+o(1))n}$ 。利用跨尺度独立性，我们可以将验证 (1.1) 归结为证明：对于某个 $q > 4$，当 $n \in \mathbf{N}$ 时，$\mathbf{E}[\sigma(B_{\alpha^n}(0; D_{\mathcal{C}}))^p] = O(\alpha^q)$ 随 $\alpha \to 0$ 趋于某个极限。这随后可由事件 $E(x, n)$ 以

当 $\alpha \to 0$ 时以超多项式级高概率发生这一事实，以及关于比值 $\operatorname{diam}(B_{\alpha^n}(0;D_{\mathbb{S}}))$ 与内半径$(B^{\bullet}_{\alpha^{n-1/2}}(0;D_{\mathbb{S}}))$ 的相应估计推出。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍布朗球面、布朗平面和刘维尔量子引力所需的背景知识。第3节给出布朗平面的重要估计，尤其着重于界定比值 直径$(B_{\alpha^n}(0;D_{\mathbb{S}}))$ 内半径$(B^{\bullet}_{\alpha^{n-1/2}}(0;D_{\mathbb{S}}))$。第 4 节回顾格罗莫夫双曲几何的基本概念。第 5节详细介绍双曲填充框架，并说明如何利用可容许权函数构造拟对称等价度量。第 6 节专门用于显式构造目标权函数，并严格验证其可容许性。最后，第 7 节汇集这些内容，完成对主要结果定理 1.1的证明。

致谢。 J.M. 获得了 ERC 巩固者资助 ARPF（地平线欧洲 UKRI G120614）的支持。Y.T. 获得了剑桥信托颁发的剑桥国际奖学金。

2. 布朗球面与刘维尔量子引力背景 Y

2.1. 记号与约定。我们用 $\mathbf{C}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}$ 和$\mathbf{N}$ 分别表示复数、实数、整数和正整数的集合。我们将记作 $\hat{\mathbf{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C} \cup \{\infty\}$。对于实数 $a < b$，我们定义离散区间 $[a,b]_{\mathbf{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} [a,b] \cap \mathbf{Z}$。

对于可变的非负量 a 和 b，若存在一个常数$C > 0$，它与相关参数无关，且满足 $a \le Cb$ （分别满足 $a \ge Cb$），则记作 $a \preceq b$ （分别记作 $a \succeq b$）。若 $a \preceq b$ 和 $a \succeq b$ 均成立，则记作 $a \asymp b$。

对于依赖于参数 $t > 0$的非负量 a，以及固定指数 $\alpha > 0$，若存在常数 $C > 0$，使得对所有充分小的 t都有 $a \le Ct^{\alpha}$，则将 $a = O(t^{\alpha})$ 记作 $t \to 0$。若对每个 $\alpha > 0$，都有 $a = O(t^{\alpha})$ 记作 $t \to 0$，则将 $a = O(t^{\infty})$ 记作 $t \to 0$。类似地，我们用$a = O(t^{-\alpha})$ 和 $a = O(t^{-\infty})$ 记作 $t \to \infty$，表示当 t 充分大时的相应界。

设 (X, D) 为一个度量空间。对于 $x \in X$ 和 $t > 0$，我们定义开度量球 $B_t(x; D) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : D(x,y) < t\}$。对于 $0 < s < t$，我们定义开度量环域 $A_{s,t}(x; D) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : s < D(x,y) < t\}$。最后，该空间的直径记为 $\operatorname{diam}(X; D) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{D(x,y) : x, y \in X\}$。当 D 为欧几里得度量时，我们在记号中省略它。

2.2. 布朗球面与布朗平面。本小节回顾布朗球面和布朗平面的构造及其基本性质。

设 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ 为一个归一化布朗 excursion。给定 X，令$\{Z_t\}_{t\in[0,1]}$ 为一个协方差函数为

$$\mathbf{E}[Z_s Z_t] = \inf_{u\in[s,t]} X_u, \quad \forall 0 \le s \le t \le 1.$$

我们定义

$$D^{\circ}(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} Z_s + Z_t - 2\left(\inf_{u\in[s,t]} Z_u \vee \inf_{u\in[0,s]\cup[t,1]} Z_u\right), \quad \forall 0 \le s \le t \le 1.$$

令 D 为 $[0,1]$ 上满足以下条件的最大伪度量：只要 $D^{\circ}(s, t) = 0$，就有 $D \le D^{\circ}$ 和 $D(s, t) = 0$。我们定义商空间 $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} [0,1]/\sim$，其中当且仅当 $D(s, t) = 0$ 时，$s \sim t$。令 $D_{\mathcal{S}}$ 表示由 D 诱导的 $\mathcal{S}$ 上的度量，并令 $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ 表示勒贝格测度在典范投影下于 $[0,1]$ 上的推前测度

。我们将五元组 $(\mathcal{S},\ D_{\mathcal{S}},\ \mathcal{M}_{\mathcal{S}};\ \mathrm{pr}(0),\ \mathrm{pr}(t_*))$ 称为单位面积布朗球面，其中 t_* 表示 Z 取到其下确界的唯一时刻。

几乎必然，$(\mathcal{S}, D_{\mathcal{S}})$ 是一个与 S^2 同胚的测地度量空间（参见 [LGP08, Mie08]），其豪斯多夫维数为 4（参见 [LG07]）。在给定 $(\mathcal{S}, D_{\mathcal{S}}, \mathcal{M}_{\mathcal{S}})$ 的条件下，标记点 $\mathrm{pr}(0)$ 和 $\mathrm{pr}(t_*)$ 相互独立，且服从 $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ （参见 [LG10]）。此外，测度$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ 几乎必然由与规范函数 $r \mapsto r^4 \log(\log(1/r))$ 相对应的豪斯多夫测度给出（参见 [LG22]）。

无条件布朗球面（即面积为随机值）的分布定义为测度 $\mathbf{P} \otimes c a^{-3/2}\,\mathrm{d}a$ 在某个常数 $c > 0$ 下，经缩放 $(\mathcal{S}, D_{\mathcal{S}}, \mathcal{M}_{\mathcal{S}};\ x, y) \mapsto (\mathcal{S}, a^{1/4} D_{\mathcal{S}}, a\mathcal{M}_{\mathcal{S}};\ x, y)$ 后的推前测度，其中 $\mathbf{P}$ 表示单位面积布朗球面的分布。等价地，可通过上述相同的步骤构造无条件布朗球面，只需将归一化布朗 excursion 替换为 Itô excursion 测度。

布朗平面是布朗球面的一种无界变体，其构造方式类似（参见 [CLG14]）。更精确地，设$\{X_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为一个过程，使得 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{X_{-t}\}_{t\geq 0}$是相互独立且从零出发的三维贝塞尔过程。给定 X，令 $\{Z_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为一个协方差函数为

$$\mathbf{E}[Z_s Z_t] = \begin{cases} \inf_{u\in[s,t]} X_u & \text{if } s \leq t \leq 0 \text{ or } 0 \leq s \leq t; \\ \inf_{u\in(-\infty,s]\cup[t,\infty)} X_u & \text{if } s \leq 0 \leq t. \end{cases}$$

我们定义

$$D^\circ(s,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Z_s + Z_t - 2 \inf_{u\in[s,t]} Z_u, \quad \forall s \leq t.$$

令 D 为 $\mathbf{R}$ 上的最大伪度量，使得当 $D^\circ(s,t) = 0$时，$D \leq D^\circ$ 且 $D(s,t) = 0$。我们定义商空间 $\mathcal{C} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{R}/\sim$，其中当且仅当 $D(s,t) = 0$时，$s \sim t$。令 $D_{\mathcal{C}}$ 表示由 D诱导在 $\mathcal{C}$ 上的度量，并令 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 为勒贝格测度在$\mathbf{R}$上经典范投影 $\mathrm{pr}\colon \mathbf{R} \to \mathcal{C}$推前所得的测度。我们将四元组 $(\mathcal{C}, D_{\mathcal{C}}, \mathcal{M}_{\mathcal{C}}; \mathrm{pr}(0))$ 称为布朗平面。

布朗平面满足一种自然的缩放性质：对于每个确定性标量 $\lambda > 0$，缩放后的空间 $(\mathcal{C},\ \lambda D_{\mathcal{C}},\ \lambda^4 \mathcal{M}_{\mathcal{C}};\ \mathrm{pr}(0))$ 与原空间 $(\mathcal{C},\ D_{\mathcal{C}},\ \mathcal{M}_{\mathcal{C}};\mathrm{pr}(0))$ 的分布完全相同。

2.3. **广度优先探索**。回顾一下，具有分枝机制 ψ 的$\mathbf{R}_{\geq 0}$值马尔可夫过程 Y 称为连续状态分枝过程（CSBP），若满足

$$\mathbf{E}_y[\mathrm{e}^{-\lambda Y_t}] = \mathrm{e}^{-y u_t(\lambda)}, \quad \forall y > 0,\ \forall \lambda > 0,\ \forall t > 0,$$

其中

$$\partial_t u_t(\lambda) = -\psi(u_t(\lambda)) \quad \text{and} \quad u_0(\lambda) = \lambda,$$

且 ψ 具有列维–欣钦形式

$$\psi(u) = a u + b u^2 + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-ux} - 1 + ux)\,\Pi(\mathrm{d}x).$$

当 $\psi(u) = c u^\alpha$ 对某个 $\alpha \in (1, 2]$ 且 $c > 0$ 成立时，我们称 Y 为 α稳定型 *CSBP*。本文中，我们考虑 $\psi(u) = \sqrt{8/3} u^{3/2}$ 的情形。在这种设定下，

$$u_t(\lambda) = (\lambda^{-1/2} + \sqrt{2/3}t)^{-2}, \quad \forall \lambda > 0.$$

令 $\zeta \stackrel{\text{定义}}{=}$ 下确界$\{t > 0 : Y_t = 0\}$ 表示 Y 的生存时间。则

$$\mathbf{P}_y[\zeta \leq t] = \mathbf{P}_y[Y_t = 0] = \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{E}_y[\mathrm{e}^{-\lambda Y_t}] = \exp\left(-\frac{3y}{2t^2}\right), \quad \forall t > 0,$$

从而得到密度

$$\mathbf{P}_y[\zeta \in \mathrm{d}t] = 3yt^{-3}\exp\left(-\frac{3y}{2t^2}\right)\mathrm{d}t, \quad \forall t>0. \tag{2.1}$$

$3/2$ 稳定 CSBP 及其相应的游程测度，分别可通过 Lamperti 变换由谱正 $3/2$ 稳定 Lévy 过程及其游程测度得到。

设 $(\mathcal{S},\ D_{\mathcal{S}},\ \mathcal{M}_{\mathcal{S}};\ x,\ y)$ 是一个（未条件化的）布朗球面。与欧几里得空间不同，对于 $t>0$，度量球 $B_t(x;\ D_{\mathcal{S}})$ 的补集有可数多个连通分支（除非 $B_t(x;\ D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$）。我们将 $B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}})$ 定义为 $\mathcal{S}\backslash B_t(x;\ D_{\mathcal{S}})$ 中包含 y 的连通分支的补集。通俗地说，$B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}})$ 是通过填补 $B_t(x;\ D_{\mathcal{S}})$ 中不包含 y 的孔洞得到的。

根据 [CLG16, MS21a], 存在一个仅有正跳跃的 càdlàg 过程 $\{Y_t\}_{t\in[0,D_{\mathcal{S}}(x,\ y)]}$，它几乎必然由 $(\mathcal{S},\ D_{\mathcal{S}},\ \mathcal{M}_{\mathcal{S}};\ x,\ y)$ 确定，并且对于每个确定性的 $t\geq 0$，在事件 $t<D_{\mathcal{S}}(x,\ y)$ 发生时，几乎必然有：

$$Y_{D_{\mathcal{S}}(x,y)-t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(B_{t+\varepsilon}(x;D_{\mathcal{S}})\setminus B_t^y(x;D_{\mathcal{S}})).$$

此外，$t\in[0,D_{\mathcal{S}}$的定律由 $3/2$-稳定 CSBP 游程测度给出。

设 $(\mathscr{C},D_{\mathscr{C}},\mathcal{M}_{\mathscr{C}};\ x)$ 是一个布朗平面。类似地，令 $B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})$ 表示 $\mathscr{C}\backslash B_t(x;D_{\mathscr{C}})$ 的无界连通分支的补集。存在一个仅有正跳跃的 càdlàg 过程 $\{Y_{-t}\}_{-t\leq 0}$，它几乎必然由 $(\mathscr{C},D_{\mathscr{C}},\mathcal{M}_{\mathscr{C}};x)$ 确定；对每个确定性的$t\geq 0$，几乎必然有，

$$Y_{-t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}\mathcal{M}_{\mathscr{C}}(B_{t+\varepsilon}(x;D_{\mathscr{C}})\setminus B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})).$$

此外，$\{Y_{-t}\}_{t\geq 0}$ 的定律由以下性质刻画：

- $Y_{-t}\to\infty$ 当 $t\to\infty$ 时，以及
- 对每个确定性的 $x>0$，若记 τ_x 定义为$=\sup\{t\geq 0\colon\ Y_{-t}=x\}$，则$\{Y_{s-\tau_x}\}_{s\in[0,\tau_x]}$ 服从从 x 出发的 $3/2$-稳定 CSBP 的分布。 (2.2)

我们定义 $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(\partial B_t^y(x;D_{\mathcal{S}}))$ 定义为$=$ $Y_{D_{\mathcal{S}}(x,\ y)-t}$，相应地，$\mathcal{N}_{\mathscr{C}}(\partial B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}))$ 定义为 $=Y_{-t}$，并将它们称为填充度量球的边界长度。

如 [MS21a], 所示，对于每个确定性的 $t>0$，在以下事件发生时：$t<D_{\mathcal{S}}(x,\ y)$，边界长度 $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(\partial B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}}))$ 几乎必然由以下内容确定：

$$\left(B_t^y(x;D_{\mathcal{S}}), D_{\mathcal{S}}(\bullet,\bullet;B_t^y(x;D_{\mathcal{S}})), \mathcal{M}_{\mathcal{S}}|_{B_t^y(x;D_{\mathcal{S}})}; x\right), \tag{2.3}$$

其中，$D_{\mathcal{S}}(\bullet,\ \bullet;B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}}))$ 表示内在度量（即完全包含于 $B_t^y(x;D_{\mathcal{S}})$ 中的所有路径的 $D_{\mathcal{S}}$-长度下确界）；它也几乎必然由以下内容确定：

$$\left(\mathcal{S}\setminus B_t^y(x;D_{\mathcal{S}}), D_{\mathcal{S}}(\bullet,\bullet;\mathcal{S}\setminus B_t^y(x;D_{\mathcal{S}})), \mathcal{M}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}\setminus B_t^y(x;D_{\mathcal{S}})}; y\right); \tag{2.4}$$

此外，(2.3) 与 (2.4) 在给定 $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(\partial B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}}))$的条件下相互条件独立。此外，给定 $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(\partial B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}}))$ 后，2.4的条件分布 不依赖于 t的选择。事实上，这个条件分布称为边界长度为 带标记的布朗圆盘：$\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(\partial B_t^y(x;\ D_{\mathcal{S}}))$。

类似地，对于每个确定性的 $t>0$，边界长度 $\mathcal{N}_{\mathscr{C}}(\partial B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}))$ 几乎必然由以下内容确定：

$$\left(B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}), D_{\mathscr{C}}(\bullet,\bullet;B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})), \mathcal{M}_{\mathscr{C}}|_{B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})}; x\right), \tag{2.5}$$

以及以下内容：

$$\left(\mathscr{C}\setminus B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}), D_{\mathscr{C}}(\bullet,\bullet;\mathscr{C}\setminus B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})), \mathcal{M}_{\mathscr{C}}|_{\mathscr{C}\setminus B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})}\right); \tag{2.6}$$

此外，(2.5) 与 (2.6) 在给定 $\mathcal{N}_{\mathscr{C}}(\partial B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}))$的条件下相互独立。此外，给定 2.6) 和 $\mathcal{N}_{\mathscr{C}}(\partial B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}))$ 的条件分布不依赖于 t。最后，填充度量球 (2.3) 和 (2.5) 在给定其边界长度的条件下具有相同的条件分布。

对于 $0\le s<t$，我们定义度量带 $A_{s\,t}^y(x;\,D_{\mathbb{S}})\overset{\text{def}}{=}B_t^y(x;\,D_{\mathbb{S}})\setminus B_s^y(x;\,D_{\mathbb{S}})$ 和 $A_{st}^\bullet(x;\,D_{\mathscr{C}})\overset{\text{def}}{=}B_t^\bullet(x;\,D_{\mathscr{C}})\setminus B_s^\bullet(x;\,D_{\mathscr{C}})$。对于 $\ell_1\ell_2\ge 0$，其条件分布为

$$\left(A_{s,t}^y(x;D_{\mathbb{S}}), D_{\mathbb{S}}(\bullet,\bullet;A_{s,t}^y(x;D_{\mathbb{S}})), \mathcal{M}_{\mathbb{S}}|_{A_{s,t}^y(x;D_{\mathbb{S}})}; \partial B_s^y(x;D_{\mathbb{S}}), \partial B_t^y(x;D_{\mathbb{S}})\right) \tag{2.7}$$

在给定 $\mathcal{N}_{\mathbb{S}}(\partial B_s^y(x;\,D_{\mathbb{S}}))=\ell_1$, $\mathcal{N}_{\mathbb{S}}(\partial B_t^y(x;\,D_{\mathbb{S}}))=\ell_2$，以及事件 $t\le D_{\mathbb{S}}(x,y)$ 的条件下，与.....的条件分布相同

$$\left(A_{s,t}^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}), D_{\mathscr{C}}(\bullet,\bullet;A_{s,t}^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})), \mathcal{M}_{\mathscr{C}}|_{A_{s,t}^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})}; \partial B_s^\bullet(x;D_{\mathscr{C}}), \partial B_t^\bullet(x;D_{\mathscr{C}})\right) \tag{2.8}$$

给定 $\mathcal{N}_{\mathscr{C}}(\partial B_s^\bullet(x;\,D_{\mathscr{C}}))=\ell_1$ 和 $\mathcal{N}_{\mathscr{C}}(\partial B_t^\bullet(x;\,D_{\mathscr{C}}))=\ell_2$。此外，这一共同的条件分布仅取决于 ℓ_1、ℓ_2 和宽度 $t-s$，我们称其为内边界长度为 ℓ_1、外边界长度为 ℓ_2且宽度为 $t-s$的度量带的分布。

类似地，我们可以考虑仅在内边界长度为 ℓ_1 （并且对于球面，还要求事件 $s<D_{\mathbb{S}}(x,y)$发生）的条件下，(2.7) 和 (2.8) 的条件分布，而不对外边界长度进行条件限定。尽管这两个条件分布仍仅取决于 ℓ_1 和 $t-s$，但它们不再相同。我们称它们为内边界长度为 的球面型（分别为锥型）度量带 ℓ_1 且宽度为 $t-s$。

这些度量带满足自然的缩放性质：若 $(\mathfrak{A},D_{\mathfrak{A}},\mathcal{M}_{\mathfrak{A}};I,O)$ 是一个内边界长度为 ℓ_1、外边界长度为 ℓ_2、宽度为 $t-s$ 的度量带，那么对于任意确定性的$\lambda>0$，缩放后的元组 $(\mathfrak{A},\lambda D_{\mathfrak{A}},\lambda^4\mathcal{M}_{\mathfrak{A}};\,I,O)$ 是一个内边界长度为 $\lambda^2\ell_1$、外边界长度为 $\lambda^2\ell_2$、宽度为 $\lambda(t-s)$ 的度量带。球面型（分别为锥型）度量带也有类似的结论。

2.4. 刘维尔量子引力与空间填充 SLE。设 $\gamma\in(0,2)$，且 $Q\overset{\text{def}}{=}2/\gamma+\gamma/2$。一个 γ-LQG 曲面是三元组 (U,g,Φ) 的等价类，其中 U是黎曼曲面，g是定义在 U 上的共形度量（即在每个局部坐标图中具有 $\varrho(z)^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}z$ 形式的黎曼度量），而Φ 是定义在 (U,g)上的施瓦茨分布（高斯自由场的一种）。若存在共形映射 $\phi\colon U'\to U$以及光滑函数 $\varrho\colon U'\to\mathbf{R}_{>0}$，使得 $\phi^*(g)=\varrho^2g'$且 $\Phi'=\Phi\circ\phi+Q\log(\varrho)$，则两个这样的三元组 (U,g,Φ) 和 (U',g',Φ') 等价。等价类中代表元 (U,g,Φ) 的具体选择称为该 γ-LQG 曲面的嵌入。

我们还将考虑带有标记 γ的 LQG 曲面：若 $A_1,\cdots A_n$（分别是 $A_1',\cdots A_n'$）是 U（分别是 U'）的完备化的子集，那么若共形映射 ϕ还满足对所有 $j\in[1,n]_{\mathbf{Z}}$，$\phi(A_j')=A_j$，则元组 $(U,g,\Phi;A_1,\cdots A_n)$ 和 $(U\prime g',\Phi';A_1',\cdots A_n')$ 被视为等价。本文中，我们着重讨论 U 是$\mathbf{C}$ 的开子集且 g 是欧几里得度量的情形；因此，记号中省略 g。

如 [DS11], 所示，γ-LQG 曲面具有一个自然的 γ-*LQG* 测度，记作 $\mathcal{M}_\Phi$。该测度形式上表示为“$\mathrm{e}^{\gamma\Phi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$”，且不依赖于嵌入的选取。

此外，该曲面还具有一种自然的 γ-*LQG* 度量，记作 D_Φ，其形式上定义为“$\mathrm{e}^{\gamma\Phi}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$”，同样不依赖于嵌入。该度量最初

针对以下特定情形构造： $\gamma=\sqrt{8/3}$ 见 [MS16、MS20、MS21a、MS21b、MS21c], 之后推广至所有 $\gamma\in(0,2)$ ，相关工作见 [DDDF20、DFG+20、GM20a、GM20b、GM21]。

回顾一下，全平面高斯自由场（GFF） Φ 被定义为模去加性常数的随机施瓦茨分布，并满足

$$\left\{\langle\Phi,f\rangle : f\in C_c^\infty(\mathbf{C}),\ \int_{\mathbf{C}} f(z)\,\mathrm{d}z=0\right\}$$

构成一个中心高斯过程，其协方差函数为

$$\mathbf{E}[\langle\Phi,f\rangle\langle\Phi,g\rangle]=-\int_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}\log(|x-y|)f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

令 $H^1(\mathbf{C})$表示空间的完备化

$$\left\{f\in C^\infty(\mathbf{C})/\mathbf{R}:\int_{\mathbf{C}}\|\nabla f(z)\|^2\,\mathrm{d}z<\infty\right\}$$

关于内积 $\langle f,g\rangle_{H^1(\mathbf{C})}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}}\nabla f(z)\cdot\nabla g(z)\,\mathrm{d}z$。场 Φ 也可以等价地表示为级数展开 $\sum_{j=1}^\infty X_j\psi_j$，其中 $(\psi_j)_{j\geq1}$ 构成 $H^1(\mathbf{C})$ 的正交归一基，而 $(X_j)_{j\geq1}$ 是相互独立的标准高斯随机变量序列。

现在我们继续定义 γ-LQG 球面和 γ-LQG 锥（参见 [DMS21]）。注意到$H^1(\mathbf{C})$ 具有正交分解 $H^1(\mathbf{C})=H^{\mathrm{rad}}(\mathbf{C})\oplus H^{\mathrm{circ}}(\mathbf{C})$，其中

$$H^{\mathrm{rad}}(\mathbf{C})\overset{\text{def}}{=}\left\{f\in H^1(\mathbf{C}):f\text{ is constant on }\{z\in\mathbf{C}:|z|=t\}\text{ for each }t>0\right\};$$

$$H^{\mathrm{circ}}(\mathbf{C})\overset{\text{def}}{=}\left\{f\in H^1(\mathbf{C}):f\text{ has mean zero on }\{z\in\mathbf{C}:|z|=t\}\text{ for each }t>0\right\}.$$

定义过程 $\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 如下： $A_t\overset{\text{def}}{=}B_t+\gamma t$ 当 $t\geq0$ 时，以及 $A_t\overset{\text{def}}{=}\widetilde{B}_{-t}+\gamma t$ 当 $t<0$ 时，其中 $\{B_t\}_{t\geq0}$ 是一个从 0 开始的标准布朗运动，而 $\{\widetilde{B}_t\}_{t\geq0}$ 是一个与之独立、从 0 开始的布朗运动，并以满足对所有 $t>0$， $B_t+(Q-\gamma)t>0$ 为条件。接下来，令 Φ 为一个与 $\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 独立的全平面高斯自由场。我们将 Φ^{cone} 定义为随机施瓦茨分布，其在 $H^{\mathrm{rad}}(\mathbf{C})$ 上的投影由 $A_{-\log(|\bullet|)}$ 给出（其中，由$\Phi_r^{\mathrm{cone}}(0)\overset{\text{def}}{=}A_{-\log(r)}$ 当 $r>0$ 定义的过程称为 Φ^{cone}的圆平均过程），且其在 $H^{\mathrm{circ}}(\mathbf{C})$ 上的投影与 Φ的投影一致。由 $(\mathbf{C},\Phi^{\mathrm{cone}},0,\infty)$ 表示的带标记点的 γ-LQG 曲面称为一个 γ-LQG 锥，而这一特定参数化称为它的圆平均嵌入。

令 e 为维数为 $4-8/\gamma^2$ 的贝塞尔游程。令 $\{A_t^e\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为过程 $(2/\gamma)\log(e)$，并重新参数化使其二次变差为 $\mathrm{d}t$。若在 γ-LQG 锥的定义中用 $\{A_t^e\}_{t\in\mathbf{R}}$ 替换 $\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$，便得到 γ-*LQG* 球面。由于贝塞尔游程测度是 σ-有限的， γ-LQG 球面的分布也是 σ-有限测度。

已有研究 [MS20, MS21a, MS21b, MS21c] 证明，布朗球面 $(\mathcal{S},D_{\mathcal{S}},\mathcal{M}_{\mathcal{S}};x,y)$ 与 $\sqrt{8/3}$-LQG 球面 $(\mathbf{C},D_{\Phi^{\mathrm{sph}}},\mathcal{M}_{\Phi^{\mathrm{sph}}};0,\infty)$ 作为带标记的度量测度空间具有相同的分布。此外，$\sqrt{8/3}$-LQG 曲面结构——尤其是其作为黎曼曲面的共形结构——几乎必然由其底层度量测度空间结构确定。类似地，布朗平面 $(\mathcal{C},D_{\mathcal{C}},\mathcal{M}_{\mathcal{C}};x)$ 与 $\sqrt{8/3}$-LQG 锥 $(\mathbf{C},D_{\Phi^{\mathrm{cone}}},\mathcal{M}_{\Phi^{\mathrm{cone}}};0)$ 作为带标记的度量测度空间也具有相同的分布。

令 $\kappa\overset{\text{定义为}}{=}\gamma^2\in(0,4)$ 并令 $\kappa'\overset{\text{定义为}}{=}16/\kappa>4$。全平面空间填充 $\mathrm{SLE}_{\kappa'}$ 曲线，从 ∞ 到∞，最初由 [MS17], 构造，是一个用途广泛的对象；在众多应用中，它为表述 γ-LQG 锥的平移不变性提供了自然框架。该曲线记作 η'： $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$，几乎必然不自交且空间填充，其中 $\eta'(t)\to\infty$

如 $t \to \pm\infty$。在模去重参数化后， η' 的分布在保持 ∞不变的莫比乌斯变换下不变。因此，全平面空间填充 SLE$_{\kappa'}$ 曲线可自然地定义在 γ-LQG 球面或锥上。我们可以固定参数化，使得 $\eta'(0) = 0$。如[DMS21], 所示，若 $(\mathbb{C}, \Phi; 0, \infty)$ 是一个与 η'独立的 γ-LQG 锥，且 η' 按 γ-LQG 测度 $\mathcal{M}_\Phi$ 参数化，那么对于任意确定性时间 $t \in \mathbb{R}$，带标记点的 γ-LQG 曲面 $(\mathbb{C}, \Phi; \eta'(t), \infty)$ 的分布也与一个 γ-LQG 锥相同。

在本文余下部分中，我们将记

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{8/3}; \quad Q \stackrel{\text{def}}{=} 2/\gamma + \gamma/2 = 5/\sqrt{6}; \quad d_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} 4; \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} \gamma/d_\gamma = 1/\sqrt{6};$$
$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^2 = 8/3; \quad \kappa' \stackrel{\text{def}}{=} 16/\kappa = 6.$$

3. 布朗平面的估计

本节中，我们将建立关于布朗平面的若干估计。在第3.1节中，我们汇总 3/2-稳定 CSBP 的估计。这些结果表明，在多个尺度上，布朗平面中填充度量球的边界长度不会显著超过其期望值。在第3.2节中，我们给出度量球体积的估计。这些体积界将使我们能够通过独立随机抽样，以高概率为布朗平面构造稠密网。最后，在第 3.3节中，我们证明关于布朗平面中度量带的共形模的估计。这些估计控制第 1.1节中提到的欧几里得直径与内半径之比；这是证明主定理的一项重要内容。

3.1. **填充度量球的边界长度**。

引理 3.1. 设 $y, T > 0$。设 Y是一个从 y 出发、生存时间为 T的 3/2-稳定 *CSBP*。则

$$\mathbf{P}_y[Y_t > A(T-t)^2] \le 3^{3/2} \exp\left(-A + 3(\sqrt{3}-1)y(T-t)/T^3\right), \quad \forall t \in (0,T),\ \forall A > 0.$$

证明. 设 Y是一个 3/2-稳定 CSBP，从 y (不对其生存时间进行条件化 ζ)。由马尔可夫性质和（2.1）可得

$$\mathbf{E}_y[\mathrm{e}^{\lambda Y_t} \mid \zeta = T] = \frac{\mathbf{E}_y[\mathrm{e}^{\lambda Y_t} \mathbf{1}_{\{\zeta \in \mathrm{d}T\}}]}{\mathbf{P}_y[\zeta \in \mathrm{d}T]} = \frac{\mathbf{E}_y[\mathrm{e}^{\lambda Y_t} \mathbf{P}_{Y_t}[\zeta \in \mathrm{d}(T-t)]]}{\mathbf{E}_y[\mathbf{P}_{Y_t}[\zeta \in \mathrm{d}(T-t)]]} = \frac{\mathbf{E}_y[Y_t \mathrm{e}^{-(\theta-\lambda)Y_t}]}{\mathbf{E}_y[Y_t \mathrm{e}^{-\theta Y_t}]}$$
$$= \frac{u_t'(\theta-\lambda)}{u_t'(\theta)} \exp(-y(u_t(\theta-\lambda) - u_t(\theta))), \quad \forall \lambda \in (0,\theta),$$

其中 θ 定义为$= (3/2)(T-t)^{-2}$。取 λ 定义为$= (T-t)^{-2}$。则

$$\frac{u_t'(\theta-\lambda)}{u_t'(\theta)} = \left(\frac{\theta}{\theta-\lambda}\right)^{3/2} \left(\frac{\theta^{-1/2} + \sqrt{2/3}t}{(\theta-\lambda)^{-1/2} + \sqrt{2/3}t}\right)^3 = 3^{3/2} \left(\frac{\theta^{-1/2} + \sqrt{2/3}t}{(\theta-\lambda)^{-1/2} + \sqrt{2/3}t}\right)^3 \le 3^{3/2},$$

and

$$\exp(-y(u_t(\theta-\lambda) - u_t(\theta))) = \exp\left(\frac{3y}{2T^2}\left(1 - \left(1 + \frac{(\sqrt{3}-1)(T-t)}{T}\right)^{-2}\right)\right)$$
$$\le \exp\left(3(\sqrt{3}-1)y(T-t)/T^3\right),$$

其中最后一个不等式由以下事实得出：$(1+x)^{-2} \ge 1 - 2x$ 对所有 $x \ge 0$ 成立。因此，我们得出结论：

$$\mathbf{E}_y[\mathrm{e}^{\lambda Y_t} \mid \zeta = T] \le 3^{3/2} \exp\left(3(\sqrt{3}-1)y(T-t)/T^3\right),$$

这意味着

$$\mathbf{E}_y[Y_t \geq A(T-t)^2 \mid \zeta = T] \leq \mathrm{e}^{-A}\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y_t} \mid \zeta = T] \leq 3^{3/2}\exp\Big(-A + 3(\sqrt{3}-1)y(T-t)/T^3\Big).$$

这就完成了引理3.1的证明。 □

引理 3.2。 设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 是一个 γ-*LQG* 锥。对于每个 $t \geq 0$，记作 $Y_{-t} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{N}_\Phi(\partial B_t^\bullet(0; D_\Phi))$。

(i) 对于每个 $\lambda \in (0,\ 1)$，$\alpha > 0$ 和 $b \in (0,1)$，存在 $A = A(\lambda, \alpha, b) \in (0,\ 1)$ 使得以下结论成立：设 $\{t_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 是正实数的递减序列，满足$t_{j+1}/t_j \leq \lambda$ 对所有 $j \in$**N**均成立。那么

$$\mathbf{P}[\#\{j \in [1,n]_{\mathbf{Z}} : Y_{-t_j} \leq At_j^2\} \geq bn] \geq 1 - \mathrm{e}^{-\alpha n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(ii) 对于每个 $\zeta > 0$ 和 $b \in (0,1)$，存在 $\lambda_* = \lambda_*(\zeta, b) \in (0,\ 1)$

$$\mathbf{P}[\#\{j \in [1,n]_{\mathbf{Z}} : Y_{-\lambda^j} \leq \lambda^{2j-2\zeta)}\} \geq bn] \geq 1 - \exp(-\lambda^{-\zeta}n), \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_*],\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

证明。首先，我们考虑断言 (i)。固定 $\beta > 0$，其取值稍后确定。对于每个 $n \in$**N**，记 j_n 为满足 $Y_{-t_j} \leq At_j^2$ 的 $j \in$**N** 中第 n 小的值。考虑 $i_0 \overset{\text{def}}{=} 1$ 和 $i_n \overset{\text{def}}{=} i_{n-1} + \left\lceil \frac{\log(Y_{-t_{i_{n-1}}}/t_{i_{n-1}}^2)}{\log(1/\lambda)} \right\rceil$，对所有 $n \in$ **N** 均成立。回顾 [CLG16，命题 1.2]，Y_{-t} 是形状参数为 $3/2$、均值为 t^2 的伽马随机变量。这意味着，对某些普适常数 C_1、$C_2 > 0$，有 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\beta(i_1-1)}\mathbf{1}_{\{Y_{-t_1} > At_1^2\}}] \leq C_1\mathrm{e}^{-C_2A}$。此外，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\mathrm{e}^{\beta(i_{n+1}-i_n)}\mathbf{1}_{\{Y_{-t_{i_n}} > At_{i_n}^2\}} \,\Big|\, Y_{-t_{i_{n-1}}}\Big] &\leq \mathrm{e}^\beta \mathbf{E}\Big[(Y_{-t_{i_n}}/t_{i_n}^2)^{\frac{\beta}{\log(1/\lambda)}}\mathbf{1}_{\{Y_{-t_{i_n}} > At_{i_n}^2\}} \,\Big|\, Y_{-t_{i_{n-1}}}\Big] \\
&= \frac{\mathrm{e}^\beta\beta}{\log(1/\lambda)}\int_A^\infty x^{\frac{\beta}{\log(1/\lambda)}-1}\mathbf{P}\Big[Y_{-t_{i_n}}/t_{i_n}^2 \geq x \,\Big|\, Y_{-t_{i_{n-1}}}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^\beta\beta}{\log(1/\lambda)}\int_A^\infty x^{\frac{\beta}{\log(1/\lambda)}-1}C_3\mathrm{e}^{-C_4x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(by Lemma 3.1)} \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^\beta\beta}{\log(1/\lambda)}C_3A^{\frac{\beta}{\log(1/\lambda)}-1}\mathrm{e}^{-C_5A},
\end{aligned}$$

其中 C_3、C_4、$C_5 > 0$ 是普适常数。通过选取充分大的 A，我们可以使得 $C_1\mathrm{e}^{-C_2A} \leq 1 - 1/\mathrm{e}$ 且 $\mathrm{e}^\beta\beta\log(1/\lambda)^{-1}C_3A^{\frac{\beta}{\log(1/\lambda)}-1}\mathrm{e}^{-C_5A} \leq 1 - 1/\mathrm{e}$。记 $N \overset{\text{def}}{=} \inf\{n \geq 0 : Y_{-t_{i_n}} \leq At_{i_n}^2\}$。于是 $j_1 \leq i_N$。因此，$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\beta(j_1-1)}] \leq \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\beta(i_N-1)}] \leq \sum_{n=0}^\infty(1-1/\mathrm{e})^n = \mathrm{e}$。类似地，对所有 $n \in$**N**，均有 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\beta(j_{n+1}-j_n-1)} \mid j_n] \leq \mathrm{e}$。这意味着，对所有 $n \in$ **N**，均有 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\beta(j_n-n)}] \leq \mathrm{e}^n$。因此，我们得出结论：

$$\mathbf{P}[\#\{j \in [1,n]_{\mathbf{Z}} : Y_{-t_j} \leq At_j^2\} < bn] \leq \mathbf{P}[j_{bn} > n] \leq \mathrm{e}^{bn-\beta(1-b)n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

这就完成了断言（i）的证明。

令 $\alpha = \lambda^{-\zeta}$（因此 $\beta = (\lambda^{-\zeta} + b)/(1-b)$）且 $A = \lambda^{-2\zeta}$，断言（ii）可由与断言（i）证明中所用论证类似的论证立即得出。□

此外，我们记录一个引理，表明布朗平面中填充度量球的边界长度不会显著低于其期望值。

引理 3.3. 设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 是一个 γ-*LQG* 锥。对每个 $t \geq 0$，记 $Y_{-t} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{N}_\Phi(\partial B_t^\bullet(0; D_\Phi))$。则存在普适常数 $\alpha, C > 0$，使得

$$\mathbf{P}\Big[\sup_{r\in[s,t]} Y_{-r} < \varepsilon(t-s)^2 \,\Big|\, Y_{-s} = \ell\Big] \leq C\exp(-\alpha\varepsilon^{-1/2}), \quad \forall 0 \leq s < t,\ \forall \varepsilon \in (0,1),\ \forall \ell \geq 0.$$

证明。我们沿用 [MS21b 中引理 3.1] 的证明所采用的论证。固定 $0 \le s < t, \varepsilon \in (0,1)$，以及 $\ell \ge 0$。记 $\sigma = \inf\{r \ge 0 : Y_{-r} = \ell\}$，并记 $\tau \overset{\text{def}}{=} \sup\{r \ge 0 : Y_{-r} = \varepsilon(t-s)^2\}$。由马尔可夫性质，

$$\mathbf{P}\left[\sup_{r\in[s,t]} Y_{-r} < \varepsilon(t-s)^2 \;\middle|\; Y_{-s} = \ell\right] = \mathbf{P}\left[\sup_{r\in[\sigma,\sigma+(t-s)]} Y_{-r} < \varepsilon(t-s)^2\right].$$

再次，由马尔可夫性质（参见 (2.2)），$\{Y_{r-\tau}\}_{r\in[0,\tau]}$ 服从从 $\varepsilon(t-s)^2$ 出发的 $3/2$-稳定 CSBP 的分布。记 E 为这样一个事件：$[0,\tau]$ 中存在一个长度至少为 $t-s$ 的子区间，在此期间 $Y_{r-\tau}$ 小于 $\varepsilon(t-s)^2$。显然，$\sup_{r\in[\sigma,\sigma+(t-s)]} Y_{-r} < \varepsilon(t-s)^2$ 的事件包含于事件 E。因此，只需证明存在普适常数 α、$C > 0$，使得 $\mathbf{P}[E] \le C\exp(-\alpha\varepsilon^{-1/2})$。这可直接由 MS21b 的引理 3.1] 的证明得出。引理 3.3 的证明至此完成。□

3.2. **度量球的体积**。

引理 3.4. 设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 是一个 γ-*LQG* 锥。那么对每个 $\zeta > 0$，几乎必然存在 $\varepsilon_* \in (0,1)$ 使得

$$\varepsilon^{d_\gamma+\zeta} \le \mathcal{M}_\Phi(B_\varepsilon(z; D_\Phi)) \le \varepsilon^{d_\gamma-\zeta}, \quad \forall z \in B_1(0; D_\Phi),\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*].$$

证明。根据 [MQ25，引理 2。2]，对于 $(\widehat{\mathbf{C}}\ \Phi^{\text{sph}}; 0, \infty)$ 这一 γ-LQG 球面的几乎每个实例，都存在 $\varepsilon_* \in (0,1)$ 使得

$$\varepsilon^{d_\gamma+\zeta} \le \mathcal{M}_{\Phi^{\text{sph}}}(B_\varepsilon(z; D_{\Phi^{\text{sph}}})) \le \varepsilon^{d_\gamma-\zeta}, \quad \forall z \in \mathbf{C},\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*].$$

因此，引理 3.4 直接由以下事实得出：在事件 $D_{\Phi^{\text{sph}}}(0,\infty) > 2$ 上，以 $B_2^\bullet(0; D_\Phi)$ 和 $B_2^\bullet(0; D_{\Phi^{\text{sph}}})$ 参数化的 γ-LQG 曲面的分布互相绝对连续。（事实上，$B_2^\bullet(0; D_\Phi)$ 和 $B_2^\bullet(0; D_{\Phi^{\text{sph}}})$ 的边界长度分布都相对于 $\mathbf{R}_{>0}$ 上的勒贝格测度互相绝对连续；并且给定边界长度后，以 $B_2^\bullet(0; D_\Phi)$ 和 $B_2^\bullet(0; D_{\Phi^{\text{sph}}})$ 参数化的 γ-LQG 曲面具有相同的条件分布。）□

引理 3.5。设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 是一个 γ-*LQG* 锥。设 $\eta' : (-\infty, \infty) \to \mathbf{C}$ 是一条独立的整平面空间填充 $SLE_{\kappa'}$ 曲线，从 ∞ 到 ∞，并以 $\mathcal{M}_\Phi$ 参数化。设 $T > 0$。给定 Φ 和 η'，令 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为从 $\mathcal{M}_\Phi|_{\eta'([-T,T])}$ 中条件独立抽取的样本（将其重新归一化为概率测度）。那么对每个 $\zeta > 0$，在事件 $B_1(0; D_\Phi) \subset \eta'([-T,T])$ 发生的条件下，几乎必然存在 $\varepsilon_* \in (0,1)$ 使得

$$B_1(0; D_\Phi) \subset \bigcup \left\{ B_\varepsilon(x_n; D_\Phi) : n \in [1, \varepsilon^{-d_\gamma-\zeta}]_{\mathbf{Z}},\ x_n \in B_1(0; D_\Phi) \right\}, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*]. \tag{3.1}$$

证明。用 $E_1(T)$ 表示事件 $B_1(0; D_\Phi) \subset \eta'([-T,T])$。对每个 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，用 $E_2(\varepsilon_0)$ 表示事件

$$\varepsilon^{d_\gamma+\zeta/2} \le \mathcal{M}_\Phi(B_\varepsilon(z; D_\Phi)) \le \varepsilon^{d_\gamma-\zeta/2}, \quad \forall z \in B_1(0; D_\Phi),\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

根据引理 3.4，只需证明几乎必然在事件 $E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0)$ 上，存在 $\varepsilon_* \in (0,1)$ 使得（3.1）成立。对于每个 $j \in \mathbf{N}$，记 $F(j)$ 为如下事件

$$B_1(0; D_\Phi) \subset \bigcup \left\{ B_{2^{-j-1}}(x_n; D_\Phi) : n \in [1, 2^{j(d_\gamma+\zeta)}]_{\mathbf{Z}},\ x_n \in B_1(0; D_\Phi) \right\}.$$

注意，若对所有 $j \ge \lfloor \log_2(1/\varepsilon_*) \rfloor$，$F(j)$ 都发生，则 (3.1) 成立。注意，若 $F(j)$ 不发生，则存在 $x \in B_1(0; D_\Phi)$，使得对所有 $n \in [1, 2^{j(d_\gamma+\zeta)}]$with $x_n \in B_1(0; D_\Phi)$，都有 $x_n \notin B_{2^{-j-1}}(x; D_\Phi)$。在这种情形下，若 $D_\Phi(0,x) \ge 2^{-j-2}$，则令 x' 表示从 0 到 x 的 D_Φ-测地线上的点，使得 $D_\Phi(x', x) = 2^{-j-2}$；否则，令 $x' \overset{\text{def}}{=} 0$。无论哪种情形，我们都有 $B_{2^{-j-2}}(x'; D_\Phi) \subset B_1(0; D_\Phi)$，且对所有 $n \in [1, 2^{j(d_\gamma+\zeta)}]_{\mathbf{Z}}$，都有 $x_n \notin B_{2^{-j-2}}(x'; D_\Phi)$。将 $G(j)$ 记为

事件： $x_{\lfloor 2^{j(d_\gamma+\zeta)}\rfloor+1} \in B_1(0;\, D_\Phi)$，且对所有 $n \in [1, 2^{j(d_\gamma+\zeta)}]_{\mathbf{Z}}$， $D_\Phi(x_n, x_{\lfloor 2^{j(d_\gamma+\zeta)}\rfloor+1}) \geq 2^{-j-3}$。那么

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[G(j) \mid E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0) \cap F(j)^c] &\geq \mathbf{P}\left[x_{\lfloor 2^{j(d_\gamma+\zeta)}\rfloor+1} \in B_{2^{-j-3}}(x'; D_\Phi) \;\middle|\; E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0) \cap F(j)^c\right] \\ &\geq 2^{-(j+3)(d_\gamma+\zeta/2)}/(2T).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\mathbf{P}[G(j) \mid E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0)] \leq (1 - 2^{-(j+3)(d_\gamma+\zeta/2)}/(2T))^{\lfloor 2^{j(d_\gamma+\zeta)}\rfloor} \leq \exp(-c2^{j\zeta/2})$$

对于某个 $c = c(\zeta,\ T) > 0$。因此，我们得出

$$\mathbf{P}[F(j)^c \mid E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0)] \leq \frac{\mathbf{P}[G(j) \mid E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0)]}{\mathbf{P}[G(j) \mid E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0) \cap F(j)^c]} \leq \exp(-c2^{j\zeta/2}) \cdot 2^{(j+3)(d_\gamma+\zeta/2)} \cdot (2T).$$

因此，由 Borel–Cantelli 引理可知，几乎必然在事件 $E_1(T) \cap E_2(\varepsilon_0)$发生时，存在 $j_0 \in \mathbf{N}$ 使得 $F(j)$ 对所有 $j \geq j_0$均发生。这就完成了引理 3.5的证明。 □

3.3. **度量带的共形模。**

命题 3.6. 设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 为一个 γ-*LQG* 锥。那么，对每个 $p > 2$，存在 $q = q(p) > d_\gamma$ 使得

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_\varepsilon p}] = O(\varepsilon^q) \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

其中 m_ε 表示 $A^{\bullet}_{\varepsilon,1}(0; D_\Phi)$ 的共形模数。

命题 3.7. 设 $\mathcal{A}_T$ 是一个锥型度量带，其内边界长度为一，宽度为$T > 0$。记 m_T 为 $\mathcal{A}_T$的共形模数。那么对每个 $p > 2$，存在 $q = q(p) > d_\gamma$，使得

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_T p}] = O(T^{-q}) \quad as\ T \to \infty.$$

命题 3.7是命题3.6 的固定内边界长度类比，并且可以由后者轻易推出。命题 3.6 的证明需要若干预备引理。证明策略概述见其前紧接着的讨论。

下面的引理指出，任何包围原点且共形模数较大的双连通域，都包含一个以中心为原点的欧几里得环域，其共形模数与该域的共形模数之差至多为一个加法常数。

引理 3.8. 设 $A \subset \mathbf{C}$ 是一个双连通域，且原点包含在 $\mathbf{C} \setminus A$ 的有界连通分支中。记 m 为 A的共形模数； I （分别为 O）表示 A的内边界（分别为外边界）； R_1 定义为= 下确界$\{R > 0 :$ $I \subset B_R(0)\}$； R_2 定义为= 上确界$\{R > 0 : O \cap B_R(0) = \emptyset\}$。那么

$$\mathrm{e}^{2\pi m}/16 - 1 \leq R_2/R_1 \leq \mathrm{e}^{2\pi m}.$$

证明。 显然，

$$m \geq (\text{conformal modulus of } A_{R_1,R_2}(0)) = \frac{1}{2\pi}\log(R_2/R_1),$$

这意味着 $R_2/R_1 \leq \mathrm{e}^{2\pi m}$。另一方面，根据 [Ahl73、定理 4-7 和 (4-21)]，

$$m \leq (\text{conformal modulus of } \mathbf{C} \setminus ([0, R_1] \cup [R_2, \infty))) \leq \frac{1}{2\pi}\log(16(R_2/R_1 + 1)),$$

这意味着 $\mathrm{e}^{2\pi m}/16 - 1 \leq R_2/R_1$。引理 3.8 的证明至此完成。 □

下面的引理表明，度量球的欧几里得大小受到圆平均过程的严格控制。

引理 3.9。 设$(\mathbf{C}\ \Phi;0,\infty)$为一个 γ-*LQG* 锥的圆平均嵌入。对每个 $t>0$，记 $R_t \overset{\text{def}}{=} \sup\{r>0:\ \Phi_r(0)\ +Q\log(r)\ =(1/\xi)\log(t)\}$。则

$$\mathbf{E}[(\inf\{t>0:B_1(0;D_\Phi)\subset B_{R_t}(0)\})^s]<\infty,\quad \forall s>0.$$

证明。 首先，我们断言 $\inf\{t>0:\ B_1(0;D_\Phi)\ \subset B_{R_t}(0)\}$ 与以下随机变量同分布

$$\inf\{t>0:B_{1/t}(0;D_\Phi)\subset B_1(0)\}=D_\Phi(0,\partial B_1(0))^{-1}.$$

为此，令 $\Phi^t(\bullet)\ \text{def}\ =\ \Phi(R_t\bullet)\ +Q\log(R_t)\ -(1/\xi)\ \log(t)$。根据 [DMS21，命题 4.13，(i)]，$\Phi^t$与 Φ同分布。另一方面，注意到 $B_{1/t}(0;D_{\Phi^t})\ =R_t^{-1}B_1(0;\ D_\Phi)$ 几乎必然成立。由此完成了该断言的证明。

回忆一下，$\Phi|_{B_1(0)}$ 与全平面高斯自由场的相应限制同分布，其中该全平面高斯自由场经过归一化，使其在 $\partial B_1(0)$ 上的圆平均为零，再减去 $\gamma\log(|\bullet|)$。因此，由[DFG+20，命题 3.12] 可立即推出 $\mathbf{E}[D_\Phi(0,\partial B_1(0))^{-s}]<\infty$ 对所有 $s>0$均成立。至此，引理 3.9的证明完成。 □

下面的引理表明，若一个围绕原点的双连通域的共形模数有正下界，那么其"偏心率"就有一个仅取决于该模数的常数上界。

引理 3.10. 对每个 $m>0$，都存在 $b=b(m)\in(0,\ 1)$ 使得以下结论成立：设 $A\subset\mathbf{C}$ 是一个双连通域，且原点包含在 $\mathbf{C}\backslash\ A$ 的有界连通分支中。假设 A 的共形模数至少为 m。那么存在 $x>0$，使得

- 从 x 出发的平面布朗运动以概率 $1/2$ 先击中 A 的内边界，而非外边界，
- $B_{bx}(x)\subset A$，
- $B_{bx}(0)$ 与 A 的外边界不相交，且
- A 的内边界包含于 $B_{b^{-1}x}(0)$。

证明。注意，存在 $x>0$，使得从 x 出发的平面布朗运动以 $1/2$ 的概率先于外边界到达 A 的内边界。众所周知，存在一个普适常数 $c_1>0$，使得从 x 出发的平面布朗运动在离开 A 之前，以至少 $c_1\mathrm{e}^{-\pi/m}$ 的概率将 A 的内边界和外边界分离。记$b_1\ \text{def}=\ \sup\{b>0:\ B_{bx}(x)\ \subset A\}$。我们注意到，$\partial A$ 在A_{b_1x}的内边界与外边界之间穿行，$_x(x)$（也就是说，$\partial A\cap A_{b_1x}$的$_x(x)$中存在一个连通分支，同时与 $\partial B_{b_1x}(x)$和 $\partial B_x(x)$相交）。因此，根据 Beurling 估计，存在一个普适常数 $c_2>0$，使得从 x 出发的平面布朗运动在离开 A之前离开 $B_x(x)$ 的概率至多为 $c_2b_1^{1/2}$。由此可得 $c_2b_1^{1/2}\geq c_1\mathrm{e}^{-\pi/m}$。

记 $b_2\ \text{def}=\ \sup\{b\ >\ 0:\ B_{bx}(0)$ 不与 $A\}$ 的外边界相交。于是存在 $y\in B_{b_2x}(0)$，使得从 y 出发的平面布朗运动在到达外边界之前先到达 A 的内边界，其概率为 $1/2$。这意味着，从 y 出发的平面布朗运动在离开 A 之前将 A 的内边界和外边界分离的概率至少为 $c_1\mathrm{e}^{-\pi/m}$。另一方面，我们注意到，A 的外边界穿过 $A_{2b_2x,\ (1-b_2)x}(y)$ 的内边界与外边界之间。因此，根据 Beurling 估计，存在一个普适常数 $c_3>0$，使得从 y 出发的平面布朗运动在碰到 A 的外边界之前离开 $B_{(1-b_2)x}(y)$ 的概率至多为 $c_3b_2^{1/2}$。这意味着 $c_3b_2^{1/2}\geq c_1\mathrm{e}^{-\pi/m}$。

记 $b_3 \overset{\text{def}}{=} \sup\{b > 0 : A$ 的内边界包含于 $B_{b^{-1}x}(0)\}$。我们注意到， A 的内边界穿过 $A_{x,(b_3^{-1}-1)x}(x)$ 的内边界与外边界之间。因此，根据 Beurling 估计，存在一个普适常数 $c_4 > 0$，使得从 x 出发的平面布朗运动在碰到 A 的内边界之前离开 $B_{(b_3^{-1}-1)x}(x)$ 的概率至多为 $c_4 b_3^{1/2}$。这意味着 $c_4 b_3^{1/2} \geq c_1 \mathrm{e}^{-\pi/m}$。引理 3.10 的证明至此完成。□

引理 3.11. 取一个支集包含于 $B_1(0)$ 且满足 $\int \psi(z)\mathrm{d}z = 1$ 的光滑隆起函数 ψ。那么，对每个 $\alpha > 0$，都存在 $m = m(\alpha) > 0$、 $M = M(\alpha) > 0$ 和 $C = C(\alpha) > 0$，使得下述结论成立：设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 为一个 γ-*LQG* 锥。对于每个 $t > 0$，记 $E_t = E_t(m, M)$ 为下列条件成立的事件：

> ***(i)*** $A^{\bullet}_{t/\mathrm{e},t}(0; D_\Phi)$ 的共形模数至少为 m。***(ii)*** 对每个嵌入 $A^{\bullet}_{t/\mathrm{e},t}(0; D_\Phi) \subset \mathbf{C}$，若原点包含在 $\mathbf{C} \setminus A^{\bullet}_{t/\mathrm{e},t}(0; D_\Phi)$ 的有界连通分支中，则下述结论成立：令 $b = b(m) \in (0, 1)$ 如引理 *3.10* 中所述。那么，存在 $c = c(m) \in (0, b)$，使得对于每个满足以下条件的 $x > 0$
>
> - 从 x 出发的平面布朗运动在到达外边界之前命中 $A^{\bullet}_{t/\mathrm{e}\,t}(0; D_\Phi)$ 的内边界的概率为 $1/2$，并且
> - $B_{bx}(x) \subset A^{\bullet}_{t/\mathrm{e}\,t}(0; D_\Phi)$，
>
> 我们有
>
> $$\langle \Phi, \psi_{x,c} \rangle \in [(1/\xi)\log(t) - Q\log(x) - M, (1/\xi)\log(t) - Q\log(x) + M],$$
>
> *where* $\psi_{x,c}(\bullet) \overset{\text{def}}{=} (cx)^{-2}\psi((cx)^{-1}(\bullet - x))$.

设 $\{t_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ 是正实数的递减序列，使得对所有 $j \in \mathbf{N}$，都有 $t_{j+1} \leq t_j/\mathrm{e}^2$。那么

$$\mathbf{P}[\textit{there exists } j \in [1, n]_{\mathbf{Z}} \textit{ such that } E_{t_j/\mathrm{e}} \textit{ occurs}] \geq 1 - C\mathrm{e}^{-\alpha n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

引理 3.11 的证明。显然，事件 E_t 几乎必然由以 $A^{\bullet}_{t/\mathrm{e},t}(0; D_\Phi)$ 参数化的 γ-LQG 曲面所决定。对于每个 $t \geq 0$，记 $Y_{-t} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_t(0; D_\Phi))$。对于每个 $n \in \mathbf{N}$，记 j_n 为满足 $Y_{-t_j} \leq At_j^2$ 的 $j \in \mathbf{N}$ 中第 n 小的一个。根据引理 3.2，我们可以选取足够大的 A，使得当 $n \to \infty$ 时，$\mathbf{P}[j_{\lfloor n/2 \rfloor} \leq n] = 1 - O(\mathrm{e}^{-\alpha n})$。

我们断言，对于每个 $p \in (0,1)$，我们可以选取足够小的 m 和足够大的 M，使得

$$\mathbf{P}[E_{t_j/\mathrm{e}} \mid Y_{-t_j} = at_j^2] \geq p, \quad \forall j \in \mathbf{N},\ \forall a \in [0, A].$$

根据缩放性质，$\mathbf{P}[E_{t/\mathrm{e}} \mid Y_{-t} = at^2]$ 不依赖于 t 的选取。因此，只需考虑情形 $t = 1$。给定 Y_{-1} 时，过程 $\{Y_{s-1}\}^{s \in [0,1]}$ 的条件分布是一个从 Y_{-1} 出发并在时刻一达到零的3/2-稳定 CSBP。这意味着赋值

$$a \mapsto (\text{the conditional law of } Y_{-1/\mathrm{e}} \text{ given } Y_{-1} = a)$$

对于 $a \in \mathbf{R}^{\geq 0}$，关于全变差距离是连续的。此外，给定 $Y_{-1/\mathrm{e}}$ 时，$A^{\bullet}_{1/\mathrm{e}^2,1/\mathrm{e}}(0; D_\Phi)$ 与 Y_{-1} 条件独立。这意味着赋值

$$a \mapsto (\text{the conditional law of } A^{\bullet}_{1/\mathrm{e}^2,1/\mathrm{e}}(0; D_\Phi) \text{ given } Y_{-1} = a)$$

对于 $a \in \mathbf{R}^{\geq 0}$，相对于全变差距离是连续的。类似地，对于每个$a \geq 0$，给定 $Y_{-1} = a$ 时 $A^{\bullet}_{1/\mathrm{e}^2,1/\mathrm{e}}(0; D_\Phi)$ 的条件分布与 $A^{\bullet}_{1/\mathrm{e}^2,1/\mathrm{e}}(0; D_\Phi)$ 的边缘分布互相绝对连续（因为给定 $Y_{-1} = a$ 时 $Y_{-1/\mathrm{e}}$ 的条件分布和 $Y_{-1/\mathrm{e}}$ 的边缘分布都相对于 $\mathbf{R}$ $a \in$上的勒贝格测度互相绝对连续

）。另一方面，显然，当 $m \to 0$ 和 $M \to \infty$ 时，$\mathbf{P}[E_{1/\mathrm{e}}] \to 1$。事实上，显然，当 $m \to 0$ 时，$\mathbf{P}[\text{(i)}] \to 1$；并且由引理 3.14 可立即得出，当$M \to \infty$时，$\mathbf{P}[\text{(ii)}] \to 1$。这意味着对于每个 $a \geq 0$，当 $m \to 0$ 和 $M \to \infty$ 时，$\mathbf{P}[E_{1/\mathrm{e}} \mid Y_{-1} = a] \to 1$。根据上述讨论，赋值 $\mathbf{R}_{\geq 0} \to [0,1]$：$a \mapsto \mathbf{P}[E_{1/\mathrm{e}} \mid Y_{-1} = a]$ 是连续的。因此，我们得出

$$\inf_{a \in [0,A]} \mathbf{P}[E_{1/\mathrm{e}} \mid Y_{-1} = a] \to 1 \quad \text{as } m \to 0 \text{ and } M \to \infty.$$

这就完成了断言的证明。

给定 Y_{-t_j} 后，由 $B^{\bullet}_{t_j}(0;\, D_\Phi)$ 参数化的 γ-LQG 曲面与由 $\mathbf{C} \setminus B^{\bullet}_{t_j}(0;\, D_\Phi)$ 参数化的曲面条件独立。这意味着 $\#\{k \in [1,n]_{\mathbf{Z}} : E_{t_{j_k}} \text{发生}\}$ 在随机意义上支配一个具有 n 次试验、成功概率为 p的二项随机变量。因此，只要选择足够接近于一的 p，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[\text{不存在满足条件的 } j \in [1,n]_{\mathbf{Z}}\text{，使得 } E_{t_j/\mathrm{e}} \text{ 发生}] \\
&\leq \mathbf{P}[j_{\lfloor n/2 \rfloor} > n] + \mathbf{P}[\text{不存在满足条件的 } k \in [1,n/2]_{\mathbf{Z}}\text{，使得 } E_{t_{j_k}} \text{ 发生}] \\
&\leq O(\mathrm{e}^{-\alpha n}) + (1-p)^{\lfloor n/2 \rfloor} = O(\mathrm{e}^{-\alpha n}) \quad \text{as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

这就完成了引理3.11的证明。 □

注记 3.12. 从引理 3.11 证明中所用论证的类似论证可立即得出以下结论：对于每个 $\lambda \in (0,1)$、$\alpha > 0$ 和 $b \in (0,1)$，存在 $p = p(\lambda, \alpha, b) \in (0,1)$ 以及 $C = C(\lambda, \alpha, b) > 0$，使得以下结论成立：设 $(\mathbf{C}, \Phi; 0, \infty)$ 是一个 γ-LQG 锥。设 $\{t_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ 是一个正实数递减序列，满足对所有 $j \in \mathbf{N}$ 都有 $t_{j+1}/t_j \leq \lambda$。设 $\{E_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ 是一列事件，其中每个 E_j 都几乎必然由以 $A^{\bullet}_{t_{j+1}, t_j}(0;\, D_\Phi)$ 参数化的 γ-LQG 曲面所决定。假设对所有 $j \in \mathbf{N}$ 都有 $\mathbf{P}[E_j] \geq p$。那么

$$\mathbf{P}[\#\{j \in [1,n]_{\mathbf{Z}} : E_j \text{ occurs}\} \geq bn] \geq 1 - C\mathrm{e}^{-\alpha n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

引理 3.13. 对每个 $n \in \mathbf{N}$，都存在 $a_n > 0$ 使得以下结论成立：设 ϕ：$B_1(0) \to \mathbf{C}$ 是单叶函数，且 $|\phi'(0)| \leq 1$。则 $|\phi^{(n)}(0)| \leq a_n$。

证明. 根据调和函数的标准梯度估计，存在一个普适常数 $C > 0$，使得对每个调和函数 u：$B_1(0) \to \mathbf{R}$，

$$|\nabla u(z)| \leq C(1-|z|)^{-1} \sup_{x \in B_1(0)} |u(x)|, \quad \forall z \in B_1(0).$$

由科比畸变定理，存在 $a_1 > 0$ 使得 $|\phi'(z)| \leq a_1$ 对所有 $z \in B_{1/2}(0)$均成立。反复应用上述梯度估计，可得 $a_n > 0$ 使得 $|\phi^{(n)}(z)| \leq a_n$ 对所有$z \in B_{2^{-n}}(0)$均成立，因而 $|\phi^{(n)}(0)| \leq a_n$。引理 3.13 的证明完毕。 □

引理 3.14. 沿用引理 *3.11* 中的记号，设 $A \subset \mathbf{C}$ 是一个共形模数至少为 m 的双连通域。考虑形如 $|\phi'|^2(\psi_{x,c} \circ \phi)$的函数族，其中$\phi$：$A \to \phi(A)$ 是一个共形映射，满足

- 原点包含在$\mathbf{C}\setminus \phi(A)$的有界连通分支中，
- 从 x 出发的平面布朗运动在到达 $\phi(A)$ 的外边界之前先到达其内边界的概率为 $1/2$，并且
- $B_{bx}(x) \subset \phi(A)$。

则存在 $c = c(m) \in (0,b)$，使得该集合在测试函数空间 $C_c^\infty(A)$中相对紧。

证明。 回想一下，子集 $S \subset C_c^\infty(A)$ 是相对紧的，当且仅当

- 存在一个紧子集 $K \subset A$，使得对所有 $\psi \in S$，$\operatorname{supp}(\psi) \subset K$，并且
- 对于每个多重指标 α，都存在 $C_\alpha > 0$，使得 $\|\partial^\alpha \psi\|_\infty \le C_\alpha$ 对所有 $\psi \in S$均成立。

不失一般性，设 $A = A_{\mathrm{e}^{-\pi m},\mathrm{e}^{\pi m}}(0)$。此外，根据缩放性质，不失一般性，设 $x = 1$。因此，$\phi^{-1}(1) \in \partial B_1(0)$。根据科比畸变定理，$\sup_{z\in B_{b/2}}(1)|(\phi^{-1})'(z)|$有一个仅取决于 m 和 b 的常数上界。这意味着存在 $c = c(m) \in (0, b/2)$，使得 $\phi^{-1}(B_c(1)) \subset A_{\mathrm{e}^{-\pi m/2},\mathrm{e}^{\pi m/2}}(0)$。注意，$\operatorname{supp}(|\phi'|^2(\psi_{1,c} \circ \phi)) \subset \phi^{-1}(B_c(1))$。因此，我们得到 $\operatorname{supp}(|\phi'|^2(\psi_{1,c} \circ \phi)) \subset A_{\mathrm{e}^{-\pi m/2},\mathrm{e}^{\pi m/2}}(0)$。固定一个多重指标 α。注意，存在 $C_\alpha = C_\alpha(\psi, c)$ 和一个多项式$P_\alpha \in \mathbf{R}[X]$，使得

$$\left\|\partial^\alpha\left(|\phi'|^2(\psi_{1,c}\circ\phi)\right)\right\|_\infty \le C_\alpha P_\alpha\left(\sup_{k\in[1,|\alpha|+1]_{\mathbf{Z}}} \|\phi^{(k)}|_{\phi^{-1}(B_c(1))}\|_\infty\right).$$

因此，只需证明对于每个 $k \in \mathbf{N}$，都存在 $a_k = a_k(m) > 0$，使得$\|\phi^{(k)}|_{\phi^{-1}(B_c(1))}\|_\infty \le a_k$。固定 $y \in \phi^{-1}(B_c(1))$。由上述讨论可知，$y \in A_{\mathrm{e}^{-\pi m/2},\mathrm{e}^{\pi m/2}}(0)$。特别是，存在 $a_0 = a_0(m) > 0$，使得 $B_{a_0}(y) \subset A$。由于 $0 \notin \phi(B_{a_0}(y))$ 且 $|\phi(y)| < 1 + c$，由科比四分之一定理可知，对于某个 $a_1 = a_1(m) > 0$，有 $|\phi'(y)| \le a_1$。结合引理 3.13，我们得出结论：存在 $a_k = a_k(a_0, a_1) > 0$，使得 $|\phi^{(k)}(y)| \le a_k$。至此，引理 3.14 的证明完成。□

命题 3.6 的证明思路如下。我们先固定一个足够小的 $\zeta > 0$。回顾引理 3.9，我们可以对度量球的欧几里得大小进行界定。假设 $T > 0$是一个确定性时间，满足 $\Phi_{\mathrm{e}^{-T}}(0) - QT \ge -((1-\zeta)/\xi)\log(1/\varepsilon)$。在此条件下，过程 $\{\Phi_{\mathrm{e}^{-t}}(0)\}_{t\ge T}$ 是一个从 $\Phi_{\mathrm{e}^{-T}}(0)$ 出发、漂移为 γ 的布朗运动。若定义$R \operatorname{def}= \sup\{r \in (0, \mathrm{e}^{-T}) : \Phi_r(0) + Q\log(r) = -((1-\zeta)/\xi)\log(1/\varepsilon)\}$，则随着 $\varepsilon \to 0$，以超多项式级高概率有 $B_\varepsilon(0; D_\Phi) \subset B_R(0)$。结合引理 3.9 与带漂移布朗运动首次到达时间的拉普拉斯变换，我们得到

$$\mathbf{E}[\mathrm{outradius}(B^\bullet_\varepsilon(0; D_\Phi))^p \wedge 1] = O(\varepsilon^q) \quad \text{as } \varepsilon \to 0$$

对于某个常数 $q = q(p) > 4$。

为了估计共形模数，我们还需要对 $B^\bullet_1(0; D_\Phi)$ 的内半径进行界定。我们通过将引理 3.11 应用于度量带 $A^\bullet_{\varepsilon^\zeta,\,1}(0; D_\Phi)$ 来实现这一点。这意味着，以高概率而言，该度量带的共形模数有一个正的下界，且该带内一个小欧几里得球上的 Φ平均值有界。接下来，引理 3.10 使我们能够控制 $B^\bullet_1(0; D_\Phi)$ 的内半径。它保证存在一个以原点为中心的欧几里得圆，使得度量带 $A^\bullet_{\varepsilon^\zeta,\,1}(0; D_\Phi)$ 与该圆保持接近。Φ 的圆平均与其在这个小欧几里得球上的平均值之差具有高斯尾，因此能够得到良好的控制。最后，我们将上文讨论的确定性半径 e^{-T} 应用于该欧几里得圆的所有可能空间尺度。

命题 *3.6* 的证明。 不失一般性，我们可以假设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 是圆平均嵌入。根据引理 3.8，只需证明

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{\mathrm{outradius}(B^\bullet_\varepsilon(0; D_\Phi))}{\mathrm{inradius}(B^\bullet_1(0; D_\Phi))}\right)^p \wedge 1\right] = O(\varepsilon^q) \quad \text{as } \varepsilon \to 0,$$

其中，外半径$(B^\bullet_\varepsilon(0;\ D_\Phi))$ def $= \inf\{R > 0 :\ B^\bullet_\varepsilon(0;\ D_\Phi) \subset B_R(0)\}$，内半径$(B^\bullet_1(0;\ D_\Phi))$ def $= \sup\{R > 0 :\ B_R(0) \subset B^\bullet_1(0;\ D_\Phi)\}$。固定 $p > 2$和 $\alpha > 4$。取一个足够小的 $\zeta > 0$，稍后再确定。由引理 3.11，存在 $m = m(\zeta, \alpha) > 0$和 $M = M(\zeta, \alpha) > 0$，使得以下结论成立：令事件 $\{E^j \operatorname{def} = E_{\mathrm{e}^{-j}} = E_{\mathrm{e}^{-j}}(m, M)\}_{j\in\mathbf{N}}$如引理 3.11 中所述。于是

随着 $\varepsilon \to 0$，其成立的概率为 $1 - O(\varepsilon^\alpha)$，因为存在 $j \in [\zeta \log(1/\varepsilon)\ 2\zeta \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}$，使得$E^j$发生。将事件 $F_1(\varepsilon)$ 记作，即 $F_1(\varepsilon) \overset{\text{定义}}{=} \bigcup_{j \in [\zeta \log(1/\varepsilon)\ 2\zeta \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}} E^j$。根据定义，在事件 $F_1(\varepsilon)$ 上，存在 $j \in [\zeta \log(1/\varepsilon)\ 2\zeta \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}$ 和 $x > 0$，使得

- $B_{bx}(x) \subset A^{\bullet \mathrm{e}^{-j-1},\ \mathrm{e}^{-j}}(0;\ D_\Phi)$,
- 内半径$(B_1^\bullet(0;\ D_\Phi)) \geq$内半径$(B^{\bullet \mathrm{e}^{-j}}(0;\ D_\Phi)) \geq bx$，并且
- $\langle \Phi, \psi_{x,c} \rangle \in [-j/\xi - Q\,$对数$(x)\ - M, -j/\xi - Q\,$对数$(x)\ + M]$。

令 $\lambda \overset{\text{def}}{=} 1 - b$。通过适当减小 b，不失一般性，我们可以假设 $x = \lambda^k$ 对某个 $k \in \mathbf{Z}$成立。

记 $F_2(\varepsilon)$ 为事件：$B_{\varepsilon^\zeta}(0;\ D_\Phi) \subset B_1(0)$。由于对所有 $s > 0$ 都有 $\mathbf{E}[D_\Phi(0, \partial B_1(0))^{-s}] < \infty$（参见 [DFG+20，命题 3.12]），可得 $\mathbf{P}[F_2(\varepsilon)] = 1 - O(\varepsilon^\infty)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时成立。另一方面，由 [DFG+20，命题 3.18] 可知，我们可以选取足够大的 $A = A(\zeta, \alpha, b) > 0$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，$B_{\varepsilon^{A \log(1/\lambda)}}(0) \subset B_{\varepsilon^{2\zeta}}(0;\ D_\Phi)$ 以概率 $1 - O(\varepsilon^\alpha)$ 成立。记$F_3(\varepsilon)$ 为此事件。特别地，在事件 $F_1(\varepsilon) \cap F_2(\varepsilon) \cap F_3(\varepsilon)$ 上，若 $x = \lambda^k$ 如前一段所述，则 $k \in [1, A \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}$。

由于 $\Phi|_{B_1}(0)$ 的分布与全平面高斯自由场在相应区域上的限制相同，且该场经过归一化，使其在 $\partial B_1(0)$ 上的圆平均为零，再减去 $\gamma \log(|\bullet|)$，因此对于 $x \in (0, 1)$，随机变量 $\Phi_x(0) - \Phi, \psi_{x,c}$ 是高斯分布，其均值和方差不依赖于 x。由标准高斯尾部估计和并集界可知，当 $\varepsilon \to 0$ 时，以超多项式级高概率，对所有 $k \in [1, A \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}$，都有 $|\Phi_{\lambda^k}(0) - \Phi, \psi_{\lambda^k,b}| \leq (\zeta/\xi) \log(1/\varepsilon)$。将此事件记为 $F_4(\varepsilon)$。特别地，我们得出，在事件 $F_1(\varepsilon) \cap F_2(\varepsilon) \cap F_3(\varepsilon) \cap F_4(\varepsilon)$ 上，存在 $k \in [1, A \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}$，使得

- $\mathrm{inradius}(B_1^\bullet(0; D_\Phi)) \geq b\lambda^k$, and
- $\Phi_{\lambda^k}(0) \in [Qk \log(1/\lambda) - M - (3\zeta/\xi) \log(1/\varepsilon), Qk \log(1/\lambda) + M]$.

对于每个 $k \in \mathbf{N}$，记 $\Phi^k(\bullet) \overset{\text{def}}{=} \Phi(\lambda^k \bullet) - Qk \log(1/\lambda)$；$F^k$ 表示事件：$\Phi_{\lambda^k}(0) \in [Qk \log(1/\lambda) - M - (3\zeta/\xi) \log(1/\varepsilon)\ Qk \log(1/\lambda)$（或者等价地，$\Phi_1^k(0) \in [-M - (3\zeta/\xi) \log(1/\varepsilon)\ M]$）；$R^k_{\varepsilon^{1-\zeta}} \overset{\text{def}}{=} \sup\{r \in (0, 1) : \Phi_r(0) + Q \log(r) + ((1 - \zeta)/\xi) \log(1/\varepsilon) = 0$。注意，给定 $\Phi_1^k(0)$ 后，$\Phi^k|_{B_1}(0)$ 的分布与经过相应限制的全平面高斯自由场相同，后者经归一化后在 $\partial B_1(0)$ 上的圆平均等于 $\Phi_1^k(0)$ 减去 $\gamma \log(|\bullet|)$。因此，由引理 3.9 可知，几乎必然在事件 F^k 上，

$$\mathbf{P}\left[B_\varepsilon(0; D_{\Phi^k}) \subset B_{R^k_{\varepsilon^{1-\zeta}}}(0) \;\middle|\; \Phi_1^k(0) \right] = 1 - O(\varepsilon^\infty),$$

以关于 k 一致的速率。此外，我们注意到 $B_\varepsilon(0;\ D_\Phi) = \lambda^k B_\varepsilon(0;\ D_{\Phi^k})$。用 $F_5(\varepsilon)$ 表示以下事件：对于所有 $k \in [1, A \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}$，$B_\varepsilon(0;\ D_{\Phi^k}) \subset B_{R^k_{\varepsilon^{1-\zeta}}}(0)$，且 $F(\varepsilon) \overset{\text{定义}}{=} F_1(\varepsilon) \cap F_2(\varepsilon) \cap F_3(\varepsilon) \cap F_4(\varepsilon) \cap F_5(\varepsilon)$。由上述讨论可知

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\frac{\mathrm{outradius}(B_\varepsilon^\bullet(0; D_\Phi))}{\mathrm{inradius}(B_1^\bullet(0; D_\Phi))} \right)^p \wedge 1 \right] &\leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{\mathrm{outradius}(B_\varepsilon^\bullet(0; D_\Phi))}{\mathrm{inradius}(B_1^\bullet(0; D_\Phi))} \right)^p \mathbf{1}_{F(\varepsilon)} \right] + \mathbf{P}[F(\varepsilon)^c] \\
&\leq b^{-p} \sum_{k \in [1, A \log(1/\varepsilon)]_{\mathbf{Z}}} \mathbf{E}\left[(R^k_{\varepsilon^{1-\zeta}})^p \mathbf{1}_{F^k} \right] + O(\varepsilon^\alpha) \quad \text{as } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

最后，由于给定 $\Phi_1^k(0)$ 后，$\log(1/R^k_{\varepsilon^{1-\zeta}})$ 的分布与从 $\Phi_1^k(0)$ 出发、漂移为 $-(Q - \gamma)$ 的布朗运动首次到达 $-((1 - \zeta)/\xi) \log(1/\varepsilon)$ 的时刻的分布相同，因此，几乎必然

在事件 F^k 上，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[(R^k_{\varepsilon^{1-\zeta}})^p \;\Big|\; \Phi^k_1(0)\Big] &= \exp\Big(-\Big(\sqrt{(Q-\gamma)^2+2p}-(Q-\gamma)\Big)\Big(((1-\zeta)/\xi)\log(1/\varepsilon)+\Phi^k_1(0)\Big)\Big)\\ &\le \exp\Big(-\Big(\sqrt{(Q-\gamma)^2+2p}-(Q-\gamma)\Big)(((1-4\zeta)/\xi)\log(1/\varepsilon)-M)\Big)\\ &\le \varepsilon^{(1-4\zeta)(\sqrt{(Q-\gamma)^2+2p}-(Q-\gamma))/\xi+o(1)} \quad \text{as } \varepsilon\to 0,\end{aligned}$$

at 一种在 k 中一致的速率。通过选择足够小的 $\zeta>0$，我们有 e

$$(1-4\zeta)\Big(\sqrt{(Q-\gamma)^2+2p}-(Q-\gamma)\Big)\Big/\xi > \Big(\sqrt{(Q-\gamma)^2+4}-(Q-\gamma)\Big)\Big/\xi = d_\gamma.$$

这就完成了命题 3.6 的证明。 □

命题 *3.7* 的证明。固定 $p>2$。令 $(\mathbf{C}\ \Phi;\mathbf{0},\infty)$ 为一个 γ-LQG 锥。由命题 3.6 及缩放性质，存在 $q>4$，使得 $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{1,Tp}}]=O(T^{-q})$ 随 $T\to\infty$ 趋于 $m_{1,T}$表示 $A^{\bullet}_{1,T}(\mathbf{0};\ D_\Phi)$ 的共形模数。记 $\tau \overset{\text{def}}{=} \inf\{t\ge 0\colon\ \mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_t(\mathbf{0};\ D_\Phi))\ =1\}\wedge 1$。注意， τ 是由以下对象生成的滤过的一个停时

$$\{\text{the } \gamma\text{-LQG surface parameterized by } B^{\bullet}_t(0;D_\Phi)\}_{t\ge 0},$$

并且，给定 τ 以及事件 $\tau<1$，由 $A^{\bullet}_{\tau,T}(\mathbf{0};\ D_\Phi)$ 参数化的 γ-LQG 曲面在条件下是一个锥型度量带，其内边界长度为一，宽度为 $T-\tau$。这意味着

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{1,Tp}}]\ge \mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{\tau,Tp}}]\ge \mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{\tau,Tp}}\mathbf{1}_{\{\tau<1\}}]\ge \mathbf{P}[\tau<1]\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{Tp}}].$$

由于$\mathbf{P}[\tau<1]>0$，因此

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{Tp}}]\le \mathbf{P}[\tau<1]^{-1}\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_{1,Tp}}]=O(T^{-q}) \quad \text{as } T\to\infty.$$

命题3.7的证明至此完成。 □

4. 格罗莫夫双曲几何背景

本节回顾格罗莫夫双曲几何的标准内容（例如参见[Gro87、CDP90、GdlH90、BH99、Bon06、BS07、MT10]）。

设(X,d)为一个度量空间。格罗莫夫积 定义为

$$(x,y)_o \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(d(x,o)+d(y,o)-d(x,y)),\quad \forall o,x,y\in X.$$

The 度量空间(X,d)称为格罗莫夫（δ-）双曲的，如果存在 $\delta\ge 0$ 使得 at

$$(x,y)_o\ge (x,z)_o\wedge(y,z)_o-\delta,\quad \forall o,x,y,z\in X.$$

容易验证，若存在 $o\in X$，使得对所有x、 y、 $z\in X$，都有 $(x,y)_o\ge(x,z)_o\wedge(y,z)_o-\delta$，则 (X,d) 是格罗莫夫 2δ-双曲的。若 (X,d) 是测地的，则它是格罗莫夫双曲的，当且仅当存在 $\delta'\ge 0$，使得对所有 x、 y、 $z\in X$，都有 $P_{x,y}\subset B_{\delta'}(P_{x,z}\cup P_{y,z};\ d)$，其中 $P_{x,y}$ 表示连接 x 和 y的任意 d-测地线。

设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间。若存在 $C\ge 1$ 使得映射 $F\colon (X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为拟等距映射，则

- $C^{-1}d_X(x,y)-C\le d_Y(F(x),F(y))\le Cd_X(x,y)+C$ for all $x,y\in X$, and
- $\inf_{x\in X} d_Y(F(x),y)\le C$ for all $y\in Y$.

若存在拟等距映射F: $(X, d_X) \to (Y, d_Y)$，则称度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 拟等距。如果 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是测地的且拟等距，那么 (X, d_X) 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 (Y, d_Y) 是格罗莫夫双曲的。

令 (X, d) 为一个格罗莫夫 δ-双曲空间。(X, d) 的 格罗莫夫边界 定义为 b y

$$\partial_\infty(X,d) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset X : (x_j, x_k)_o \to \infty \text{ as } j,k \to \infty\}/\sim,$$

其中，当 $(x_j, y_j)_o \to \infty$ 为 $j \to \infty$ 时，$\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}} \sim \{y_j\}_{j\in\mathbf{N}}$。格罗莫夫边界 $\partial_\infty(X, d)$ 不依赖于 o 的选择。若 (X, d) 是完备且为测地线的，则 $\partial_\infty(X, d)$ 可自然地识别为

$$\{P\colon [0,\infty) \to X \text{ is a } d\text{-geodesic ray}\}/\sim,$$

其中，当 d-Hausdorff距离在 P 与 Q 之间有限时，$P \sim Q$。格罗莫夫积自然延拓到格罗莫夫边界

$$(a,b)_o \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}},\{y_j\}_{j\in\mathbf{N}}} \liminf_{j\to\infty} (x_j, y_j)_o \in [0,\infty], \quad \forall a,b \in \partial_\infty(X,d),$$

其中下确界取遍所有满足 $\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}} \sim a$ 和 $\{y_j\}_{j\in\mathbf{N}} \sim b$ 的 $\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}},\{y_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset X$。(这里注意，$(a, b)_o = \infty$ 当且仅当 $a = b$。)此外，对于每个 $\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}},\{y_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset X$，满足$\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}} \sim a$ 和 $\{y_j\}_{j\in\mathbf{N}} \sim b$,

$$(a,b)_o \le \liminf_{j\to\infty} (x_j, y_j)_o \le \limsup_{j\to\infty} (x_j, y_j)_o \le (a,b)_o + 2\delta. \tag{4.1}$$

设 (X, d) 是一个格罗莫夫 δ-双曲空间。格罗莫夫边界 $\partial_\infty(X, d)$ 上的度量 D 称为视觉度量，其参数为 $\varepsilon > 0$，若存在 $C \ge 1$ 使得

$$C^{-1}\mathrm{e}^{-\varepsilon(a,b)_o} \le D(a,b) \le C\mathrm{e}^{-\varepsilon(a,b)_o}, \quad \forall a,b \in \partial_\infty(X,d).$$

存在 $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\delta) > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$，在 $\partial_\infty(X, d)$ 上都存在一个参数为 ε 的视觉度量。设 D （分别为 D'）是 $\partial_\infty(X, d)$ 上参数为 ε （分别为 ε'）的视觉度量。则存在 $C \ge 1$ 使得

$$C^{-1}D(a,b)^{\varepsilon'/\varepsilon} \le D'(a,b) \le CD(a,b)^{\varepsilon'/\varepsilon}, \quad \forall a,b \in \partial_\infty(X,d).$$

特别地，$\partial_\infty(X, d)$ 上任意两个视觉度量都拟对称等价；也就是说，$\partial_\infty(X, d)$ 配备了视觉度量的共形规范。

设 (X, d) 是一个完备且测地的格罗莫夫 δ-双曲空间。则存在 $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\delta) > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$，以下结论成立（参见 [BHK01]）：记作

$$\phi_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{-\varepsilon d(o,x)}, \quad \forall x \in X; \quad d_\varepsilon(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_P \int_a^b \phi_\varepsilon(P(t))\,\mathrm{d}t, \quad \forall x,y \in X,$$

其中下确界取遍所有按 d-长度参数化的路径 $P\colon [a, b] \to X$。将 $(X_\varepsilon, d_\varepsilon)$ 记为 (X, d_ε) 的完备化，并令 $\partial_\varepsilon X \stackrel{\text{定义}}{=} X_\varepsilon \setminus X$。于是，$\partial_\varepsilon X$ 可自然地与 $\partial_\infty(X, d)$ 视为相同，并且 d_ε 在 $\partial_\infty(X, d)$ 上诱导出一个参数为 ε 的视觉度量。

以下是众所周知的事实（例如参见 [Haï09，定理 3。1]）。

定理 4.1。设(X, d_X) 和(Y, d_Y) 是适当的测地格罗莫夫双曲度量空间。那么，每个拟等距映射$(X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 都会诱导出一个自然的拟对称映射 $\partial_\infty(X, d_X) \to \partial_\infty(Y, d_Y)$。

5. 双曲填充

本节回顾双曲填充这一技术。该框架用于构造具有指定格罗莫夫边界的格罗莫夫双曲空间。这一构造最初由 [BP03] 提出（另见 [BS07、BS18、BBS22]）。运用这一技术，并改编 [CP13、ESS25], 中的论证，我们证明，对于定义在双曲填充上的每个可容许权函数，都可以构造出一个与指定空间拟对称等价的度量空间。为确保本文内容完整自足，我们给出这些结果的完整证明。此外，本节中的论证适用于任意紧致度量空间，无需假设其具有倍增性质。

设 $(X,\ D)$ 是一个紧致度量空间，且 $\operatorname{diam}(X;\ D)\ <1$。

取一个足够小的参数 $\alpha\in(0,\ 1)$。设 $A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots$ 是 X 的有限子集族，使得每个 A_n 都是一个极大 α^n-分离子集，即

$$X\subset\bigcup_{x\in A_n}B_{\alpha^n}(x;D)\quad\text{and}\quad D(x,y)\geq\alpha^n,\quad\forall\text{ distinct }x,y\in A_n.$$

我们记 $V_n\operatorname{def}=\{(x,n):\ x\in A_n\}$，并令 $V\operatorname{def}=\coprod_{n\geq0}V_n$。对于不同的 (x,n) 和 $(y,n)\ \in V_n$，若 $B_{4\alpha^n}(x;D)$ 与 $B_{4\alpha^n}(y;D)$ 相交，我们记 $(x,n)\ \sim(y,n)$。对于 $(x,n)\ \in V_n$ 和 $(y,n+1)\ \in V_{n+1}$，若 $B_{\alpha^n}(x;D)$ 与 $B_{\alpha^{n+1}}(y;D)$ 相交，我们记 $(x,n)\ \sim(y,n+1)$。我们称边 $(x,n)\ \sim(y,n)$ 为水平边；称边 $(x,n)\ \sim(y,n+1)$ 为竖直边。由于 $\operatorname{diam}(X;D)\ <1$，可知 $\#A_0=1$。我们将根记为 $o\in V_0$。按照约定，对于所有 $u\in V$，均记作 $u\sim u$。

通过选取足够小的 α，不失一般性地假设以下结论成立：设 $u_0,u_1,\cdots\ u_{100}\in V_n$ 满足 $u_0\sim u_1\sim\cdots\sim u_{100}$。设 $v_0,v_{100}\in V_{n-1}$ 满足$u_0\sim v_0$ 且 $u_{100}\sim v_{100}$。则 $v_0\sim v_{100}$。

我们将与 $(V,\sim)$ 相关联的度量图记为 (G,d_G);

$$(u,v)_G\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(d_G(o,u)+d_G(o,v)-d_G(u,v)),\quad\forall u,v\in G$$

表示格罗莫夫积。

引理 5.1. *(i)* 存在 $\delta=\delta(\alpha)\ \geq0$，使得 (G,d_G) 是格罗莫夫 δ-双曲的。*(ii)* 格罗莫夫边界 $\partial_\infty(G,d_G)$ 可自然地与 X 等同，而 D 在 $\partial_\infty(G,d_G)$ 上诱导出参数为 $\log(1/\alpha)$ 的视觉度量。

证明。 我们沿用 [BBS22定理 3 的4]证明中采用的论证。我们断言存在 $C=C(\alpha)\geq1$ 使得

$$C^{-1}\alpha^{(u,v)_G}\leq D(x,y)+\alpha^m+\alpha^n\leq C\alpha^{(u,v)_G},\quad\forall u=(x,m)\in V,\ \forall v=(y,n)\in V.\tag{5.1}$$

不失一般性，我们可以假设 $m\leq n$。

首先，我们考虑 (5.1) 中的第一个不等式。首先，考虑存在一条路径 $(y_m,m)\ \sim\cdots\sim(y_n,n)\ =(y,n)$，使得 $(x,m)\ \sim(y_m,m)$ 或 $(x,m)\ =(y_m,m)$ 成立的情形。在这种情形下，

$$(u,v)_G=\frac{1}{2}(m+n-d_G(u,v))\geq\frac{1}{2}(m+n-(n-m+1))=m-\frac{1}{2},$$

因此，$D(x,y)\ +\alpha^m+\alpha^n\geq\alpha^m\geq\alpha^{1/2}\alpha^{(u,v)_G}$。接下来，我们考虑这样的情形：$k<m$ 是最大的非负整数，使得存在路径 $(x_k,k)\ \sim\cdots\sim(x_m,m)\ =(x,m)$，并且

$(y_k, k) \sim \cdots \sim (y_n, n) = (y, n)$，使得 $(x_k, k) \sim (y_k, k)$。在这种情形下，$(x_{k+1}, k+1) \nsim (y_{k+1}, k+1)$，这意味着

$$\begin{aligned} D(x,y) &\geq D(x_{k+1}, y_{k+1}) - D(x, x_{k+1}) - D(y, y_{k+1}) \\ &\geq D(x_{k+1}, y_{k+1}) - (D(x_m, x_{m-1}) + \cdots + D(x_{k+2}, x_{k+1})) - (D(y_n, y_{n-1}) + \cdots + D(y_{k+2}, y_{k+1})) \\ &> 8\alpha^{k+1} - ((\alpha^m + \alpha^{m-1}) + \cdots + (\alpha^{k+2} + \alpha^{k+1})) - ((\alpha^n + \alpha^{n-1}) + \cdots + (\alpha^{k+2} + \alpha^{k+1})) \\ &> 6\alpha^{k+1} - \frac{4\alpha^{k+2}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

此外，

$$(u,v)_G = \frac{1}{2}(m + n - d_G(u,v)) \geq \frac{1}{2}(m + n - (m + n - 2k + 1)) = k - \frac{1}{2}.$$

因此，

$$D(x,y) + \alpha^m + \alpha^n > D(x,y) > 6\alpha^{k+1} - \frac{4\alpha^{k+2}}{1-\alpha} \geq \left(6\alpha^{3/2} - \frac{4\alpha^{5/2}}{1-\alpha}\right) \alpha^{(u,v)_G}.$$

这就完成了对（5.1）中第一个不等式的证明。

接下来，我们考虑（5.1）中的第二个不等式。设 $(x, m) = (x_0, m_0) \sim (x_1, m_1) \cdots (x_N, m_N) = (y, n)$ 是连接 (x, m) 和 (y, n) 的一条 d_G-测地线。注意，对于所有 $j \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$，$|m_{j-1} - m_j| \leq 1$ 且 $D(x_{j-1}, x_j) \leq 4\alpha^{m_{j-1}} + 4\alpha^{m_j}$。这意味着

$$D(x,y) \leq (4\alpha^m + 4\alpha^{m-1}) + \cdots + (4\alpha^{k+1} + 4\alpha^k) + 8\alpha^k + (4\alpha^k + 4\alpha^{k+1}) + \cdots + (4\alpha^{n-1} + 4\alpha^n) < \frac{16\alpha^k}{1-\alpha},$$

其中 $k \overset{\text{定义}}{=} \lfloor (m + n - N)/2 \rfloor \leq m$。由于 $(u, v)_G = (m + n - N)/2$，我们得出

$$D(x,y) + \alpha^m + \alpha^n < \frac{16\alpha^k}{1-\alpha} + 2\alpha^k \leq \left(\frac{16\alpha^{-1/2}}{1-\alpha} + 2\alpha^{-1/2}\right) \alpha^{(u,v)_G}.$$

这就完成了对（5.1）中第二个不等式的证明。

首先，我们考虑断言（i）。由（5.1）可得

$$\begin{aligned} C^{-1}\alpha^{(u,v)_G} &\leq D(x,y) + \alpha^m + \alpha^n \leq D(x,z) + \alpha^m + \alpha^l + D(y,z) + \alpha^n + \alpha^l \\ &\leq C\alpha^{(u,w)_G} + C\alpha^{(v,w)_G} \leq 2C\alpha^{(u,w)_G \wedge (v,w)_G} \end{aligned}$$

对所有 $u = (x, m) \in V$，$v = (y, n) \in V$，以及 $w = (z, l) \in V$ 均成立。这意味着，对于某个 $\delta = \delta(\alpha) \geq 0$ 以及所有 $u, v, w \in V$，有 $(u, v)_G \geq (u, w)_G \wedge (v, w)_G - \delta$。通过适当增大 δ，这意味着，对于某个 $\delta = \delta(\alpha) \geq 0$ 以及所有 $u, v, w \in G$，有 $(u, v)_G \geq (u, w)_G \wedge (v, w)_G - \delta$。这就完成了断言（i）的证明。

接下来，我们考虑断言（ii）。显然可以验证

$$\partial_\infty(G, d_G) = \{\{u_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subset V : (u_j, u_k)_G \to \infty \text{ as } j, k \to \infty\} / \sim,$$

也就是说，只需考虑对所有 $j \in \mathbf{N}$ 都有 $u_j \in V$ 的情形。记 $u_j = (x_j, m_j)$。由（5.1）可得 $D(x_j, x_k) \leq C\alpha^{(u_j, u_k)_G} - \alpha^{m_j} - \alpha^{n_k} \to 0$ 当 $j, k \to \infty$ 时成立，也就是说，$\{x_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ 是 (X, D) 中的柯西序列。由于 (X, D) 是完备的，$x \overset{\text{def}}{=} \lim_{j \to \infty} x_j$ 存在。因此，我们得到一个自然映射

$$\partial_\infty(G, d_G) \to X : \{u_j\}_{j \in \mathbf{N}} \mapsto x. \tag{5.2}$$

设 $\{v_j = (y_j, n_j)\}_{j\in\mathbf{N}} \subset V$ 是 $\partial_\infty(G, d_G)$ 中的另一个序列，且满足 $y \overset{\text{def}}{=} \lim_{j\to\infty} y_j$。假设 $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}} \nsim \{v_j\}_{j\in\mathbf{N}}$。由（5.1）可得

$$D(x,y) = \lim_{j\to\infty} D(x_j, y_j) \geq \limsup_{j\to\infty} \left(C^{-1}\alpha^{(u_j,v_j)_G} - \alpha^{m_j} - \alpha^{n_j} \right) > 0. \tag{5.3}$$

这意味着（5.2）中的映射是单射。令 $z \in X$。由于对于所有 $n \in \mathbf{N}$，$X \subset \bigcup_{x\in A_n} B_{\alpha^n}(x; D)$，存在一个序列 $\{w_j = (z_j, n)\}_{j\in\mathbf{N}}$，使得对于所有 $j \in \mathbf{N}$，$D(z_j, z) \leq \alpha^n$。由（5.1），当 $j, k \to \infty$ 时，$C^{-1}\alpha^{(w_j,w_k)_G} \leq D(z_j, z_k) + \alpha^j + \alpha^k \to 0$。这意味着 $\{w_j\}_{j\in\mathbf{N}} \in \partial_\infty(G, d_G)$。因此，（5.2）中的映射是满射，因而是双射。还需证明 D 在 $\partial_\infty(G, d_G)$ 上诱导出一个视觉度量。事实上，由（4.1）和（5.3）可得

$$D(x,y) \geq \limsup_{j\to\infty} \left(C^{-1}\alpha^{(u_j,v_j)_G} - \alpha^{m_j} - \alpha^{n_j} \right) \geq C^{-1}\alpha^{(x,y)_G + 2\delta}.$$

由 (4.1) 和 (5.1) 可知

$$D(x,y) = \lim_{j\to\infty} D(x_j, y_j) \leq \liminf_{j\to\infty} \left(C\alpha^{(u_j,v_j)_G} - \alpha^{m_j} - \alpha^{n_j} \right) \leq C\alpha^{(x,y)_G}.$$

至此，断言 (ii) 的证明完成。 □

固定一个赋值 $\sigma\colon V\setminus\{o\} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$。假设满足以下条件：

(⋆) For each $(y, n-1) \in V_{n-1}$ and $(x_0, n), (x_1, n), \cdots, (x_N, n) \in V_n$ such that $(x_0, n) \sim (x_1, n) \sim \cdots \sim (x_N, n)$, $B_{\alpha^{n-1}}(y; D) \cap B_{4\alpha^n}(x_0; D) \neq \emptyset$, and $(X \setminus B_{2\alpha^{n-1}}(y; D)) \cap B_{4\alpha^n}(x_N; D) \neq \emptyset$,

$$\sum_{j=0}^{N} \sigma(x_j, n) \geq 1.$$

固定一个充分小的参数 $\eta > 0$。对于每个 $n \in \mathbf{N}$ 和 $u \in V_n$，我们记

$$\nu(u) \overset{\text{def}}{=} 2\sup\{\sigma(w) : v, w \in V_n,\ u \sim v \sim w\}; \quad \mu(u) \overset{\text{def}}{=} \eta \vee \nu(u) \wedge (1-\eta). \tag{5.4}$$

选取 $(V, \sim)$ 的一个子图 $(V, \sim_Z)$，其顶点相同且满足以下条件：

- 每条水平边 $u \sim v$ 也是一条边 $u \sim_Z v$。
- 对于每个 $(y, n+1) \in V_{n+1}$，恰有一个 $(x, n) \in V_n$ 使得 $(x, n) \sim_Z (y, n+1)$，并且

$$D(x,y) \leq \sup_{(x',n)\in V_n\setminus\{(x,n)\}} D(x', y). \tag{5.5}$$

特别地，$(V, \sim_Z)$ 的顶点与垂直边构成一棵树。（注意，若 $(x, n) \sim_Z (y, n+1)$，则 $D_\Phi(x, y) \leq \alpha^n$。）

对于每个 $u \in V_n$，记从根到 u 的唯一垂直路径为 $o = g(u)_0 \sim_Z g(u)_1 \sim_Z \cdots \sim_Z g(u)_n = u$。我们将与 $(V, \sim_Z)$ 关联的度量图记为 (Z, d_Z)。注意，若 $u \in V_n$ 和 $v \in V_{n+1}$ 使得 $u \sim v$，则 $u \sim g(v)_n$。这意味着，对于所有 $u, v \in Z$，有 $d_Z(u, v) \leq 2d_G(u, v) + 2$。因此，$(Z, d_Z)$ 与 (G, d_G) 拟等距。特别地，(Z, d_Z) 是格罗莫夫双曲的，且其格罗莫夫边界 $\partial_\infty(Z, d_Z)$ 与 (X, D) 拟对称等价。

以下内容转载自 [CP13，引理 2。13] 以及 [ESS25，引理 4。4]。

引理 5.2。设 $n \geq 0$。设 $\pi\colon V_n \to \mathbf{R}_{>0}$ 且 $\pi'\colon V_{n+1} \to \mathbf{R}_{>0}$。假设满足以下条件：

(a) $\eta \leq \pi(u)/\pi(u') \leq \eta^{-1}$ 对所有满足 $u \sim u'$ 的 u、$u' \in V_n$ 均成立。*(b)* 对每个 $v \in V_{n+1}$，存在 $u \in V_n$，使得 $u \sim v$ 且 $1 \leq \pi(u)/\pi'(v) \leq \eta^{-1}$。

那么存在 $\pi\colon\ V_{n+1} \to \mathbf{R}_{>0}$ 满足以下条件：

(i) 对所有 $v, v' \in V_{n+1}$，$\eta \le \pi(v)/\pi(v') \le \eta^{-1}$，满足 $v \sim v'$。*(ii)* 对每个 $v \in V_{n+1}$，要么 $\pi(v) = \pi'(v)$，要么 $\pi(v) = \eta \sup\{\pi'(v') : v' \in V_{n+1},\ v \sim v'\} > \pi'(v)$。*(iii)* 对每个 $v \in V_{n+1}$，存在 $u \in V_n$，使得 $u \sim v$，并且 $1 \le \pi(u)/\pi(v) \le \eta^{-1}$。

证明。对每个 $v \in V_{n+1}$，令 $h(v) \operatorname{def} = u$ 如条件 (b) 所述。对每个 $v, v' \in V_{n+1}$，若 $v \sim v'$ 且 $\pi'(v) > \eta^{-1}\pi'(v')$，我们记作 $v \succ v'$。我们声称，不存在满足 $v \succ v' \succ v''$ 的 $v, v', v'' \in V_{n+1}$。事实上，由于 $v \sim v' \sim v''$，可得 $h(v) \sim h(v'')$。然而，$\pi(h(v)) \ge \pi'(v) > \eta^{-2}\pi'(v'') \ge \eta^{-1}\pi(h(v''))$，这与条件 (a) 矛盾。至此，命题得证。

对于每个 $v \in V_{n+1}$，若不存在满足 $v' \succ v$ 的 $v' \in V_{n+1}$，则令 $\pi(v) \operatorname{def} = \pi'(v)$；否则，令 $\pi(v) \operatorname{def} = \eta \sup\{\pi'(v') : v' \in V_{n+1},\ v' \succ v\} > \pi'(v)$。显然，条件 (ii) 成立。由条件 (ii) 以及以下事实可立即推出条件 (iii)：若$v \sim v'$，则 $h(v) \sim h(v')$。因此，只需验证条件 (i)。设 $v, v' \in V_{n+1}$，且 $v \sim v'$。

首先，考虑 $\pi(v) = \pi'(v)$ 且 $\pi(v') = \pi'(v')$ 的情形。在这种情形下，根据定义，$v \not\succ v'$且 $v' \not\succ v$，这意味着 $\eta \le \pi(v)/\pi(v') = \pi'(v)/\pi'(v') \le \eta^{-1}$。接下来，考虑 $\pi(v) = \pi'(v)$ 且 $\pi(v') > \pi'(v')$ 的情形。在这种情形下，根据定义，存在 $v'' \succ v'$ 使得$\pi(v') = \eta \sup\{\pi'(v''') : v''' \in V_{n+1},\ v' \sim v'''\} = \eta\pi'(v'')$。特别地，$\pi(v') = \eta\pi'(v'') \ge \eta\pi'(v) = \eta\pi(v)$。另一方面，由于 $v \sim v' \sim v''$，可知 $h(v) \sim h(v'')$，这意味着$\pi(v') = \eta\pi'(v'') \le \eta\pi(h(v'')) \le \pi(h(v)) \le \eta^{-1}\pi'(v) = \eta^{-1}\pi(v)$。最后，考虑$\pi(v) > \pi'(v)$ 且 $\pi(v') > \pi'(v')$ 的情形。由对称性，只需证明 $\pi(v) \ge \eta\pi(v')$。根据定义，存在 $v'' \succ v'$ 使得 $\pi(v') = \eta\pi'(v'')$。由于 $v \sim v' \sim v''$，可知 $h(v) \sim h(v'')$。因此，$\pi(v) > \pi'(v) \ge \eta\pi(h(v)) \ge \eta^2\pi(h(v'')) \ge \eta^2\pi'(v'') = \eta\pi(v')$。条件 (i) 的证明至此完成。□

令 $\pi(o) \operatorname{def} = 1$。于是，归纳地，对每个 $n \in \mathbf{N}$，令 $\pi'(u) \operatorname{def} = \pi(g(u)_{n-1})\mu(u)$，对所有 $u \in V_n$ 成立，并令 $\pi\colon V_n \to \mathbf{R}_{>0}$ 如引理 5.2 中所述。（这里注意，引理 5.2 的条件 (a) 和 (b) 均满足。）我们将记

$$\varrho(u) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(u)/\pi(g(u)_{n-1}), \quad \forall u \in V_n. \tag{5.6}$$

引理5.3 和5.4 对应于以下公理（H1）、（H2）和（H3）： [CP13]。引理5.4 的证明改编自 [ESS25, 第4节。7]。

引理 5.3。 *(i)* 设 $n \in \mathbf{N}$ 和 $u \in V_n$。则

- $\eta \le \varrho(u) \le 1 - \eta$，且
- $\mu(u) \le \varrho(u) \le$ 上确界$\{\mu(v)\colon\ v \in V_n,\ u \sim v\}$。*(ii)*

$\eta^2 \le \pi(u)/\pi(v) \le \eta^{-2}$ 对所有满足 $u \sim v$ 的 $u, v \in V$ 均成立。

证明。 首先，我们考虑断言（i）。根据引理 5.2，在（ii）中，要么 $\varrho(u) = \mu(u)$，要么存在一条水平边 $u \sim v$ 使得

$$\varrho(u) = \frac{\eta\pi(g(v)_{n-1})\mu(v)}{\pi(g(u)_{n-1})} > \mu(u).$$

由于 $\eta \le \mu(u) \le 1 - \eta$，只需考虑第二种情形。由于 $g(u)_{n-1} \sim g(v)_{n-1}$，我们得出 $\pi(g(v)_{n-1})/\pi(g(u)_{n-1}) \le \eta^{-1}$，这意味着 $\eta \le \mu(u) < \varrho(u) \le \mu(v) \le 1 - \eta$。断言 (i) 的证明至此完成。

接下来，我们证明断言（ii）。若 $u \sim v$ 是一条水平边，则由引理 5.2（i）可立即得到该断言。设 $u \in V_n$ 且 $v \in V_{n+1}$。由引理 5.2（iii），存在 $u' \in V_n$

使得 $u' \sim v$ 且 $1 \le \pi(u')/\pi(v) \le \eta^{-1}$。我们注意到 $u \sim u'$。因此 $\eta \le \pi(u)/\pi(u') \le \eta^{-1}$，于是 $\eta^2 \le \pi(u)/\pi(v) \le \eta^{-2}$。断言（ii）的证明至此完成。□

我们记

$$n(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{n \ge 0 : g(u)_n \sim g(v)_n\}; \quad \pi(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(g(u)_{n(u,v)}) \vee \pi(g(v)_{n(u,v)})$$

对所有 $u,\ v \in V$。

引理 5.4. 设 $u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_N$ 是 $(V, \sim_Z)$ 中的一条路径。那么 $\sum_{j=0}^{N} \pi(u_j) \succeq \pi(u_0, u_N)$，其中隐含常数仅取决于 η。

证明。此证明中考虑的所有边都属于 $(V, \sim_Z)$。凡是使用未加标记的记号 $\sim$ 而非 $\sim_Z$ 时，都是为了强调相应的边是水平的。为简化记号，对于 $v = (y, n-1) \in V_{n-1}$，记 $\Gamma(v)$ 为满足 $B_{\alpha^{n-1}}(y;\ D) \cap B_{4\alpha^n}(x_0;\ D) \ne \emptyset$ 且 $(X \setminus B_{2\alpha^{n-1}}(y;\ D)) \cap B_{4\alpha^n}(x_N;\ D) \ne \emptyset$ 的路径集合 $(x_0, n) \sim (x_1, n) \sim \cdots \sim (x_N, n)$。我们声称，对每个 $v \in V_{n-1}$ 以及 $(u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_N) \in \Gamma(v)$，

$$\sum_{j=1}^{N} \inf\{\varrho(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} \ge 1. \tag{5.7}$$

事实上，由引理5.3，(i)，

$$\sum_{j=1}^{N} \inf\{\varrho(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} \ge \sum_{j=1}^{N} \inf\{\mu(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\}.$$

若 $\inf\{\mu(w)\colon\ w \in V_n,\ \ w \sim u_{j-1}$ 或 $w \sim u_j\} = 1 - \eta$ 对某个 $j \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$ 成立，由于 $N \ge 2$，可得

$$\sum_{j=1}^{N} \inf\{\mu(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} \ge (1-\eta) + \eta = 1.$$

因此，不失一般性，我们可以假设对所有 $j \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$，都有 $\inf\{\mu(w)\colon\ w \in V_n,\ \ w \sim u_{j-1}$ 或 $w \sim u_j\} < 1 - \eta$。根据 μ 的定义，这意味着

$$\sum_{j=1}^{N} \inf\{\mu(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} \ge \sum_{j=1}^{N} \inf\{\nu(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\}.$$

根据 ν 的定义，对于每个 $j \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$，$\inf\{\nu(w)\colon\ w \in V_n,\ \ w \sim u_{j-1}$ 或 $w \sim u_j\} \ge \sigma(u_{j-1}) + \sigma(u_j)$。结合 $(\star)$，我们得到

$$\sum_{j=1}^{N} \inf\{\nu(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} \ge \sum_{j=0}^{N} \sigma(u_j) \ge 1.$$

这就完成了对 (5.7) 的证明。

为简化记号，对于 $u \in V_n$，记

$$\pi'(u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\pi(v) : v \in V_n,\ u \sim v\} \quad \text{and} \quad \varrho'(u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\varrho(v) : v \in V_n,\ u \sim v\}.$$

写出

$$\begin{cases} \ell(u \sim v) \stackrel{\text{def}}{=} \pi'(u) \wedge \pi'(v) & \text{if } u \sim v \text{ is horizontal;} \\ \ell(g(u)_{n-1} \sim u) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{-4}\pi'(u) & \text{if } u \in V_n \text{ for some } n \ge 1. \end{cases}$$

注意，对于 $(V, \sim_Z)$ 中的每条路径 $u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_N$，都有 $\sum_{j=0}^{N} \pi(u_j) \ge \sum_{j=0}^{N} \pi'(u_j) \ge \eta^4 \ell(u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_N)$。因此，只需证明

$$\ell(u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_N) \succeq \pi(u_0, u_N). \tag{5.8}$$

我们声称，对于每个 $v \in V_{n-1}$ 和 $(u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_N) \in \Gamma(v)$，

$$\ell(u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_N) \geq \pi'(v). \tag{5.9}$$

记 $v = (y,\ n-1)$ 和 $u_j = (x_j,\ n)$ 为 $j \in [0,N]_{\mathbf{Z}}$。不妨设对所有 $j \in [0,N]_{\mathbf{Z}}$，$B_{4\alpha^n}(x_j;\ D) \cap B_{2\alpha^{n-1}}(y;\ D) \neq \emptyset$。我们注意到，对于满足 $w \sim u_j$ 的每个 $j \in [0,N]_{\mathbf{Z}}$ 和 $w \in V_n$，都有 $v \sim g(w)_{n-1}$。事实上，若记 $w = (z,\ n)$，且 $g(w)_{n-1} = (z',\ n-1)$，则

$$D(y,z') \leq D(y,x_j) + D(x_j,z) + D(z,z') \leq (2\alpha^{n-1} + 4\alpha^n) + 8\alpha^n + \alpha^{n-1} < 8\alpha^{n-1}.$$

这意味着 $v \sim g(w)_{n-1}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\ell(u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_N) &= \sum_{j=1}^{N} \inf\{\pi(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} \\ &\geq \pi'(v) \sum_{j=1}^{N} \inf\{\varrho(w) : w \in V_n,\ w \sim u_{j-1} \text{ or } w \sim u_j\} = \pi'(v) \sum_{j=1}^{N} \varrho'(u_{j-1}) \wedge \varrho'(u_j) \geq \pi'(v),\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由（5.7）以及 ϱ'的定义得到。由此完成了（5.9）的证明。

接下来，我们断言

(5.10) 对于每条路径 $u_0 \sim_Z u_1 \sim \cdots \sim u_{M-1} \sim_Z u_M$，满足 $u_0,\ u_M \in V_n$ 且 $u_1,\ \cdots\ u_{M-1} \in V_{n+1}$，都存在一条路径 $u_0 = v_0 \sim v_1 \sim \cdots \sim v_N = u_M$，使得 $v_0,\ v_1,\ \cdots\ v_N \in V_n$ 且 $\ell(v_0 \sim v_1 \sim \cdots \sim v_N) \leq \ell(u_1 \sim \cdots \sim u_{M-1} \sim_Z u_M)$。

（这里需要注意，边 $u_0 \sim_Z u_1$ 不包含在上界中；这一排除对于后续证明 (5.12) 和 (5.13) 是必要的。）若 $u_0 \sim u_M$，则由引理 5.3 的 (ii) 和 ℓ 的定义可得 $\ell(u_{M-1} \sim_Z u_M) = \eta^{-4} \inf\{\pi(v) : v \in V_{n+1},\ u_{M-1} \sim v\} \geq \eta^{-2}\pi(u_{M-1}) \geq \pi(u_M) \geq \ell(u_0 \sim u_M)$。因此，只需考虑情形 $u_0 \nsim u_M$。在此情形下，$(u_1 \sim \cdots \sim u_{M-1}) \in \Gamma(u_0)$。事实上，若将 $u_0 = (x_0,n)$、$u_M = (x_M,n)$ 和 $u_j = (x_j, n+1)$ 记作 $j \in [1,M-1]_{\mathbf{Z}}$，则 $u_0 \sim_Z u_1$ 意味着 $B_{\alpha^n}(x_0;D) \cap B_{4\alpha^{n+1}}(x_1;D) \neq \emptyset$，并且

$$D(x_0,x_{M-1}) \geq D(x_0,x_M) - D(x_M,x_{M-1}) > 8\alpha^n - \alpha^n = 7\alpha^n,$$

这意味着 $(X \setminus B_{2\alpha^n}(x_0;\ D)) \cap B_{4\alpha^{n+1}}(x_{M-1};D) \neq \emptyset$。令 $j_1 > 1$ 为满足 $(u_1 \sim \cdots \sim u_{j_1}) \in \Gamma(u_0)$ 的最小数。由 (5.9) 及 (5.9) 的证明可知，$u_0 \sim g(u_{j_1})_n$，且 $\ell(u_0 \sim g(u_{j_1})_n) \leq \pi'(u_0) \leq \ell(u_1 \sim \cdots \sim u_{j_1})$。归纳地，对于每个 $k \in \mathbf{N}$，若 $g(u_{j_k})_n \nsim u_M$，则可令 $j_{k+1} > j_k$ 为满足 $(u_{j_k} \sim \ldots \sim u_{j_{k+1}}) \in \Gamma(g(u_{j_k})_n)$ 的最小数；此时有 $g(u_{j_k})_n \sim g(u_{j_{k+1}})_n$，且 $\ell(g(u_{j_k})_n \sim g(u_{j_{k+1}})_n) \leq \pi'(g(u_{j_k})_n) \leq \ell(u_{j_k} \sim \ldots \sim u_{j_{k+1}})$。因此，我们得到 $1 < j_1 < \cdots < j_N \leq M-1$，使得

$$\begin{aligned}\ell(u_0 \sim g(u_{j_1})_n \sim \cdots \sim g(u_{j_N})_n \sim u_M) &\leq \ell(u_1 \sim \cdots \sim u_{M-1}) + \ell(g(u_{j_N})_n \sim u_M) \\ &\leq \ell(u_1 \sim \cdots \sim u_{M-1}) + \ell(u_{M-1} \sim_Z u_M).\end{aligned}$$

这就完成了对（5.10）的证明。

反复应用（5.10），我们得到

(5.11) 对于每条路径 $u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_M$ 满足 $u_0, u_M \in V_n$，存在一条路径 $u_0 = v_0 \sim_Z v_1 \sim_Z \cdots \sim_Z v_N = u_M$ 使得 $v_0, v_1, \cdots\ v_N \in \bigcup_{k=0}^{n} V_k$ 且 $\ell(v_0 \sim_Z v_1 \sim_Z \cdots \sim_Z v_N) \leq \ell(u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_M)$，

并且

(5.12) 对于每条路径 $u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_M$ 满足 $u_0 \in V_n$ 和 $u_M \in \bigcup_{k=n+1}^{\infty} V_k$，都存在一条路径 $u_0 = v_0 \sim_Z v_1 \sim_Z \cdots \sim_Z v_N = g(u_M)_n$，使得 $v_0, v_1, \cdots\ v_N \in \bigcup_{k=0}^{n} V_k$ 以及 $\ell(v_0 \sim_Z v_1 \sim_Z \cdots \sim_Z v_N) \leq \ell(u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_M)$。

接下来，我们声称

(5.13) 对于每条路径 $u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_M$，若满足 $u_0, u_M \in V_n$，且 $u_0 \nsim u_M$ 与 $g(u_0)_{n-1} \nsim g(u_M)_{n-1}$，则存在一条路径 $g(u_0)_{n-1} = v_0 \sim_Z v_1 \sim_Z \cdots \sim_Z v_N = g(u_M)_{n-1}$，使得 $v_0, v_1, \cdots v_N \in \bigcup_{k=0}^{n-1} V_k$，并且 $\ell(v_0 \sim_Z v_1 \sim_Z \cdots \sim_Z v_N) \leq \ell(u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_M)$.

由 (5.11)，不失一般性，我们可以假设 $u_0, u_1, \cdots u_M \in \bigcup_{k=0}^{n} V_k$。首先，考虑 $\{u_0, u_1, \cdots u_M\} \not\subset V_n$ 的情形。在此情形下，令 j（分别为 k）表示满足 $u_j \in V_{n-1}$（分别为 $u_k \in V_{n-1}$）的最小（分别为最大）数。由 (5.10)，存在一条路径从 $g(u_0)_{n-1}$ 到 u_j，位于 $(V_{n-1}, \sim)$ 中（分别从 $g(u_M)_{n-1}$ 到 u_k，位于 $(V_{n-1}, \sim)$ 中），其 ℓ-长度至多为 $\ell(u_0 \sim \cdots \sim u_{j-1} \sim_Z u_j)$（分别为 $\ell(u_M \sim \cdots \sim u_{k+1} \sim_Z u_k)$）。由 (5.11)，存在一条路径从 u_j 到 u_k，位于 $(\bigcup_{k=0}^{n-1} V_k, \sim_Z)$ 中，其 ℓ-长度至多为 $\ell(u_j \sim_Z \cdots \sim_Z u_k)$。将这三条路径首尾相接，即完成了 $\{u_0, u_1, \cdots u_M\} \not\subset V_n$ 情形的证明。剩下的是考虑 $u_0, u_1, \cdots u_M \in V_n$ 的情形。在此情形下，仿照 (5.10) 的证明中的论证，可得 $0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_N \leq M$，使得若记 $u_j = (x_j, n)$ 和 $g(u_j)_{n-1} = (x'_j, n-1)$，则

- for each $k \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$,
  - $(u_{j_{k-1}} \sim \cdots \sim u_{j_k}) \in \Gamma(g(u_{j_{k-1}})_{n-1})$,
  - $B_{2\alpha^{n-1}}(x'_{j_{k-1}}; D) \cap B_{4\alpha^n}(x_{j_k}; D) \neq \emptyset$,
  - $\ell(u_{j_{k-1}} \sim \cdots \sim u_{j_k}) \geq \pi'(g(u_{j_{k-1}})_{n-1})$,
- $(u_{j_N} \sim \cdots \sim u_M) \notin \Gamma(g(u_{j_N})_{n-1})$.

这意味着

$$\begin{aligned} D(x'_{j_{N-1}}, x'_M) &\leq D(x'_{j_{N-1}}, x_{j_N}) + D(x_{j_N}, x'_{j_N}) + D(x'_{j_N}, x_M) + D(x_M, x'_M) \\ &\leq (2\alpha^{n-1} + 4\alpha^n) + \alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} < 8\alpha^{n-1}, \end{aligned}$$

这意味着 $g(u_{j_{N-1}})_{n-1} \sim g(u_M)_{n-1}$。因此，我们得出

$$\begin{aligned} &\ell(g(u_0)_{n-1} \sim g(u_{j_1})_{n-1} \sim \cdots \sim g(u_{j_{N-1}})_{n-1} \sim g(u_M)_{n-1}) \\ \leq &\sum_{k=0}^{N-1} \pi'(g(u_{j_k})_{n-1}) \leq \ell(u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_M). \end{aligned}$$

这就完成了对（5.13）的证明。

现在我们可以证明（5.8）了。反复应用（5.12）和（5.13），即可立即归结为如下情形：u_0，$u_N \in V_n$ 其中 $n \geq 0$，且 $u_0 \sim u_N$ 或 $g(u_0)_{n-1} \sim g(u_N)_{n-1}$，此时可立即验证（5.8）成立。至此，引理 5.4 的证明完成。□

我们将用 d_ϱ 表示 Z 上的测地度量，使得

$$\begin{cases} \operatorname{len}(u \sim v; d_\varrho) \overset{\text{def}}{=} 2\log(1/\eta) & \text{if } u \sim v \text{ is horizontal;} \\ \operatorname{len}(g(u)_{n-1} \sim u; d_\varrho) \overset{\text{def}}{=} \log(1/\varrho(u)) & \text{if } u \in V_n \text{ for some } n \geq 1. \end{cases}$$

由引理 5.3、（i）可立即推出 (Z, d_ϱ) 与 (Z, d_Z) 双利普希茨等价。特别地，(Z, d_ϱ) 是格罗莫夫双曲的，且其格罗莫夫边界 $\partial_\infty(Z, d_\varrho)$ 与 (X, D) 拟对称等价。我们将记

$$(u, v)_\varrho \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(d_\varrho(o, u) + d_\varrho(o, v) - d_\varrho(u, v)), \quad \forall u, v \in Z$$

对于格罗莫夫积。

对于每个 $\varepsilon \in (0,1],$，写出

$$\phi_\varepsilon(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{-\varepsilon d_\varrho(o,u)}, \quad \forall u \in Z; \quad d_\varepsilon(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_P \int_a^b \phi_\varepsilon(P(t))\,\mathrm{d}t, \quad \forall u,v \in Z,$$

其中，下确界取遍所有以 d_ϱ-长度参数化、从 u 到 v 的路径 $P\colon [a,b] \to Z$。将 $(Z_\varepsilon, d_\varepsilon)$ 记为 $(\overline{Z}, d_\varepsilon)$ 的完备化，并定义 $\partial_\varepsilon Z \stackrel{\text{def}}{=} Z_\varepsilon \setminus X$。根据第4节的讨论，存在 $\varepsilon_* > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$，我们可以自然地将 $\partial_\varepsilon Z$ 识别为 $\partial_\infty(Z, d_\varrho) \sim X$，并且 d_ε 在 X 上诱导一个参数为 ε 的视觉度量。事实证明，每个满足 $\varepsilon \in (0,1]$ 的 d_ε 都在 X 上诱导一个参数为 ε 的视觉度量。

对于不同的 x, $y \in X$，我们记作

$$n(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{n \geq 0 : \text{there exists } (z,n) \in V_n \text{ such that } x,y \in B_{2\alpha^n}(z; D)\};$$
$$c(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, n(x,y)) \in V_{n(x,y)} : x,y \in B_{2\alpha^{n(x,y)}}(z; D)\};$$
$$\pi(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\pi(u) : u \in c(x,y)\}.$$

以下内容见于 [CP13，命题 2。4]。

引理 5.5。对于每个 $\varepsilon \in (0,1],$，我们有 $d_\varepsilon(x,y) \asymp \pi(x,y)^\varepsilon$，对所有 $x,y \in X$ 均成立 .

证明。首先，我们断言 Z 中的每条垂直路径都是一条 d_ϱ-测地线。特别地，对所有 $u \in V$, $d_\varrho(o, u) = \log(1/\pi(u))$。事实上，只需证明 Z 中从 o 到 V 中某点的每条垂直路径都是一条 d_ϱ-测地线。反设此结论不成立。则存在 $n \geq 1$和 $u, v \in V_n$，使得 $u \sim v$ 且

$$\begin{aligned}\log(1/\pi(v)) + 2\log(1/\eta) &= \mathrm{len}(o \sim g(v)_1 \sim \cdots \sim g(v)_{n-1} \sim v \sim u; d_\varrho) \\ &< \mathrm{len}(o \sim g(u)_1 \sim \cdots \sim g(u)_{n-1} \sim u; d_\varrho) = \log(1/\pi(u)),\end{aligned}$$

这与引理 5.3, (ii) 矛盾。由此完成了该断言的证明。

接下来，我们断言 对于每个 $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\mathrm{len}(u \sim_Z v; d_\varepsilon) \asymp \pi(u)^\varepsilon, \quad \forall u,v \in V \text{ with } u \sim_Z v. \tag{5.14}$$

事实上，由引理 5.3, (i) 以及 d_ϱ的定义可得 $\mathrm{len}(u \sim_Z v; d_\varrho) \asymp 1$。结合前一段的断言，我们得到 $\mathrm{e}^{-\varepsilon d_\varrho(o,u)} \asymp \pi(u)^\varepsilon$。因此，5.14) 由 d_ε的定义立即可得。

取定 $\varepsilon \in (0,1]$ 和 $x, y \in X$。取定 $u = (x_m, m) \in V$和 $v = (y_n, n) \in V$，使得 $m \wedge n \geq n(x,y), x \in B_{\alpha^m}(x_m; D)$，且 $y \in B_{\alpha^n}(y_n; D)$。由于当 $m, n \to \infty$ 时，$d_\varepsilon(u,v) \to d_\varepsilon(x,y)$，只需证明 $d_\varepsilon(u,v) \asymp \pi(x,y)^\varepsilon$。

首先，我们验证 $d_\varepsilon(u,v) \preceq \pi(x,y)^\varepsilon$。取定 $(z, n(x,y)) \in c(x,y)$。我们断言 $g(u)^{n(x,y)} \sim (z, n(x,y)) \sim g(v)^{n(x,y)}$。事实上，若记 $g(u)_j = (x_j, j)$，则

$$D(x_{n(x,y)}, x_m) \leq \sum_{j=n(x,y)}^{m-1} D(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n(x,y)}^{m-1} \alpha^j \leq \frac{\alpha^{n(x,y)}}{1-\alpha},$$

其中第二个不等式由（5.5）得出。这意味着

$$D(x_{n(x,y)}, z) \leq D(x_{n(x,y)}, x_m) + D(x_m, x) + D(x, z) \leq \frac{\alpha^{n(x,y)}}{1-\alpha} + \alpha^m + 2\alpha^{n(x,y)} < 8\alpha^{n(x,y)},$$

因此，$g(u)^{n(x,y)} \sim (z,\ n(x,\ y))$。类似地，$(z,\ n(x,\ y)) \sim g(v)^{n(x,y)}$。由此我们得出

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(u,v) &\le \operatorname{len}(g(u)_m \sim_Z \cdots \sim_Z g(u)_{n(x,y)} \sim_Z (z,n(x,y)) \sim_Z g(v)_{n(x,y)} \sim_Z \cdots \sim_Z g(v)_n; d_\varepsilon) \\ &\preceq \sum_{j=n(x,y)}^{m} \pi(g(u)_j)^\varepsilon + \pi(z,n(x,y))^\varepsilon + \sum_{j=n(x,y)}^{n} \pi(g(v)_j)^\varepsilon \quad \text{(by (5.14))} \\ &\le \pi(z,n(x,y))^\varepsilon \left(1 + 2\eta^{-2\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} (1-\eta)^{j\varepsilon}\right) \quad \text{(by Lemma 5.3, (i) and (ii)).} \end{aligned}$$

这就完成了对 $d_\varepsilon(u,v) \preceq \pi(x,y)^\varepsilon$ 的证明。

接下来，我们验证 $d_\varepsilon(u,v) \succeq \pi(x,y)^\varepsilon$。令 $u = u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_N = v$ 为 $(V, \sim_Z)$中连接 u 和 v的路径。由（5.14）和引理5.4 可得

$$\operatorname{len}(u_0 \sim_Z u_1 \sim_Z \cdots \sim_Z u_N; d_\varepsilon) \succeq \sum_{j=0}^{N} \pi(u_j)^\varepsilon \succeq \left(\sum_{j=0}^{N} \pi(u_j)\right)^\varepsilon \succeq \pi(u,v)^\varepsilon,$$

其中第二个不等式由 $\varepsilon \in (0,1]$ 这一事实得出。因此，只需证明 $\pi(u,v) \succeq \pi(x,y)$。记 $g(u)^{n(u,v)} = (x_{n(u,v)}, n(u,v))$ 和 $g(v)^{n(u,v)} = (y_{n(u,v)}, n(u,v))$。根据定义，要么 $(x_{n(u,v)}, n(u,v)) \sim (y_{n(u,v)}, n(u,v))$，要么 $x_{n(u,v)} = y_{n(u,v)}$。记 $g(u)_j = (x_j, j)$ 和 $g(v)_j = (y_j, j)$。我们断言 $x, y \in B_{2\alpha^{n(u,v)-1}}(x_{n(u,v)-1};\ D)$。事实上，

$$\begin{aligned} D(x_{n(u,v)-1}, x) &\le D(x_{n(u,v)-1}, x_{n(u,v)}) + \cdots + D(x_{m-1}, x_m) + D(x_m, x) \\ &\le \alpha^{n(u,v)-1} + \cdots + \alpha^{m-1} + \alpha^m \\ &< 2\alpha^{n(u,v)-1}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &D(x_{n(u,v)-1}, y) \\ &\le D(x_{n(u,v)-1}, x_{n(u,v)}) + D(x_{n(u,v)}, y_{n(u,v)}) + D(y_{n(u,v)}, y_{n(u,v)+1}) + \cdots + D(y_{n-1}, y_n) + D(y_n, y) \\ &\le \alpha^{n(u,v)-1} + 8\alpha^{n(u,v)} + \alpha^{n(u,v)} + \cdots + \alpha^{n-1} + \alpha^n \\ &< 2\alpha^{n(u,v)-1}. \end{aligned}$$

这就完成了对 $x, y \in B_{2\alpha^{n(u,v)-1}}(x_{n(u,v)-1};\ D)$ 的证明。这意味着 $n(x,y) \ge n(u,v)-1$。固定 $(z, n(x,y)) \in c(x,y)$。我们断言 $g(z,n(x,y))^{n(u,v)-1} \sim (x_{n(u,v)-1}, n(u,v) - 1)$。事实上，若记 $g(z,n(x,y))^{n(u,v)-1} = (z_{n(u,v)-1}, n(u,v) - 1)$，则

$$\begin{aligned} D(z_{n(u,v)-1}, x_{n(u,v)-1}) &\le D(z_{n(u,v)-1}, z) + D(z,x) + D(x, x_{n(u,v)-1}) \\ &\le \alpha^{n(u,v)-1} + \cdots + \alpha^{n(x,y)} + 2\alpha^{n(x,y)} + 2\alpha^{n(u,v)-1} \\ &< 8\alpha^{n(u,v)-1}. \end{aligned}$$

这就完成了对 $g(z,\ n(x,\ y))^{n(u,v)-1} \sim (x_{n(u,v)-1},\ n(u,\ v)\ -1)$ 的证明。因此，

$$\pi(z,n(x,y)) \le \pi(g(z,n(x,y))_{n(u,v)-1}) \preceq \pi(x_{n(u,v)-1}, n(u,v)-1) \preceq \pi(x_{n(u,v)}, n(u,v)) \le \pi(u,v),$$

其中，第二个和第三个不等式由引理 5.3 的 (ii) 得出，最后一个不等式则由定义 $\pi(u,v) = \pi(x_{n(u,v)}, n(u,v)) \vee \pi(y_{n(u,v)}, n(u,v))$ 得出。这就完成了对 $d_\varepsilon(u,v) \succeq \pi(x,y)^\varepsilon$ 的证明，从而完成了引理 5.5 的证明。□

推论 *5.6. </style*度量 d_1 在 X 上诱导出一个参数为一的视觉度量，使得 t

$$\operatorname{diam}(B_{\alpha^n}(x;D); d_1) \preceq \pi(u), \quad \forall u = (x,n) \in V.$$

特别地，由于对于 $u \in V_n$， $\pi(u) \leq (1-\eta)^n$（参见引理 *5.3 (i)*），如果当 $n \to \infty$ 时 $\sum_{u \in V_n} \pi(u)^p \to 0$，那么 (X, d_1) 的豪斯多夫维数（因此 (X, D) 的共形维数也）至多为 p。

证明。回想一下，存在 $\varepsilon_* > 0$ 使得对每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$，我们有 $\partial_\varepsilon Z$ 可以自然地识别为 $\partial_\infty(Z, d_\varrho) \sim X$ 并且 d_ε 在 X 上诱导出参数为 ε 的视觉度量。结合引理 5.5，我们得到

$$d_1(x,y)^{\varepsilon_*} \asymp \pi(x,y)^{\varepsilon_*} \asymp d_{\varepsilon_*}(x,y) \asymp \mathrm{e}^{-\varepsilon_*(x,y)_\varrho}, \quad \forall x, y \in X,$$

因此，d_1 在 X 上诱导出参数为一的视觉度量。令 $u = (x, n) \in V$ 和 $y, z \in B_{\alpha^n}(x; D)$。通过类似于引理 5.5 证明中所用的论证，可以验证，对于所有 $v \in c(y, z)$，都有 $n \leq n(y, z)$ 和 $u \sim g(v)_n$。因此，由引理 5.5 和引理 5.3 的（ii）可得

$$d_1(y,z) \preceq \pi(y,z) \leq \sup\{\pi(g(v)_n) : v \in c(y,z)\} \preceq \pi(u).$$

这就完成了推论 5.6的证明。 □

6. 构造可容许权重

在本节中，我们沿用第 5 节的记号，其中 X 是 $\mathbf{C}$ 的一个子集，且 $D = D_\Phi$，其中$(\mathbf{C}\ \Phi;\ \infty)$ 是一个 γ-LQG 曲面的嵌入；我们构造一个权函数 $\sigma \colon \mathbf{C} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$，使其满足 $(\star)$。

固定足够小的参数 $\zeta > 0$ 和 $\alpha = \alpha(\zeta) > 0$，其具体取值将在后文确定。

定义 6.1。设 $\mathcal{A} = (A,\ \Phi_A;\ I,\ O)$ 是一个由双连通域 A参数化的 γ-LQG 曲面，其中 I（分别为 O）表示 A的内边界（分别为外边界）。假设

$$w \overset{\text{def}}{=} D_{\Phi_A}(I, O) = D_{\Phi_A}(I, x), \quad \forall x \in O. \tag{6.1}$$

那么：

- 设 $0 \leq s < t \leq w$。那么我们将 $B_t^O(I; D_{\Phi_A})$ 记为 $A \setminus B_t(I;\ D_{\Phi_A})$ 中边界包含 O 的连通分支的补集；我们将 $A^O_{s,\ t}(I; D_{\Phi_A})$ 定义为 $= B_t^O(I; D_{\Phi_A}) \setminus B_s^O(I; D_{\Phi_A})$。

- 我们将用 $G(\mathcal{A})$ 表示如下事件：度量球 $B_{w/8}(x; D_{\Phi_A})$ 不会将 I 与 O 分离，对所有 $x \in A^O_{w/4,\ 3w/4}(I; D_{\Phi_A})$ 均如此。（这里注意到，对所有 $x \in A^O_{w/4,\ 3w/4}(I; D_{\Phi_A})$，$B_{w/8}(x;\ D_{\Phi_A})$ 与 I 不相交，且与 O 不相交。）

令 $x \in \mathbf{C}$。那么我们将记 $G_{s,\ t}(x)$ 定义为 $= G(A^\bullet_{s,\ t}(x; D_\Phi))$。

直观来说，事件 $G(\mathcal{A})$ 保证曲面 $\mathcal{A}$ 不包含可能将其内边界和外边界分离的狭窄瓶颈。

定义抽象的 γ-LQG 曲面上的 G（而非仅定义在度量带上）之所以重要，是因为若仅将度量带视为一个 γ-LQG 曲面，它并不能确定其中心或内半径和外半径。

引理 6.2. 沿用定义 *6.1*中的记号，事件 $G(\mathcal{A})$ 几乎必然由 $\mathcal{A}$*(*作为一个 γ*-LQG* 曲面）确定。

证明。这由定义立即得出。 □

定义 6.3。 设 $x \in \mathbf{C}$ 和 $n \in \mathbf{N}$。那么，我们将用 $F(x,\ n)$ 表示存在 $\alpha^{n-1}/8 \le t < t + 8\alpha^{n-1+\zeta} \le \alpha^{n-1}/4$ 使得事件 $G_{t,\ t+8\alpha^{n-1+\zeta}}(x)$ 发生。

引理 6.4. 按照定义 *6.3*中的记号，事件 $F(x,n)$ 几乎必然由以下对象决定： γ-*LQG* 曲面，其参数化为

$$\left(A^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/8,\alpha^{n-1}/4}(x; D_\Phi); \partial B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/8}(x; D_\Phi), \partial B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/4}(x; D_\Phi)\right).$$

证明。 这直接由定义和引理6.2得出。 □

~定义 6.5. 设 $x \in \mathbf{C}$ 和 $n \in \mathbf{N}$。则我们将用 $F(x,n)$ 表示以下事件：存在一个双连通域 A，它包含于 $A^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/16,5\alpha^{n-1}/16}(x;\ D_\Phi)$，并将 $A^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/16,5\alpha^{n-1}/16}(x;\ D_\Phi)$ 的内边界和外边界分隔开，且式 (6.1) 在 $w = 8\alpha^{n-1+\zeta}$ 下成立，并且参数化为 A 的 γ-LQG 曲面的事件 G 发生。

~引入事件 $F(x,\ n)$ 的目的是得到 $F(x,\ n)$ 的一个版本，使其在中心 x 发生小扰动时仍保持稳定。

~**引理 6.6**。 设 $x \in \mathbf{C}$ 和 $n \in \mathbf{N}$。若 $F(x,n)$ 发生，则对所有 $x' \in B_{\alpha^{n-1}/16}(x;\ D_\Phi)$，$F(x', n)$ 也发生。

证明。 这可由定义立即推出。 □

引理 6.7。 假设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 是一个 γ-*LQG* 锥。那么对每个 $n \in \mathbf{N}$，

$$\inf_{\ell \ge 0} \mathbf{P}\left[F(0,n) \;\middle|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/8}(0; D_\Phi)) = \ell\right] = 1 - O(\alpha^\infty), \tag{6.2}$$

当 $\alpha \to 0$ 时，以关于 n 一致的速率。

证明。 由缩放性质，(6.2) 的左端不依赖于 n 的选择。因此，只需考虑 $n = 1$ 这一情形。

我们注意到，如果 $t > 0$ 使得事件 $G_{t,t+8\alpha^\zeta}(0)$ 不发生，那么

$$\sup\left\{D_\Phi(x, y; \mathbf{C} \setminus B^{\bullet}_t(0; D_\Phi)) : x, y \in \partial B^{\bullet}_{t+8\alpha^\zeta}(0; D_\Phi)\right\} \le 32\alpha^\zeta.$$

事实上，对于每个 $x, y \in \partial B^{\bullet}_{t+8\alpha^\zeta}(0;\ D_\Phi)$，我们都可以选取包含在 $A^{\bullet}_{t\ ,t+8\alpha^\zeta}(0;\ D_\Phi)$ 中、连接 x 和 y 与 $\partial B^{\bullet}_t(0;\ D_\Phi)$ 的 D_Φ-测地线。根据事件 $G_{t,t+8\alpha^\zeta}(0)$ 的定义，这两条D_Φ-测地线必定穿过同一个半径为 α^ζ 的度量球，且该度量球包含于 $A^{\bullet}_{t\ ,t+8\alpha^\zeta}(0;\ D_\Phi)$ 中。这意味着 $D_\Phi(x, y; \mathbf{C} \setminus B^{\bullet}_t(0;\ D_\Phi))$ $\le 18\alpha^\zeta \le 32\alpha^\zeta$。

令 $(\mathcal{D}, D_{\mathcal{D}}, \mathcal{M}_{\mathcal{D}})$ 表示由 (2.6) 定义、条件为边界长度为一的随机度量测度空间。（回想一下，在 (2.6) 后紧接着的讨论中，我们指出该空间的分布是良定义的。）记 I 为其边界。我们可以选取一个充分小的常数 $c_* > 0$，使得对于每个 $c \in (0, c_*]$，以下结论以至多 $1/2$ 的概率成立：$\sup_{x,y\in\partial B^{\bullet}_c(I;D_{\mathcal{D}})} D_{\mathcal{D}}(x, y) \le 4c$。根据缩放性质，这意味着对于每个确定性的 $t > 0$，

$$\mathbf{P}\left[\sup\left\{D_\Phi(x, y; \mathbf{C} \setminus B^{\bullet}_t(0; D_\Phi)) : x, y \in \partial B^{\bullet}_{t+8\alpha^\zeta}(0; D_\Phi)\right\} \le 32\alpha^\zeta \;\middle|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_t(0; D_\Phi)) = \ell\right] \le 1/2,$$

因此，对所有 $\ell \ge c_*^{-2} \cdot 64 \cdot \alpha^{2\zeta}$，均有 $\mathbf{P}[G_{t,t+8\alpha^\zeta}(0) \mid \mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_t(0;\ D_\Phi)) = \ell] \ge 1/2$。

另一方面，由引理 3.3 可知，存在普适常数 $a, C > 0$，使得对于每个确定性的 $t \ge 0$ 和 $\ell \ge 0$，给定 $\mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_t(0; D_\Phi)) = \ell$，以至少 $1 - C\exp(-b\alpha^{-\zeta/2})$ 的条件概率，存在 $s \in [t, t+\alpha^{\zeta/2}]$ 使得 $\mathcal{N}_\Phi(\partial B^{\bullet}_t(0;\ D_\Phi)) \ge c_*^{-2} \cdot 64 \cdot \alpha^{2\zeta}$，其中 b 定义为$= ac_*/8$。

令 τ_1 定义为= $\inf\{t \geq 1/8 \colon \mathcal{N}_\Phi(\partial B_t^\bullet(0;\, D_\Phi)) \geq c_*^{-2} \cdot 64 \cdot \alpha^{2\zeta}\}$。归纳地，对于每个 $n \in \mathbf{N}$，令τ_{n+1} 定义为= $\inf\{t \geq \tau_n + 8\alpha^\zeta \colon \mathcal{N}_\Phi(\partial B_t^\bullet(0;\, D_\Phi)) \geq c_*^{-2} \cdot 64 \cdot \alpha^{2\zeta}\}$。因此，根据上述讨论，我们得出，对于每个确定性的 $\ell \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left[\tau_{\lfloor \alpha^{-\zeta/2}/16 \rfloor} \leq 1/4 - 8\alpha^\zeta \;\middle|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B_{1/8}^\bullet(0; D_\Phi)) = \ell\right]$$

至少等于对每个 $j \in [1, \alpha^{-\zeta/2}/16]_{\mathbf{Z}}$，都存在 $s \in [1/8 + 2(j-1)\alpha^{\zeta/2},\ 1/8 + (2j-1)\alpha^{\zeta/2}]$ 使得 $\mathcal{N}_\Phi(\partial B_t^\bullet(0;\, D_\Phi)) \geq c_*^{-2} \cdot 64 \cdot \alpha^{2\zeta}$ 的条件概率；根据并集界，该概率至少为 $1 - C\exp(-b\alpha^{-\zeta/2}) \cdot (\alpha^{-\zeta/2}/16) = 1 - O(\alpha^\infty)$，其中 $\alpha \to 0$。此外，由上述讨论可知

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big[&\text{there exists } j \in [1, \alpha^{-\zeta/2}/16]_{\mathbf{Z}} \text{ such that } G_{\tau_j, \tau_j + 8\alpha^\zeta}(0) \text{ occurs} \;\Big|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B_{1/8}^\bullet(0; D_\Phi)) = \ell\Big] \\ &\geq 1 - 2^{-\lfloor \alpha^{-\zeta/2}/16 \rfloor} = 1 - O(\alpha^\infty) \quad \text{as } \alpha \to 0.\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[F(0,n)^c \;\middle|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B_{1/8}^\bullet(0; D_\Phi)) = \ell\right] &\leq \mathbf{P}\left[\tau_{\lfloor \alpha^{-\zeta/2}/16 \rfloor} > 1/4 - 8\alpha^\zeta \;\middle|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B_{1/8}^\bullet(0; D_\Phi)) = \ell\right] \\ &\quad + \mathbf{P}\left[\left(\bigcup\nolimits_{j \in [1, \alpha^{-\zeta/2}/16]_{\mathbf{Z}}} G_{\tau_j, \tau_j + 8\alpha^\zeta}(0)\right)^c \;\middle|\; \mathcal{N}_\Phi(\partial B_{1/8}^\bullet(0; D_\Phi)) = \ell\right] \\ &= O(\alpha^\infty) \quad \text{as } \alpha \to 0.\end{aligned}$$

引理 6.7 的证明至此完成。 □

定义 6.8。 设 $x \in \mathbf{C}$ 且 $n \in \mathbf{N}$。则记作

$$\sigma(x,n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x; D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B_{\alpha^{n-1+\zeta}}^\bullet(x; D_\Phi))} \wedge 1\right) \mathbf{1}_{\widetilde{F}(x,n)} + \mathbf{1}_{\widetilde{F}(x,n)^c},$$

其中，$\operatorname{inradius}(B_{\alpha^{n-1+\zeta}}^\bullet(x;\, D_\Phi))$ 定义为 $= \sup\{R > 0 \colon B_R(0) \subset B_{\alpha^{n-1+\zeta}}^\bullet(x;\, D_\Phi)\}$。

引理 6.9. 令 $n \in \mathbf{N}$。令 $y, x_0, x_1, \cdots\ x_N \in \mathbf{C}$ 使得

- $B_{\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi) \cap B_{4\alpha^n}(x_0; D_\Phi) \neq \emptyset$,
- $B_{4\alpha^n}(x_{j-1}; D_\Phi) \cap B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi) \neq \emptyset$ *for all* $j \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$, *and*
- $(\mathbf{C} \setminus B_{2\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi)) \cap B_{4\alpha^n}(x_N; D_\Phi) \neq \emptyset$.

那么 $\sum_{j=0}^N \sigma(x_j, n) \geq 1$。特别地，条件 $(\star)$ 成立。

我们先概述引理 6.9 的证明。目标是找到一个子区间 $[a,b]_{\mathbf{Z}} \subset [0,N]_{\mathbf{Z}}$使得

$$\bigcup_{k \in [a,b]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_k; D_\Phi) \not\subset B_{\alpha^{n-1+\zeta}}^\bullet(x_j; D_\Phi), \quad \forall j \in [a,b]_{\mathbf{Z}}. \tag{6.3}$$

事实上，在这种情形下，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{j \in [a,b]_{\mathbf{Z}}} \frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B_{\alpha^{n-1+\zeta}}^\bullet(x_j; D_\Phi))} \\ &\qquad \geq \sum_{j \in [a,b]_{\mathbf{Z}}} \operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi)) \cdot \operatorname{diam}\left(\bigcup_{k \in [a,b]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_k; D_\Phi)\right)^{-1} \geq 1,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是由 $\bigcup_{j \in [a,b]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi)$ 连通这一事实得出的。我们选择$z \in \mathbf{C} \setminus B_{2\alpha^{n-1}}(y;\, D_\Phi)$，使球路径 $B_{4\alpha^n}(x_0;\, D_\Phi)\ B_{4\alpha^n}(x_1;\, D_\Phi), \cdots\ B_{4\alpha^n}(x_N;\, D_\Phi)$ 穿过 $A^z_{\alpha^{n-1}, 2\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi)$ 的内边界和外边界。证明分为

四种情形。我们首先区分两种主要情形，具体取决于 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$ 是否有界。

假设 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$ 有界，因此 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi) = B^\bullet_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$。我们首先考虑度量带 $A^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta},\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$，它以 y 为中心，宽度为 $2\alpha^{n-1+\zeta}$，且位于 $A^\bullet_{\alpha^{n-1},3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$ 的内边界附近。我们选取一个最小子区间 $[i_1, j_1]_{\mathbf{Z}} \subset [0, N]_{\mathbf{Z}}$，使得路径 $B_{4\alpha^n}(x_{i_1};\ D_\Phi)\ B_{4\alpha^n}(x_{i_1+1};\ D_\Phi), \cdots\ B_{4\alpha^n}(x_{j_1};\ D_\Phi)$ 穿过该度量带的内边界和外边界。然后我们验证，若对所有 $j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}$ 都有 $y \notin B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$，则子区间 $[i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}$ 满足 (6.3)。

或者，考虑这样的子情形：$B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$有界，但存在 $k_1 \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}$~使得 $y \in B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_1};\ D_\Phi)$。这里，我们依赖事件 $F(x_{k_1},\ n)$。回想一下，事件~$F(x_{k_1},\ n)$确保存在一个“良好”的双连通域 A，它包含于$A^\bullet_{\alpha^{n-1}/16,\ 5\alpha^{n-1}/}$ $_{16}(x_{k_1};\ D_\Phi)$ $D_\Phi)$
它将内边界和外边界分离。为应用这一点，我们首先验证$A^\bullet_{\alpha^{n-1}/16,\ 5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};$
包含于$A^\bullet_{\alpha^{n-1},3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$，并将其内边界和外边界分离；因此，$A$ 也具有这些性质。于是，我们可以选取一个极小子区间 $[i_{k_1}, j_{k_1}]_{\mathbf{Z}} \subset [0, N]_{\mathbf{Z}}$，使得路径 $B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}};\ D_\Phi)\ B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}+1};\ D_\Phi), \cdots$ $B_{4\alpha^n}(x_{j_{k_1}};\ D_\Phi)$穿过 A 的内边界和外边界（更确切地说，是 A的某个特定子域）。随后，我们利用事件 $F(x_{k_1}, n)$的条件~来验证 $[i_{k_1}, j_{k_1}]_{\mathbf{Z}}$ 满足（6.3）。

当 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$ 无界时，度量带 $A^z_{3\alpha^{n-1}/2,2\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi)$ 必须是有界的。直观地说，在这种情形下，$A^z_{3\alpha^{n-1}/2,2\alpha^{n-1}}(y;\ D_\Phi)$ 所起的作用类似于有界情形中的 $A^\bullet_{\alpha^{n-1},3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$（其中，$\partial B^z_{2\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi)$ 和 $\partial B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$ 分别充当内边界和外边界）。验证可由类似的论证得到。

在全部四种情形中，路径 $B_{4\alpha^n}(x_a;\ D_\Phi)\ B_{4\alpha^n}(x_{a+1};\ D_\Phi), \cdots\ B_{4\alpha^n}(x_b;\ D_\Phi)$ 穿过宽度为 $2\alpha^{n-1+\zeta}$ 的度量带的内边界和外边界之间，而验证 (6.3) 等价于证明：对每个 $j \in [a, b]_{\mathbf{Z}}$，要么 $B_{4\alpha^n}(x_a;\ D_\Phi) \not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$，要么 $B_{4\alpha^n}(x_b;\ D_\Phi) \not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$。度量带的宽度立即意味着，要么 $B_{4\alpha^n}(x_a;\ D_\Phi) \not\subset B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$，要么 $B_{4\alpha^n}(x_b;\ D_\Phi) \not\subset B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$。然而，从（未填充的）度量球过渡到填充度量球时，仍需进行一些仔细的检查。

~引理 *6.9* 的证明。 根据定义，不失一般性地假设 $F(x_j, n)$ 出现且

$$\sigma(x_j, n) = \frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j; D_\Phi))}$$

对所有 $j \in [0, N]_{\mathbf{Z}}$ 均成立（否则，对某个 $j \in [0, N]_{\mathbf{Z}}$，$\sigma(x_j, n) = 1$）。注意，存在 $z \in \mathbf{C} \setminus B_{2\alpha^{n-1}}(y;\ D_\Phi)$，使得路径 $B_{4\alpha^n}(x_0;\ D_\Phi)\ B_{4\alpha^n}(x_1;\ D_\Phi), \cdots\ B_{4\alpha^n}(x_N;\ D_\Phi)$ 穿过 $A^z_{\alpha^{n-1},2\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi)$ 的内边界和外边界。
首先，考虑 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$ 有界的情形，或者等价地，$B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi) = B^\bullet_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$。记

- j_1 for the smallest $j \in [0, N]_{\mathbf{Z}}$ such that $B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi)$ intersects $\mathbf{C} \setminus B^\bullet_{\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y; D_\Phi)$;
- i_1 for the largest $i \in [0, N]_{\mathbf{Z}}$ smaller than j_1 such that $B_{4\alpha^n}(x_i; D_\Phi)$ intersects $B^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta}}(y; D_\Phi)$.

首先，我们考虑满足以下条件的情形：$y \notin B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 对所有 $j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}$（参见图1）。我们断言：

$$\sum_{j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}} \sigma(x_j, n) = \sum_{j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}} \frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j; D_\Phi))} \geq 1. \tag{6.4}$$

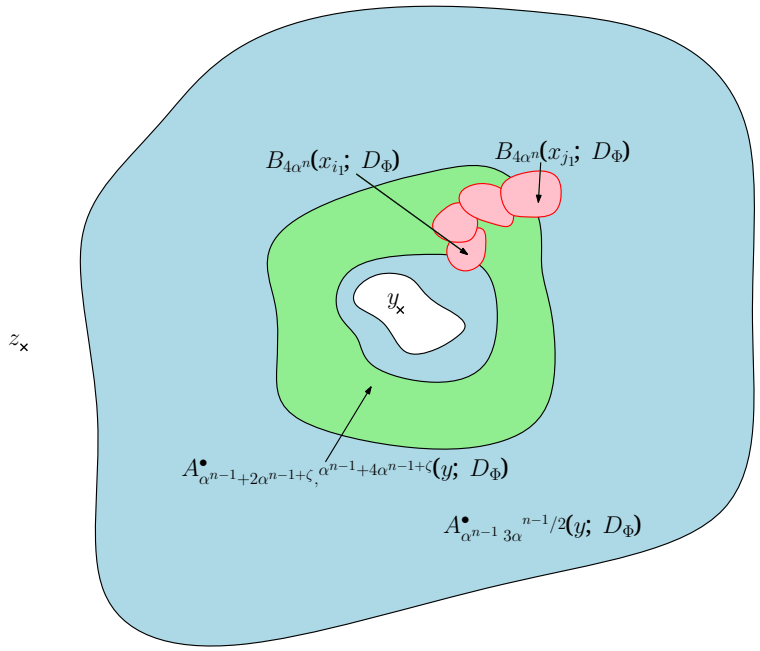


图 1. 引理 6.9 证明中四种情形的第一种示意图。蓝色区域表示度量带 $A^\bullet_{\alpha^{n-1},3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$，绿色度量带 $A^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta},\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 覆盖其上。红色度量球序列 $B_{4\alpha^n}(x_{i_1};\ D_\Phi), \cdots\ B_{4\alpha^n}(x_{j_1};\ D_\Phi)$ 构成一条在绿色度量带的内边界和外边界之间穿行的最短子路径。该图描绘了 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$ 有界且对所有 $j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}$ 均有 $y \notin B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 的情形。因此，该子路径满足条件 (6.3)，其中 $[a, b] = [i_1, j_1]$。为清晰起见，省略了红色度量球的孔洞。

只需证明

$$\bigcup_{i\in[i_1,j_1]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_i; D_\Phi) \not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j; D_\Phi), \quad \forall j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}. \tag{6.5}$$

确实，在这种情形下，

$$\sum_{j\in[i_1,j_1]_{\mathbf{Z}}} \frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j; D_\Phi))}$$

$$\geq \sum_{j\in[i_1,j_1]_{\mathbf{Z}}} \operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j; D_\Phi)) \cdot \operatorname{diam}\left(\bigcup_{i\in[i_1,j_1]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_i; D_\Phi)\right)^{-1} \geq 1,$$

其中，最后一个不等式由 $\bigcup_{i\in[i_1,j_1]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_i; D_\Phi)$ 是连通的这一事实得出。固定 $j \in [i_1, j_1]_{\mathbf{Z}}$。由于 $A^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta},\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 的内边界和外边界之间的 D_Φ-距离为 $2\alpha^{n-1+\zeta}$，而路径

$$B_{4\alpha^n}(x_{i_1}; D_\Phi), B_{4\alpha^n}(x_{i_1+1}; D_\Phi), \cdots, B_{4\alpha^n}(x_{j_1}; D_\Phi)$$

在 $A^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta},\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 的内边界和外边界之间穿过，因此以下两种情况至少有一种成立：

- $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 与 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 不相交，或者
- $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 与 $\mathbf{C} \setminus B^\bullet_{\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 不相交。

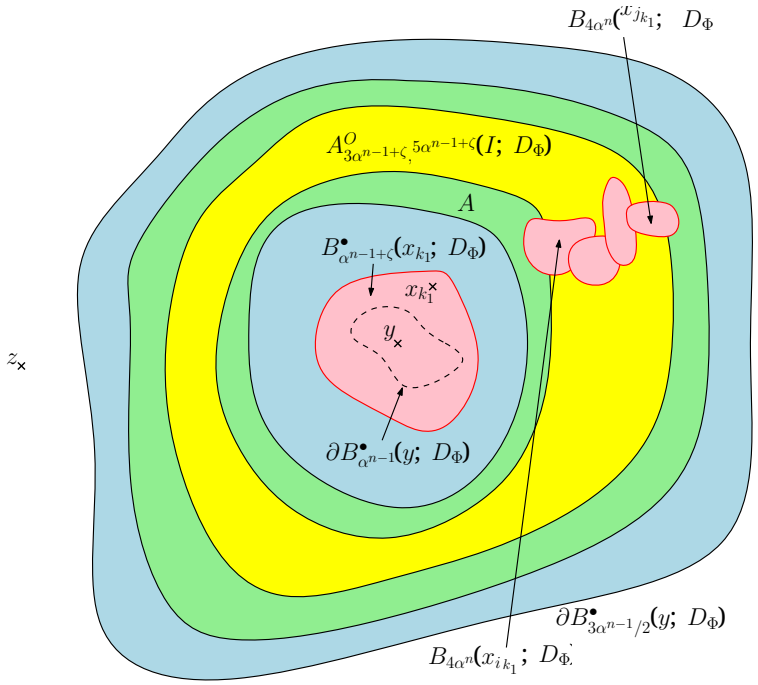


图 2. 引理 6.9 的证明中的四种情形之二的示意图。本图展示了如下情形： $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$ 有界，但与第一种情形不同， y 包含在构成最短子路径的至少一个填充度量球中（此处以中央的红色球体突出显示）。在这种情况下，我们利用事件$\sim F(x_{k_1}, n)$来确定一个合适的度量带 A，以绿色表示。接着，我们找到一条最短子路径，它穿过$A^O_{3\alpha^{n-1+\zeta},\,5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)$的内边界和外边界（以黄色表示），并满足条件（6.3）。

首先，我们考虑 $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 与 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 不相交的情形。由于 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 是连通的，且 $y \notin B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$，因此可得 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi) \cap B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi) = \emptyset$。由于（根据 i_1 的定义） $B^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi) \cap B_{4\alpha^n}(x_{i_1};\ D_\Phi) \neq \emptyset$，因此可得 $B_{4\alpha^n}(x_{i_1};\ D_\Phi) \not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$。接下来，我们考虑 $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 与 $(\mathsf{C} \setminus B^\bullet_{\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi))$ 不相交的情形。由于 $\mathsf{C} \setminus B^\bullet_{\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)$ 是连通且无界的，因此可得 $(\mathsf{C} \setminus B^\bullet_{\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)) \cap B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi) = \emptyset$。由于（根据 j_1 的定义）$(\mathsf{C} \setminus B^\bullet_{\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi)) \cap B_{4\alpha^n}(x_{j_1};\ D_\Phi) \neq \emptyset$，因此可得 $B_{4\alpha^n}(x_{j_1};\ D_\Phi) \not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$。这就完成了 (6.5) 的证明，从而也完成了 (6.4) 的证明。

接下来，我们考虑存在 $k_1 \in [i_1, j_1]$ 使得 $y \in B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_1};\ D_\Phi)$的情形（参见图2）。我们断言$A^\bullet_{\alpha^{n-1}/16,\ 5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};\ D_\Phi)$包含于$A^\bullet_{\alpha^{n-1},\ 3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$中，并将$A^\bullet_{\alpha^{n-1},\ 3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$的内边界和外边界分隔开；或者，等价地说，

$$B^\bullet_{\alpha^{n-1}}(y; D_\Phi) \subset B^\bullet_{\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1}; D_\Phi) \subset B^\bullet_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1}; D_\Phi) \subset B^\bullet_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi).$$

由于 $A^\bullet_{\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-1+\zeta},\alpha^{n-1}+4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;\ D_\Phi) \cap B_{4\alpha^n}(x_{k_1};\ D_\Phi) \neq \emptyset$，因此 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}}(y;\ D_\Phi) \cap B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_1};\ D_\Phi) = \emptyset$，并且 $B_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};\ D_\Phi) \subset B^\bullet_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$。由于 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}}(y;\ D_\Phi)$ 是连通的，且 $y \in B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_1};\ D_\Phi)$，因此 $B^\bullet_{\alpha^{n-1}}(y;\ D_\Phi) \subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_1};\ D_\Phi) \subset B^\bullet_{\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};\ D_\Phi)$。由于 $B^\bullet_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\ D_\Phi)$ 是单连通的，因此 $B^\bullet_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1}; D_\Phi) \subset B^\bullet_{3\alpha^{n-1}/2}(y; D_\Phi)$。至此，命题得证。

~由于事件 $F(x_{k_1},\ n)$ 发生，按定义，存在一个双连通域 A，它包含于 $A^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/16,\ 5\alpha^{n-1}/16}($ $x_{k_1};\ D_\Phi)$，并将其内边界和外边界断开，使得（6.1）在 $w=8\alpha^{n-1+\zeta}$的条件下成立，并且由 G 参数化的 γ-LQG 曲面的事件 A发生。记 B 为 $\mathbf{C}\backslash A$ 中包含 y的连通分支。前一段的命题蕴含

$$B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)\subset B^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};D_\Phi)\subset B\subset B\cup A\subset B^{\bullet}_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};D_\Phi)\subset B^{\bullet}_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi).$$

因此，路径 $B_{4\alpha^n}(x_0;\ D_\Phi)\ B_{4\alpha^n}(x_1;\ D_\Phi),\ \cdots\ B_{4\alpha^n}(x_N;\ D_\Phi)$在 I和 O之间穿过。（按惯例，I（分别为 O）是 B（分别为 $\mathbf{C}\backslash\ A$的无界连通分支）的边界。）因此，我们可以写成

- j_{k_1}表示使 $B_{4\alpha^n}(x_j;\ D_\Phi)$与 $\partial B^{O}_{5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)$相交的最小 $j\in[0,N]_{\mathbf{Z}}$；
- i_{k_1}表示小于 j_{k_1}且使 $B_{4\alpha^n}(x_i;\ D_\Phi)$与 $\partial B^{O}_{3\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)$相交的最大 $i\in[0,N]_{\mathbf{Z}}$。

我们断言

$$\sum_{j\in[i_{k_1},j_{k_1}]_{\mathbf{Z}}}\sigma(x_j,n)=\sum_{j\in[i_{k_1},j_{k_1}]_{\mathbf{Z}}}\frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^{\bullet}_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi))}\geq 1. \tag{6.6}$$

仿照证明（6.4）时所采用的论证，只需证明

$$\bigcup_{i\in[i_{k_1},j_{k_1}]_{\mathbf{Z}}}B_{4\alpha^n}(x_i;D_\Phi)\not\subset B^{\bullet}_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi),\quad\forall j\in[i_{k_1},j_{k_1}]_{\mathbf{Z}}. \tag{6.7}$$

对于每个 $t\in[0,8\alpha^{n-1+\zeta}]$，记 B_t 定义= $B\cup A^{O}_{0,\ t}(I;\ D_\Phi)$。由于 $A^{O}_{3\alpha^{n-1+\zeta},\ 5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)$ 的内边界和外边界之间的 D_Φ-距离为 $2\alpha^{n-1+\zeta}$，且路径

$$B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}};D_\Phi),B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}+1};D_\Phi),\cdots,B_{4\alpha^n}(x_{j_{k_1}};D_\Phi)$$

在 $A^{O}_{3\alpha^{n-1+\zeta},\ 5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)$ 的内边界和外边界之间穿过，因此可知，要么 r

- $B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}\cap B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)=\emptyset$, or
- $(\mathbf{C}\setminus B_{5\alpha^{n-1+\zeta}})\cap B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)=\emptyset.$

为简便起见，我们考虑第一种情形；第二种情形完全类似。选取 $w\in\partial B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}\cap B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}};\ D_\Phi)$。（根据定义，$\partial B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}\cap B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}};\ D_\Phi)\ =\partial B^{O}_{3\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)\cap B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_1}};\ D_\Phi)\ \neq\emptyset$。）注意，从 w 到 I 存在一条 D_Φ-测地线，且它包含于 $B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}$ 中。由于由 A 参数化的 γ-LQG 曲面上的事件 G 发生，根据定义，$B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 不会将 I 和 O 分离。（可立即验证，对所有 $j\in[i_{k_1},j_{k_1}]_{\mathbf{Z}}$，均有 $x_j\in A^{O}_{2\alpha^{n-1+\zeta},6\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\ D_\Phi)$。）因此，我们得出结论：$w$、$I$ 和 O 包含在 $\mathbf{C}\setminus B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 的同一个连通分支中。由于 $A\subset A^{\bullet}_{\alpha^{n-1}/16,5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};\ D_\Phi)$ 有界且 $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)\ \subset A$，可知该连通分支包含 $\mathbf{C}\setminus\ A$，因此是无界的。由此得出 $w\notin B^{\bullet}_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$。这就完成了 (6.7) 的证明，进而也完成了 (6.6) 的证明。至此，$B^{z}_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi)$ 有界这一情形的证明完成。

接下来，我们考虑 $B^{z}_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi)$ 无界的情形。记

- j_2 for the smallest $j\in[0,N]_{\mathbf{Z}}$ such that $B_{4\alpha^n}(x_j;D_\Phi)$ intersects $\mathbf{C}\setminus B^{z}_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$;
- i_2 for the largest $i\in[0,N]_{\mathbf{Z}}$ smaller than j_2 such that $B_{4\alpha^n}(x_i;D_\Phi)$ intersects $B^{z}_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$.

首先，我们考虑对所有 $j\in[i_2,j_2]_{\mathbf{Z}}$ 都有 $z\notin B^{\bullet}_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\ D_\Phi)$ 的情形。我们断言

$$\sum_{j\in[i_2,j_2]_{\mathbf{Z}}}\sigma(x_j,n)=\sum_{j\in[i_2,j_2]_{\mathbf{Z}}}\frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^{\bullet}_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi))}\geq 1. \tag{6.8}$$

仿照6.4的证明中的论证，只需证明

$$\bigcup_{i\in[i_2,j_2]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_i;D_\Phi)\not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi),\quad \forall j\in[i_2,j_2]_{\mathbf{Z}}. \tag{6.9}$$

固定 $j\in[i_2,j_2]_{\mathbf{Z}}$。由于 $A^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta},2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+}}$ 的内边界和外边界之间的 D_Φ-距离为$(y;D_\Phi)$ $2\alpha^{n-1+\zeta}$，且路径 $B_{4\alpha^n}(x_{i_2};D_\Phi)$ $B_{4\alpha^n}(x_{i_2+1};D_\Phi),\cdots$ $B_{4\alpha^n}(x_{j_2};D_\Phi)$ 穿过 $A^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta},}$ $_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ 的内边界和外边界，因此以下两种情况必有其一：

- $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$ 与 $B^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ 不相交，或者
- $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$ 与 $\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ 不相交。

首先，考虑 $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$ 与 $B^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ 不相交的情形。由于 $B^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;$ $D_\Phi)$ 是连通的，且包含 $B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi)$（因此是无界的），可得 $B^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ $\cap B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)=\emptyset$。然而，由于（根据 i_2 的定义）$B^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)\cap B_{4\alpha^n}(x_{i_2};D_\Phi)$ $\neq\emptyset$，可得 $B_{4\alpha^n}(x_{i_2};D_\Phi)\not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$。接下来，考虑 $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$ 与 $\mathbf{C}\setminus$ $B^z_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ 不相交的情形。由于 $\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)$ 是连通的，且（根据假设）$z\notin B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$，可得 $(\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi))\cap B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)=\emptyset$。然而，由于（根据 j_2 的定义）$(\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi))\cap B_{4\alpha^n}(x_{j_2};D_\Phi)\neq\emptyset$，可得 $B_{4\alpha^n}(x_{j_2};D_\Phi)$ $\not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)$。这就完成了 (6.9) 的证明，也因此完成了 (6.8) 的证明。

接下来，我们考虑存在 $k_2\in[i_2,j_2]$ 使得 $z\in B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_2};D_\Phi)$ 的情形。我们断言$A^\bullet_{\alpha^{n-1}/16,}$ $_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)$ 包含于 $A^z_{3\alpha^{n-1}/2,\ 2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)$，并将 $A^z_{3\alpha^{n-1}/2,\ 2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)$ 的内边界和外边界分隔开；等价地，

$$\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)\subset B^\bullet_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)\subset\mathbf{C}\setminus B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi).$$

由于 $A^z_{2\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-1+\zeta},2\alpha^{n-1}-2\alpha^{n-1+\zeta}}(y;D_\Phi)\cap B_{4\alpha^n}(x_{k_2};D_\Phi)\neq\emptyset$，我们有 $(\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi))\cap$ $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_1};D_\Phi)=\emptyset$，且 $B_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_1};D_\Phi)\subset\mathbf{C}\setminus B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi)$。由于 $\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)$ 是连通的，且 $z\in B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_2};D_\Phi)$，可知 $\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_{k_2};D_\Phi)\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)$。由于 $\mathbf{C}\setminus B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi)$ 是单连通的，我们有 $B^\bullet_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)\subset\mathbf{C}\setminus B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi)$。这就完成了该断言的证明。

~由于事件 $F(x_{k_2},\ n)$ 发生，按定义，存在一个双连通域 A 包含于 $A^\bullet_{\alpha^{n-1}/16,\ 5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};$ $D_\Phi)$ 并将其内边界和外边界分隔开，使得满足（6.1），其中 $w=8\alpha^{n-1+\zeta}$，且由 G 参数化的 γ-LQG 曲面上的事件 A发生。记 B为 $\mathbf{C}\setminus A$中包含 z的连通分支。前一段的 论断 意味着

$$\mathbf{C}\setminus B^z_{2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)\subset B\subset B\cup A\subset B^\bullet_{5\alpha^{n-1}/16}(x_{k_2};D_\Phi)\subset\mathbf{C}\setminus B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;D_\Phi).$$

因此，路径 $B_{4\alpha^n}(x_0;D_\Phi)$ $B_{4\alpha^n}(x_1;D_\Phi),\ \cdots$ $B_{4\alpha^n}(x_N;D_\Phi)$在 I和 O之间穿过。（按惯例， I（分别为 O）是 B（分别为 $\mathbf{C}\setminus$ A的无界连通分支）的边界。）因此，我们可以写成

- j_{k_2}使得 $B_{4\alpha^n}(x_j;D_\Phi)$ 与 $\partial B^O_{3\alpha^{n-1+\zeta}}(I;D_\Phi)$ 相交的最小 $j\in[0,N]_{\mathbf{Z}}$；
- i_{k_2}使得 $B_{4\alpha^n}(x_i;D_\Phi)$ 与 $\partial B^O_{5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;D_\Phi)$ 相交且小于 j_{k_2} 的最大 $i\in[0,N]_{\mathbf{Z}}$

.

我们断言，

$$\sum_{j\in[i_{k_2},j_{k_2}]_{\mathbf{Z}}}\sigma(x_j,n)=\sum_{j\in[i_{k_2},j_{k_2}]_{\mathbf{Z}}}\frac{\operatorname{diam}(B_{4\alpha^n}(x_j;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi))}\geq 1. \tag{6.10}$$

通过类似的 将证明（6.4）中的论证应用于该论证，只需证明

$$\bigcup_{i\in[i_{k_2},j_{k_2}]_{\mathbf{Z}}} B_{4\alpha^n}(x_i;D_\Phi)\not\subset B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi),\quad \forall j\in[i_{k_2},j_{k_2}]_{\mathbf{Z}}. \tag{6.11}$$

对于每个 $t\in[0,8\alpha^{n-1+\zeta}]$，记作 B_t 定义= $B\cup A^O_{0,\,t}(I;\,D_\Phi)$。由于$A^O_{3\alpha^{n-1+\zeta},\,5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\,D_\Phi)$的内边界和外边界之间的 D_Φ-距离为 $2\alpha^{n-1+\zeta}$，且路径

$$B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_2}};D_\Phi),B_{4\alpha^n}(x_{i_{k_2}+1};D_\Phi),\cdots,B_{4\alpha^n}(x_{j_{k_2}};D_\Phi).$$

在$A^O_{3\alpha^{n-1+\zeta},\,5\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\,D_\Phi)$的内边界和外边界之间穿过，因此以下两者必有其一：

- $B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}\cap B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)=\emptyset$, or
- $(\mathbf{C}\setminus B_{5\alpha^{n-1+\zeta}})\cap B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;D_\Phi)=\emptyset$.

为简单起见，我们考虑第一种情形；第二种情形完全类似。选取 $w\in\partial B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}\cap B_{4\alpha^n}(x_{j_{k_2}};\,D_\Phi)$。（根据定义，$\partial B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}\cap B_{4\alpha^n}(x_{j_{k_2}};\,D_\Phi)=\partial B^O_{3\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\,D_\Phi)\cap B_{4\alpha^n}(x_{j_{k_2}};\,D_\Phi)\neq\emptyset$。）注意，存在一条从 w 到 I 且包含于 $B_{3\alpha^{n-1+\zeta}}$中的 D_Φ-测地线。由于参数化为 A 的 γ-LQG 曲面的事件 G 发生，根据定义，$B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\,D_\Phi)$ 不会将 I 与 O 分离。（可以立即验证，对于所有 $j\in[i_{k_2},j_{k_2}]_{\mathbf{Z}}$，都有 $x_j\in A^O_{2\alpha^{n-1+\zeta},\,6\alpha^{n-1+\zeta}}(I;\,D_\Phi)$。）因此，我们得出结论：$w$、$I$ 和 O 位于 $\mathbf{C}\backslash B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\,D_\Phi)$ 的同一个连通分支中。由于 $A\subset A^z_{3\alpha^{n-1}/2,2\alpha^{n-1}}(y;D_\Phi)$ 有界（因为根据假设，$B^z_{3\alpha^{n-1}/2}(y;\,D_\Phi)$ 无界），且 $B_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\,D_\Phi)\subset A$，可知该连通分支包含 $\mathbf{C}\setminus A$，因而是无界的。因此，我们得出结论 $w\notin B^\bullet_{\alpha^{n-1+\zeta}}(x_j;\,D_\Phi)$。这就完成了 (6.11) 的证明，进而也完成了 (6.10) 的证明。引理 6.9 的证明至此完成。□

定义 6.10。令 $x\in\mathbf{C}$ 和 $n\in\mathbf{N}$。于是我们记作

$$\varsigma(x,n)\overset{\text{def}}{=}(\eta+128\mathrm{e}^{-2\pi m_n}+2\cdot\mathbf{1}_{F(x,n)^c})\wedge 1,$$

wh其中 m_n 表示 $A^\bullet_{32\alpha^n,\alpha^{n-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi)$ 的共形模数；我们记作

$$\varpi(x,n)\overset{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^n\varsigma(x,j).$$

引理 6.11。采用第 5 节的记号，$\pi(u)\le\varpi(x,n)$ 对于所有 $n\in\mathbf{N}$ 以及 $u=(x,n)\in V_n$均成立。

证明。由（5.6）可知，$\pi(u)=\prod_{j=1}^n\varrho(g(u)j)$。因此，只需证明

$$\varrho(g(u)_j)\le\varsigma(x,j),\quad\forall j\in[1,n]_{\mathbf{Z}}. \tag{6.12}$$

对于每个 $j\in[1,n]_{\mathbf{Z}}$，记 $g(u)j=(x_j,j)$。我们有

$$\begin{aligned}\varrho(g(u)_j)&\le\sup\{\mu(v):v\in V_j\text{ with }g(u)_j\sim v\}\quad(\text{by Lemma 5.3, (i)})\\&\le\eta+\sup\{\nu(v):v\in V_j\text{ with }g(u)_j\sim v\}\quad(\text{by (5.4)})\\&\le\eta+2\sup\{\sigma(v''):v,v',v''\in V_j\text{ with }g(u)_j\sim v\sim v'\sim v''\}\quad(\text{by (5.4)})\\&\le\eta+2\sup\{\sigma(y,j):y\in\mathbf{C}\text{ with }D_\Phi(x_j,y)\le 24\alpha^j\},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由以下事实得出：如果 $(x_j,j)\sim(y,j)$ 是一条水平边，那么 $B_{4\alpha^j}(x_j;\,D_\Phi)$ 与 $B_{4\alpha^j}(y;\,D_\Phi)$ 相交。注意到

$$D_\Phi(x,x_j)=D_\Phi(x_n,x_j)\le\sum_{k=j}^{n-1}D_\Phi(x_k,x_{k+1})\le\sum_{k=j}^{n-1}\alpha^k<2\alpha^j,$$

其中倒数第二个不等式由（5.5）可得。因此，我们得到

$$\varrho(g(u)_j)\le\eta+2\sup\{\sigma(y,j):y\in\mathbf{C}\text{ with }D_\Phi(x,y)\le 26\alpha^j\}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\sigma(y,j) &= \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{2\alpha^j}(y;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}}(y;D_\Phi))}\wedge 1\right)\mathbf{1}_{\widetilde{F}(y,j)}+\mathbf{1}_{\widetilde{F}(y,j)^c}\quad\text{(by definition)}\\ &\le \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{2\alpha^j}(y;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}}(y;D_\Phi))}\wedge 1\right)+\mathbf{1}_{\widetilde{F}(y,j)^c}\\ &\le \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{28\alpha^j}(x;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi))}\wedge 1\right)+\mathbf{1}_{\widetilde{F}(y,j)^c}\quad\text{(since } 26\alpha^j\le\alpha^{j-1+\zeta}/2)\\ &\le \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{28\alpha^j}(x;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi))}\wedge 1\right)+\mathbf{1}_{F(x,j)^c}\quad\text{(by Lemma 6.6)}\\ &\le \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{32\alpha^j}(x;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi))}\wedge 1\right)+\mathbf{1}_{F(x,j)^c}\end{aligned}$$

对所有 $y\in\mathbf{C}$ 满足 $D_\Phi(x,y)\le 26\alpha^j$ 的情形。因此，我们得到

$$\varrho(g(u)_j)\le\eta+2\left(\frac{\operatorname{diam}(B_{32\alpha^j}(x;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi))}\wedge 1\right)+2\cdot\mathbf{1}_{F(x,j)^c}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{diam}(B_{32\alpha^j}(x;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi))}\wedge 1 &\le \frac{2\operatorname{outradius}(B^\bullet_{32\alpha^j}(x;D_\Phi))}{\operatorname{inradius}(B^\bullet_{\alpha^{j-1+\zeta}/2}(x;D_\Phi))}\wedge 1\\ &\le 2\left((\mathrm{e}^{2\pi m_j}/16-1)\vee 0\right)^{-1}\wedge 1\quad\text{(by Lemma 3.8)}\\ &\le 64\mathrm{e}^{-2\pi m_j},\end{aligned}$$

其中外半径$(B^\bullet_{32\alpha^j}(x;\,D_\Phi))$ 定义为 $=\inf\{R>0\colon\ B^\bullet_{32\alpha^j}(x;\,D_\Phi)\ \subset\ B_R(0)\}$，最后一个不等式由以下事实得出：对所有 $x>0$，$2((x-1)\vee 0)^{-1}\wedge 1\le 4x^{-1}$。因此，我们得到

$$\varrho(g(u)_j)\le\eta+128\mathrm{e}^{-2\pi m_j}+2\cdot\mathbf{1}_{F(x,j)^c}.$$

将此与以下事实结合起来 $\varrho(g(u)_j)\ \le 1$(参见引理5.3, (i))，我们完成了对 (6.12) 的证明，从而完成了引理6.11的证明。□

引理 6.12。令 η定义为$=\alpha^{100}$。设 $(\mathbf{C},\Phi;0,\infty)$ 是一个 γ-*LQG* 锥。那么，对每个 $p>2$，存在 $q=q(p)>d_\gamma$ 和 $\zeta_*=\zeta_*(p)>0$，使得对每个 $\zeta\in(0,\zeta_*]$，都存在 $\alpha_*=\alpha_*(\zeta)\in(0,1)$，满足

$$\mathbf{E}[\varpi(0,n)^p]\le\alpha^{qn},\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_*],\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

证明。固定 $p>2$。对于每个 $t\ge 0$，记 $Y_{-t}\,\mathrm{def}=\,\mathcal{N}_\Phi(\partial B^\bullet_t(0;D_\Phi))$。记 E为以下事件：$\#\{j\in[1,n]_{\mathbf{Z}}\colon\ Y_{-32\alpha^j}\le\alpha^{2j-2\zeta}\}\ \ge(1-\zeta)n$。由引理 3.1，对于所有充分小的 $\alpha\in(0,1)$ 以及所有 $n\in\mathbf{N}$，$\mathbf{P}[E^c]\le\exp(-\alpha^{-\zeta}n)$。回忆

$$\varpi(0,n)=\prod_{j=1}^n\left((\eta+128\mathrm{e}^{-2\pi m_j}+2\cdot\mathbf{1}_{F(0,j)^c})\wedge 1\right),$$

其中，m_j 表示$A^\bullet_{32\alpha^j,\ \alpha^{j-1+\zeta}/2}(0;D_\Phi)$的共形模数。注意，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[(\eta+128\mathrm{e}^{-2\pi m_j}+2\cdot\mathbf{1}_{F(0,j)^c})^p\ \middle|\ Y_{-32\alpha^j}\right]\\ &\qquad\le 3^{p-1}\left(\eta^p+2^{7p}\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_j p}\mid Y_{-32\alpha^j}]+2^p\mathbf{P}[F(0,j)^c\mid Y_{-32\alpha^j}]\right).\end{aligned}$$

由引理 6.7，随着 $\alpha \to 0$趋于$\ell \geq 0$，$\sup_{\ell \geq 0} \mathbf{P}[F(0,j)^c \mid Y_{-32\alpha^j} = \ell] = O(\alpha^\infty)$。由缩放性质，在给定 $Y_{-32\alpha^j}$ 的条件下，m_j 的条件分布与内边界长度为一、宽度为$(\alpha^{j-1+\zeta}/2 - 32\alpha^j)Y_{-32\alpha^j}^{-1/2}$的锥型度量带的共形模数的条件分布相同。记$m$ 为内边界长度为一、宽度为$(\alpha^{j-1+\zeta}/2 - 32\alpha^j)\alpha^{-(j-\zeta)} \geq \alpha^{2\zeta-1}/4$的锥型度量带的共形模数。因此，几乎必然地，在 $Y_{-32\alpha^j} \leq \alpha^{2j-2\zeta}$这一事件发生时，我们有 $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m_j p} \mid Y_{-32\alpha^j}] \leq \mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m p}]$。由命题 3.7，存在 $q = q(p) > d_\gamma$ 和$\zeta_* = \zeta_*(p) \in (0, 1 - d_\gamma/q)$，使得当 $\zeta \in (0, \zeta_*]$时，只要 $\alpha \to 0$趋于α^q，就有 $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-2\pi m p}] = o(\alpha^q)$。因此，我们得出结论：存在 $\alpha_* = \alpha_*(\zeta) \in (0,1)$，使得对每个 $\alpha \in (0, \alpha_*]$，几乎必然地，在 $Y_{-32\alpha^j} \leq \alpha^{2j-2\zeta}$ 这一事件发生时，

$$\mathbf{E}\left[(\eta + 128\mathrm{e}^{-2\pi m_j} + 2 \cdot \mathbf{1}_{F(0,j)^c})^p \;\middle|\; Y_{-32\alpha^j}\right] \leq \alpha^q.$$

对于每个 $k \in \mathbf{N}$，将 α^{j_k} 记为 $\{\alpha^j\}$ 中满足 $Y_{-32\alpha^j} \leq \alpha^{2j-2\zeta}$ 的第 k 小的数。根据定义，$E = \{j_{\lceil (1-\zeta)n \rceil} \geq 1\}$。注意，$\eta + 128\mathrm{e}^{-2\pi m_j} + 2 \cdot \mathbf{1}_{F(0,j)^c}$ 几乎必然由以 $A^\bullet_{32\alpha^j, 32\alpha^{j-1}}(0; D_\Phi)$ 为参数的 γ-LQG 曲面所确定（参见引理 6.4）。由于以 $B^\bullet_{32\alpha^j}(0;\, D_\Phi)$ 和 $\mathbf{C} \setminus B^\bullet_{32\alpha^j}(0;\, D_\Phi)$ 为参数的 γ-LQG 曲面在给定 $Y_{-32\alpha^j}$ 的条件下条件独立，因此可得

$$\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n} (\eta + 128\mathrm{e}^{-2\pi m_{j_k}} + 2 \cdot \mathbf{1}_{F(0,j_k)^c})^p\right] \leq \alpha^{qn}$$

对于所有 $\alpha \in (0,\ \alpha_*]$ 以及所有 $n \in \mathbf{N}$。因此，我们得出

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\varpi(0,n)^p] &\leq \mathbf{E}[\varpi(0,n)^p \mathbf{1}_E] + \mathbf{P}[E^c] \\
&\leq \mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{\lceil (1-\zeta)n \rceil} (\eta + 128\mathrm{e}^{-2\pi m_{j_k}} + 2 \cdot \mathbf{1}_{F(0,j_k)^c})^p\right] + \exp(-\alpha^{-\zeta} n) \\
&\leq \alpha^{q(1-\zeta)n} + \exp(-\alpha^{-\zeta} n)
\end{aligned}$$

对于所有 $\alpha \in (0, \alpha_*]$ 以及所有 $n \in \mathbf{N}$。由于 $q(1-\zeta) \geq q(1-\zeta_*) > d_\gamma$（根据假设），引理6.12的证明至此完成。□

7. 定理1.1的证明

我们继续使用第 5 节和第 6 节中的记号。令 $\eta \overset{\text{def}}{=} \alpha^{100}$。根据第 5 节的构造（尤其是推论 5.6），为了证明度量空间 (X, D) 的共形维数等于二，只需证明：对于每个 $p > 2$，我们都可以选取参数 α、有限子集 $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$，以及赋值 $\sigma\colon V \setminus \{o\} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$，使得 $(\star)$ 成立，且当 $n \to \infty$ 时，$\sum_{u \in V_n} \pi(u)^p \to 0$。（我们总是假定 A_n 是一个极大的 α^n-分离子集。）

此后固定 $p > 2$。设 $(\mathbf{C}\ \Phi; 0, \infty)$ 为一个 γ-LQG 锥。首先，我们考虑 $(X, D) = (B_t(0;\, D_\Phi)\ D_\Phi)$ 对某个 $t \in (0, 1/2)$ 成立的情形。我们断言

存在 $\zeta > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$，使得对于每个 $t \in (0, 1/2)$，几乎必然存在有限子集 $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset B_t(0;\, D_\Phi)$，使得

$$\sum_{(x,n) \in V_n} \varpi(x, n; \Phi)^p \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \tag{7.1}$$

这里我们使用记号 $\varpi(x,\ n;\ \Phi) = \varpi(x,\ n)$，以强调$\varpi(x,\ n)$ 对 Φ 的依赖关系。

在继续之前，我们在假设 (7.1) 成立的情况下完成定理 1.1 的证明。设 $(\widehat{\mathbf{C}}, \Phi^{\mathrm{sph}}, 0, \infty)$ 是一个 γ-LQG 球面。根据缩放性质，不失一般性，我们可以假设 $(\widehat{\mathbf{C}}, \Phi^{\mathrm{sph}}, 0, \infty)$ 经过条件化，使得 $\operatorname{diam}(\mathbf{C}; D_{\Phi^{\mathrm{sph}}}) = 1$。设 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 和 $\{y_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是从 $\mathcal{M}_{\Phi^{\mathrm{sph}}}$ 中抽取的条件独立样本（将其重新归一化为概率测度）。再设 $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 独立于其他所有对象，从区间 $(0, 1/2)$ 上的均匀概率测度中抽取。于是，对每个 $k \in \mathbf{N}$，在事件 $D_{\Phi^{\mathrm{sph}}}(x_k, y_k) > 1/2$ 发生的条件下，以 $B_{1/2}^{y_k}(x_k;\ D_{\Phi^{\mathrm{sph}}})$ 和 $B_{1/2}^{\bullet}(0; D_{\Phi^{\mathrm{sph}}})$ 为参数化的 γ-LQG 曲面的分布互相绝对连续。（事实上，以 $B_{1/2}^{y_k}(x_k;\ D_{\Phi^{\mathrm{sph}}})$ 和 $B_{1/2}^{\bullet}(0; D_{\Phi^{\mathrm{sph}}})$ 为参数化的 γ-LQG 曲面的边界长度分布都与 $\mathbf{R}_{\geq 0}$ 上的勒贝格测度互相绝对连续，并且给定边界长度后，它们具有相同的条件分布。）由此结合 (7.1) 可知，对每个 $k \in\mathbf{N}$，几乎必然地，在事件

- $D_{\Phi^{\text{球面}}}(x_k,\ y_k) > 1/2$，且
- $D_{\Phi^{\text{球面}}}$ 和 $D_{\Phi^{\text{球面}}}(\bullet,\ \bullet;\ B_{1/2}^{y_k}(x_k; D_{\Phi^{\text{球面}}}))$ 在 $B_{t_k}(x_k; D_{\Phi^{\text{球面}}})$ 上的限制相等（在这种情形下，$D_{\Phi^{\text{球面}}}$ 在 $B_{t_k}(x_k; D_{\Phi^{\text{球面}}})$ 上的限制几乎必然由以 $B_{1/2}^{y_k}(x_k; D_{\Phi^{\text{球面}}})$ 为参数化的γ-LQG 曲面确定），

存在有限子集 $A_0^k \subset A_1^k \subset A_2^k \subset \cdots \subset B_{t_k}(x_k;\ D_{\Phi^{\mathrm{sph}}})$，使得

$$\sum_{(x,n)\in V_n^k} \varpi(x, n; \Phi^{\mathrm{sph}})^p \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

另一方面，几乎必然存在一个有限子集 $\mathcal{K} \subset\mathbf{N}$，使得上述事件 $\widehat{\ }$ 对所有 $k \in \mathcal{K}$ 都发生，且 $\mathbf{C} = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} B_{t_k}(x_k;\ D_{\Phi^{\mathrm{sph}}})$。我们可以选择 $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset \mathbf{C}$，使得 $A_n \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}} A_n^k$。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{(x,n)\in V_n} \pi(x, n; \Phi^{\mathrm{sph}})^p &\leq \sum_{(x,n)\in V_n} \varpi(x, n; \Phi^{\mathrm{sph}})^p \quad (\text{by Lemma 6.11})\\ &\leq \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{(x,n)\in V_n^k} \varpi(x, n; \Phi^{\mathrm{sph}})^p \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.\end{aligned}$$

由于条件（$\star$）成立（参见引理 6.9），根据本节第一段的讨论，这就完成了定理 1.1的证明。

剩下要验证（7.1）。固定 $t \in (0, 1/2)$。令 $\eta' : (-\infty, \infty) \to \mathbf{C}$ 为一条从 ∞ 到 ∞、以 $\mathcal{M}_\Phi$为参数化的独立整平面空间填充 $\mathrm{SLE}_{\kappa'}$ 曲线。固定 $T > 0$。令 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 为从 $\mathcal{M}_\Phi|_{\eta'([-T,T])}$ 中条件独立抽取的样本（将其重新归一化为概率测度）。在事件 $B_t(0;\ D_\Phi) \subset \eta'([-T, T])$ 发生时，我们可以安排使得，对于所有 $n \in \mathbf{N}$，都有 $A_n \subset \{x_k :\ k \in [1, k_n]_{\mathbf{Z}},\ x_k \in B_t(0; D_\Phi)\}$，其中

$$k_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{K \in \mathbf{N} : B_t(0; D_\Phi) \subset \bigcup \{B_{\alpha^n}(x_k; D_\Phi) : k \in [1, K]_{\mathbf{Z}},\ x_k \in B_t(0; D_\Phi)\}\right\}.$$

根据引理 3.5，几乎必然地，在 $B_t(0;\ D_\Phi) \subset \eta'([-T, T])$ 这一事件发生时，对于所有充分大的 $n \in\mathbf{N}$，都有 $k_n \leq \alpha^{-(d_\gamma+\zeta)n}$。固定 $n_* \in\mathbf{N}$。记 $E(T,\ n_*)$ 为以下事件：$B_t(0;\ D_\Phi) \subset \eta'([-T, T])$，且对于所有 $n \geq n_*$，都有 $k_n \leq \alpha^{-(d_\gamma+\zeta)n}$。注意，每个 $(\mathbf{C},\ \Phi;\ x_k,\ \infty)$ 的分布都与 $(\mathbf{C},\ \Phi;\ 0,\ \infty)$ 相同（作为 γ-LQG 曲面）。因此，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{(x,n)\in V_n} \varpi(x, n; \Phi)^p\right) \mathbf{1}_{E(T,n_*)}\right] &\leq \mathbf{E}\left[\left(\sum_{k\in[1,k_n]_{\mathbf{Z}}} \varpi(x_k, n; \Phi)^p\right) \mathbf{1}_{E(T,n_*)}\right]\\ &\leq \alpha^{-(d_\gamma+\zeta)n} \mathbf{E}[\varpi(0, n; \Phi)^p]\end{aligned}$$

对于所有 $n \geq n_*$。因此，根据引理 6.12，我们可以选取 ζ 足够小（具体而言，$\zeta \leq \zeta_* \wedge ((q-d_\gamma)/2)$ 采用该引理中的记号）以确保存在某个 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{(x,n)\in V_n} \varpi(x,n;\Phi)^p\right)\mathbf{1}_{E(T,n_*)}\right] \leq \alpha^{\zeta n}, \quad \forall n \geq n_*.$$

（这里注意，ζ 和 α 不取决于 t、T 和 n_* 的选择。）由 Borel–Cantelli 引理可知，几乎必然在事件 $E(T,n_*)$ 上，

$$\sum_{(x,n)\in V_n} \varpi(x,n;\Phi)^p \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

由于几乎必然存在 $T>0$ 和 $n_* \in \mathbf{N}$ 使得 $E(T,n_*)$ 发生，这就完成了对（7.1）的证明，也就完成了定理1.1的证明。□

参考文献

[ABA17] Louigi Addario-Berry 和 Marie Albenque。随机简单三角剖分与随机简单四边形剖分的标度极限。《概率年刊》，45(5):2767–2825，2017。[ABA21] Louigi Addario-Berry 和 Marie Albenque。通过标记树的对称化研究非二分地图的收敛。《亨利·勒贝格年刊》，4:653–683，2021。[Abr16] Céline Abraham。重标度的二分平面图收敛到布朗地图。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，52(2):575–595，2016。[Ahl35] Lars Ahlfors。关于覆盖曲面的理论。《数学学报》，65(1):157–194，1935。[Ahl73] Lars V. Ahlfors。《共形不变量：几何函数论专题》。麦格劳-希尔高等数学丛书。McGraw-Hill Book Co.，纽约-杜塞尔多夫-约翰内斯堡，1973。[Ahl06] Lars V. Ahlfors。《拟共形映射讲义》，大学讲座丛书第38卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第二版，2006。附有 C. J. Earle、I. Kra、M. Shishikura 和 J. H. Hubbard 撰写的补充章节。[AKM17] Omer Angel、Brett Kolesnik 和 Grégory Miermont。布朗地图中测地线的稳定性。《概率年刊》，45(5):3451–3479，2017。[BBS22] Anders Björn、Jana Björn 和 Nageswari Shanmugalingam。倍增度量测度空间及其双曲填充的延拓与迹结果。《纯粹与应用数学杂志》(9)，159:196–249，2022。[BC25] Timothy Budd 和 Nicolas Curien。随机带 puncture 双曲曲面与布朗球面。arXiv:2508.18792，2025。[BH99] Martin R. Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，数学科学基础丛书第319卷 *[数学科学基本原理]*。施普林格出版社，柏林，1999。[BHK01] Mario Bonk、Juha Heinonen 和 Pekka Koskela。格罗莫夫双曲空间的单值化。《星丛》，(270):viii+99，2001。[BHL25] Ilia Binder、Hrant Hakobyan 和 Wen-Bo Li。布朗图的共形维数。《杜克数学杂志》，174(7):1341–1405，2025。[BJM14] Jérémie Bettinelli、Emmanuel Jacob 和 Grégory Miermont。经由 Ambjørn-Budd 双射研究均匀随机平面地图的标度极限。《电子概率杂志》，19:第74篇，16页，2014。[BK02] Mario Bonk 和 Bruce Kleiner。二维度量球面的拟对称参数化。《数学发明》，150(1):127–183，2002。[BK05] Mario Bonk 和 Bruce Kleiner。共形维数与边界为二维球面的格罗莫夫双曲群。《几何与拓扑》，9:219–246，2005。[Bon06] Mario Bonk。分形的拟共形几何。载于《国际数学家大会论文集》第二卷，第1349–1373页。欧洲数学会，苏黎世，2006。[BP03] Marc Bourdon 和 Hervé Pajot。上同调与 Besov 空间。《纯粹与应用数学杂志》，:– 。[BS07] Sergei Buyalo 和 Viktor Schroeder。《渐近几何要素》。欧洲数学会数学专著丛书。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2007。[BS18] Mario Bonk 和 Eero Saksman。索伯列夫空间与双曲填充。《纯粹与应用数学杂志》，737:161–187，2018。[BT01] Christopher J. Bishop 和 Jeremy T. Tyson。共形维数的局部极小集。《芬兰科学院数学年刊》，26(2):361–373，2001。

[Can94] James W. Cannon。组合黎曼映射定理。《数学学报》，173(2):155–234，1994。[CDP90] M. Coornaert、T. Delzant 和 A. Papadopoulos。《几何与群论》，《数学讲义》第1441卷。施普林格出版社，柏林，1990。《格罗莫夫双曲群》。 [格罗莫夫双曲群], 附英文概要。[CLG14] Nicolas Curien 和 Jean-Fran

27 4 1249 1291, cois Le 2014 Gall。布朗平面。《理论概率杂志》，( ): – 。[CLG16] Nicolas Curien 和 Jean-Fran¸cois Le Gall。布朗平面的船体过程。《概率论及其相关领域》，166(1-2):187–231，2016。[CP13] Matias Carrasco Piaggio。紧致度量空间的共形规范。《高等师范学校科学年刊》(4)，46(3):495–548，2013。[CP14] Matias Carrasco Piaggio。共形维数与双曲群的典范分解。《几何与泛函分析》，24(3):922–945，2014。[DDDF20] Jian Ding、Julien Dubédat、Alexander Dunlap 和 Hugo Falconet。刘维尔首次通过渗流在 $\gamma \in (0, 2)$情形下的紧性。《高等科学研究所数学出版物》，132:353–403，2020。[DFG+20] Julien Dubédat、Hugo Falconet、Ewain Gwynne、Joshua Pfeffer 和 Xin Sun。弱刘维尔量子引力度量与刘维尔首次通过渗流。《概率论及其相关领域》，178(1-2):369–436，2020。[DMS21] Bertrand Duplantier、Jason Miller 和 Scott Sheffield。作为树的配对的刘维尔量子引力。《星丛》，(427):viii+257，2021。[DS11] Bertrand Duplantier 和 Scott Sheffield。刘维尔量子引力与 KPZ。《数学发明》，185(2):333–393，2011。[ESS25] Behnam Esmayli、Ryan Schardine 和 Nageswari Shanmugalingam。关于 Carrasco Piaggio 定理：组合模数与阿尔福斯正则共形维数之间的联系。《数学分析》，2025。[GdlH90] É. Ghys 和 P. de la Harpe 编。《根据米哈伊尔·格罗莫夫关于双曲群的论述》，《数学进展》第83卷。Birkhäuser Boston 公司，波士顿，马萨诸塞州，1990。收录了1988年在伯尔尼举行的瑞士双曲群研讨会论文。[GM20a] Ewain Gwynne 和 Jason Miller。刘维尔量子引力中测地线的汇合，适用于 $\gamma \in (0, 2)$。《概率年刊》，48(4):1861–1901，2020。[GM20b] Ewain Gwynne 和 Jason Miller。高斯自由场的局部度量。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，70(5):2049–2075，2020。[GM21] Ewain Gwynne 和 Jason Miller。刘维尔量子引力度量在$\gamma \in (0, 2)$情形下的存在性与唯一性。《数学发明》，223(1):213–333，2021。[Gro87] M. Gromov。双曲群。载于《群论论文集》，《数学科学研究所出版物》第8卷，第75–263页。施普林格，纽约，1987。[Grö20a] Herbert Grötzsch。关于共形映射的一些极值问题。载于《泰希米勒理论手册》第七卷，《IRMA 数学与理论物理讲义》第30卷，第355–363页。欧洲数学会，苏黎世，[2020] ©2020。[Grö20b] Herbert Grötzsch。关于共形映射的一些极值问题（二）。载于《泰希米勒理论手册》第七卷，《IRMA 数学与理论物理讲义》第30卷，第365–370页。欧洲数学会，苏黎世，[2020] ©2020。[Haï09] Peter Haïssinsky。拟共形几何、双曲度量空间的边界分析与刚性——根据 Mostow、Pansu、Bourdon、Pajot、Bonk、Kleiner [。第326号，第321–362页，报告编号993，ix。2009。布尔巴基研讨会，2007/2008年卷。[Hei01] Juha Heinonen。《度量空间上的分析讲义》。《大学数学丛书》。施普林格出版社，纽约，2001。[Hei06] Juha Heinonen。什么是……拟共形映射？《美国数学会通报》，53 1335，2006 11 1334( ): – 。[HK95] Juha Heinonen 和 Pekka Koskela。拟共形性的定义。《数学发明》，120(1):61–79，1995。[Kig14] Jun Kigami。自相似集上度量的拟对称修正。载于《分形的几何与分析》，《施普林格数学与统计学会议录》第88卷，第253–282页。施普林格，海德堡，2014。[KL04] S. Keith 和 T. Laakso。共形阿苏阿德维数与模数。《几何与泛函分析》，14(6):1278–1321，2004。[Kov06] Leonid V. Kovalev。共形维数不取零与一之间的值。《杜克数学杂志》，134(1):1–13，2006。[Kwa20] Jaroslaw Kwapisz。经由 p-电阻研究共形维数：谢尔宾斯基地毯。《芬兰科学院数学年刊》，45(1):3–51，2020。[Leh84] Olli Lehto。拟共形映射的历史回顾。载于《论莱昂哈德·欧拉的工作》（柏林，1983），第205–217页。Birkhäuser，巴塞尔，1984。[LG07] Jean-Fran¸cois Le Gall。大型平面图标度极限的拓扑结构。《数学发明》，169(3):621–670，2007。

[LG10] Jean-Fran.cois Le Gall. 大型平面图和布朗地图中的测地线。《数学学报》，205(2):287– 360, 2010. [LG13] Jean-Fran 。 41 4 2880 2960, 2013 cois Le Gall. 布朗地图的唯一性与普适性。《概率年刊》，( ): – .[LG22] Jean-Fran.cois Le Gall. 布朗球面的体积测度是一种豪斯多夫测度。《电子概率杂志》，27:论文编号 113, 28, 2022.[LGP08] Jean-Fran.cois Le Gall 和 Frédéric Paulin. 二分平面图的标度极限与二维球面同胚。《几何与泛函分析》，18(3):893–918, 2008. [LV65] O. Lehto 和 K. I. Virtanen. 拟共形映射，第126卷，属《应用领域特别关注的数学科学基础丛书》。《施普林格出版社》，柏林—纽约，1965. [LW20] Alexander Lytchak 和 Stefan Wenger. 度量圆盘的规范参数化。《杜克数学杂志》，169(4):761–797, 2020. [Mac11] John M. Mackay. 自仿射地毯的阿苏阿德维数。《共形几何与动力系统》，15:177–187, 2011. [Mie08] Grégory Miermont. 关于随机平面四边形剖分标度极限的球面性。《电子通讯概率》，13:248–257, 2008. [Mie13] Grégory Miermont. 布朗地图是均匀随机平面四边形剖分的标度极限。《数学学报》，210(2):319–401, 2013. [MQ25] Jason Miller 和 Wei Qian. 布朗地图中的测地线：强汇合性与几何结构。《美国数学会回忆录》，315(1602):vi+117, 2025. [MS16] Jason Miller 和 Scott Sheffield. 量子勒夫纳演化。《杜克数学杂志》，165(17):3241–3378, 2016. [MS17] Jason Miller 和 Scott Sheffield. 虚几何 IV：内部射线、整平面可逆性与空间填充树。《概率论及其相关领域》，169(3-4):729–869, 2017. [MS20] Jason Miller 和 Scott Sheffield. 刘维尔量子引力与布朗地图 I：QLE(8/3, 0) 度量。《数学发明》，219(1):75–152, 2020. [MS21a] Jason Miller 和 Scott Sheffield. 布朗地图的公理化刻画。《巴黎综合理工学院数学杂志》，8:609–731, 2021. [MS21b] Jason Miller 和 Scott Sheffield. 刘维尔量子引力与布朗地图 II：测地线与嵌入的连续性。《概率年刊》，49(6):2732–2829, 2021. [MS21c] Jason Miller 和 Scott Sheffield. 刘维尔量子引力与布朗地图 III：共形结构由此确定。《概率论及其相关领域》，179(3-4):1183–1211, 2021. [MT10] John M. Mackay 和 Jeremy T. Tyson. 共形维数，第54卷，大学讲座丛书。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010. 理论与应用。[MW25] Damaris Meier 和 Stefan Wenger. 度量曲面的拟共形近似参数化。《欧洲数学会杂志》（JEMS），27(12):5133–5154, 2025. [NR23] Dimitrios Ntalampekos 和 Matthew Romney. 度量曲面的多面体逼近及其在一致化中的应用。《杜克数学杂志》，172(9):1673–1734, 2023. [Pan89] Pierre Pansu. 负曲率流形的共形维数与无穷远球面。《芬兰科学院学报 A 辑 I 数学》，14(2):177–212, 1989. [Raj17] Kai Rajala. 二维度量曲面的一致化。《数学发明》，207(3):1301–1375, 2017. [RS21] Eino Rossi 和 Ville Suomala. 分形渗流与拟对称映射。《国际数学研究通知》，(10):7372–7393, 2021. [Tro21] Sascha Troscheit. 关于布朗地图与连续统树的拟对称嵌入。《概率论及其相关领域》，179(3-4):1023–1046, 2021. [TV80] P. Tukia 和 J. Väisälä. 度量空间的拟对称嵌入。《芬兰科学院学报 A 辑 I 数学》，5(1):97–114, 1980. [TW06] Jeremy T. Tyson 和 Jang-Mei Wu. 自相似分形的拟共形维数。《伊比利亚美洲数学杂志》，22(1):205–258, 2006. [Tys00] Jeremy T. Tyson. 拟共形映射的最小豪斯多夫维数集。《美国数学会会刊》，128(11):3361–3367, 2000.