直角阿廷群中的粗分离与分裂

Oussama Bensaid、Anthony Genevois 和 Romain Tessera

2026年3月27日

arXiv:2603.24706v1 [math.GR] 25 Mar 2026

摘要

在这篇文章中，我们从几何角度刻画了直角阿廷群何时会在一个阿贝尔子群上分裂。更确切地说，给定一个有限图 Γ，我们证明 $A(\Gamma)$ 在一个阿贝尔子群上分裂，当且仅当它可被一个次指数增长族粗分离；这相当于说，Γ 是完全图，或被一个完全子图分离。

目录

1 引言 2

2 预备知识 5

3 轴双曲群中的粗分离 6
3.1 Morse 测地线.6 3.2 分离 Morse 测地线.6

4 厚空间中的粗分离 8

5 图直积中的粗分离 11
5.1 拟中位几何.11 5.2 侵入子图.15 5.3 定理 5.1 的证明.19

6 直角阿廷群中的粗分离 23
6.1 无夹点图.24 6.2 右角阿廷群的厚分解.27 6.3 归约到无三角形情形.28 6.4 定理 1.1 的证明.31

7 其他应用 32
7.1 完全割分解.32 7.2 再论厚度及其他类群的不可分性 32

参考文献 34

2010年 数学主题分类。 主要分类 20F65。次要分类 20F67、20F69。关键词和短语。
直角阿廷群、分裂、粗分离。

1 引言

群中的分离现象长期以来一直是几何群论的核心议题，因为它们往往预示着代数分裂的存在。一项奠基性结果是 Stallings 定理 [Sta71]：有限生成群有多个端，当且仅当它沿有限子群分裂。等价地，当且仅当该群沿有限子群分裂时，才能通过移除一个有限集，将该群的凯莱图分成至少两个深分支。因此，粗分离性质本身就揭示了一种非平凡分裂，进而揭示了一个在拟等距下保持不变的代数特征。这一观点已沿多个方向得到推广。Dunwoody 和 Swenson [DS00] 率先作出推广，将 Stallings 定理中关于子群的部分从有限子群扩展到有限生成的虚拟多循环余维一子群。特别地，若 G 是单端且不是虚拟曲面群，则 G 沿双端子群分裂，当且仅当它包含一个无限循环余维一子群。这里，若某个（或等价地，任意一个）施莱尔图 $\mathrm{Sch}(G,\ H)$（相对于某个有限生成集）至少有两个端，则称子群 $H \leq G$ 为余维一子群。关于余维一子群与分裂之间联系的更多背景，请参阅 [Wal03]。Papasoglu [Pap05], 提出了进一步的推广，从几何层面推进 Stallings 定理，以拟直线取代有限分离集。他证明，若一个单端有限表示群与曲面群不可公度，则它沿双端子群分裂，当且仅当其凯莱图被一条拟直线分离。特别地，这种分裂的存在性在拟等距下保持不变。

秉持相同思路，并以我们先前的工作 [BGT24], 为基础，我们研究由子集族而非单个子集所实现的粗分离。我们的方法是定量的，关注分离集的体积增长，而非其拟等距类型。粗分离的定义见 §2。

本文考虑右角阿廷群这一类。回顾一下，给定一个有限简单图 Γ （即没有环或重边的图），其对应的右角阿廷群 $A(\Gamma)$ 由以下表示定义：其生成元与 Γ 的顶点一一对应，且当且仅当两个顶点由一条边相连时，对应的生成元才交换。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 Γ 是一个有限图。以下断言等价：

(i) $A(\Gamma)$ 可由一个次指数增长族粗分离；

(ii) $A(\Gamma)$ 在一个阿贝尔子群上分裂；

(iii) Γ 是完全图，或被一个完全子图分隔。

关于右角阿廷群在拟等距意义下的分类，是一个长期悬而未决的问题，目前只在某些特殊情形下得到解决。不过，显然，右角阿廷群会根据定义图的性质表现出灵活性和刚性。例如，一方面，Behrstock 和 Neumann [BN08] 证明，所有 $A(\Gamma)$ 群都是拟等距的，其中 Γ 是直径至少为 3 的树（关于这一结果的高维类比，见 [BJN10]）。另一方面，Huang [Hua17]大幅推广了 Bestvina、Kleiner 和 Sagev[BKS09], 先前的结果，证明若 $A(\Gamma_1)$ 和 $A(\Gamma_2)$ 的有限自同构群，那么它们拟等距当且仅当它们同构。是否具有有限自同构群这一性质，可以直接从图 Γ 中判断（见[Hua17]）。特别地，这类图不能被完全子图分隔。定理 1.1 有如下一个非平凡推论。

推论 1.2. 设 G 和 H 是两个拟等距的右角阿廷群。若 G可沿阿贝尔子群分解，则 H也如此。

现在我们介绍定理 1.1 的证明策略。我们先介绍主要要素，这些要素本身也值得关注；然后说明如何将它们结合起来，得出最终结果。

要素 1：从直角阿廷群到有限群的图乘积。给定一个图 Γ 和一个权 $\nu\colon\ V(\Gamma) \to \mathbb{N}_{\geq 2}$，我们将 $\Gamma(\nu)$ 所对应的图乘积记为 $\Gamma\{\mathbb{Z}_{\nu(u)} \mid u \in V(\Gamma)\}$。

下面的定理在定理 1.1 的证明中起着核心作用。（更一般的表述见定理 5.1。）

定理 1.3。 设 Γ 是一个非联接且至少包含两个顶点的有限图。若 $A(\Gamma)$ 可由一个次指数增长族粗分离，那么对每个 $k \geq 0$，都存在一个权 $\nu \geq k$，使得 $\Gamma(\nu)$ 可由一个次指数增长族粗分离。

关于 Γ 的假设意味着 $A(\Gamma)$ 是双曲柱状的。我们证明，在任意有限生成的双曲柱状群中，次指数增长的粗分离族必定粗分离一条双向无限莫尔斯测地线（见定理 3.1）。随后我们指出，在右角阿廷群 $A(\Gamma)$中，每条双向无限莫尔斯测地线都包含在某个 $\Gamma(\nu)$的拟等距嵌入副本中，其中权 ν 的最小值相对于该测地线的莫尔斯控制函数足够大（见定理 5.2）。这将右角阿廷群中的粗分离问题转化为有限群的图乘积中的粗分离问题。

要素 2：双曲群中的粗分离。尽管右角阿廷群通常不是双曲的，但许多有限群的图乘积是双曲的，这使我们能够借助定理 1.3 推导出右角阿廷群中粗分离的一些有价值的信息。双曲情形源自姊妹论文 [BGT26b]，的主要结果，我们在该文中证明了以下结论。

定理 1.4. 设 G 是一个双曲群。假设 G 是单端的，且不是虚拟曲面群。那么，当且仅当 G 在某个次指数增长族意义下粗分离时， G 才沿虚拟循环子群分裂。

结合定理 1.4 和定理 1.3，我们推导出定理 1.1 的以下特殊情形。

推论 1.5. 设 Γ 是一个有限图。如果 Γ 不是完全图、没有割点且不含 $\square$，那么 $A(\Gamma)$ 不能被一个次指数增长族粗分离。

要素 3：厚度与组合约化。 粗略地说，如果空间 X 相对于两个子空间族（$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$）是厚的，那么 X 中任意两点都可以通过一条由属于$\mathcal{A}$ 的子空间组成的链连接起来，并且链上任意两个相邻子空间的交集属于$\mathcal{B}$。一个相当初等但很有用的观察是：

命题 1.6。 设 X 是一个(A, B)-厚度度量空间。假设 A 中的子空间不能被次指数增长族一致地粗分离，而 B 中的子空间具有指数增长。那么， X 不能被次指数增长族粗分离。

值得一提的是，命题 1.6 也适用于其他群，而不仅仅是直角阿廷群，例如曲面的映射类群、合并自由积，或某些连通可解李群。参见第 7.2 节。

在 §6.1 中，我们为那些不被完全子图分离的无三角形图建立了一种图论分解。因此，定理 6.7 表明，若 Γ 是无三角形图且不被完全子图分离，则 $A(\Gamma)$ 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚的，其中 $\mathcal{A}$ 由与 Γ 中的圈相关的抛物子群左陪集的均匀邻域组成，而 $\mathcal{B}$ 由与不相邻顶点对相关的抛物子群左陪集组成。这将定理 1.1 的证明归结为 Γ 是长度至少为 4 的圈这一情形，并在右角阿廷群的背景下给出了定理 1.6 的主要技术应用：在适当的假设下，若一个次指数增长族粗分离某个 amalgamated 积，那么它也粗分离其中一个因子群。最后，在 §6.3 中，我们证明只需考虑由无三角形图定义的右角阿廷群。

证明思路。 如果 Γ 是完全图（且非空），那么 $A(\Gamma)$是自由阿贝尔群，显然可由一个多项式增长的子空间粗分离。如果 Γ 包含一个分离完全子图，那么 $A(\Gamma)$可分解为以自由阿贝尔子群为分解子群的群，因此可由一个多项式增长的子空间粗分离。反过来，假设 Γ 不是完全图，且无法被完全子图分离，我们需要证明$A(\Gamma)$无法被一个次指数增长族粗分离。根据要素 3，只需验证对每个 $n \geq 4$， $A(C_n)$都无法被一个次指数增长族粗分离。对于 $n = 4$， $A(C_n)$是两个秩二自由群的直积，因此所需结论由 [BGT24，定理 1.3]推出。对于 $n \geq 5$，所需结论由推论 1.5 推出。

讨论。 除了概念上的意义以及它所提供的新拟等距不变量之外，值得一提的是，定理 1.1 对右角阿廷群之间的粗嵌入施加了限制。粗略地说，它意味着，相对于某些关于阿贝尔子群的 JSJ 分解，刚性块会被映入刚性块的邻域中。精确表述以及一个可据以证明粗嵌入不存在的具体例子，见第 7.1 节。JSJ 分解与粗嵌入之间的这种联系仍有待进一步研究。（关于循环情形的一些信息，见 [Mar20] 。）

作为另一项应用，我们将在 [BGT26a] 中运用定理 1.1，从代数上刻画对于固定的 $n \geq 0$，哪些右角阿廷群在有限指数子群上分裂为 $\mathbb{Z}^n$，从而解决 [Zar19] 提出的问题。

鉴于定理 1.1，自然会提出两个问题。右角阿廷群属于两个更一般的群族：群的图积和余紧特殊群。一方面，我们预期：

猜想 1.7. 设 Γ为一个有限图，$\mathcal{G}$ 为一族无限有限生成虚幂零群。当且仅当 Γ 是完全图或可由一个完全子图分离时，图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$ 才能被一个次指数增长族粗分离。

结合定理 1.4 对相对双曲群的推广（该推广在 [BGT26b] 中被猜想）以及可由 [Gen17, 定理 8.35] 推出的非相对双曲图积的厚度，应当可以得到一个证明。

另一方面，我们提出：

问题 1.8。 一个紧商特殊群（例如一个直角 Coxeter 群，或更一般地说，有限群的图乘积）何时能被一个次指数增长族粗分离？

致谢
第一作者感谢 FWO 和 F.R.S.-FNRS 在卓越科学（EOS）计划（项目 ID40007542）下提供的支持。

2 预备知识

本节依照 [BGT24]，回顾与粗分离相关的一些基本定义和记号。

若（X, d）是一个度量空间，我们用 B（x, r）（分别用 S（x, r））表示半径为 r的闭球（分别表示球面），即:

$$B(x,r) := \{z \in X \mid d(x,z) \le r\}, \qquad S(x,r) := \{z \in X \mid d(x,z) = r\}.$$

若 $A \subseteq X$ 是一个子集，我们用 $|A| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ 表示其基数；用 A^{+r} 表示其r-邻域，即:

$$A^{+r} := \{x \in X \mid d(x,A) \le r\}.$$

我们对粗分离的定义如下:

定义 2.1. 设 X 是一个度量空间，$\mathcal{A}$,$\mathcal{Z}$ 是两个子空间族。若存在 $k, L \ge 0$，使得对每个 $D \ge 0$，都能找到某个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $Z \in \mathcal{Z}$ 满足:

- A是 k-连通的，并且
- $A \backslash Z^{+L}$ 至少有两个 k-粗连通分支，其中的点到 Z的距离为$\ge D$ 。

注意，在 X 是一个图且$\mathcal{Z}$ 是一个子图族的情形下，若某个连通子图 $Y \subset X$ 被$\mathcal{Z}$ 粗分离，则存在 $L \ge 0$，使得对每个$D \ge 0$，都存在某个 $Z \in \mathcal{Z}$，使得 $Y \setminus Z^{+L}$ 至少有两个连通分支，其中的点到 Z的距离为 $\ge D$ 。

例 2.2. 注意，若$\mathcal{Z}$ 粗分离某个 $A \in \mathcal{A}$，那么它也粗分离$\mathcal{A}$。然而，反过来并不成立。例如，若 $X = \mathbb{R}$，若$\mathcal{Z} = \{\{0\}\}$，且$\mathcal{A}$是线段族 $[-n, n]$，其中 $n \in \mathbb{N}$，那么$\mathcal{Z}$ 粗分离 $\mathcal{A}$，但不粗分离任何线段 $[-n, n]$。

本文关注由缓慢增长的族所导致的粗（非）分离。更确切地说:

定义 2.3。设 X 是一个有界度图，且 $\mathcal{S}$ 是 X 的一个子图族。我们将其相对增长定义为

$$V_{\mathcal{S}}(R) := \sup_{s \in S,\ S \in \mathcal{S}} |B_X(s,R) \cap S|.$$

我们称$\mathcal{S}$ 具有指数体积增长，如果

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log V_{\mathcal{S}}(r) > 0.$$

我们用 $\mathfrak{M}_{\exp}$ 表示这样一类有界度图：其中任何粗分离族的子集都必须具有指数体积增长。

3 轴双曲群中的粗分离

本节旨在证明以下命题。关于轴双曲群和 Morse 测地线的定义，请参阅第3.1节。粗略地说，我们的定理声称，在有限生成的类双曲群中，次指数增长的粗分离族必定粗略地分离两个类双曲方向。

定理 3.1。 设 G 是一个有限生成的轴双曲群，且设 Z 是一个子空间族。若 Z 具有次指数增长并粗分离 G，则 G 中存在一条由 Z 粗分离的双向无限莫尔斯测地线。

第3.1节记录了与 Morse 测地线相关的一些基本定义和性质，第3.2节给出了定理 3.1 的证明。

3.1 Morse测地线

首先，我们回顾莫尔斯子空间的定义。

定义3.2。 设 X 是一个测地度量空间。给定映射 $M\colon [0,+\infty)\times[0,+\infty)$，若子空间 $Y \subset X$是 M-莫尔斯，或是莫尔斯的，莫尔斯控制函数为 M，则对于所有 $A > 0$和 $B \geq 0$，连接 Y中两点的每条(A, B)-拟测地线都包含在 Y的 $M(A, B)$-邻域内。

值得一提的是，莫尔斯子空间总是粗连通的，并且准等距嵌入。

莫尔斯子空间包括双曲空间中的拟凸子空间，但在轴双曲群中也很容易找到，因此它们是我们在此感兴趣的对象。回顾如下：

定义3.3。 群 G 是双曲柱状 的，如果它在某个双曲空间 X 上存在一个非初等且轴稳定的作用；也就是说，对于每个 $D \geq 0$，我们都可以找到 $N, L \geq 0$ ，使得

$$\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq L \Rightarrow \#\{g \in G \mid d(g \cdot x, g \cdot y) \leq D\} \leq N.$$

下面的观察记录了这样一个事实：在轴双曲群中，以每个点为起点都存在莫尔斯有根拟树。

引理 3.4。 设 G 是一个轴双曲群。存在一个莫尔斯控制函数 M，使得对于每个 $g \in G$，都存在一个 M-莫尔斯拟树 $(T_2, o) \to (G, g)$。

在我们的引理中，(T_2, o) 表示一棵以 o 为根的 2正则树。

引理 *3.4* 的证明。 根据 [DGO17, 定理 2.24]以及 [Sis16, 定理 2], ，我们的轴双曲群 G 包含一个莫尔斯自由子群，因而包含一棵以 1 为根的莫尔斯有根树。通过将我们的莫尔斯树平移 g，我们得到一棵以 g为根的莫尔斯有根树，正如所要求的。 □

3.2 分离莫尔斯测地线

本节的目标是证明定理 3.1。我们首先证明以下一般性观察：

命题 *3.5.* 设 σ 为一个次指数映射，$\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为两个递增函数，并设 N 为一个常数。存在某个 $Q \geq 0$，使得以下结论成立。设 X 为一个度为 $\leq N$的图，$Z \subset V(X)$ 是一个增长为 $\leq \sigma$的子集，且 $\varphi : (T_2, o) \to (X, x)$ 是一个控制函数为 ρ_- 和 ρ_+的粗嵌入。若$d(x, Z) \geq Q$，则存在一条从 o出发、位于 (T_2, o) 中的测地射线，使得 $\varphi(\rho)$ 与 Z 不相交，且不包含于 Z的任何邻域中。

其证明将基于以下初步观察：

引理 3.6. 设(T, o) 是一棵2-正则有根树，且 $S \subset V(T)$ 是一个子集，其以 o为基点的增长是次指数的。存在一条从 o出发的测地射线 ρ，使得 $\rho \cap S \subset B(o, r_0)$，其中 $r_0 \geq 0$ 的选取满足 $\sum_{k \geq r_0} \sigma_S(k)/2^k \leq 1$。

He即，$\sigma_S(k)$ 指 $\#\{s \in S \mid d(o, s) = k\}$，也就是说，$\sigma_S$是 (T, o) 中 S的球面增长 .

引理 *3.6* 的证明. 令 T^- 表示从 T 中移除 $B(o, r_0)$ 之外的 S 各点处悬挂的底部子树后得到的树。在第 r_0层，我们保留 T^-中 T 的 $x_0 := 2^{r_0}$个顶点。下一层的顶点数增至 $2x_0$，再移除 $\leq \sigma_S(r_0 + 1)$ 个顶点，得到第 T^-层。因此，第 T^- 层至多包含 $\leq x_1 := 2x_0 - \sigma_S(r_0 + 1)$ 个顶点。重复这一过程可知，T^-的第 $(r_0 + k)$ 层至多包含 x_k 个顶点，其中序列 $(x_n)_n$ 定义如下：

$$\begin{cases} x_0 = 2^{r_0} \\ x_{n+1} = 2x_n - \sigma_S(r_0 + k) \end{cases} .$$

我们的目标是证明，对于每个 $n \geq 0$，$x_n \geq 2^{n-1}$。这将表明 T^- 是一个指数增长的子树。特别地，它包含一条从 o 出发的无限射线 ρ。根据构造，ρ 与 S 在 $B(o, r_0)$ 之外不相交。

令 $y_n := x_n/2^n$，我们得到一个由下式定义的新序列

$$\begin{cases} y_0 = 2^{r_0} \\ y_{n+1} = y_n - \sigma_S(r_0 + n)/2^{n+1} \end{cases} .$$

我们有

$$\begin{aligned} y_n &= 2^{r_0} - \sum_{k<n} \frac{\sigma_S(r_0 + k)}{2^{k+1}} \geq 2^{r_0} - \sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_S(r_0 + k)}{2^{k+1}} \\ &\geq 2^{r_0} - 2^{r_0 - 1} \sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_S(r_0 + k)}{2^{r_0 + k}} = 2^{r_0} - 2^{r_0 - 1} \sum_{k \geq r_0} \frac{\sigma_S(k)}{2^k} \\ &\geq 2^{r_0} - 2^{r_0 - 1} = 2^{r_0 - 1} \geq 1/2 \end{aligned}$$

根据 r_0 的定义。我们得出，对于每个 $n \geq 0$，$x_n = 2^n y_n \geq 2^{n-1}$，正如所需。 □

命题 *3.5* 的证明。为方便起见，对于每个 $p \in V(X)$，我们将 $|p| = d(x, p)$ 记作。我们还考虑加厚

$$Z^+ := \bigcup_{z \in Z} B(z, R(|z|)),$$

其中 R 是一个我们必须仔细选择的映射。更确切地说，我们希望满足以下条件：

- R 递增且无界；

- R 增长得足够缓慢，使得 Z^+ 以 x为基点具有次指数增长；
- R 增长得足够缓慢，从而对于每个 $a \geq 0$， $R(a) \leq a/2$ 。

注意到， Z^+ 在 x 处的球面增长满足

$$\sigma_{Z^+}(\ell) \leq \sigma_Z(\ell) \cdot \beta_X(R(\ell))$$

其中， η_X 表示 X的增长函数。因此，选取形如 $\log \circ \log$ 的 R，即可满足上述三个条件。

根据引理 3.6，存在一条从 o 出发、位于 T_2 中的测地射线 ρ ，它与 $\varphi^{-1}(Z^+)$ 的交集仅包含在球 $B(o, r_0)$ 中，其中 r_0 是一个常数，仅取决于 Z的增长、度 N以及函数 ρ_-, ρ_+。注意，如果 $z \in Z$ 满足从 x 到 Z^+ 的最近点属于 $B(z, R(|z|))$，那么我们有

$$|z| = d(x, z) \leq d(x, Z^+) + R(|z|) \leq d(x, Z^+) + |z|/2,$$

因此

$$d(x, Z^+) \geq |z|/2 = d(x, z)/2 \geq d(x, Z)/2.$$

因此，如果我们将 Q 选得足够大（更确切地说，如果假设 $d(x, Z)$ 相对于 $\rho_+(r_0)$ 足够大），那么 $\varphi^{-1}(Z^+)$ 必须与 $B(o, r_0)$ 不相交，这意味着 $\varphi(\rho)$ 与 Z^+ 不相交。

更进一步， $\varphi(\rho)$ 与 Z 不相交，正如所需。此外，由于 R 无界， $\varphi(\rho)$ 与 Z^+ 不相交，这意味着 $\varphi(\rho)$ 不包含在 Z 的任何邻域中，从而完成证明。

□

定理 *3.1* 的证明。由于 $\mathcal{Z}$ 粗分离 G，存在 $k, L \geq 0$ ，使得对于每个 $D \geq 0$，我们都能找到一个 k-连通的 $Z \in \mathcal{Z}$ ，使得 $G \backslash Z^{+L}$ 至少包含两个 k-连通分支，其上有点到 Z^{+L} 的距离为 $\geq D$ 。令 $Z \in \mathcal{Z}$ 为针对某个 D 给定的这样一个子空间，其中 D 大于命题 3.5 中给出的常数（其中 σ 是 $\mathcal{Z}$ 的增长， N 是（凯莱图） G 的度，并且 ρ_-, ρ_+ 是仿射函数，使得 G 中的一个 M-莫尔斯拟树是 (ρ_-, ρ_+)-拟等距嵌入的）。固定两点 $x, y \in G$ ，它们位于 $G \backslash Z^{+L}$ 的不同 k-连通分支中，且到 Z^{+L} 的距离为 $\geq D$ 。

根据引理 3.4，存在一棵 M-Morse 拟树 $(T_2, o) \to (G, x)$。由于我们选择了足够大的 D ，由命题 3.5 可知，我们的拟树包含一条测地射线 ζ，它从 x出发，与 Z^{+L}不相交，且不包含在 Z 的任何邻域中。同样，我们知道存在一条 M-Morse 测地射线 ξ ，它从 y 出发，与 Z^{+L}不相交，且不包含在 Z 的任何邻域中。由于莫尔斯边界满足可见性性质（例如参见 [Cor17，命题 3.11]），存在某条 Morse 测地线 η ，其两条子射线分别与 ζ 和 ξ 的豪斯多夫距离有限。于是， η 包含两条子射线，它们分别包含在 $G \backslash Z^{+L}$ 的不同 k-连通分支中，但不包含在 Z 的任何邻域中。因此， η 被 Z 粗分离，进而也被$\mathcal{Z}$粗分离。

□

4 厚空间中的粗分离

本节将介绍一种厚度概念，借助下文的命题 4.6 和 4.7，我们将用它来作为粗分离的障碍。这一概念让人联想到厚度度量空间； [BDM09] 中提出这一概念，是将其作为相对双曲性的障碍。

定义 4.1. 设 X 为一个度量空间，$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ 为两个子空间族。若子集 $E \subset X$ 满足以下条件，则称其为 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚： 对于所有 $x, y \in E$，都存在 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$，使得$x \in A_1$、 $y \in A_n$，并且对于每个 $1 \leq i \leq n-1$， $A_i \cap A_{i+1}$ 都包含某个 $B \in \mathcal{B}$。

为了说明我们的定义，我们举出几个启发性例子。 .

例 4.2. 厚度度量空间的例子包括：

(1) 设 $G = A_1 *_B A_2$ 是一个 amalgamated 积，并设 X 表示 G 的凯莱图（相对于一个有限生成集）。设 $\mathcal{A}$ 是 A_1 和 A_2 的左陪集族，$\mathcal{B}$ 是 B 的左陪集族（视为 X 的子图）。那么 X 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚的。

(2) 设 X 和 Y 是连通图，且 $r \geq 1$ 是一个整数。设 $\mathcal{A}$ 是子图 $X \times B_Y(y,r)$ 的集族，其中 y 遍历 $V(Y)$；设 $\mathcal{B}$ 是子图 $X \times \{y\}$ 的集族，其中 y 遍历 $V(Y)$。那么 $X \times Y$ 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚的。

第二个例子的思路可推广到子群的左陪集，如下所示：

引理 4.3. 设 G 是一个赋予了与生成集 S 相关联的字度量的群，且 $H \leq G$ 是一个子群。令

$$\mathcal{A} = \{(gH)^{+1} \mid g \in G\}.$$

对于每个 $s \in S$，令 $K_s := H \cap sHs^{-1}$，并令

$$\mathcal{B} = \{gK_s \mid g \in G, s \in S\}.$$

那么 G 是（$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$）-厚的。

证明。首先，注意到对于每个 $g \in G$ 和 $s \in S$，$gK_s \subset gsHs^{-1} \subset gsH^{+1}$。因此，$gK_s \subset gH^{+1} \cap gsH^{+1}$。现在，令 x，$y \in G$，并将 $y = xs_1 \cdots s_n$ 写成满足 $s_i \in S^{\pm 1}$ 的形式。令 $x_i = xs_1 \cdots s_i$，并令 $A_i = (x_iH)^{+1} \in \mathcal{A}$。那么 $x \in A_0$ 且 $y \in A_n$。对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，$A_i \cap A_{i+1}$ 都包含 $x_iK_{s_{i+1}} \in \mathcal{B}$。 □

在证明本节的两个核心命题之前，我们先记录关于厚度的几条观察。我们的第一个陈述表明，厚度具有自然的传递性。

引理 4.4. 设 X 是一个度量空间，$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是四个子空间族。假设 X 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-厚的，并且每个 $A \in \mathcal{A}$ 都是 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-厚的。此外，假设只要 C、$C' \in \mathcal{C}$ 相交，交集 $C \cap C'$ 就包含 $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ 中的某个元素。那么 X 就是 $(\mathcal{C}, \mathcal{B} \cup \mathcal{D})$-厚的。

证明。设 $x, y \in X$。由于 X 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚的，存在 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$，使得 $x \in A_1$、$y \in A_n$，并且对每个 $1 \leq i \leq n-1$，交集 $A_i \cap A_{i+1}$ 都包含某个 $B_i \in \mathcal{B}$。对每个 i，选取一点 $p_i \in B_i$，并令 $p_0 = x$ 和 $p_n = y$。

现在，我们利用 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-厚性，在 A_i 中从 p_{i-1} 移动到 p_i：对每个 $1 \leq i \leq n$，存在 $C_{i,1}, \ldots, C_{i,m_i} \in \mathcal{C}$，使得 $p_{i-1} \in C_{i,1}$，$p_i \in C_{i,m_i}$，并且对每个 j，交集 $C_{i,j} \cap C_{i,j+1}$ 都包含 $\mathcal{D}$ 中的某个元素。将这些序列连接起来，我们得到

$$(C_{1,1}, \ldots, C_{1,m_1}),\ (C_{2,1}, \ldots, C_{2,m_2}),\ \ldots,\ (C_{n,1}, \ldots, C_{n,m_n}).$$

在每个块内，连续交集都包含一个属于$\mathcal{D}$的元素。此外，由于p_i同时包含在C_{i,m_i}和$C_{i+1,1}$中，它们相交，而$C_{i,m_i} \cap C_{i+1,1}$包含$\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$中的某个元素。

□

下面是一个简单的观察，其证明留给读者。

引理 4.5. 设 X 为一个度量空间，$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为两个子空间族，且$E \subset X$为$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-厚的。那么，对于每个 $r \geq 0$，邻域 E^{+r} 都是$(\mathcal{A}^{+r}, \mathcal{B})$-厚的，其中 $\mathcal{A}^{+r} = \{A^{+r} \mid A \in \mathcal{A}\}$。 □

现在我们转向本节的主要结果。

命题 4.6. 设 X 是一个粗连通空间，$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{Z}$ 是三个子空间族。假设 X 是（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）-厚的，并且对于某个 $k \geq 0$，$\mathcal{A}$ 中的每个子空间都在 X 中粗连通k。若 $\mathcal{Z}$ 粗分离 X，则以下断言之一成立：

(1) $\mathcal{Z}$ 粗分离 $\mathcal{A}$；或者

(2) 存在 $Z \in \mathcal{Z}$，使其粗包含某个 $B \in \mathcal{B}$。

证明。假设 (1) 不成立。一方面，由于 $\mathcal{Z}$ 粗分离X，存在 $L \geq 0$ 使得以下结论成立：对于每个 $D \geq 0$，都存在 $Z \in \mathcal{Z}$ 和 x、$y \in X$，使得 x 和 y 与 Z 的距离为 $> D$，并且属于 $X \backslash Z^{+L}$的两个不同的k-连通分支。另一方面，由于 $\mathcal{Z}$ 不粗分离 $\mathcal{A}$，存在 $D = D(k, L) \geq 0$ 使得以下结论成立：对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 和每个 $Z \in \mathcal{Z}$，$A \backslash Z^{+L}$ 的至多一个 k-连通分支不包含在Z^{+D}中。现在取 $Z \in \mathcal{Z}$ 以及 x、$y \in X$，使得 x 和 y 与 Z 的距离为 $> D$，并且属于 $X \backslash Z^{+L}$的两个不同的 k-连通分支。

接下来，由于 X 是（$\mathcal{A}, \mathcal{B}$）-厚的，我们可以找到 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$，使得对于每个 $1 \leq i \leq n-1$，都有 $x \in A_1$、$y \in A_n$ 和 $A_i \cap A_{i+1} \in \mathcal{B}$。由上一段可知，对于每个 $1 \leq i \leq n$，$A_i \backslash Z^{+L}$ 中至多有一个 k-连通分支不包含在 Z^{+D}中。如果不存在这样的连通分支，那么 A_i 必包含在 Z^{+D}中；由于 $A_i \cap A_{i+1} \in \mathcal{B}$ 或 $A_i \cap A_{i-1} \in \mathcal{B}$，结论便得证。因此，从现在起，我们假设这样的连通分支 C_i始终存在。注意，$A_i \subset C_i \cup Z^{+D}$。

对于每个 $1 \leq i \leq n$，令 C_i^+表示包含C_i的 $X \backslash Z^{+L}$ 的 k-连通分支。注意，由于 x 到 Z^{+L} 和 $A_1 \subset C_1 \cup Z^{+D}$的距离为 $> D$，必然有$x \in C_1$，因此 $x \in C_1^+$。类似地，我们有 $y \in C_n^+$。我们知道，x 和 y 必定位于 $X \backslash Z^{+L}$的不同 k-连通分支中，因此可推出 $C_1^+ \neq C_n^+$。由此，我们可以找到某个 $1 \leq i \leq n-1$，使得 $C_i^+ \neq C_{i+1}^+$。事实上，由于它们是不同的 k-连通分支，我们有 $C_i^+ \cap C_{i+1}^+ = \emptyset$，这意味着

$$A_i \cap A_{i+1} \subset (C_i^+ \cup Z^{+D}) \cap (C_{i+1}^+ \cup Z^{+D}) \subset Z^{+D}.$$

因此，子空间 $A_i \cap A_{i+1} \in \mathcal{B}$ 包含在 Z 的一个邻域中，正如所需。 □

我们强调，尽管若 $\mathcal{Z}$ 粗分离某个 $A \in \mathcal{A}$，那么它也粗分离 $\mathcal{A}$，但反过来未必成立；例如参见例 2.2 或定理 4.8。下面的引理给出了反过来也成立的条件。

命题 4.7. 设 X 是一个有界度图，$\mathcal{A}$、$\mathcal{Z}$ 是两个子图族。假设 $\mathcal{Z}$ 的增长为次指数增长，并且存在两个递增函数 $\rho_-, \rho_+ \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 和每个 $a \in A$，都存在一个粗嵌入 $(T_2, o) \to (A, a)$，其控制函数为 ρ_-, ρ_+。如果 $\mathcal{Z}$ 粗分离 $\mathcal{A}$，那么存在 $Z \in \mathcal{Z}$ 和 $A \in \mathcal{A}$，使得 Z 粗分离 A。特别地，$\mathcal{Z}$ 粗分离某个 $A \in \mathcal{A}$。

证明。一方面，$\mathcal{Z}$ 粗分离$\mathcal{A}$，因此存在 $k, L \geq 0$，使得对每个 $D \geq 0$，都存在 $A \in \mathcal{A}$ 和 $Z \in \mathcal{Z}$，使得 $A \backslash Z^{+L}$ 至少有两个 k-粗连通分支，其中的点到 Z的距离为 $\geq D$。

另一方面，族 $\mathcal{Z}^{+L}$ 具有次指数增长。令 σ 为其增长函数，令 $Q \geq 0$ 为定理 3.5 给出的常数，它只取决于σ、控制函数 ρ_-、 ρ_+ 和 X。令 $A \in \mathcal{A}$ 和 $Z \in \mathcal{Z}$ 满足：存在a_1、$a_2 \in A \setminus Z^{+L}$，它们位于两个不同的 k-粗连通分支中，且到 Z的距离为 $> Q$。根据定理 3.5，存在一个粗嵌入 $f : (\mathbb{R}_+, 0) \to (A, a_1)$，其控制函数为 ρ_-、 ρ_+，并且 $f(\mathbb{R}_+)$与 Z^{+L} 不相交，且不包含于 Z的任何邻域中。通过选取足够大的 $d(\{a_1, a_2\}, Z^{+L})$，使其相对于 $\rho_+(1)$足够大，$f(\mathbb{R}_+)$仍处于包含 a_1的同一个 k-粗连通分支中。对 a_2也同样成立。由此可得， Z 粗分离 A。

□

注 4.8。需要指出，$\mathcal{Z}$ 具有次指数增长这一条件是必要的。事实上，考虑 $X = (T_2, o) \times \mathbb{R}$，并令 $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{T_2}(o, n) \times \{n\}$。令 $\mathcal{A}$ 为由 $n \in \mathbb{N}$ 索引的副本族 $(T_2, o) \times \{n\}$。显然， Z 粗分离集族$\mathcal{A}$，但不粗分离任何副本 $(T_2, o) \times \{n\}$。

5 图积中的粗分离

本节旨在证明以下结论：

定理 5.1。设 Γ 是一个有限图，G 是由 $V(\Gamma)$ 索引的无限有限生成群的集合。假设 Γ 不是联接，且至少包含两个顶点。若 ΓG 可由一个次指数增长族粗分离，则对于每个 $k \geq 0$，都存在一个权 $\nu \geq k$，使得 $\Gamma(\nu)$ 可由一个次指数增长族粗分离。

这里， ν 是一个权函数 $V(\Gamma) \to \mathbb{N}$，而 $\Gamma(\nu)$表示图乘积 $\Gamma\mathcal{Z}$，其中$\mathcal{Z} := \{\mathbb{Z}_{\nu(u)} \mid u \in V(\Gamma)\}$。（我们将在下一节回顾图积的定义。）

换句话说，定理 5.1 使我们能够将右角阿廷群中的一个可分离性问题，约化为有限群的图乘积中的一个可分离性问题。研究有限群的图乘积或许更容易，尤其是因为它们可能是双曲的（而右角阿廷群基本上从来不是双曲的）。

我们将结合定理 3.1 与以下陈述来证明定理 5.1：

定理 5.2. 对于每个莫尔斯控制函数 M 和每个常数 $k_0 \geq 0$，都存在常数 $A > 0$、$B \geq 0$，使得以下结论成立。设 Γ 是一个有限图，G 是由 $V(\Gamma)$索引的有限生成群集族。假设对于每个 $u \in V(\Gamma)$：

- 若 G_u 是无限的，则 $\langle$链接$(u)\rangle$也是无限的；
- G_u 基数至少为 k_0。

ΓG 中每条双无限的 M-*Morse* 测地线，都包含在某个(A, B)-拟等距嵌入副本 $\Gamma(\nu)$ 中，其中存在权 ν，使得最小值$(\nu) \geq k_0$。

定理 5.2 的证明将基于图积的拟中位几何，我们将在第 5.1 节中对其进行描述（遵循 [Gen17]）。我们需要的主要工具是侵入子图这一概念，我们在第 5.2 节中引入并研究了它。最后，我们将在第 5.3 节中证明定理 5.2。

5.1 拟中位几何

本节记录一些与拟中位图和群的图积相关的基本定义和性质。这里结果的主要参考文献是 [Gen17]。

拟中位图。 拟中位图有许多种可能的等价定义。下面给出一种简洁的定义。首先回顾一下，汉明图 是完全图直积的一个（连通分支）。然后，拟中位 图是汉明图的收缩。这个定义让人联想到中位图，也就是 CAT(0)立方复形的一维骨架；中位图可以刻画为超立方体的收缩。不过，这种定义可能并非最容易处理的定义。实际上，将拟中位图定义为弱模图且不含 $K_{2,3}$ 或 K_4^- 的诱导子图，或许更方便，但这种定义听起来可能更人为，也可能更难理解。 [BMW94], 中给出了这种刻画， [Gen17]采用的也是这一视角。由于本文不会用到这个定义，因此不再重述。不过，为后文所需，我们提及弱模图定义中的一条性质：

引理5.3。 拟中位图 X 满足三角形条件，即对于所有满足 $d(o,x) = d(o,y)$ 和 $d(x,y) = 1$的顶点$o, x, y \in V(X)$，存在一个公共邻点 z，它与 x 和 y 相邻，且满足 $d(o,z) = d(o,x) - 1$。 □

将拟中位图定义为特定的弱模图，还可轻易推出另一个结论：

引理 5.4 ([Gen22，引理 3。3])。 设 X 为一个拟中位图。若 γ_1 和 γ_2 是端点相同的两条测地线，则可以通过绕过有限个正方形，由 γ_1 得到 γ_2 。

其他拟中位图的刻画可参见 [BMW94]。与中位图的情形一样，介绍超平面 并描述它们与拟中位图几何之间的关系，会更有助于理解。

定义5.5。 设 X 是一个拟中位图。两条边 a， $b \in E(X)$

- 平行 当且仅当存在 $e_1 = a$，……， $e_n = b \in E(X)$，使得对于每个 $1 \le i \le n-1$， e_i和 e_{i+1}都是 X 中某个正方形的相对边；
- 属于同一个超平面 当且仅当存在 $e_1 = a$，……， $e_n = b \in E(X)$，使得对于每个 $1 \le i \le n-1$， e_i和e_{i+1} 平行或属于同一三角形。

超平面 是一个极大集族，其中任意两条边都属于同一个超平面。我们用 Hyp(X) 表示 X的超平面集合。

图1展示了一些超平面的例子。接下来的结果说明，拟中位图的几何由其超平面的组合结构所编码。

定理 5.6 ([Gen17])。 设 X 是一个拟中位图。

- 每个超平面 J 都会分离，也就是说，从 X 中移除 J 的所有边后得到的图 $X||J$ 是不连通的。其连通分支称为扇区。扇区在 X中是门控的。

- 对于每个超平面 J，其载体 $N(J)$（即 X中由 J诱导的子图）及其纤维 （即 $N(J)||J$的连通分支）都是门控的。
- 对于每个超平面 J，其载体 $N(J)$分解为 $C \times F$，其中 C是团， F 是 J的纤维。

- 路径是测地线，当且仅当它至多穿过每个超平面一次。因此，两个顶点之间的距离等于将它们分隔开的超平面数量。

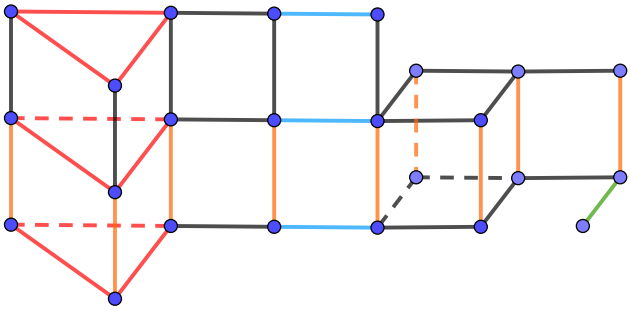


图1：拟中位图中的若干超平面。

回顾一下，给定一个图 X，若子图 $Y \leq X$ 是门控的，则每个顶点 $x \in V(X)$在 Y中都有一个门，即一个顶点 $y \in V(Y)$，使得 Y中的每个顶点都能通过某条经过 y的测地线路径与 x相连。由 $x \mapsto$(在 Y中的门)给出的映射 $V(X) \to V(Y)$称为到 上的（门）投影。

局部度量系统。设 X 为一个图。假设对于X 中的每个团 C （即每个极大完全子图），我们都在 V（C）上固定一个度量 δ_C 。我们将这样的数据{（C, δ_C） | C团} 称为一个（局部）度量系统。接着，我们在 V（X）上定义一个全局（伪）度量 δ，如下：

$$\delta(x,y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{C_i}(x_i, x_{i+1}) \mid \begin{array}{c} x_1 = x, \ldots, x_n = y \in V(X) \text{ such that } x_i \\ \text{and } x_{i+1} \text{ belong to } C_i \text{ for every } 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}$$

对于所有 $x, y \in V$（X）。一般而言，全局度量并不一定延拓局部度量，也不一定以某种方式与整个图的几何结构相容。在实际应用中，给定一个拟中位图（或更一般地，一个拟团图；参见 [CG25]），我们要求局部度量系统是相容的，也就是说，对于同一超平面中的任意两个团 A 和 B，门投影 $A \to B$ 所诱导的映射都是等距映射（A, δ_A）$\to$（B, δ_B）。

在此假设下，可以用一种与拟中位图结构联系更紧密的方式来描述全局度量。给定一个超平面 J，我们可以固定一个团 C 属于 J，并定义伪度量

$$\delta_J : (x,y) \mapsto \delta_C(\mathrm{proj}_C(x), \mathrm{proj}_C(y))$$

在我们的拟中位图上。由于度量系统是相容的， δ_J 不取决于 C 的选择。于是：

引理5.7 ([Gen17，命题3。13])。设 X 是一个拟中位图，且 $\{(C, \delta_C) \mid C$ 团$\}$ 是一个相容的局部度量系统。对于所有顶点 $x, y \in V(X)$，

$$\delta(x,y) = \sum_{J \text{ hyperplane separating } x \text{ and } y} \delta_J(x,y).$$

值得一提的是，给定一个（相容的）图度量系统，全局度量也是一种图度量。因此，我们常将 (X, δ) 视为一张图，如接下来的引理所示。

引理5.8 ([Gen25，引理5.16])。设 X 是一个拟中位图，且 $\{(C, \delta_C) \mid C$团$\}$ 是一个图度量相容系统。对于每个门控子图 $Y \leq X$，子图 (Y, δ) 是 (X, δ) 的门控子图。特别地，(Y, δ) 是凸的。

引理 5.9。设 X 是一个拟中位图，且 $\{(C,\delta_C) \mid C \text{团}\}$ 是一个图度量相容系统。若 $Y \leq X$ 是一个门控子图，并将直积 $Y_1 \times Y_2$ 分裂为两个子图 Y_1、$Y_2 \leq Y$，则 $(Y,\delta) = (Y_1,\delta_1) \times (Y_2,\delta_2)$。

证明。设 $x,y \in V(Y)$是两个顶点，可将它们写作 $x=(x_1,x_2)$、$y=(y_1,y_2)$。令 o 表示 $Y_1 \cap Y_2$中的唯一顶点。因此，Y_1（分别为 Y_2）可与 $Y_1 \times Y_2$中的因子 $Y_1 \times \{o\}$（分别为$\{o\} \times Y_2$）对应。于是，坐标 x_1 和 y_1（分别为 x_2和 y_2）可对应于（x_1,o）和（y_1,o）（分别为（o,x_2）和（o,y_2））。

分隔 x 和 y 的 Y 的超平面 J 与 Y_1 或 Y_2相交。不妨设 J 与Y_1相交。注意，J 既不分隔（x_1，x_2）与（x_1，o），也不分隔（y_1，y_2）与（y_1，o），因此δ_J（x，y）$=\delta_J$（x_1，y_1）。类似地，只要 J与 Y_2相交，就有 δ_J（x，y）$=\delta$（x_2，y_2）。借助引理5.8，我们得出

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= \sum_{J \text{ hyperplane separating } x \text{ and } y} \delta_J(x,y) \\
&= \sum_{J \text{ hyperplane of } Y_1} \delta_J(x,y) + \sum_{J \text{ hyperplane of } Y_2} \delta_J(x,y) \\
&= \sum_{J \text{ hyperplane of } Y_1} \delta_J(x_1,y_1) + \sum_{J \text{ hyperplane of } Y_2} \delta_J(x_2,y_2) \\
&= \delta_1(x,y) + \delta_2(x,y).
\end{aligned}$$

这就证明了我们的引理。 □

图乘积。设 Γ 是一个图，且 $\mathcal{G} = \{G_u \mid u \in V(\Gamma)\}$ 是一族由 Γ 的顶点集 $V(\Gamma)$ 索引的群。图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$ 是由以下相对表示定义的群

$$\langle G_u \ (u \in V(\Gamma)) \mid [G_u,G_v] = 1 \ (\{u,v\} \in E(\Gamma)) \rangle$$

其中 $E(\Gamma)$ 表示 Γ 的边集，而 $[G_u,G_v]=1$ 是以下表达式的简写：对于所有 $g \in G_u$ 和 $h \in G_v$，$[g,h]=1$。

约定： 在本文余下部分，我们始终假设图积中的因子都是非平凡的。

$\Gamma\mathcal{G}$ 的每个元素都可以表示为 $s_1 \cdots s_n$ 个$\bigcup_{u \in V(\Gamma)} G_u$ 中元素的乘积。我们将 $s_1 \cdots s_n$ 称为一个字，并将 s_i 称为它的音节。显然，由我们的字 $s_1 \cdots s_n$ 表示的 $\Gamma\mathcal{G}$ 中的元素，在应用以下任一变换后仍保持不变：

（消去）如果存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $s_i = 1$，则移除音节 s_i ；

（合并）如果存在 $1 \leq i \leq n-1$ 使得 s_i，$s_{i+1} \in G_u$ 对于某个 $u \in V$（Γ），则将子词 s_is_{i+1} 替换为单个音节（s_is_{i+1}）；

（换位）如果存在 $1 \leq i \leq n-1$ 使得 $s_i \in G_u$，并且对于某个$\{u,v\} \in E$（Γ），则将子词 s_is_{i+1} 替换为子词 $s_{i+1}s_i$。

无法通过应用这些初等变换缩短的字称为图约化。根据下面的陈述，$\Gamma\mathcal{G}$ 中的每个元素都可以由一个图约化字表示，而且这种表示在合理意义下是唯一的：

引理 5.10 ([?])**.** 设 Γ 是一个图，$\mathcal{G}$ 是一个由 $V(\Gamma)$索引的群族。若 w_1 和 w_2 是表示 $\Gamma\mathcal{G}$中同一元素的两个图约化字，则 w_2 可以通过交换属于相邻顶点群的连续音节对从 w_1 得到。

图乘积与拟中位图之间的联系如下。给定一个图 Γ和一个群集族 $\mathcal{G}$，凯莱图

$$\mathrm{QM}(\Gamma,\mathcal{G}) := \mathrm{Cayl}\left(\Gamma\mathcal{G}, \bigcup\mathcal{G}\right)$$

是拟中位图 [Gen17，命题 8.2]。与任何凯莱图一样，路径自然地由生成元组成的字标记。我们可以利用这一视角来识别测地线:

引理 5.11 ([Gen17，引理 8.3])。 设 Γ 是一个图，$\mathcal{G}$ 是一个由 $V(\Gamma)$索引的群集族。$\mathrm{QM}(\Gamma,\mathcal{G})$ 中的一条路径是测地线，当且仅当它由一个图约化字标记。

给定一个图 Γ 和一个由 $V(\Gamma)$ 索引的群集族 $\mathcal{G}$，$\mathrm{QM}(\Gamma,\mathcal{G})$ 中的每条边都由 $\bigcup\mathcal{G}$中的一个生成元标记，因此也由标记相应因子的顶点标记。下一条断言表明，$\mathrm{QM}(\Gamma,\mathcal{G})$ 中边的这种标记可以扩展到超平面。

引理 5.12 ([Gen17, 引理 8.5 和 8.8])。 设 Γ 是一个图，$\mathcal{G}$ 是由 $V(\Gamma)$索引的群集族。若 $\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{G})$ 的两条边属于同一个超平面，则它们由 Γ的同一个顶点标记。

下文所说的由$V(\Gamma)$对 $\mathrm{QM}(\Gamma，\mathcal{G})$ 的超平面进行的典范标记或着色，均指这一扩展。

当然，给定一个有限图 Γ 和一族有限生成群 $\Gamma\mathcal{G}$，我们的拟中位图 $\mathrm{QM}(\Gamma，\mathcal{G})$ 通常并不与图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$拟等距，因为后者是由通常为无限的生成集构造的凯莱图。不过，可以在 $\mathrm{QM}(\Gamma，\mathcal{G})$ 上赋予一套局部度量，使得全局度量还原出 $\Gamma\mathcal{G}$。所需的局部度量不难猜出，因为:

引理 5.13 ([Gen17, 引理 8.6])。 设 Γ 是一个图，$\mathcal{G}$ 是一族群。$\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{G})$ 的团由陪集 gG_u 给出，其中 $g \in \Gamma\mathcal{G}$ 和 $u \in V(\Gamma)$。

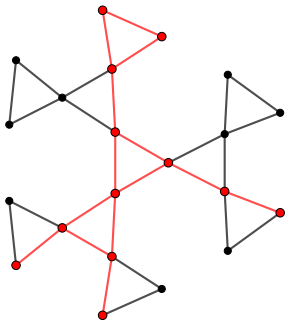
由于团是因子的陪集，因此自然可以使用相应因子的有限生成集来定义团上的度量，即:

命题 *5.14*（[*Gen17*，断言 *8.*24]）。设 Γ 是有限图，$\mathcal{G}$ 是由有限生成群组成、以 V（Γ）为指标的集族。对于每个 $u \in V$（Γ），固定 G_u 的一个有限生成集 S_u。对于 $\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{G})$ 中的每个团 $C = gG_u$ 及任意顶点 x、$y \in V$（C），将 $x = ga$ 和 $y = gb$ 写成图约化词，并定义 δ_C（x, y）$:= d_{S_u}$（a, b）。那么，$\{(C, \delta_C) \mid C$ 团$\}$ 是一个相容的度量集族，并且 $(\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{G}), \delta)$ 与凯莱图 $\mathrm{Cayl}\left(\Gamma, \mathcal{G}\bigcup_{u\in V(\Gamma)} S_u\right)$ 等距。

5.2 侵入子图

本节将介绍拟中位图中的侵入子图 。它们将在定理 5.2 的证明中发挥基础性作用。

定义 5.15。 设 X 是一个拟中位图。若子图 $Y \leq X$ 是凸的，且对于 X的每个团 C，$|V(Y \cap C)| = 0$ 或 ≥ 2，则称其为侵入的 。



这个定义源于拟中位图与建筑物之间的类比，这一类比将在第二作者未来的一项工作中加以探讨。请记住这样一个想法：给定一个拟中位图 X，极大凸二部子图对应于公寓，团对应于面板。因此，我们的侵入子图对应于子建筑物。左侧的图展示了块图中的一个侵入子图。

我们尤其关注满足以下意义下正则的侵入子图：

定义 5.16。设 X 是一个拟中位图。给定一个子图 $Y \leq X$ 和一个超平面 J，J 在 Y 中的厚度是由 J 划分且与 Y 相交的扇区数量。给定着色 $\kappa : \mathrm{Hyp}(X) \to S$，$Y$ 若两个相交于 Y 的超平面只要具有相同的 κ-颜色，就总是在 Y 中具有相同厚度，则称其为 κ-正则 。

本节余下部分将用于证明以下关于图积的拟中位图中侵入子图的描述：

命题 5.17。设 (Γ, ν) 是一个加权图。赋予 $\mathrm{QM}(\Gamma, \nu)$ 其典范着色 $\kappa : \mathrm{Hyp}(\mathrm{QM}(\Gamma, \nu)) \to V(\Gamma)$。每个 κ-正则侵入子图 Y 都同构于 $\mathrm{QM}(\Gamma, \nu)$

$$\mathrm{QM}\left(\Gamma, u \mapsto \textit{thickness of the hyperplanes crossing } Y \textit{ coloured } u\right).$$

这里，加权图 *weighted graph* (Γ, ν) 指的是赋予了权 ν 的图 Γ，该权为 Γ 的每个顶点关联一个基数。接着，$\mathrm{QM}(\Gamma, \nu)$ 指的是图积 $\Gamma\mathcal{G}$ of $\mathcal{G} = \{G_u \mid u \in V(\Gamma)\}$ 的拟中位图，其中每个 G_u 的基数为 $\nu(u)$（例如循环群；但实际上选择并不重要，因为拟中位图在图同构意义下不受因子的代数结构影响，只取决于它们的基数）。

命题 *5.17* 的证明。对于每个顶点 $u \in V(\Gamma)$，我们将穿过 Y coloured u 的超平面的厚度记为 $\tau(u)$。对于每个 $u \in V(\Gamma)$，我们分别固定一个基数为 $\tau(u)$（分别为 $\nu(u)$）的任意群 G_u（分别为 H_u），并令 $\mathcal{G} := \{G_u \mid u \in V(\Gamma)\}$（分别为 $\mathcal{H} := \{H_u \mid u \in V(\Gamma)\}$）。为方便起见，我们将 $\mathrm{QM}(\Gamma, \nu)$ 与 $\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{G})$ 视为相同。我们的目标是证明 Y 与 $\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{H})$ 同构。

我们固定一个基点 $o \in V(Y)$；并且，对于每个穿过 Y 的超平面 J，固定一个双射 σ_J，将由 J 界定且与 Y 相交的扇区映射到 $H_{\kappa(J)}$，并且可以选择该双射使得 $o \in \sigma_J^{-1}(1)$。对于每条具有顶点 $x_0 = o, x_1, \ldots, x_n \in V(Y)$ 的测地线 γ，我们将其标记定义为

$$\varphi(\gamma) := \prod_{i=0}^{n-1} \sigma_{\text{hyperplane containing } \{x_i, x_{i+1}\}}(\text{sector containing } x_{i+1}),$$

可视为写在 $\bigcup \mathcal{H}$ 上的一个字。换句话说，把 $\sigma_J(S)$ 看作从包含 o 的扇区跨越超平面 J 到扇区 S的代价，$\varphi(\gamma)$ 就是所有被 γ 依次跨越的超平面所给出的代价的乘积。一个关键观察是：

断言 5.18。如果 γ_1, γ_2 是连接 o 与 Y 的同一顶点的两条测地线，那么 $\varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma_2)$ 属于 ΓH。

根据引理 5.4，只需假设 γ_2 可以通过绕过一个正方形从 γ_1 得到。换句话说，

$$\gamma_1 : x_0 = o,\ x_1, \ldots, x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}, \ldots, x_n$$

其中 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 构成一个正方形；并且，若 x_i' 表示该正方形的第四个顶点，则

$$\gamma_2 : x_0 = o,\ x_1, \ldots, x_{i-1},\ x_i',\ x_{i+1}, \ldots, x_n.$$

对每个 $0 \leq k \leq n-1$，令 J_k 表示包含边 $\{x_k, x_{k+1}\}$ 的超平面。由于超平面 J_{i-1} （分别地，J_i）同时包含 $\{x_{i-1}, x_i\}$ 和 $\{x_i', x_{i+1}\}$ （分别地，$\{x_i, x_{i+1}\}$ 和 $\{x_{i-1}, x_i'\}$），所以我们有

$$\varphi(\gamma_1) = \sigma_{J_0}(x_1) \cdots \sigma_{J_{i-2}}(x_{i-1}) \sigma_{J_{i-1}}(x_i) \sigma_{J_i}(x_{i+1}) \sigma_{J_{i+1}}(x_{i+2}) \cdots \sigma_{J_{n-1}}(x_n)$$

and

$$\varphi(\gamma_2) = \sigma_{J_0}(x_1) \cdots \sigma_{J_{i-2}}(x_{i-1}) \sigma_{J_i}(x_i') \sigma_{J_{i-1}}(x_{i+1}) \sigma_{J_{i+1}}(x_{i+2}) \cdots \sigma_{J_{n-1}}(x_n),$$

其中 $\sigma_{J_{i-1}}(x_i) = \sigma_{J_{i-1}}(x_{i+1})$（分别地，$\sigma_{J_i}(x_i') = \sigma_{J_i}(x_{i+1})$），这是因为 x_i 和 x_{i+1}（分别地，x_i' 和 x_{i+1}）位于由 J_{i-1}（分别地，J_i）界定的同一扇区内。换言之，$\varphi(\gamma_2)$ 是由 $\varphi(\gamma_1)$ 交换两个音节 $\sigma_{J_{i-1}}(x_i)$ 和 $\sigma_{J_i}(x_{i+1})$ 得到的。但这两个音节在 Γ H 中可交换。事实上，由于边 $\{x_i, x_{i-1}\}$ 和 $\{x_i, x_{i+1}\}$ 在 QM(Γ, G) 中构成一个正方形，我们的两条边分别标记为 G 中两个相邻顶点群的生成元，这意味着 $\sigma_{J_{i-1}}(x_i)$ 和 $\sigma_{J_i}(x_{i+1})$ 分别属于 H 中两个相邻顶点群。至此，断言 5.18 得证。

断言 5.18 使我们可以定义

$$\Phi : \begin{cases} V(Y) & \to & V(\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{H})) \\ y & \mapsto & \eta(\text{geodesic from } o \text{ to } y) \end{cases}.$$

我们的目标现在是验证 Ξ 诱导出一个图同构。我们先证明两个初步观察。

断言 5.19. 对于每条从 o 到 Y 中某个顶点的测地线 γ，$\varphi(\gamma)$ 都是图约化的。

令 $x_0 = o, \ldots, x_n$ 表示 γ 上依次经过的顶点。对于每个 $0 \leq i \leq n-1$，令J_i 表示包含 $\{x_i, x_{i+1}\}$ 的超平面。如果 $\varphi(\gamma) = \sigma_{J_0}(x_1) \cdots \sigma_{J_{n-1}}(x_n)$ 不是图约化的，那么我们可以找到两个指标 $0 \leq i < j \leq n-1$，使得 $\sigma_{J_i}(x_{i+1})$ 和 $\sigma_{J_j}(x_{j+1})$ 属于同一个顶点群（在 H 中），且该顶点群与包含 $\sigma_{J_k}(x_{k+1})$（其中 $i < k < j$）的所有顶点群都相邻。这意味着边 $\{x_i, x_{i+1}\}$ 和 $\{x_j, x_{j+1}\}$ 的标记是属于同一个顶点群（在 G 中）的生成元，且该顶点群与包含标记为 $\{x_k, x_{k+1}\}$ 的生成元的所有顶点群（其中$i < k < j$）都相邻。换言之，我们的测地线 γ 的标记组成的字不是图约化的，这与根据引理 5.11，γ 是一条测地线这一事实矛盾。断言 5.19 的证明至此完成。

命题 5.20。对于每个 $y \in Y$，以及每个表示 $\Phi(y)$ 于 ΓH 中的图形约化词 w，都存在一条测地线 γ 连接 o 与 y，使得 $\varphi(\gamma) = w$。

取一条连接 o 与 y 的测地线 η。若 $x_0 = o, \ldots, x_n$ 表示η 的依次顶点，且对每个 $0 \leq i \leq n-1$，J_i 表示包含 $\{x_i, x_{i+1}\}$ 的超平面，那么由断言 5.19 可知，$\varphi(\eta) = \sigma_{J_0}(x_1) \cdots \sigma_{J_{n-1}}(x_n)$ 是图约化的。根据引理 5.10，只需假设 w 可由 $\varphi(\eta)$通过交换两个相邻且属于相邻顶点群的音节得到，即

$$w = \sigma_{J_0}(x_1) \cdots \sigma_{J_{i-1}}(x_i) \sigma_{J_{i+1}}(x_{i+2}) \sigma_{J_i}(x_{i+1}) \sigma_{J_{i+2}}(x_{i+3}) \cdots \sigma_{J_{n-1}}(x_n)$$

对于某个 $0 \leq i \leq n-2$。由于 $\sigma_{J_i}(x_{i+1})$ 和$^{\sigma_{J_{i+1}}}(x_{i+2})$ 属于相邻顶点群（在$\mathcal{H}$中），边 $\{x_i, x_{i+1}\}$ 和 $\{x_{i+1}, x_{i+2}\}$ 必然分别标记为属于相邻顶点群（在$\mathcal{G}$中）的生成元。因此，$\{x_{i+1}, x_i\}$ 与 $\{x_{i+1}, x_{i+2}\}$张成一个正方形。沿此正方形经过，可得到一条从 η 出发的新测地线 γ。根据构造，$\varphi(\gamma) = w$，由此完成断言 5.20 的证明。

现在，我们准备好验证 Φ 是单射的。设 $x,\ y \in V(Y)$ 是两个顶点，使得 $\Phi(x) = \Phi(y)$。固定一个表示这个公共元素的图形约化字 w。根据命题 5.20，我们可以找到两条测地线 α 和 β，分别连接 o 与 x 以及 y，使得 $\varphi(\alpha) = w = \varphi(\beta)$。若 $\alpha \neq \beta$，则可以写成 $\alpha = \zeta \cup \alpha'$ 和$\beta = \zeta \cup \beta'$，其中 ζ 是 α 和 β的公共子路径，且 α'和 β' 的首边不同。在 $\varphi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 中，我们找到一个公共前缀，即 $\varphi(\zeta)$，其后接着一个音节，该音节在 $\varphi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 中不同。因此，必有 $\alpha = \beta$，这意味着$x = y$，正如所需。

接下来，假设 $x, y \in V(Y)$ 是两个相邻顶点。若 $d(o, x) < d(o, y)$，则存在一条测地线 γ，连接 o 与 y 并经过 x。由于 $\varphi(\gamma)$ 表示 $\Phi(y)$，且 $\varphi(\gamma\backslash\{\text{last edge}\})$ 在 ΓH 中表示 $\Phi(x)$，显然 $\Phi(x)$ 和$\Phi(y)$ 在 QM(Γ, H) 中相邻。若 $d(o, x) > d(o, y)$，论证对称。若$d(o, x) = d(o, y)$，则根据三角形条件，我们知道存在一条测地线γ，连接 o与 x和 y 的一个公共邻点 z，使得 $\gamma \cup \{z, x\}$ 和 $\gamma \cup \{z, y\}$ 是测地线。令 J表示包含由 x, y, z 确定的三角形的超平面。我们有

$$\varphi(\gamma \cup \{z, x\}) = \varphi(\gamma)\sigma_J(x) \text{ and } \varphi(\gamma \cup \{z, y\}) = \varphi(\gamma)\sigma_J(y).$$

由于 $\sigma_J(x)$ 和 $\sigma_J(y)$ 属于$\mathcal{H}$中的同一个顶点群，我们得出 $\Phi(x)$ 和 $\Phi(y)$ 在 QM(Γ,$\mathcal{H}$) 中相邻。

反过来，假设 $x, y \in V(Y)$ 是两个顶点，且 $\Phi(x)$ 和 $\Phi(y)$ 在 QM(Γ, H) 中相邻。若 $d(1, \Phi(x)) < d(1, \Phi(y))$，令 w 表示一条连接 1 与 $\Phi(y)$、并经过 $\Phi(x)$ 的测地线所标记的图约化字。根据命题 5.20，存在一条连接 o 与 y 的测地线 γ，使得 $\varphi(\gamma) = w$。由于 $\varphi(\gamma\backslash\{\text{last edge}\}) = w\backslash\{\text{last syllable}\}$ 表示 $\Phi(x)$，因此 x 必然是 γ 的倒数第二个顶点，这证明了 x 与 y 相邻。若 $d(1, \Phi(x)) > d(1, \Phi(y))$，论证是对称的。若 $d(1, \Phi(x)) = d(1, \Phi(y))$，则由 QM(Γ, H) 满足的三角形条件以及引理 5.11 可知，存在两个图约化字 wa 和 wb，分别表示 $\Phi(x)$ 和 $\Phi(y)$，其中 a 和 b 是属于同一个顶点群的两个音节。根据命题 5.20，存在一条测地线 γ，连接 o 与某个顶点 $z \in V(Y)$，使得 $\varphi(\gamma) = w$。如前所述，显然 z 是 x和 y的公共邻点。此外，由于 a 和 b 在 H 中属于同一个顶点群，边 $\{z, x\}$ 和 $\{z, y\}$ 必须由属于 G 中同一个顶点群的生成元标记。由此可得，x 和 y 在 QM(Γ, G) 中相邻，证毕。

因此，我们已经证明 Φ 诱导了一个图嵌入 $Y \to$ QM(Γ, $\mathcal{H}$)。到目前为止，我们只用到了 Y 是一个 κ-正则凸子图这一事实。为了证明Φ 是满射，从而完成命题的证明，我们需要知道Y 是侵入的。

设 $p \in V(\text{QM}(\Gamma, \text{H}))$ 是一个顶点。我们要找到一个顶点 $y \in V(Y)$，使得$\Phi(y) = p$。我们对从 1 到 p 的距离进行归纳。若 $d(1, p) = 0$，则$\Phi(o) = 1 = p$。因此，假设 $d(1, p) \geq 1$。将 p 视为一个图形约化词，我们可以把 p 分解为 $p_0 q$，其中 q 表示 p 的最后一个字，p_0 表示 p 中相应的前缀。由归纳法可知，存在 $y_0 \in V(Y)$，使得 $\Phi(y_0) = p_0$。若 $u \in V(\Gamma)$ 是满足 $q \in H_u$ 的顶点，令 C 表示团 $y_0 G_u$。注意，包含 C 的超平面 J 必然与 Y 相交。事实上，由于 Y 是侵入的

且 $y_0 \in V(Y \cap C)$，我们知道 Y 必须至少包含 C 中的两个顶点。我们感兴趣的顶点是 C 中唯一属于扇区 S 的顶点 y，该扇区满足 $\lambda_J(S) = q$。若 y 属于 $V(Y)$，那么显然，根据构造有 $\Phi(y) = p_0 q = p$。

为了证明 $y \in V(Y)$，我们先固定一个顶点 $z \in V(Y \cap S)$，并注意到存在一条连接 y_0 和 z、且经过 y 的测地线。这由扇区的门控性可知。因此，由 Y 的凸性可得 $y \in V(Y)$，如所需。

□

5.3 定理 5.1 的证明

现在，我们转向定理 5.1 的证明。鉴于命题 5.17，我们的目标是证明 Morse 测地线包含在侵入子图的邻域中。我们先陈述并证明一个充分判据，以便推导出某些子图包含在侵入子图中。

命题 5.21。设 X 是一个拟中位图，$\{(C, \delta_C) \mid C \text{ 团}\}$ 是一个图度量相容系统，且 $V \subset V(X)$ 是一个顶点集。给定一个常数 $D \geq 0$、一个着色 $\kappa\colon \mathrm{Hyp}(X) \to S$ 以及一个权 $\nu\colon S \to \mathbb{N}$，假设

- 对于每个超平面 J，直径$(V, \delta_J) \leq D$；
- ν 是有界的，并且每个超平面 J 都将 $\geq \nu(\kappa(J))$ 划分为扇区。

存在一个 κ-正则侵入子图 $Z \leq X$，包含 V，使得

- 包含映射 $Z \hookrightarrow X$ 诱导一个 $2\max(D, |\nu|)$-双利普希茨嵌入 $Z \hookrightarrow (X, \delta)$；
- 对于每个与 Z相交的超平面 J，它在 Z 中的厚度为 $\geq \nu(\kappa(J))$。

我们首先展示如何在一般情况下构造侵入子图：

引理 5.22。设 X 是一个拟中位图。对于每个超平面 J，固定一个由 J 分隔的 ≥ 2 扇区集族$\mathscr{S}_J$。由 X 诱导的 Z 子图

$$\bigcap_{J \ hyperplane} \bigcup_{S \in \mathscr{S}_J} V(S)$$

是一个侵入子图。此外，对于每个与 Z 相交的超平面 J，Z 中 J 的厚度等于 $\#\mathscr{S}_J$。

证明。根据 [Gen17，引理 2.105]，，由 $\bigcup_{S \in \mathscr{S}_J} V(S)$ 诱导的每个 Z_J 子图都是凸的。因此，$Z = \bigcap_J Z_J$ 的交集是凸的。接下来，设 C 是 X 的一个团，其中至少有一个顶点属于 $V(C \cap Z)$，并设 J 表示包含 C 的超平面。我们断言，对于由 J 分隔的扇区 S，以下断言等价：

(i) S 属于 $\mathscr{S}_J$；

(ii) S 与 Z 相交；

(iii) $C \cap S$ 的顶点属于 Z。

请注意，由此可得 $|V(C \cap S)| = |\mathscr{S}_J| \geq 2$，进而推得 Z 中 J 的厚度等于 $|\mathscr{S}_J|$。因此，只需证明我们的等价关系，即可完成引理的证明。

蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ 显而易见。现在，假设 (i) 成立。根据假设，我们知道存在某个顶点 $x \in V(C \cap Z)$。令 Y 表示.....的顶点

$C \cap S$。由于 J 是分隔 x 和 y 的唯一超平面，且由于 $x \in V(Z)$，我们知道

$$y \in \bigcap_{H \text{ hyperplane} \neq J} \bigcup_{R \in \mathscr{S}_H} V(R).$$

但是，如果 S 属于 $\mathscr{S}_J$，我们也知道 $y \in \bigcup_{R \in \mathscr{S}_J} V(R)$；因此 $y \in V(Z)$。由此，蕴含关系 $(i) \Rightarrow (iii)$ 得证。 □

命题 5.21 的证明。给定一个超平面 J，我们要定义一些由 J界定的扇区集族 $\mathscr{S}_J$。注意，给定两对顶点 (a,b) 和 (a',b')，满足 a, a' 属于由 J界定的同一个扇区，且 b, b' 也属于由 J界定的同一个扇区，我们有 $\delta_J(a,b) = \delta_J(a',b')$。因此，讨论由 J界定的两个扇区之间的 δ_J-距离是有意义的。现在，任取一个由 J 界定且与 V相交的扇区 S_J，并将 $\mathscr{S}_J$ 定义为所有与 S_J的距离为 δ_J、且该距离等于 $\max(D, \nu(\kappa(J)))$ 的扇区所构成的集族。注意，根据构造，$\#\mathscr{S}_J$仅取决于 J 的 κ-颜色，并且有下界 $\sigma(\kappa(J))$。

由引理 5.22 可推得，由下列元素生成的子群 Z

$$\bigcap_{J \text{ hyperplane}} \bigcup_{S \in \mathscr{S}_J} V(S)$$

是侵入的、 κ-正则的；并且对于每个与 Z 相交的超平面 J，其在 Z 中的厚度为 $\geq \nu(\kappa(J))$。接下来，给定两个顶点 x， $y \in V(Z)$，我们知道

$$d(x,y) \leq \delta(x,y) = \sum_{J \text{ separating } x \text{ and } y} \delta_J(x,y),$$

其中等式由引理5.7证明，不等式则源于以下假设：每个 δ_C （从而每个 δ_J）都是图度量。然而，根据 Z 的构造，我们知道，对于每个超平面 J，我们的两个顶点 x 和 y 属于 $\mathscr{S}_J$ 中的两个扇区，它们之间的距离必然为 $\leq 2\max(D, \nu(\kappa(J))) \leq 2\max(D, |\nu|)$。因此

$$\delta(x,y) = 2\max(D, \nu(\kappa(J))) \sum_{J \text{ separating } x \text{ and } y} 1 = 2\max(D, |\nu|) d(x,y),$$

这表明包含映射 $Z, \to X$ 确实诱导出一个 $2\max(D, |\nu|)$-双利普希茨嵌入 $Z, \to (X, \delta)$。 □

下一步是验证命题 5.21 给出的判据适用于 Morse 测地线。这将由下一个命题推出：

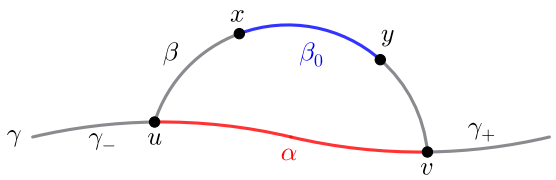
命题 5.23. 给定一个莫尔斯控制函数 M，存在一个常数 $C \geq 0$，使得以下结论成立。设 X 为一个图， γ 为一条 M-*Morse*测地线， $Y \leq X$ 为一个等距嵌入子图。若 Y 分解为两个无限直径图的直积，则直径$(\gamma \cap Y) \leq C$。

在命题的证明中，我们将需要以下观察：

引理 5.24. 设 X 是一个图， γ 是一条 M-*Morse*测地线， $\alpha \subset \gamma$ 是一个子线段， β 是一条与 α 端点相同的 (A,B)-拟测地线。α 与 β 之间的豪斯多夫距离至多为

$$1 + 6A + 3B + 9AM(A,B).$$

证明。首先，我们要证明 β 包含在 α 的 $(2A+B+3AM(A,B))$-邻域内。设 x, $y\in\beta$ 是界定 β 的一个极大子线段 β_0 的两个顶点，该子线段上的所有顶点到 α 的距离均为 $>M(A,B)$。如果不存在这样的子线段，那么 β 包含在 α 的 $M(A,B)$-邻域内，结论得证。因此，我们假设这样的 $x,y\in\beta$ 存在。β_0 的每个顶点到 α 的距离都是 $>M(A,B)$，但它到 γ 的距离是 $\leq M(A,B)$，因此，它到属于 $\gamma\backslash\alpha$ 的两个连通分支 γ_-,γ_+ 之一中的某个顶点的距离为 $\leq M(A,B)$。



假设存在 $a,b\in\beta_0$，使得 a（分别地，b）与某个顶点 $p\in\gamma_-$（分别地，$q\in\gamma_+$）的距离为 $\leq M(A,B)$。不失一般性，我们可以假设 a 和 b 相邻。我们有

$$\text{length}(\alpha)\leq d(p,q)\leq d(p,a)+d(a,b)+d(b,q)\leq 1+2M(A,B),$$

因此

$$\text{length}(\beta)\leq A\cdot\text{length}(\alpha)+B\leq A(1+2M(A,B))+B.$$

因此，β 包含在 α 的 $(A+B+2AM(A,B))$-邻域中。

否则，假设 β_0 的所有顶点与 γ_+ 的距离均为 $\leq M(A,B)$。（它们与 γ_- 的距离均为 $\leq M(A,B)$ 的情形是对称的。）由 β_0 的极大性可知，x 必有一个邻点位于 β 中，且该邻点与某个顶点 $p\in\alpha$ 的距离为 $\leq M(A,B)$。当然，$d(x,p)\leq 1+M(A,B)$。根据假设，我们还知道 x 与某个顶点 $q\in\gamma_+$ 的距离为 $\leq M(A,B)$。我们有

$$d(p,v)\leq d(p,q)\leq d(p,x)+d(x,q)\leq 1+2M(A,B),$$

因此

$$d(x,v)\leq d(x,p)+d(p,v)\leq 2+3M(A,B).$$

注意，给定 β_0 的一个顶点 w，由 w 和 v 界定的 β 的子线段包含在由 x 和 v 界定的 β 的子线段中，其长度至多为 $Ad(x,v)+B$。因此，

$$d(w,v)\leq A(2+3M(A,B))+B.$$

于是，我们已证明 β 包含在 α 的 $(2A+B+3AM(A,B))$-邻域内，证毕。

反过来，我们需要证明 α 包含在 β 的某个受控邻域内。设 z 是 α 的一个顶点。对于 β 的每个顶点 p，固定 α 中一个与其距离为 $\leq 2A+B+3AM(A,B)$ 的顶点 $\pi(p)$。在 α 上定义一个定向，使得 γ_-（分别为 γ_+）位于 α 的左侧（分别为右侧），然后沿着 β 固定两个相邻顶点 a 和 b，使得 $\pi(a)$ 位于 z 左侧，而 $\pi(b)$ 位于 z 右侧。我们有

$$d(\pi(a),\pi(b))\leq d(\pi(a),a)+d(a,b)+d(b,\pi(b))\leq 1+2(2A+B+3AM(A,B)),$$

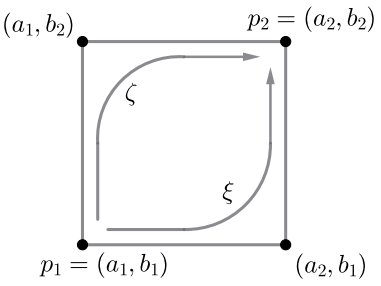
因此

$$\begin{aligned}d(z,a) &\leq d(z,\pi(a))+d(\pi(a),a)\leq d(\pi(a),\pi(b))+d(\pi(a),a)\\ &\leq 1+3(2A+B+3AM(A,B)).\end{aligned}$$

因此，我们证明了 α 包含在 β 的 $(1+6A+3B+9AM(A,B))$ 邻域内，正如所需。

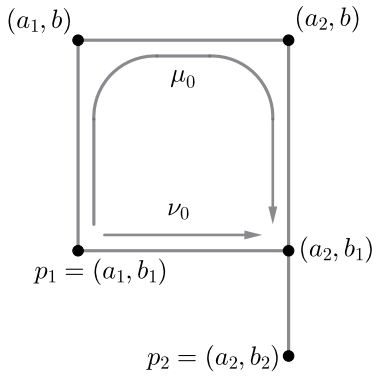
□

命题 *5.23* 的证明。对于所有 $A,\ B \geq 0$，我们令 $C(A,\ B) := 1+6A+3B+9AM(A,\ B)$。将 Y 分解为 $Y_1 \times Y_2$，其中 Y_1 和 Y_2 具有无限直径，并令 $p_1 := (a_1,\ b_1)$ $p_2 := (a_2,\ b_2)$ 为 $\gamma \cap Y$ 的两个顶点。



令 ζ 为 Y 中连接 p_1 与 p_2 的一条测地线，构造如下。首先，在$\{a_1\} \times Y_2$中取一条测地线，将 $p_1 = (a_1, b_1)$连接到(a_1, b_2)；然后，在 $Y_1 \times \{b_2\}$中取一条测地线，将$(a_1,\ b_2)$连接到 $p_2 = (a_2, b_2)$。类似地，我们定义 Y 中连接 p_1 与 p_2 的测地线 ξ：先通过$\{b_1\}$ $Y_1 \times$中的一条测地线将 $p_1 = (a_1, b_1)$连接到(a_2, b_1)，再通过$\{a_2\} \times Y_2$中的一条测地线将(a_2, b_1)连接到 $p_2 = (a_2, b_2)$。

一方面，显然，ζ 与 ξ 之间的豪斯多夫距离至少为 $\min(d(a_1, a_2)\ d(b_1, b_2))$。另一方面，由引理 5.24 可知，该距离必为$\leq 2C(1,0)$。因此，要么 $d(a_1, a_2) \leq 2C(1,0)$，要么 $d(b_1,\ b_2) \leq 2C(1, 0)$。由于这两种情形对称，不妨设 $d(b_1, b_2) \leq 2C(1, 0)$。



令 ν_0 为连接 $p_1 = (a_1, b_1)$ 与 (a_2, b_1) 的测地线，且位于 $Y_1 \times \{b_1\}$ 中。由于 Y_2 的直径为无限，它包含一个顶点 b，其与 b_1的距离为 $d_{Y_1}(a_1, a_2)$。令 μ_0为一条连接 $p_1 = (a_1, b_1)$ 与 (a_2, b_1) 的 $(3, 0)$-拟测地线：先通过 $\{a_1\} \times Y_2$ 中的一条测地线连接 $p_1 = (a_1, b_1)$ 与 (a_1, b)，再通过$Y_1 \times \{b\}$ 中的一条测地线连接 (a_1, b) 与 (a_2, b)，最后通过 $\{a_2\} \times Y_2$ 中的一条测地线连接 (a_2, b) 与 (a_2, b_1)，从而得到该拟测地线。令 μ 和 ν 分别表示将 μ_0 和 ν_0 与连接 (a_2, b_1) 和 $p_2 = (a_2, b_2)$ 的测地线首尾相接后得到的路径。由于 $d(b_1, b_2) \leq 2C(1, 0)$，$\nu$ 是一条 $(1, 2C(1, 0))$- 拟测地线，而 μ 是一条 $(3, 2C(1, 0))$- 拟测地线。

另一方面，μ 与 ν 之间的豪斯多夫距离至少为 $d(b,\ b_1) = d(a_1,\ a_2)$。另一方面，由引理 5.24 可知，该距离至多为$C(1,\ 2C(1,\ 0)) + C(3,\ 2C(1,\ 0))$。因此，$d(a_1,\ a_2) \leq C(1,\ 2C(1,\ 0)) + C(3,\ 2C(1,\ 0))$。

结合这两个不等式，我们得出

$$d(p_1, p_2) \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2) \leq C(1, 2C(1, 0)) + C(3, 2C(1, 0)) + 2C(1, 0).$$

因此，我们得到了 $\gamma \cap Y$直径的一个上界，该上界仅取决于莫尔斯控制函数 M，正如所需。

□

对于赋有局部度量的拟中位图，命题 5.23 使我们能够推导出：

推论 5.25。给定莫尔斯控制函数 M 和常数 $D \geq 0$，存在一个常数$K \geq 0$，使得以下结论成立。设 X 为一个拟中位图，且$\{(C, \delta_C)\ |C$ 团$\}$为一个图度量相容系统。假设，对于 X的每个团 C：

- 若(C, δ_C) 有界，则其直径为 $\leq D$;
- 若(C, δ_C) 无界，则包含 C 的超平面的纤维相对于 δ无界。

Then, 直径$(\gamma, \delta_J) \leq K$对每个超平面 J以及图 (X, δ)中的每条 M-*Morse*测地线 γ均成立 .

证明。设 J 为一个超平面，γ 为一条 M-Morse测地线。由引理5.8可知，$(N(J)\ \delta)$ 是 (X,δ) 的凸子图。因此，γ与 $(N(J)\ \delta)$ 的交集必定是某个（可能无限长的）子线段 γ_J。但由定理 5.6 可知，$N(J)$ 分解为直积 $C\times F$，其中 C是包含在 J中的一个团，而 F是 F的一个纤维，因此引理 5.9 推出 $(N(J)\ \delta)$ 分解为 $(C,\delta_C)\times(F,\delta)$。如果 (C,δ_C) 有界，那么它的直径为 $\leq D$，因此 $\mathrm{diam}(\gamma,\delta_J)\leq D$。否则，若 (C,δ_C) 无界，则 (F,δ) 也必定无界。因此，我们可以应用命题 5.23，并推得 γ_0 的长度为 $\leq K_0$，其中 K_0 是一个仅取决于 M 的常数。由于 γ 在 γ_0之外不与 J 相交，我们得出

$$\mathrm{diam}(\gamma,\delta_J)=\mathrm{diam}(\gamma_J,\delta_J)=\mathrm{length}(\gamma_J)\leq K_0.$$

因此，我们已经证明 $\mathrm{diam}(\gamma,\delta_J)\leq\max(D,K_0)$。 □

结合目前为止证明的内容，我们终于可以证明定理 5.1 了。

定理 *5.1* 的证明。 如果 Γ 不连通，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 以及所有 $\Gamma(\nu)$都是自由积，因此被有界集粗分离。在这种情况下，无须证明其他内容。从现在起，我们假设 Γ是连通的。

我们为 QM(Γ,$\mathcal{G}$) 配备其超平面的典范着色 κ，着色方式为 $V(\Gamma)$，并赋予一个度量系统 $\{(C,\delta_C)\mid C\text{团}\}$，使得 $(\mathrm{QM}(\Gamma,\mathcal{G})\ \delta)$ 与$\Gamma\mathcal{G}$ （准）等距（命题 5.14）。

由于 Γ 不是联接且至少包含两个顶点，根据 [?]，我们知道 $\Gamma\mathcal{G}$ 是双曲柱状的。由定理 3.1 可知，若 $\Gamma\mathcal{G}$ 被一个次指数增长的族 $\mathcal{Z}$ 粗分离，则 $\mathcal{Z}$ 会粗分离 $\Gamma\mathcal{G}$ 的一条Morse测地线γ。下面验证命题 5.21 可应用于 γ。

给定一个整数 $k\geq 0$，令 ν_k 表示定义在 $V(\Gamma)$ 上且取常数 k 的权函数。注意，由于$\mathcal{G}$ 中的所有群都是无限群，QM(Γ,$\mathcal{G}$)中的所有团都是无限的，这意味着每个超平面都界定了无限多个扇区。

令 C 为 QM(Γ, G) 中的一个团。根据引理 5.13，它可写为 gG_u，其中某个 $g\in\Gamma$G 和 $u\in V(\Gamma)$。由于 Γ 是连通的且至少包含两个顶点，u 在 Γ中至少有一个邻点，记为 v。注意，$gG_u,G_v=g(G_u\oplus G_v)$ 是由两个团 C 和 $D:=gG_v$ 构成的直积，因此引理 5.9 表明 (P,δ) 与 $(C,\delta_C)\times(D,\delta_D)$ 等距。这意味着，包含 C 的 QM(Γ, G) 中超平面的纤维相对于 δ 是无界的，因为它们包含 $(D,\delta_D)\simeq G_v$ 的副本。因此，推论 5.25 适用，并表明存在一个统一常数 K，使得对于 QM(Γ, G) 的每个超平面 J，都有 $\mathrm{diam}(\gamma,\delta_J)\leq K$。

因此，命题 5.21 适用，并表明 γ 包含在 QM(Γ，$\mathcal{G}$) 的一个 κ-正则侵入子图 Y中，使得 Y拟等距嵌入到 $(\mathrm{QM}(\Gamma,\ \mathcal{G})\ \delta)$ 中，即嵌入到 $\Gamma\mathcal{G}$ 中；并且每个与 Y 相交的超平面 J 都具有厚度 $\geq k$。当然，由于 $\mathcal{Z}$ 粗分离 γ，它必然也粗分离 Y。但我们从命题 5.17 知道，对于某个 $\nu\geq k$，Y 与 $\Gamma(\nu)$ （拟）等距。由此我们得出所需结论：$\Gamma(\nu)$ 被某个次指数增长族粗分离。 □

6 右角阿廷群中的粗分离

在本节中，我们证明定理 1.1。首先，我们引入无夹点图的概念，接着在命题 6.2 中证明这类图在无三角形情形下的一个分解结果。由此，我们可以在命题 6.7 中建立定义图为无三角形且无夹点的直角阿廷群的厚分解。命题 6.8 随后表明，为了证明定理 1.1，我们可以将问题归结为

无三角形情形。直角阿廷群的厚分解进一步表明，只需考虑由长度至少为 4 的圈定义的直角阿廷群。最后，将定理 5.1 与 [BGT26b] 中关于单端双曲群的粗分离结果结合起来，即可得到定理 1.1 的证明。

6.1 无夹点图

本节将介绍并研究以下一类图：

定义 6.1. 图 G 称为无夹点图，当且仅当它既不是完全图，也不能被一个团分离。

我们强调，无夹点图必定是连通的，否则它会被空子图分离。

若子图 $H \leq G$ 满足：对任意一对顶点 $u, v \in V(H)$，顶点u 和 v 在 H 中相邻，当且仅当它们在 G中相邻，则称 $H \leq G$ 为诱导子图。若 $W \subseteq V(G)$，我们也用 W 表示由顶点集 W诱导出的 G 的子图。

定理 6.2. 设 G 是有限无三角形无夹点图。那么以下至少有一项成立：

(1) 存在一个顶点 $v \in G$，使得 $G \setminus \{v\}$ 是无夹点的。

(2) 存在一个诱导子图 $K \leq G$，使得

(i) K 分离 G；*(ii)* 存在一个划分 $G \setminus K = \sqcup_{i=1}^{p} G_i$，且对每个 i，由 $G_i \cup K$ 诱导的子图都是无夹点的。

(3) G 是一个长度为 ≥ 4 的圈。

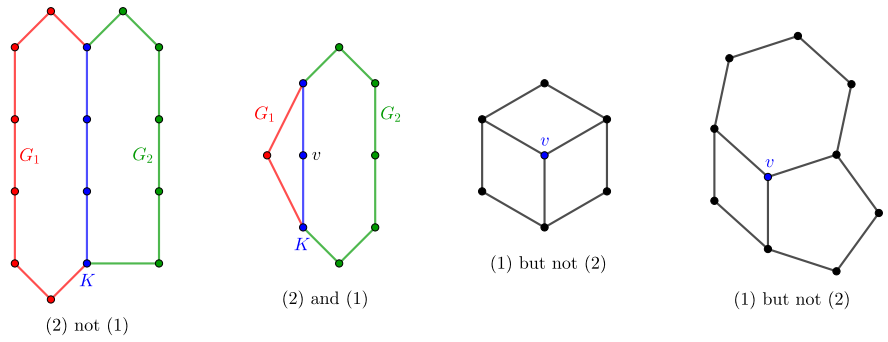


图 2：满足 (1)、(2) 或两者的示例。

注意，在无夹点图 G 中，任意顶点 v 的链接都不是团，否则它就会是一个分离团，或者 G 会是完全图。还要注意，定理 6.2 中的无三角形假设是必要的，图 3 中的反例说明了这一点。



图 3：存在三角形时的反例。

我们先证明一些有用的引理。

引理 6.3. 设 G 是一个无夹点图， $Q \leq G$ 是一个诱导无夹点子图。如果 Q分离 G，那么 G满足定理 *6.2* 的(2) 。

证明。 令 $G_1, \ldots, G_p$ 为 $G \setminus Q$ 的连通分支。我们断言，对每个 i，图 $G_i \cup Q$ 都是无夹点的。显然，它是连通的且不是完全图。令 $K \leq G_i \cup Q$ 为一个完全子图，并令 $x, y \in (G_i \cup Q) \setminus K$。

- 若 $x, y \in Q$，则 $Q \cap K$ 是 Q 中的一个完全子图。由于 Q 是无夹点的，因此存在一条 Q 中从 x 到 y 且避开 $Q \cap K$（因而也避开 K）的路径。
- 若 $x, y \in G_i$，则 K 不会将 x 或 y 与 Q 分隔开，否则它就会将它们与 $G \setminus Q$ 的其他连通分支分隔开。因此，存在 $x\prime y\prime \in Q$，以及避开 K 的路径 $x \to x\prime$、 $y \to y\prime$ 。与前一种情况一样，$Q \cap K$ 是 Q 中的一个完全子图，且 Q 是无夹点的，因此存在一条 Q 中从 $x\prime$ 到 $y\prime$ 且避开 $Q \cap K$ 的路径。将这些路径连接起来，便得到 $G_i \cup Q$ 中一条避开 K 的路径 $x \to y$ 。
- 若 $x \in Q$ 且 $y \in G_i$，同理， K 不会将 y 与 Q分开，因此存在$y\prime \in Q$ 以及一条避开 K的路径 $y \to y\prime$ ，并且在 Q 中存在一条避开K的路径 $x \to y\prime$ 。

□

I若 Γ 是一个图，且 $v \in \Gamma$ 是一个顶点，我们用 $N(v)$ 表示 v的邻点集合。

引理 6.4. 设 Γ 是一个图，且 $G \leq \Gamma$ 是一个诱导无夹点子图 .

1. 若 $\gamma \leq \Gamma$ 是一条诱导路径，其端点 a、$b \in G$ 不相邻，且其内部顶点与 G不相交，则由 G 和 γ 诱导的子图无夹点。*2.* 若 $v \in \Gamma \mid G$ 满足 $N(v) \cap G$ 不是完全图，则由G 和 v 诱导的子图无夹点。

证明与引理 6.3 的证明类似。为完整起见，我们将其列出。

证明。 (1) 令 G' 表示由 G 和 γ 诱导的子图。显然它是连通的且不是完全图。令 $K \leq G'$ 为一个完全子图，并令 $x, y \in G' \setminus K$。

- 若 $x, y \in G$，则 $G \cap K$ 是 G 中的一个完全子图；又由于 G 无夹点，因此 G 中存在一条从 x 到 y 且避开 $G \cap K$ 的路径，因而也避开 K。
- 若 $x, y \in \gamma \setminus G$，则 x 和 y 各自都可以在 γ 中通过一条避开 K 的路径，连接到 a 或 b 中至少一个。接着，我们像前一种情况那样，用 G 中的一条路径补全。
- 情形 $x \in G$ 和 $y \in \gamma \setminus G$ 的证明类似。 □

为证明 (2)，令 G' 为由 G 和 v 诱导的子图。由于 N（v）$\cap G$ 不是完全图，因此 v 有两个不相邻的邻点 $a, b \in G$ 。于是 $a \to v \to b$ 是一条端点位于 G 中的诱导路径，故由 (1) 可得 (2)。

定理 *6.2* 的证明。 设 G 是一个有限无三角形无夹点图。假设 G不是一个圈。我们将证明 (1) 或 (2) 成立。

由于 G 是无夹点的，因此它是连通的且不是完全图。此外， G不是树，因为每棵不是完全图的有限树都会被某个顶点分离。因此， G 包含一个圈，进而包含一个诱导圈 $Q \leq G$。由于 G 无三角形， Q 的长度至少为 4，因此 Q 是无夹点的。由于 G 不是一个圈，我们有 $Q \neq G$。由于 G 是有限的，存在一个包含 Q的极大真诱导无夹点子图 $Q' \leq G$ 。

如果 Q' 分离 G，则由引理 6.3 可知 G 满足 (2)。从现在起，假设 $G \setminus Q'$是连通的。令

$$Z = \{z \in Q' \mid z \text{ is adjacent to a vertex in } G \setminus Q'\}.$$

由于 G 是连通的，且 $Q' \neq G$，集合 Z 非空。此外， Z 不是完全图，否则它会分离 G，这与 G 无夹点这一事实矛盾。因此，存在不相邻顶点 q_1， $q_2 \in Z$。令

$$A_1 = N(q_1) \cap (G \setminus Q') \qquad \text{and} \qquad A_2 = N(q_2) \cap (G \setminus Q'),$$

其中， $N(q_i)$ 表示 q_i 在 G中的邻点集合。设 γ 是 $G \setminus Q'$中从 A_1 到 A_2的一条最短路径，端点为 $x_1 \in A_1$ 和 $x_2 \in A_2$。那么 γ 在 $G\setminus Q'$中是诱导的。

断言 6.5. $G\setminus Q' = \gamma$。

断言的证明。令 $\tilde{\gamma}$表示由 $\gamma \cup \{q_1, q_2\}$诱导的子图。由于 γ在 $G \setminus Q'$中是诱导的，因此 $\tilde{\gamma}$是一条诱导路径（在 G中）：事实上，例如，若 q_1 与 γ的某个内部顶点 w 相邻，则 $w \in A_1$，于是 γ 中从 w 到 x_2的子路径将是 $G\setminus Q'$ 中从 A_1 到 A_2 的一条路径，且比 γ短，矛盾。同理， q_2不与 γ的任何内部顶点相邻。若 $\gamma \subsetneq G\setminus Q'$，则由引理 6.4 和 $\neq G$，由 $Q' \cup \tilde{\gamma}$ 诱导的子图无夹点，这再次与 Q'的极大性矛盾。因此 $G\setminus Q' = \gamma$。 □

断言 6.6。 ***(i)*** x_1 （分别为 x_2）在 Q' 中恰有一个邻点，即 q_1 （分别为 q）。 $_2)$.

(ii) γ 的内部在 Q' 中至多有一个邻点；如果该邻点存在，则它与 q_1 和 q_2 均不相同。

断言的证明。 (*i*) 假设 x_1 还有另一个邻点 $q_1' \in Q'$。由于 G 无三角形， q_1 与 q_1' 不相邻。因此，路径 $q_1 \to x_1 \to q_1'$ 是诱导的；根据引理 6.4，由 $Q' \cup \{x_1\}$ 诱导的子图是无夹点的，这与 Q' 的极大性矛盾。关于 x_2 的论证完全相同。

(*ii*) 首先， γ 的内部顶点均不与 q_1 或 q_2 相邻：否则，如定理 6.5 的证明中那样，可以在 $G \setminus Q'$ 中得到一条从 A_1 到 A_2 的更短路径。
现在设 w 是与某个 $p \in Q'$ 相邻的 γ 的一个内部顶点。我们声称， p 同时与 q_1 和 q_2 相邻。举例来说，假设 $p \nsim q_1$，并选择满足此性质且尽可能靠近 x_1 的 w。于是路径 $q_1 \to x_1 \to \cdots \to w \to p$ 是诱导的，因此根据引理 6.4，由 $Q' \cup \{x_1, \ldots, w\}$ 诱导的子图无夹点，这与 Q' 的极大性矛盾。类似地， p 与 q_2 相邻。
最后，假设 γ 的两个不同内部顶点 w, w' 分别与顶点 $p, p' \in Q'$ 相邻。那么 p 和 p' 都与 q_1 相邻，因此二者不相邻，因为 G 是无三角形的。选取 w, w' ，使它们之间的子路径尽可能短，则路径 $p \to w \to \cdots \to w' \to p'$ 是诱导的。引理 6.4 再次推出与 Q' 的极大性矛盾。因此， γ 的内部在 Q' 中至多有一个邻点，且该邻点不同于 q_1 和 q_2。 □

我们分别讨论断言 6.6(*ii*) 的两种情形。

情形 1： γ 内部没有顶点与 Q'相邻。设 γ' 是Q' 中从 q_1 到 q_2的一条诱导路径。那么 γ' 分离 G。事实上，根据断言 6.6， γ与 Q' 之间仅有的边是 x_1q_1 和 x_2q_2，且 q_1 和 q_2 都属于 γ'。设

$$G_1 = \tilde{\gamma} \setminus \gamma' = \gamma \qquad \text{and} \qquad G_2 = Q' \setminus \gamma',$$

其中， $\tilde{\gamma}$表示由 $\gamma \cup \{q_1、 q_2\}$诱导的子图。于是， $G_2 \cup \gamma' = Q'$是无夹点的。此外， $G_1 \cup \gamma' = \tilde{\gamma} \cup \gamma'$是一个诱导圈，因为除了 x_1q_1 和 x_2q_2之外， γ与 γ'之间没有边。它的长度至少为 4，因此也是无夹点的。因此， G满足 (2)。

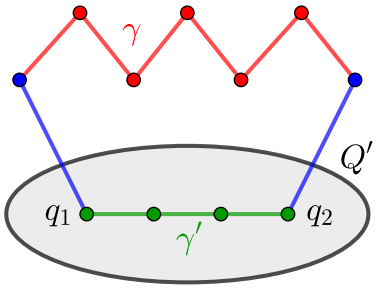


图 4：情形 1。

情形 2：γ 的内部与 Q'相邻。令 $p \in Q'$ 为如断言 6.6 中所述的 γ 内部的唯一邻点。由于 Q' 是无夹点的，它不被某个顶点分隔。令 γ' 为 Q' 中从 q_1 到 q_2 且避开 p的一条最短路径。于是，γ' 是诱导的。令 K 为由 $\gamma' \cup \{p\}$诱导的 Q' 的子图。我们区分两种子情形。

- 若 $K = Q'$，则 $G \setminus \{p\}$ 是 $\tilde{\gamma}$ 和 γ' 的并，因此是一个诱导圈：事实上，γ' 避开了 p，且根据断言 6.6，γ 与 Q' 之间唯一的边是 x_1q_1、x_2q_2 以及从 γ 内部连到 p 的边。因此，移除 p 后，$\tilde{\gamma}$ 与 γ' 之间唯一的边是 x_1q_1 和 x_2q_2。由于 q_1 与 q_2 不相邻，该圈的长度至少为 4，所以 $G \setminus \{p\}$ 是无夹点的。因此 (1) 成立。

- 若 $K \subsetneq Q'$，令 $G_1 = \gamma$ 和 $G_2 = Q' \setminus K$。则 K 分离 G，并且

$$G \setminus K = G_1 \sqcup G_2.$$

此外，$G_2 \cup K = Q'$ 是无夹点的。注意

$$G_1 \cup K = \gamma \cup \gamma' \cup \{p\}.$$

由 γ 和 γ' 诱导的子图是一个圈，因此根据前面相同的论证，它是无夹点的。另外，p 与 q_1 和 q_2 相邻，因此 $N(p) \cap (\gamma \cup \gamma')$ 不是一个团。因此，根据引理 6.4 的第二项，子图 $G_1 \cup K$ 是无夹点的。因此 (2) 得证。

□

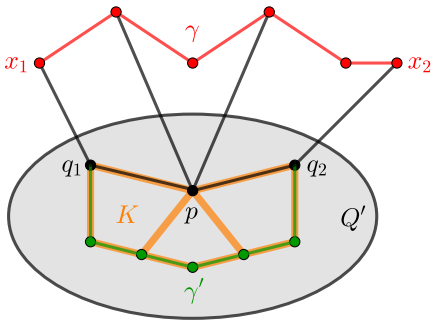


图 5：情形 2。

6.2 右角阿廷群的厚分解

利用定理 6.2，我们现在证明右角阿廷群的以下厚分解结果。

定理 6.7。设 Γ 为有限无三角形无夹点图，并记 $r = |V(\Gamma)|$。设 $A(\Gamma)$ 为相应的右角阿廷群，并配备相对于标准生成集的字度量，

令 A 为由 Γ 中的圈诱导的抛物子群的左陪集的 r-邻域所组成的族，令 B 为由 Γ 中的不相邻顶点对诱导的抛物子群的左陪集所组成的族。则 $A(\Gamma)$ 是(A、B)-厚的。

定理 *6.7* 的证明。 在整个证明中，所有右角阿廷群都配备相对于其标准生成集的字度量。我们对 $n := |V(\Gamma)|$ 作归纳论证。不存在顶点数至多为 3 的无夹点图。唯一一个有 4 个顶点的无夹点图是正方形，因此无须证明。设 Γ 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的无三角形无夹点图。根据定理 6.2，我们分三种情况讨论。

Γ **是一个圈：** 无须证明。

Γ **满足 (1)（定理 6.2）：** 存在一个顶点 $v \in \Gamma$，使得由 $\Lambda := \Gamma \setminus \{v\}$ 诱导的子图是无夹点的。根据归纳假设，$H := A(\Lambda) \leq A(\Gamma)$ 是 ($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$)-厚的，其中 $\mathcal{A}$ 是由 Λ 中的圈所诱导的抛物子群在（H 中）左陪集的 $(n-1)$-邻域构成的族，而 $\mathcal{B}$ 是由 Λ 中的不相邻顶点对所诱导的抛物子群在（H 中）的左陪集构成的族。将 $A(\Gamma)$ 中元素的左平移也纳入考虑，从而扩充这两个族。因此，H 的每个左陪集都是 ($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$)-厚的。

由于 Γ 是无夹点的，v 在 Λ中有两个不相邻的邻居 a和 b 。令 C 为 H的左陪集的 1-邻域所成的族，令 D 为子群 a, b 的左陪集所成的族。根据定理 4.3，$A(\Gamma)$ 是 (C, D)-厚的。事实上，$H \cap vHv^{-1}$ 包含 a, b。D 是 B 的子族，因此 $A(\Gamma)$ 是 (C, B)-厚的。此外，根据上一段，每个左陪集 gH 都是 (A, B)-厚的，所以根据定理 4.5，gH^{+1} 是 (A^{+1}, B)-厚的。因此，C 中的每个元素都是 (A^{+1}, B)-厚的，根据定理 4.4 的传递性，我们得到 $A(\Gamma)$ 是 (A^{+1}, B)-厚的。由于 A 是由 Λ 中的圈所诱导的抛物子群的左陪集（在 H 中）的 $(n-1)$-邻域所成的族，证毕。

Γ **满足(2) 定理 6.2 的条件：** 存在一个诱导子图 $K \leq \Gamma$，使得K 分离 Γ，并且存在一个划分

$$\Gamma \setminus K = \bigsqcup_{i=1}^{p} \Gamma_i,$$

使得对于每个 i，由 $\Gamma_i \cup K$ 诱导的子图（记作 Λ_i）都是无夹点的。特别地，$A(\Gamma)$ 可分解为以 $A(K)$ 为底群、顶点群为 $A(\Lambda_i)$ 的 amalgamated free product。因此，$A(\Gamma)$ 是（$\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$）-厚的，其中 $\mathcal{C}$ 是子群 $A(\Lambda_i)$ 的左陪集族（$1 \leq i \leq p$），而 $\mathcal{D}$ 是 $A(K)$ 的左陪集族，见定理 4.2。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是定理陈述中的两个族。由于 K 不是完全图，它包含两个不相邻顶点，因此每个 $D \in \mathcal{D}$ 都包含某个 $B \in \mathcal{B}$。因此$A(\Gamma)$ 是（$\mathcal{C}$，$\mathcal{B}$）-厚的。此外，根据归纳假设，每个 $C \in \mathcal{C}$ 都是（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）-厚的。因此，由定理 4.4 可得，$A(\Gamma)$ 是（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）-厚的。 □

6.3 化归到无三角形情形

本节将说明，为了证明定理 1.1，只需考虑由无三角形图定义的直角阿廷群。更确切地说，我们证明如下结论。

命题 6.8。 设 Γ 是一个有限无夹点图。若 $A(\Gamma)$ 具有一个粗分离的次指数增长族，那么对于某个有限无三角形无夹点图 Γ'，$A(\Gamma')$ 也具有这样的族。

证明。设 $v \in \Gamma$ 是包含在某个三角形中的顶点，并用 L 表示它的链接。对于每一对不相邻顶点 $x, y \in L$，考虑 $\Gamma \backslash \{v\}$中从x 到 y 的一条最短路径（因而是诱导路径）。这样的路径存在，因为 Γ 是无夹点的，所以尤其不会被单个顶点分离。将这些路径记为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$。

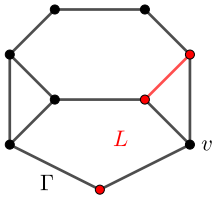


图 6： Γ和 v的链接

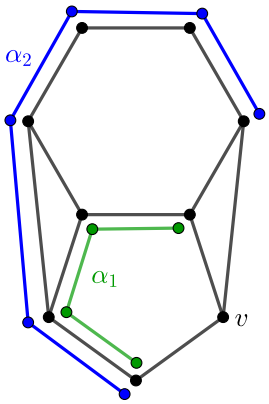


图 7：路径 α_i

我们考虑 Γ的 $2N$个副本，记为 Γ_1、……、Γ_N和 Γ'_1、……、Γ'_N。我们沿着 v的星形子图粘合所有这些~个副本，并将所得的图记为 Γ。对于每个 $i = 1$、……、N，~令 γ_i （分别为 γ'_i）表示 α_i 在 Γ_i （分别为 Γ'_i）中对应的路径。令 $K \leq \Gamma$ 表示由$\{v\} \cup L$ 以及这些 $2N$ 条路径所诱导的子图。

~注意， A（Γ）和 A（Γ）是拟等距的 [BKS09，第 11]节。因此，如果 A（Γ）存在一个次指数增长的粗分离子集，那么根据 [BGT24，引理 2.3]， A（Γ）也存在这样的子集。

~ ~由于子图 K 分离了 Γ，因此 $A(\Gamma)$ 分解为沿子群 $A(K)$ 的 amalgamated free product，其顶点群为 $A(\Gamma_i \cup K)$ 和 $A(\Gamma'_i \cup K)$。此外， $A(K)$ 具有指数增长，因为 K 不是完全图。因此，根据定理 4.6 和定理 4.7（另见定理 7.6 的证明），某个顶点群的左陪集被一个次指数增长的子集粗分离。

断言 6.9. 对于每个 i，图 $\Gamma_i \cup K$ 和 $\Gamma'_i \cup K$ 都是无夹点的。

证明. 对于每个 i， $\Gamma_i \cup K$ 和 $\Gamma'_i \cup K$ 都是通过将一份 Γ 的副本中除一条路径外的所有路径粘合而得到的。由于每条路径的端点都粘合到不相邻的顶点上，根据引理 6.4，加入每条路径后仍然无夹点。 □

断言 6.10. 对于每个 i， $(\Gamma_i \cup K) \setminus \{v\}$ 和 $(\Gamma'_i \cup K) \setminus \{v\}$ 都是无夹点的。

证明。同样的论证适用于这两个图，因此我们来考虑图 $(\Gamma_i \cup K) \setminus \{v\}$。我们只将 Γ_i 记作 Γ。图 $(\Gamma \cup K) \setminus \{v\}$ 由一个副本

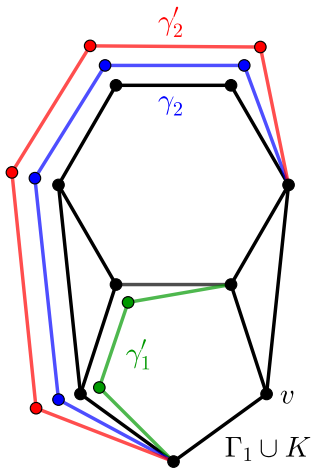


图 8： $\Gamma_1 \cup K$

通过粘合除一条以外的所有路径得到。为方便起见，我们将这些路径记作 γ_1、……、γ_p，其中 $p = 2N - 1$。图（$\Gamma \cup K$）$\setminus \{v\}$ 显然不是完全图。它是连通的，因为 Γ 无夹点，因此不会被顶点 v分离，所以 $\Gamma \setminus \{v\}$ 是连通的。

设 $C \leq (\Gamma \cup K) \setminus \{v\}$ 是一个完全子图。由于 C 的直径为 ≤ 2，它要么包含于某个 γ_j 中，要么包含于 $\Gamma \setminus \{v\}$中。如果 C 包含于某个 γ_j中，那么显然它不是分离的。

假设 C 包含于 $\Gamma \setminus \{v\}$ 中，并设 $x, y \in ((\Gamma \cup K) \setminus \{v\}) \setminus C$。由于每条$\gamma_j$ 的端点彼此不相邻，因此它们不可能位于同一个完全子图中。因此，γ_j 的任意内点都可通过一条避开 C的路径与 $\Gamma \setminus \{v\}$ 相连，所以只需考虑 x 和 y 都位于 $\Gamma \setminus \{v\}$ 中的情形。由于 C 不分离Γ，因此存在一条从 x 到 y 、位于 Γ 中且避开 C的最短（因而也是诱导）路径。如果这条路径经过 v，令 a 和 b 为沿着该路径与 v 相邻的点。由于该路径是诱导路径， a 和 b不相邻。因此，其中一条拼接路径（设为 γ_k）连接a 与 b。由于 $C \subset \Gamma \setminus \{v\}$ 且 γ_k 位于 $\Gamma \setminus \{v\}$ 之外（端点 a 和 b除外），路径 γ_k 避开 C。因此，用 γ_k 替换子路径 $a \to v \to b$，便得到一条从 x 到 y 且避开 C的路径。

□

断言 6.11。 对于每个 i，$(\Gamma_i \cup K) \setminus \{v\}$ 和 $(\Gamma_i' \cup K) \setminus \{v\}$ 所含的三角形都严格少于 Γ。

证明。 对于每个 i， $\Gamma_i \cup K$ 和 $\Gamma_i' \cup K$ 都是通过将除一条路径以外的所有路径粘合到 Γ 的一个副本上得到的。由于每条添加的路径都是诱导路径，且其端点不相邻，这一操作不会产生新的三角形。因此，这两个图所含的三角形数量都与 Γ 完全相同。随后移除 v，便会删除所有包含它的三角形。由于选取 v 时保证它至少位于一个三角形中，三角形总数便严格减少。

□

最后，令 Λ 是某个 i 的 $\Gamma_i \cup K$ 或 $\Gamma_i' \cup K$。由于 Λ 和 $\Lambda \setminus \{v\}$ 都是无夹点的，因此 v 在 $\Lambda \setminus \{v\}$ 中有两个不相邻的邻点 a、 b。令 A 为 $A(\Lambda \setminus \{v\})$ 的左陪集的 1- 邻域族，令 B 为子群 a, b 的左陪集族。由定理 4.3， $A(\Lambda)$ 是 (A, B)- 厚的。事实上， $A(\Lambda \setminus \{v\}) \cap vA(\Lambda \setminus \{v\})v^{-1}$ 包含 a, b。因此，由定理 4.6 和定理 4.7 可知，如果一个次指数增长族粗分离了 $A(\Lambda)$，那么它必定粗分离某个 $A(\Lambda \setminus \{v\})$ 的左陪集的 1-邻域。因此，某个 $A(\Lambda \setminus \{v\})$ 的左陪集被一个次

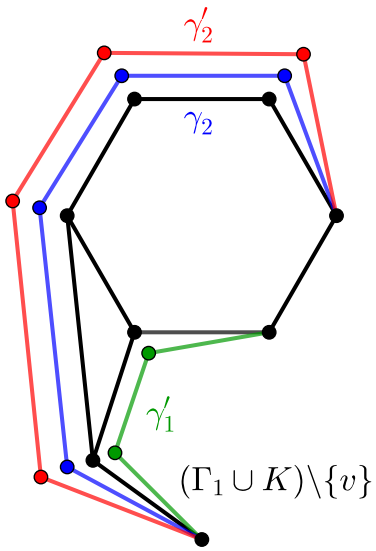


图 9：$(\Gamma_1 \cup K)\backslash\{v\}$

指数增长族粗分离。如果 $\Lambda \setminus \{v\}$ 是无三角形的，我们就完成了。否则，我们对一个属于某个三角形的顶点 u 重复这一过程。由于每一步三角形的数量都严格减少，这一过程会在有限步后终止。 □

6.4 定理 1.1 的证明

在本节中，我们将迄今为止得到的所有结果结合起来，以证明文章的主要结果，即定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ 显然。我们的目标是证明 $(i) \Rightarrow (iii)$。反设存在一个图 Γ，它既不是完全图，也不能被完全子图分离，但 $A(\Gamma)$ 可被一个次指数增长族粗分离。根据命题 6.8，我们可以假设 Γ 是无三角形的。于是，由定理 6.7 可知， $A(\Gamma)$ 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚的，其中$\mathcal{A}$ 是由Γ 中的圈定义的抛物子群陪集邻域所构成的集族，而 $\mathcal{B}$ 是自由子群邻域所构成的集族。若 $\mathcal{Z}$ 表示一个次指数增长族，粗分离 $A(\Gamma)$，则由命题 4.6 可知$\mathcal{Z}$ 粗分离$\mathcal{A}$；进而由命题 4.7 可知，$\mathcal{Z}$ 粗分离$\mathcal{A}$的某个成员。

因此，我们已经证明，存在某个 $n \geq 4$，使得 $A(C_n)$ 可由一个次指数增长族粗分离，其中 C_n 表示长度为 n的圈。根据定理 5.1，可以找到一个权 $\nu \geq 3$，使得图乘积 $C_n(\nu)$ 可由一个次指数增长族粗分离。注意， $C_4(\nu)$ 不可能由一个次指数增长族粗粗分离。事实上， $C_4(\nu)$ 分解为 $(A * B) \oplus (C * D)$，其中 A、 B、 C、 D 是基数为 ≥ 3的有限群，因此它拟等距于 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$。但根据 [BGT24，定理 1.3]，我们知道 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$不能由一个次指数增长族粗分离。因此，必有 $n \geq 5$。这意味着 $C_n(\nu)$ 是双曲的（参见 [Mei96]，另见 [Gen17，第 8.3]节）。接着， [BGT26b] 表明， $C_n(\nu)$要么是多端的，要么是虚拟曲面群，要么可在一个双端群上分裂。但根据 [Var20]，我们知道$C_n(\nu)$是单端的；根据 [BGT26b，命题 4.5]，它不是虚拟曲面群；根据 [BGT26b，推论 4.10]，它也不会在双端群上分裂。因此得到所需的矛盾。

□

7 其他应用

在最后这一节中，我们记录定理 1.1 的一些应用，以及我们用来证明该定理的技巧。

7.1 完全割分解

作为定理 1.1 的推论，右角阿廷群之间可能存在的粗嵌入受到严格限制。为说明这一断言，我们需要以下定义：

定义 7.1. 图 X 的完全割分解 $(T, (V_s)_{s\in V(T)})$是由一棵树 T 以及一个由 $V(T)$ 索引的诱导子图集族 $V_s \leq X$ 构成的数据，满足：

- $\{V_s \mid s \in V(T)\}$ 覆盖 X，即 $E(X) = \bigcup_{s\in V(T)} E(V_s)$；
- 对于每个 $s \in V(T)$， V_s 都没有完全割集；
- 对于所有相邻的 r， $s \in V(T)$， $V_r \cap V_s$ 都是 X 和 V_r 的完全割集，且真包含于二者之中 V_s。

根据 [BGT26a], , 每个有限图都存在完全割分解。于是：

推论 *7.2.* 设 Φ、Ψ 是两个有限图。分别固定 Φ 和 Ψ的两个完全割分解 $(R,(U_s)_{s\in V(R)})$ 和 $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$。若存在粗嵌入 $\varphi : A(\Phi) \to A(\Psi)$，那么对于每个 $r \in V(R)$，只要 U_r 不是完全图，就存在某个 $s \in V(S)$，使得 φ 将 $\langle U_r\rangle$ 映入 $\langle V_s\rangle$ 某个陪集的邻域中。

证明。一方面，由于 U_r 不是完全图且没有完全割集，根据定理 1.1，$\langle U_r\rangle$ 无法被次指数增长族粗分离。另一方面， Ψ的完全割分解 $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ 对应于 $A(\Psi)$的一个图群分解，其边群为自由阿贝尔群，顶点群为$\langle V_s\rangle$、 $s \in V(S)$。所需结论由[BGT24，命题 1.13]得出。

□

作为推论 7.2 的一个具体应用，我们举一个例子，在这个例子中可以证明两个给定的直角阿廷群之间不存在粗嵌入。

例 7.3。令 Φ和 Ψ 为图 10 所示的两个图。显然，对 Ψ作完全割集分解，相当于将 Ψ 描述为一个八边形 Ω 与一个三角形 Δ之间的 amalgamated product。图 Φ 不包含完全割集。根据推论 7.2，如果 $A(\Phi)$ 粗嵌入到 $A(\Psi)$ 中，那么 $A(\Phi)$ 必须粗嵌入到$\langle \Omega\rangle$ 或$\langle\Delta\rangle$中。但 $A(\Phi)$ 无法粗嵌入到$\langle\Omega\rangle$ 中，因为其渐近维数更大；也无法粗嵌入到$\langle \Delta\rangle$ 中，因为其具有指数增长。因此，我们得出结论： $A(\Phi)$ 无法粗嵌入到 $A(\Psi)$中。

7.2 再谈厚度与其他类群的不可分性

我们在 [BGT24, 定理 3.5] 中证明，如果度量空间 X 具有一个持久族，其 δ-割的大小呈指数增长，那么 $X \in \mathcal{M}^{exp}$，并且对任意粗连通度量空间 Y， $X \times Y \in \mathfrak{M}_{exp}$。对于能够粗嵌入 T_3 的群，我们在 $\mathfrak{M}_{exp}$ 中改进了这一结果。

推论 7.4. 设 X 是 $\mathfrak{M}_{exp}$ 中的齐性度量空间。若存在粗嵌入 $T_3 \to X$，则对任意粗连通度量空间 Y， $X \times Y \in \mathfrak{M}_{exp}$。

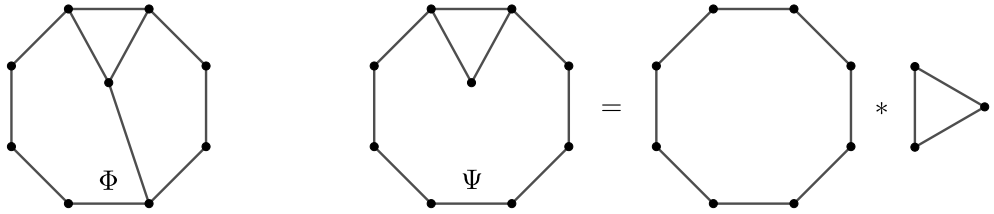


图 10：不存在从 $A(\Phi)$ 到 $\to A(\Psi)$ 的粗嵌入。

证明。 由于粗连通度量空间拟等距于连通图，我们可以假设 Y 是一个连通图。设 $\mathcal{A}$ 为子图集族 $X \times B_Y(y,\ 1)$，并设 $\mathcal{B}$ 为子图集族 $X \times \{y\}$，如定理 4.2 中所述。那么 $X \times Y$ 是 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-厚的。

假设 $X \times Y$ 被一个次指数增长的族 $\mathcal{Z}$ 粗分离。那么，根据定理 4.6，$\mathcal{Z}$ 粗分离 $\mathcal{A}$，因为 $\mathcal{B}$ 中的元素具有指数增长。利用 X 的齐性以及粗嵌入副本 T_3 的存在性，我们可以应用定理 4.7。由此可知，存在 $Z \in \mathcal{Z}$，它粗分离某个副本$X \times B_Y(y,1)$，其中 $y \in Y$。由于 $X \times B_Y(y,1)$ 与 X 拟等距，我们推得 X 被一个次指数增长的子集粗分离，这与 $X \in \mathfrak{M}_{exp}$ 的事实矛盾。

□

推论 7.5。 设 G 是一个局部紧紧生成群， S 是一个紧生成集，并设 H 是一个闭紧生成子群，使得 $H \in \mathfrak{M}_{exp}$，且存在一个粗嵌入 $T_3 \to H$。

如果对于每个 $s \in S$，子群 $H \cap sHs^{-1}$ 在 G 中具有指数相对增长，那么 $G \in \mathfrak{M}_{exp}$。特别地，如果 H 是正规子群，那么 $G \in \mathfrak{M}_{exp}$。

证明。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为定理 4.3 中的族。那么 G 是（$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$）-厚的。如果一个次指数增长族 $\mathcal{Z}$ 粗分离了 G，那么根据定理 4.6 和定理 4.7，它会粗分离某个 H 左陪集的 1-邻域。由于 H粗嵌入于 G，族 $\mathcal{Z}$ 相对于 H 的度量仍具有次指数增长。这与 $H \in \mathfrak{M}_{exp}$这一事实矛盾。

□

现在我们将讨论前述结论在具体例子类别中的应用。

合并自由积。

推论 7.6。 设 $G = A_1 *_B A_2$。假设 A_1、 $A_2 \in \mathfrak{M}_{exp}$，且存在粗嵌入 $T_3 \to A_1$ 和 $T_3 \to A_2$。那么 $G \in \mathfrak{M}_{exp}$ 当且仅当 B 具有指数相对增长。

证明。 “若”方向由 [BGT24，命题 1.13] 得出。令 X 为 G 关于某个有限生成集的凯莱图。通过扩大生成集，我们可以假设 A_1、 A_2 和 B 的左陪集都是连通子图。令 $\mathcal{A}$为 A_1 和 A_2 的左陪集族，并令 $\mathcal{B}$ 为 B 的左陪集族。假设 X 被一个次指数增长的族 $\mathcal{Z}$ 粗分离。由于X 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-厚的，根据定理 4.6，要么存在 $Z \in \mathcal{Z}$ 粗包含 B 的某个左陪集，从而导出矛盾；要么$\mathcal{Z}$ 粗分离族 $\mathcal{A}$。假设后一种情况成立。根据定理 4.7，$\mathcal{Z}$ 粗分离某个左陪集$g \cdot A_i$，其中 $i \in \{1,2\}$。由于有限生成子群粗嵌入环境群中，按 A_i 的子群度量衡量，$\mathcal{Z}$ 仍具有次指数增长。这与 $A_i \in \mathfrak{M}_{exp}$ 矛盾。

□

一类后承接连通李群。

命题 7.7。 考虑一个形如$G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^k$的单模连通可解李群，其中 $\mathbb{R}^k$ 通过对角矩阵作用于 $\mathbb{R}^d$，且矩阵对角项为正。若 G 具有指数增长，则 $G \in \mathfrak{M}_{exp}$。

证明。 G具有指数增长这一事实意味着存在一个元素$a \in \mathbb{R}^k$，其特征值为 $\lambda > 1$。由于 G 是幺模的， a 的特征值之积等于 1，因此 a 也必有一个特征值为 $\mu < 1$。由此可知， G包含一个形如 $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$的正规子群，其中 $\mathbb{R}$ 通过 diag(λ^t, μ^t)作用。赋予该子群一个适当的左不变黎曼度量后， H 可视为两个 $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ 的等高线乘积（例如参见 [HMT22，第 3.2]节）。特别地，H 包含一个 $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$的拟等距嵌入副本，因此也包含一个 T_3的拟等距嵌入副本。因此，根据[BGT24，定理 1.4，], 可得 $H \in \mathfrak{M}_{exp}$。结论现由 7.5 得出。

□

映射类群。

定理 7.8。 设 Σ 是亏格为 $g \geq 4$的闭曲面。那么 $\mathrm{MCG}(\Sigma) \in \mathfrak{M}_{exp}$。

证明概要。 当 $g \geq 4$时，我们证明 $G = \mathrm{MCG}(\Sigma)$ 是 ($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$)-厚的，其中

$$\mathcal{A} := \{\mathrm{MCG}(\Sigma_1) \times \mathrm{MCG}(\Sigma_2) \mid \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ \Sigma_1, \Sigma_2 \text{ disjoint, connected of genus } \geq 1\},$$

并且$\mathcal{B}$ 由$\mathcal{A}$中元素的因子组成。

设 $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ 以及 $c_1, \ldots, c_{g-1}$ 是 G的 Lickorish 生成元。回顾一下，它们是关于简单曲线 α_i, β_i 和 γ_i的德恩扭转，唯一相交的曲线对是 $\{\alpha_i, \beta_i\}$、$\{\alpha_i, \gamma_i\}$ 和 $\{\alpha_{i+1}, \gamma_i\}$。

考虑三个这样的生成元 s_1, s_2, s_3，它们分别对应曲线 γ_1、 γ_2和 γ_3。由于$g \geq 4$，可以找到分解 $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$和 $\Sigma = \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3$，其中每个子曲面 Σ_i 都是连通的，且亏格至少为 1，并且 s_i 支撑在Σ_i 中（而非沿其边界）。这可以通过逐一分析各种情况（以及 Lickorish 生成元的具体定义）直接验证。特别地， $s_1 s_2$ 和$s_2 s_3$ 分别属于子群 G_1, $G_2 \in \mathcal{A}$，且 $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{B}$。此外，由于$s_1 \in G_1$，可得

$$s_1 G_1 \cap s_1 G_2 = s_1 (G_1 \cap G_2),$$

它是 $\mathcal{B}$ 中某个群的陪集。

由此可知，对于任意一对元素 x， $y \in G$，都可以在相对于 Lickorish 生成元的凯莱图中用一条路径将它们连接起来，使得任意两个相邻顶点 x_i， x_{i+1} 都属于某个子群 $G_i \in \mathcal{A}$ 的陪集，并且任意两个相邻的此类陪集的交集是 $\mathcal{B}$ 中某个子群的陪集。因此，$G = \mathrm{MCG}(\Sigma)$ 是（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）-厚的。

最后，应用推论 7.4 时，还需注意子群 $\mathrm{MCG}(\Sigma_i)$ 是非扭曲的（例如参见 [Far06，推论 5.3]），并且包含非阿贝尔自由子群（这意味着 $\mathrm{MCG}(\Sigma_1) \times \mathrm{MCG}(G_2)$ 不能被次指数增长族粗分离）。

□

参考文献

[BDM09] J. Behrstock、C. Druţu 和 L. Mosher。厚度度量空间、相对双曲性与准等距刚性。《数学年刊》，344(3)：543–595，2009。[BGT24] O. Bensaid、A. Genevois 和 R. Tessera。花环积的粗分离与大尺度几何。arxiv:2401.18025，2024。[BGT26a] O. Bensaid、A. Genevois 和 R. Tessera。直角阿廷群中的代数分离与分裂。预印本，2026。[BGT26b] O. Bensaid、A. Genevois 和 R. Tessera。双曲群中的粗分离与分裂。arxiv:2603.17852，2026。[BJN10] J. Behrstock、T. Januszkiewicz 和 W.D. Neumann。某些高维直角阿廷群的准等距分类。《群、几何与动力系统》，4(4)：681–692，2010。[BKS09] M. Bestvina、B. Kleiner 和 M. Sageev。直角阿廷群的渐近几何 I。《几何与拓扑》，12：1653–1699，2009。[BMW94] H.-J. Bandelt、H. Mulder 和 E. Wilkeit。准中位图与代数。《图论杂志》，18(7)：681–703，1994。[BN08] J. Behrstock 和 W.D. Neumann。图流形群的准等距分类。《杜克数学杂志》，141：217–240，2008。[CG25] L. Ciobanu 和 A. Genevois。考克斯特群、图积及其他群中的收缩元素与共轭增长。arXiv:2504.15636，2025。[Cor17] M. Cordes。完备测地度量空间的莫尔斯边界。《群、几何与动力系统》，11(4)：1281–1306，2017。[DGO17] F. Dahmani、V. Guirardel 和 D. Osin。作用于双曲空间的群中的双曲嵌入子群与旋转族。《美国数学会回忆录》，245(1156)：v+152，2017。[DS00] M. Dunwoody 和 E. Swenson。代数环面定理。《数学发明》，140：637，2000 3 605( ): – 。[Far06] B. Farb。关于映射类群与模空间的一些问题。载于《映射类群及相关主题的问题》，《纯粹数学研讨会论文集》第 74 卷，第 11–55 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[Gen17] A. Genevois。准中位图的类立方几何及其在几何群论中的应用。博士论文，艾克斯-马赛大学，arxiv:1712.01618，2017。[Gen22] A. Genevois。旋转群、中角图与 periagroup：考克斯特群和群图积的统一观点。arXiv:2212.06421，2022。[Gen25] A. Genevois。超越图积与仙人掌群：群的幺群积。arXiv:2505.09194，2025。[HMT22] David Hume、John M Mackay 和 Romain Tessera。李群的庞加莱剖面与粗几何二分性。《几何与泛函分析》，32(5)：1063–1133，2022。[Hua17] J Huang。直角阿廷群的准等距分类 I：有限外自同构情形。《几何与拓扑》，21(6)：3467–3537，2017。[Mar20] A. Margolis。沿循环子群分裂的右角阿廷群的准等距分类。《群、几何与动力系统》，14(4)：1351–1417，2020。[Mei96] J. Meier。何时双曲群的图积是双曲的? 《几何论丛》，61(1)：29–41，1996。[Pap05] P. Papasoglu。群分裂的准等距不变性。《数学年刊》(2)，161(2)：759–830，2005。[Sis16] A. Sisto。双曲嵌入子群的准凸性。《数学杂志》，283 658，2016 3 4 649(-): – 。[Sta71] J. Stallings。群论与三维流形，《耶鲁数学专著》第 4 卷。耶鲁大学出版社，纽黑文、伦敦，1971。根据 1969 年在耶鲁大学所作的 James K. Whittemore 数学讲座整理。[Var20] O. Varghese。群的图积的端数。《代数通讯》，48(6)：2418–2427，2020。[Wal03] C. Wall。抽象群及其分裂的几何。《马德里康普顿斯数学评论》，16(1)：5–101，2003。

[Zar19] M. Zaremsky. 直角阿廷群、辫群和环辫群的阿贝尔分裂的可公度不变性。代数与几何拓扑，19(3):1247–1264，2019。

UCLouvain
数学与物理研究所，环形加速器路2号，1348 新鲁汶（比利时）
电子邮箱： oussama.bensaid@uclouvain.be

蒙彼利埃大学，亚历山大·格罗滕迪克数学研究所，欧仁·巴塔永广场，34090 蒙彼利埃（法国）电子邮箱：
anthony.genevois@umontpellier.fr

巴黎西岱大学，朱西厄—巴黎左岸数学研究所，奥雷莉·内穆尔广场，75013 巴黎（法国）电子邮箱： romain.tessera@imj-prg.fr