arXiv:2603.24708v1 [math.CO] 25 Mar 2026

有向三维环面上的哈密顿分解：回归映射与里程表视角

Sanghyun
Park，延世大学

2026年3月

摘要

我们证明，对于每个整数 $m \geq 3$，有向三维环面 $D_3(m) = \mathrm{Cay}((\mathbb{Z}_m)^3, \{e_1, e_2, e_3\}) \cong \vec{C}_m \Box \vec{C}_m \Box \vec{C}_m$（等价地，即三个有向 m-循环的笛卡尔积）都存在一个由三个弧不相交的有向哈密顿圈构成的分解。

证明围绕回归映射展开，而非考察完整的 m^3 个顶点动力系统。由于每一步都会使层函数 $S = i + j + k$（模 m）增加 1，哈密顿性问题可归结为零层平面 $\{S = 0\}$ 上的 m 步回归映射，该平面的大小为 m^2。这些回归映射以二维里程表变换为模型，其中一个坐标充当时钟，另一个记录进位。

当 m 为奇数时，对典范着色进行五次 Kempe 交换，可得到与里程表仿射共轭的回归映射。当 m为偶数时，符号乘积不变量表明，任何从典范着色出发的 Kempe 构造都行不通，因此我们构造了另一种显式的低层赋值，其回归映射是同一时钟与进位机制的有限缺陷扰动。进一步的首次返回约化将剩余的闭合问题转化为有限拼接分析；边界情形 $m = 4$ 则由一个直接的有限见证处理。该构造已在 Lean 4 中形式化。

1 引言

固定整数 $m \geq 3$，并记 $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。令 $V = (\mathbb{Z}_m)^3$，并令 $D_3(m)$ 为弧集为

$$(i, j, k) \to (i + 1, j, k), \qquad (i, j, k) \to (i, j + 1, k), \qquad (i, j, k) \to (i, j, k + 1),$$

所有运算均模 m进行。等价地，

$$D_3(m) = \mathrm{Cay}((\mathbb{Z}_m)^3, \{e_1, e_2, e_3\}) \cong \vec{C}_m \Box \vec{C}_m \Box \vec{C}_m.$$

$D_3(m)$ 的有向哈密顿分解是将其 $3m^3$ 条弧划分为三个弧不相交的有向哈密顿回路。

无向情形中，循环乘积的哈密顿分解是经典问题。Kotzig 证明了 $C_m \Box C_n$ 可分解为哈密顿圈 [1], , Foregger 则将这一结果推广到多个循环的乘积 [2]；另可参阅 Bermond 的综述 [3] 以及 Alspach、Bermond 和 Sotteau 的综述 [4], , 还有 Stong 关于图乘积的研究 [5]。对于有向乘积，Trotter 和 Erdős 刻画了两个有向循环的笛卡尔积何时是哈密顿的 [8], , Curran 和 Witte 则证明，任意三个或更多非平凡有向循环的乘积都含有有向哈密顿圈 [7]。在分解方面，Keating 确定了两个有向循环的乘积何时可分解为两个有向哈密顿圈 [10], , 而 Bogdanowicz 研究了将其分解为具有

指定公共长度的有向圈，以及满足明确算术假设的孤立哈密顿圈 [11, 12]。Darijani、Miraftab 和 Morris 解决了大多数情形下弧不相交哈密顿路径的对应问题，并指出在这一框架中，三因子乘积是尚待解决的边界情形 [13]。作为一个阿贝尔凯莱有向图， $D_3(m)$ 也属于 Witte–Gallian 综述的、更广泛的哈密顿性研究传统 [6] 以及 Curran–Gallian 的综述 [9]。因此，对称三生成元环面 $D_3(m)$ 正处于现有哈密顿性定理、二因子分解结果与尚待解决的三因子分解问题之间的自然交界处。

同期且独立开展的工作。在准备本文期间，Knuth 的札记*Claude's Cycles* [16] 针对奇数情形给出了另一种构造 m；2026年3月的修订版还记录了偶数情形的独立解法。Aquino-Michaels [17] 也独立地为同一问题开发了另一套方案，给出了不同的奇数和偶数情形构造，并进行了计算探索。本文基于 Kempe 符号乘积不变量以及统一的回归映射／里程表框架，对所有 $m \geq 3$给出了自成一体的证明，并包含 Lean 4 形式化。

证明围绕回归映射的视角展开。定义层函数

$$S(i, j, k) = i + j + k \pmod{m}.$$

每条合法弧都会使 S 增加 1。因此，对于任意颜色，轨道每经过

$$P_0 = \{S = 0\}$$

m 步恰好返回一次。因此，全体顶点集 V 上的哈密顿性可归结为 P_0上一个 m步回归映射的循环结构； P_0是一个大小为 m^2的集合。该截面上的模型动力学是标准里程表变换

$$O(u, v) = (u + 1,\ v + \mathbf{1}_{u=0}),$$

其第一坐标是时钟，第二坐标记录时钟回绕时的进位。奇数与偶数论证最好理解为实现这一相同的时钟与进位机制的两种不同方式。

证明包含三个彼此不同的要素。

(i) Kempe 交换的符号乘积不变量，它给出了一个奇偶性障碍，表明偶数 m 无法仅通过 Kempe 交换从典范着色得到；

(ii) 一个显式的奇数情形五次交换见证，其在 P_0 上的三个返回映射都与标准里程表变换仿射共轭；(iii) 在三个最低层上进行的显式偶数情形 *Route E* 构造，经过适配的坐标变换以及进一步对车道横截面进行的一次首次返回约化后，其返回映射变为有限缺陷里程表动力学。

因此，奇数情形是一个精确的仿射里程表定理。偶数情形是一个修复定理：奇偶性障碍阻断典范 Kempe 路径后，我们只修改低层，重新构造一个本原时钟和进位。边界情形 $m = 4$ 则通过一个有限见证单独处理。

我们的主要结果如下。

定理 1。 对于每个整数 $m \geq 3$， $D_3(m)$ 的弧集可分解为三个有向哈密顿圈。

记号	含义
$V = (\mathbb{Z}_m)^3$	有向环面 $D_3(m)$ 的顶点集
$S(i,\ j,\ k) = i + j + k$ (模 m)	层函数；每条合法弧都使 S 增加 1
$P_t = \{S = t\}$	层平面 / 返回截面
f_c	全局颜色-c 映射（当方向指派是合法的 V 着色）
$F_c = f_c^m\|_{P_0}$	在 P_0 上的回归映射，用于奇数情形仿射构造（第3节）
$R_c = f_c^m\|_{P_0}$	在 P_0 上的回归映射，用于路线 E（第4节）；简称 R_c 以便与奇数情形 F_c
$O(u,\ v) = (u + 1,\ v + \mathbf{1}_{u=0})$	标准二维里程表；层漂移消去后的模型返回映射为消去
T_c	车道横截面上的首次回归映射 $L = \{(u,\ 0) : u \in \mathbb{Z}_m\}$；这是偶数情形证明中的一维进位映射
$\rho_c(u)$	来自车道 u的首次返回时间
$(u,\ t) = \Phi_c(i,\ k)$	颜色 c的适配的内部坐标；t 是主体分支中的时钟坐标（引理10）

Ta表1： $D_3(m)$的返回映射分析中的核心符号和证明层级作用 .

从证明结构来看，本文的架构很简单。第 2 节提出两项全局约化：Kempe 交换的符号乘积不变量，以及从 V 到 P_0的回归映射约化。第 3节通过写出一个五次交换着色，并展示其返回映射到里程表的显式仿射共轭，证明奇数情形。第 4节从隔离出必须重新构建的时钟与进位机制入手，开始讨论偶数情形，介绍路线 E，并陈述有限缺陷回归映射框架。附录 A–C 属于书面证明的一部分：它们推导路线 E 返回映射的闭式公式，并进一步将这些公式转化为单环结论。附录 D 记录了 $m = 4$的有限见证。附录 E 仅作补充；它核查了所展示的公式和见证数据，但并未作为证明步骤使用。

这种组织方式既具有概念意义，也具有技术意义。层函数提供了一个周期为 m的内置时钟。转而考察首次回归，可以消除这一被迫的漂移，并显现真正的慢变量。在奇数情形下，无需进一步处理： P_0 上的回归映射已经是标准里程表变换的仿射副本。在偶数情形下，再进行一次首次返回约化，将系统化为显式车道，从而分离出同一机制，不过此时带有有限个受控拼接。这就是整个证明被称为时钟与进位论证的原因。

2 着色、Kempe 交换与回归映射

2.1 弧着色与方向分配

我们将 $D_3(m)$ 的一个着色定义为置换三元组（f_0、 f_1、 f_2），它们作用于 V，并满足

$$\{f_0(v), f_1(v), f_2(v)\} = \{v + e_1,\ v + e_2,\ v + e_3\} \qquad \text{for every } v \in V.$$

等价地，在每个顶点处，这为颜色集{0、1、2}到三个出弧$\{v \to v + e_1$、 $v \to v + e_2$、 $v \to v + e_3\}$指定了一个双射。颜色-c 子图是 f_c 的函数有向图（即弧集为$\{v \to f_c(v)$： $v \in V\}$的有向图），因此是有向圈的不交并。若颜色 c 满足 f_c 是一个单一的 m^3-圈，我们就称其为哈密顿。

例1 (典范着色)。 典范着色 在每个顶点处都赋予恒等方向三元组$(d_0, d_1, d_2) = (0$、 1、 2)，使得

$$f_0(i,j,k) = (i+1,j,k), \qquad f_1(i,j,k) = (i,j+1,k), \qquad f_2(i,j,k) = (i,j,k+1).$$

于是，每种颜色都是若干互不相交的 m^2 有向 m循环的并。此着色是奇数情形构造（第3节）的起点，也是其符号乘积决定奇偶性障碍的基准（推论1）。

我们还需要一种放宽的概念，它不要求满足置换要求。

定义1（方向指派）。在 $D_3(m)$ 上的一个方向指派 是一个三元组 $\delta = (d_0, d_1, d_2)$，其中 $d_c: V \to \{0,1,2\}$，且对每个顶点 v，三元组 $(d_0(v)\ d_1(v)\ d_2(v))$ 都是 $(0,1,2)$ 的一个置换。它诱导出映射

$$g_c(v) := v + e_{d_c(v)} \qquad (c \in \{0,1,2\}).$$

当且仅当每个诱导映射 g_c 都是V的一个置换时，我们才称该方向指派为着色。

路线 E 起初被指定为一个方向指派；引理 4随后将其提升为着色。

2.2 Kempe 映射与 Kempe 交换

Kempe 链重着色是图着色中的经典工具；关于 Kempe 等价的背景知识，参见 Mohar [14] 以及 Stiebitz、Scheide、Toft 和 Favrholdt 的专著 [15]。固定两种颜色$r \neq s$。给定一个着色 (f_0, f_1, f_2)，定义 Kempe 映射 *Kempe* 映射

$$\tau_{r,s} := f_s^{-1} \circ f_r.$$

其循环恰好是颜色为 r、s 的双色子有向图中交替出现的循环，该子图的颜色为 r和 s。

定义 2（Kempe 交换）。设 $X \subseteq V$ 是 $\tau_{r,s}$ 的循环并。颜色 r 和 s) 在 X 上的Kempe 交换（是指在 X 的每个顶点处交换颜色为 r 和颜色为 s 的弧，从而得到新的三元组 (f'_0, f'_1, f'_2):

$$f'_r(v) = \begin{cases} f_s(v), & v \in X, \\ f_r(v), & v \notin X, \end{cases} \qquad f'_s(v) = \begin{cases} f_r(v), & v \in X, \\ f_s(v), & v \notin X, \end{cases} \qquad f'_t = f_t \ (t \notin \{r,s\}).$$

引理 1（Kempe 交换保持有效性）。若(f_0, f_1, f_2) 是一个着色，且 X 是 $\tau_{r,s}$ 的循环并，那么在 X 上进行 *Kempe* 交换会得到另一个合法着色。

证明。在每个 $\tau_{r,s}$-循环 $C \subseteq X$ 上，颜色为 r 和颜色为 s 的弧分别构成从源集 C 到共同像集 $f_r(C) = f_s(C)$ 的两个完美匹配。事实上，若 $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1})$，则沿着该循环有 $f_r(v_t) = f_s(v_{t+1})$。在 C 上交换这两种颜色，仅仅是交换这两个匹配，因此与 C 相接的每个顶点在这两种颜色下仍然具有入度 1 和出度 1。在 X 之外，一切保持不变。 □

2.3 奇偶性障碍

对于有限集上的置换 π，令 $\operatorname{sgn}(\pi) \in \{\pm 1\}$ 表示其符号。

定理 2 (符号乘积不变量)。设 (f_0, f_1, f_2) 是一种着色，并设 (f'_0, f'_1, f'_2) 是通过对两种颜色进行 *Kempe* 交换得到的。那么

$$\operatorname{sgn}(f'_0)\operatorname{sgn}(f'_1)\operatorname{sgn}(f'_2) = \operatorname{sgn}(f_0)\operatorname{sgn}(f_1)\operatorname{sgn}(f_2).$$

证明。只需考虑对颜色 r 和 s进行交换，因为第三种颜色保持不变。由于交换支撑集 X 是由互不相交的$\tau_{r,s}$-循环组成的并，且符号具有乘法性，因此只需处理一个循环。设 $C=(v_0,v_1,\dots,v_{\ell-1})$ 是 $\tau_{r,s}=f_s^{-1}\circ f_r$ 的一个循环，且包含于 X 中。定义 $\sigma\in S(V)$ 为在 C 上的 ℓ- 循环 $(v_0\,v_1\cdots v_{\ell-1})$，并逐点固定 $V\setminus C$。直接利用 $f_r(v_t)=f_s(v_{t+1})$ 验证可得

$$f_r'=f_r\circ\sigma^{-1},\qquad f_s'=f_s\circ\sigma.$$

因此

$$\operatorname{sgn}(f_r')\operatorname{sgn}(f_s')=\operatorname{sgn}(f_r)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\operatorname{sgn}(f_s)\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(f_r)\operatorname{sgn}(f_s).$$

当 X 是若干个循环的并时，逐个循环应用上述论证可知，每个循环上的交换都保持符号乘积不变，因此全局符号乘积是不变量。 □

推论 1 (当 m 为偶数时，从典范着色出发的 Kempe 变换所面临的奇偶性障碍**)**。设 m 为偶数。那么，从典范着色出发的 ***Kempe*** 交换序列无法到达 $D_3(m)$ 的哈密顿分解。

证明。$N=m^3$ 个顶点上的有向哈密顿圈是一个 N-循环置换，因此当 m 为偶数时，其符号为 $(-1)^{N-1}=-1$。因此，分解为三个哈密顿圈时，符号乘积必须为 $(-1)^3=-1$。在典范着色中，每种颜色都是若干个 m^2 有向m-循环的不相交并。由于 m 为偶数，每个 m-循环的符号为 $(-1)^{m-1}=-1$；又由于 m^2 为偶数，m^2 个这样的符号的乘积为 $(-1)^{m^2}=+1$。因此，总符号乘积为 $(+1)^3=+1$。结论由定理 2 得出。 □

2.4 层函数与返回映射

定义层函数

$$S(i,j,k):=i+j+k\pmod m.$$

每条允许的弧都会使 S 增加 1，因此对于每个着色和每种颜色 c，都有 $S(f_c(v))=S(v)+1$。

引理 2 （Kempe 映射的平面不变性）。对于任意着色和任意两种颜色 $r\neq s$，***Kempe*** 映射 $\tau_{r,s}=f_s^{-1}\circ f_r$ 保持 S不变。因此，每个 $\tau_{r,s}$-循环都包含在同一个平面$P_t:=\{S=t\}$中。

证明。设 $w=f_r(v)$。则 $S(w)=S(v)+1$。如果 $u=\tau_{r,s}(v)=f_s^{-1}(w)$，那么 $f_s(u)=w$，所以 $S(w)=S(u)+1$，因此 $S(u)=S(v)$。 □

推论 2 （平面交换始终符合 Kempe 变换规则）。对于任意 $t\in\mathbb{Z}_m$，平面 P_t 对于每一对 $r\neq s$ 都是 $\tau_{r,s}$ 的循环的并。因此，在整个平面上交换两种颜色始终是有效的 ***Kempe*** 交换。

引理 3 (返回映射控制循环结构**)**。固定一种着色和一种颜色 c。令 $P_0=\{S=0\}$，并令

$$F_c:=f_c^m|_{P_0}:P_0\to P_0$$

为回归映射。于是，f_c 的有向圈与 F_c的有向圈之间存在双射，且 f_c 中一个循环的长度是对应的 F_c 中循环长度的 m 倍。特别地，f_c 在 V 上是哈密顿的，当且仅当 F_c 在 P_0上是一个单独的 m^2-循环。

证明。沿着 f_c 轨道，S 的值每一步增加 1，因此轨道每隔 m 步恰好与 P_0 相交一次。因此，在 P_0 上诱导的运动恰好是回归映射 $F_c=f_c^m|_{P_0}$。 □

引理 4 (通过回归映射的有效性)。 设 $f\colon V \to V$ 是一个有向颜色映射，且每一步都会使层 S 增加 1。记 $P_t = \{S = t\}$，并设 $g_t : P_t \to P_{t+1}$ 为诱导的层映射。如果回归映射

$$R = g_{m-1} \circ \cdots \circ g_0 : P_0 \to P_0$$

是双射，则每个 g_t 都是双射。因此， f 是 V的一个置换。

证明。 所有层的有限大小都相同，为 m^2；这一等大小性质对论证至关重要。由于 R 是双射，它是单射。如果 g_0 不是单射，那么 R 就不是单射。因此， g_0 是单射，进而也是双射。

现在写作

$$g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1 = R \circ g_0^{-1},$$

因此，较短的复合映射仍是双射。归纳地重复同样的论证可知，每个 g_t 都是双射。因此，在这种颜色下，每个顶点的入度和出度均为 1，所以 f 是 V的一个置换。

□

注 1 (回归截面的重要性)。 引理 *3* 是推动整篇论文的庞加莱截面约化。它将状态空间从 m^3 个顶点缩减为大小为 m^2 的截面；更重要的是，它消除了强制的层漂移，并分离出决定某种颜色是否为哈密顿的缓慢进位信息。下一节将介绍这种约化动力学的标准范式——里程表。

定义 3 （标准二维里程表）。定义

$$O : \mathbb{Z}_m^2 \to \mathbb{Z}_m^2, \qquad O(u, v) = (u + 1,\ v + \mathbf{1}_{u=0}).$$

Lem命题 5 （里程表是一个单循环）。 映射 O 在 $\mathbb{Z}_m^2$ 上是一个单 m^2-循环 .

证明。 经过 O 的 m 次迭代后，第一个坐标恰好完成一整圈，且进位恰好触发一次，因此

$$O^m(u, v) = (u, v + 1).$$

因此 $O^{m^2} =$id。

反过来，假设 $O^t(u, v) = (u, v)$。写作 $t = km + r$，其中 $0 \le r < m$。 $O^t(u, v)$ 的第一个坐标是 $u + r$，所以 $r = 0$。于是

$$O^t(u, v) = O^{km}(u, v) = (u, v + k),$$

因此 $k \equiv 0$ （模 m）。由此，每个点的精确周期都是 m^2，并且由于 $|\mathbb{Z}_m^2| = m^2$，映射 O 是一个单循环。 □

注记 2 （里程表为何重要）。里程表是典型的时钟进位系统。一个坐标每一步都会前进；另一个坐标只有在第一个坐标回绕时才会改变。奇数情形的证明将表明，回归映射与这一模型完全一致，至多相差一个仿射共轭。偶数情形的证明则要经过第二次回归映射约化，对车道横截集进行有限拼接分析后，才能还原出相同的机制。

3 奇数 m：一个明确的仿射里程表见证

本节证明奇数情形。在两个相邻层上进行五交换 Kempe 修改，可得到一种在 P_0上具有闭式回归映射公式的合法着色。这些公式本身就是仿射里程表，因此写出公式后，哈密顿性便可由里程表引理立即推出。

3.1 仿射支撑

回顾例子中的典范着色 1。

Let

$$P_0 := \{S = 0\}, \qquad P_1 := \{S = 1\},$$

并定义仿射直线

$$L_0 := \{S = 0,\ k = 0\}, \qquad L_1 := \{S = 1,\ k = 0\}.$$

定理 3 (五次交换见证)。 从典范着色开始，执行以下五次 *Kempe* 交换：

1. 在直线 L_0 上交换颜色(0,1)；*2.* 在平面 P_0 上交换颜色(0,2)；*3.* 在平面 P_0 上交换颜色(0,1)；*4.* 在直线 L_1 上交换颜色(0,1)；*5.* 在平面 P_1 上交换颜色(0,2)。

这对每个 $m \geq 3$ 都会产生一种合法着色。

定理 *3* 的证明。 步骤 (2)、(3) 和 (5) 符合 Kempe 变换规则，这是推论 2 的结果，因为它们由整个平面支撑。对于步骤 (1)，着色是典范的，并且

$$\tau_{0,1} = f_1^{-1} \circ f_0 : (i, j, k) \mapsto (i + 1, j - 1, k)$$

同时保持 S a nd k，作用于 $L_0 = \{S = 0, k = 0\}$，作为一个单独的 m-循环。因此 (1) 符合 Kempe 变换规则 .

对于步骤 (4)，注意步骤 (1)–(3) 只修改 P_0 中的尾部。若 $v \in P_1$，则 $f_0(v)$ 位于 P_2 中。任何落在 P_2 中的颜色 1 弧都必须始于 P_1，因为每条合法弧都会使 S 增加 1。因此，f_1^{-1} 在 P_2 中 P_1 的像上的取值，只取决于从 P_1 出发的颜色 1 弧；这些弧在步骤 (1)–(3) 后仍保持典范。因此 $\tau_{0,1}$ 作用于 P_1 时为 $(i, j, k) \mapsto (i + 1, j - 1, k)$，所以 L_1 是一个单独的 $\tau_{0,1}$- 循环，且步骤 (4) 符合 Kempe 变换规则。□

定义 4 (凸起映射)。对于 $v = (i, j, k) \in V$ 定义

$$\mathrm{bump}_i(v) = (i + 1, j, k), \qquad \mathrm{bump}_j(v) = (i, j + 1, k), \qquad \mathrm{bump}_k(v) = (i, j, k + 1),$$

所有运算均模 m 进行。

命题 1 (奇见证的闭式)。 设 $m \geq 3$ 并令 $v = (i,\ j,\ k) \in V$ 满足$S = i + j + k$ (模 m)。经过定理 *3* 中的五次交换后，得到的映射 $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ 为

$$f_0(v) = \begin{cases} \mathrm{bump}_j(v) & \text{if } S = 0 \text{ and } k \neq 0, \\ \mathrm{bump}_k(v) & \text{if } S = 1, \\ \mathrm{bump}_i(v) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$f_1(v) = \begin{cases} \mathrm{bump}_k(v) & \text{if } S = 0, \\ \mathrm{bump}_i(v) & \text{if } S = 1 \text{ and } k = 0, \\ \mathrm{bump}_j(v) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$f_2(v) = \begin{cases} \mathrm{bump}_j(v) & \text{if } S \in \{0, 1\} \text{ and } k = 0, \\ \mathrm{bump}_i(v) & \text{if } S \in \{0, 1\} \text{ and } k \neq 0, \\ \mathrm{bump}_k(v) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。外部 de $P_0 \cup P_1$ 五次交换均不作用，因此此处的着色仍为典范。

在 P_0 上，步骤 (1) 在 L_0 上交换颜色 (0，1)，而在 $P_0 \setminus L_0$ 上不做任何操作。因此，步骤 (1) 之后有

$$(f_0, f_1, f_2) = \begin{cases} (\mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_k), & \text{on } L_0, \\ (\mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_k), & \text{on } P_0 \setminus L_0. \end{cases}$$

步骤 (2) 在整个 P_0 上交换颜色 (0，2)，于是得到

$$(f_0, f_1, f_2) = \begin{cases} (\mathrm{bump}_k, \mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_j), & \text{on } L_0, \\ (\mathrm{bump}_k, \mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_i), & \text{on } P_0 \setminus L_0. \end{cases}$$

步骤 (3) 在整个 P_0 上交换颜色 (0，1)，得到

$$(f_0, f_1, f_2) = \begin{cases} (\mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_k, \mathrm{bump}_j), & \text{on } L_0, \\ (\mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_k, \mathrm{bump}_i), & \text{on } P_0 \setminus L_0. \end{cases}$$

由于 $L_0 = \{S = 0,\ k = 0\}$，这恰好就是 $S = 0$ 上所述的规则。

在 P_1 上，前三个步骤均不做任何操作。步骤 (4) 在 L_1 上交换颜色 (0，1)，因此步骤 (4) 之后

$$(f_0, f_1, f_2) = \begin{cases} (\mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_k), & \text{on } L_1, \\ (\mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_k), & \text{on } P_1 \setminus L_1. \end{cases}$$

步骤 (5) 将所有 P_1 上的颜色 (0,2) 进行交换，因此最终

$$(f_0, f_1, f_2) = \begin{cases} (\mathrm{bump}_k, \mathrm{bump}_i, \mathrm{bump}_j), & \text{on } L_1, \\ (\mathrm{bump}_k, \mathrm{bump}_j, \mathrm{bump}_i), & \text{on } P_1 \setminus L_1. \end{cases}$$

由于 $L_1 = \{S = 1, k = 0\}$，这正是 $S = 1$ 上所述的规则。 □

命题 2（显式仿射共轭至里程表）。将 P_0 参数化为 $(i, k) \in \mathbb{Z}_m^2$，其中$j \equiv -i - k$。对于命题 *1* 的着色，返回映射

$$F_c = f_c^m\big|_{P_0} : P_0 \to P_0$$

满足

$$F_0(i,k) = (i - 2 + \mathbf{1}_{k=0},\, k + 1), \qquad F_1(i,k) = (i + \mathbf{1}_{k=-1},\, k + 1),$$
$$F_2(i,k) = (i + 2 - 2\mathbf{1}_{k=0},\, k - 2).$$

如果 m 为奇数，则有

$$\psi_0(i,k) = (k,\ i + 2k), \qquad \psi_1(i,k) = (k + 1,\ i),$$

and

$$\psi_2(i,k) = \big(\lambda k,\ \lambda(i + k)\big), \qquad \lambda := (-2)^{-1} \in \mathbb{Z}_m,$$

有

$$\psi_c \circ F_c = O \circ \psi_c \qquad (c = 0, 1, 2).$$

证明。 每次从 P_0 返回自身，都包含在第 $S=0$层上走一步，在第 $S=1$层上走一步，然后在 $m-2$ 层上走 $S\geq 2$个规范步。因此， F_0、 F_1和 F_2 的公式可由利用命题1进行一次返回计数得到。

对于颜色 0，若 $k=0$ ，则第 0 层步骤使用方向 0，第 1 层步骤使用方向 2，其余 $m-2$ 个步骤使用典范方向 0。这在 (i,k) 坐标中产生位移 $(m-1,1)\equiv(-1,1)$。若 $k\neq 0$，唯一的变化是第 0 层步骤使用方向 1，因此位移变为 $(m-2,1)\equiv(-2,1)$。因此

$$F_0(i,k)=(i-2+\mathbf{1}_{k=0},\ k+1).$$

F_1 和 F_2 的公式由相同的返回计数得到：对于颜色 1，只有当第一步将 k 从 -1 变为 0 时，才会出现例外的第 1 层分支；对于颜色 2，只有当起始点具有 $k=0$时，才会出现例外分支。

现在假设 m 为奇数，因此 $\lambda=(-2)^{-1}$ 在 $\mathbb{Z}_m$中存在。 ψ_0,ψ_1,ψ_2 的线性部分的行列式分别为 $-1,-1,-\lambda^2$，因此这三个映射都是 $\mathbb{Z}_m^2$上的仿射双射。直接计算可得

$$\psi_0(F_0(i,k))=(k+1,\ i+2k+\mathbf{1}_{k=0})=O(\psi_0(i,k)),$$
$$\psi_1(F_1(i,k))=(k+2,\ i+\mathbf{1}_{k=-1})=O(\psi_1(i,k)),$$

and

$$\psi_2(F_2(i,k))=\big(\lambda(k-2),\ \lambda(i+k-2\mathbf{1}_{k=0})\big)=\big(\lambda k+1,\ \lambda(i+k)+\mathbf{1}_{k=0}\big)=O(\psi_2(i,k)).$$

因此，每个 F_c 都与标准里程表变换仿射共轭。 □

定理 4 (奇数情形)。 若 m 为奇数，则命题 *1* 中的着色将 $D_3(m)$的弧集分解为三个有向哈密顿圈。

证明。 由命题 2 和引理 5，每个回归映射 F_c 都是 m^2上的一个单 P_0循环。引理 3进而将这些回归映射分别提升为 V上的有向哈密顿圈。由于定理 3 已经给出了合法着色，三个颜色类构成一个哈密顿分解。 □

命题 3 (偶数2 号颜色失效 m)。 设 $m\geq 4$ 为偶数，且令 $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ 为命题 *1*中的仿射着色。则 f_0 和 f_1 是哈密顿圈，而 f_2 恰好分解为$m+2$ 个有向圈。

注 3。 用回归映射语言来看，缺陷如今一目了然。颜色0 和1保留了本原时钟，但颜色2 失去了它，因为更新 $k\mapsto k-2$ 会先将 $\mathbb{Z}_m$ 拆分为两个奇偶类，之后任何进位都无法将它们重新连接起来。因此，偶数情形的构造将只修改驱动这个时钟的低层方向，目标是在不破坏另外两种颜色的前提下，恢复本原进位机制。

命题的证明 *3*。 对于 f_0 和 f_1 ，其公式与奇数情形相同，因此这两种颜色仍然是哈密顿的。对于 f_2，回归映射为

$$F_2(i,k)=(i+2-2\mathbf{1}_{k=0},\ k-2).$$

由于 m 为偶数，更新 $k\mapsto k-2$ 保持 k的奇偶性，因此 P_0 拆分为奇数-k 半部和偶数-k 半部。

在奇数-k 半部中，第二坐标以周期 $m/2$ 遍历所有奇数剩余类，且永远不会取到 0。因此，在一个完整的 k- 循环中，第一坐标增加 $2\cdot(m/2) = m \equiv 0$，所以其中每个轨道的长度都是 $m/2$。由于奇数 -k 半部的大小为 $m^2/2$，它贡献

$$\frac{m^2/2}{m/2} = m$$

循环。

在偶数-k 半部中，第二坐标的周期仍为 $m/2$，但现在每个这样的周期中恰好经过 0 一次。因此，在一个完整的 k-循环内，i的净变化为

$$2\left(\frac{m}{2} - 1\right) = m - 2 \equiv -2 \pmod{m}.$$

因此，经过 $m/2$ 步后的诱导返回映射是在 $\mathbb{Z}_m$上的平移，其循环数恰为 gcd(m,2) =2。由此，偶数-k 半部贡献 2 个循环。

总之，f_2 分解为 $m + 2$ 个有向圈。 □

4 偶数 m：用路线 E 修复时钟

奇数构造展示了最终图景应有的样子：消除层漂移后，动力学应归结为一个本原时钟及其进位。当 m 为偶数时，推论 1 排除了任何从典范着色出发的 Kempe 变换推导。因而，偶数情形是一个直接的设计问题。我们构造一种低层方向赋值——路线 E，其返回映射是同一里程表机制的有限缺陷扰动，而剩余缺陷则可通过再进行一次首次返回约化，整理到车道横截面上。

第一步是抽象地分离时钟与进位判据。在 $P_0 \cong(\mathbb{Z}_m)^2$，上，形如

$$(i, k) \longmapsto (i + \alpha(k),\ k + d)$$

的回归映射包含两部分数据：时钟步长 d 和进位轮廓 α。如果时钟是本原的，且总进位也是本原的，那么整个映射就是一个单循环。这正是路线 E 旨在恢复的结构性目标。

引理6（时钟与进位判据）。固定 $m \geq 1$，取步长 $d \in \mathbb{Z}_m$，满足 $\gcd(d, m) = 1$，并取函数 $\alpha : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$。定义

$$F(i, k) := (i + \alpha(k),\ k + d).$$

那么 F 是一个置换，并且

$$F^m(i, k) = (i + \Delta,\ k), \qquad \Delta := \sum_{t\in\mathbb{Z}_m} \alpha(t).$$

因此，每个 个 F 的轨道长度为 $m^2/\gcd(\Delta, m)$，所以 F 是一个单 m^2-循环，当且仅当 $\gcd(\Delta, m) = 1$.

证明。由于 d 是单位元，$k \mapsto k + d$ 是一个 m-循环，且 F 是双射，其逆映射为 $(i,\ k) \mapsto (i - \alpha(k - d)\ k - d)$。迭代可得

$$F^t(i, k) = \Big(i + \sum_{r=0}^{t-1} \alpha(k + rd),\ k + td\Big).$$

在 $t = m$ 第二坐标返回到 k，且总和遍历 $\mathbb{Z}_m$的所有剩余类，从而得到 Δ。轨道长度由第一坐标上平移 Δ的阶决定。 □

对于仿射奇数构造，引理 6 只是用线性形式重新表述里程表的过程：第二坐标充当时钟，第一坐标累积进位。当 m 为偶数时，颜色 2 失效的确切原因是时钟步长 -2 不是单位元。因此，问题不在于盲目寻找另一种着色，而在于修补低层，直到本原时钟和本原总进位重新出现，同时保持缺陷集有限且在几何上明确。

符号乘积障碍表明，在偶模数下，从典范着色出发的 Kempe 推导无法做到这一点。因此，我们引入路线 E 在低层 $S \in \{0,1,2\}$上的方向指派，并让所有更高层保持典范。

对于 $v=(i,j,k) \in V$，记 $S(v)=i+j+k$(模 m)。方向三元组 $(d_0,d_1,d_2) \in \{0,1,2\}^3$表示颜色 c 使用弧 $v \mapsto v+e_{d_c}$。在此阶段，我们仅按定义1的含义指定方向指派；关联映射是置换、因而构成着色这一事实，将在定理 5 中证明。

定义 5 (路线 E 第0 层缺陷族)。 设 $m \geq 6$ 为偶数。在层 $\{S=0\}$ 上定义以下仿射缺陷族；下标记录了该层所指派的方向三元组。

情形 ***I:*** $m \equiv 0,\ 2 \pmod 6$。

$$
\begin{aligned}
X_{102} &:= \{(0,0,0)\} \cup \{(i,1,m-1-i) : 1 \leq i \leq m-3\} \cup \{(m-1,2,m-1)\},\\
X_{021} &:= \{(0,1,m-1)\} \cup \{(i,m-i,0) : 1 \leq i \leq m-3\} \cup \{(m-1,0,1)\},\\
X_{210} &:= \{(0,j,m-j) : 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{(1,0,m-1)\}.
\end{aligned}
$$

情形 ***II:*** $m \equiv 4 \pmod 6$。

$$
\begin{aligned}
Y_{102} &:= \{(0,0,0)\} \cup \{(i,1,m-1-i) : 2 \leq i \leq m-3\} \cup \{(m-1,2,m-1)\},\\
Y_{021} &:= \{(0,1,m-1)\} \cup \{(i,m-i,0) : 2 \leq i \leq m-3\} \cup \{(m-1,0,1)\},\\
Y_{210} &:= \{(0,j,m-j) : 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{(1,0,m-1)\}\\
&\qquad \cup \{(1,j,m-1-j) : 2 \leq j \leq m-2\} \cup \{(2,0,m-2),(2,m-1,m-1)\}.
\end{aligned}
$$

定义 6 (显式路线 E 方向指派)。 设 $m \geq 6$ 为偶数。定义方向三元组$\delta(v)=(d_0(v)\ d_1(v)\ d_2(v))$ 如下。逐层结构总结如下；正式规则见后续段落。

层	*rule*	复杂度
$S \geq 3$	典范 $(0,\ 1,\ 2)$	*none*
$S=2$	两个分支，按 $j=0$ 与 $j \neq 0$拆分	2 个三元组
$S=1$	两个分支，按 $i=0$ 与 $i \neq 0$拆分	2 个三元组
$S=0$	六个分支，取决于 m模 6	≤ 6 个三元组

设计原则如下。各层 $S \geq 3$ 保留规范三元组，因此作用于 P_0上的回归映射将它们的贡献视为统一平移。层1 和2各自引入一个简单分支：它们检验前一步之后某个单一坐标是否为零，若是，则交换两个方向。层0 包含非默认缺陷框架。在情形 I 中，该框架恰好是定义5中的族数据；当 $m \equiv 4$ (模 6)时， Y_{210} 扩展提供了情形 II 修复族。该修复族改变了颜色1 和0的内部高度排序，打破主要几何结构中持续存在的剩余类-3障碍，并且在所得的算术族块上仅留下一个有限拼接问题。

层 $S \notin \{0,1,2\}$。 使用规范三元组 $(d_0,d_1,d_2)=(0,1,2)$。

层 $S=1$。使用

$$(d_0,d_1,d_2)=\begin{cases}(1,0,2), & i=0,\\ (2,0,1), & i\neq 0.\end{cases}$$

第 $S=2$ **层**。使用

$$(d_0,d_1,d_2)=\begin{cases}(2,1,0), & j=0,\\ (0,1,2), & j\neq 0.\end{cases}$$

第 $S=0$ **层，情形** $m\equiv 0$，2（模 6）。使用

$$(d_0,d_1,d_2)=\begin{cases}(1,0,2), & v\in X_{102},\\ (0,2,1), & v\in X_{021},\\ (2,1,0), & v\in X_{210},\\ (0,1,2), & v=(m-2,1,1),\\ (2,0,1), & v=(m-2,2,0),\\ (1,2,0), & otherwise.\end{cases}$$

其中，X_{102}、X_{021}、X_{210} 是定义 5中的情形 *I* 第 *0* 层缺陷族。

第 $S=0$ **层，情形** $m\equiv 4$（模 6）。使用

$$(d_0,d_1,d_2)=\begin{cases}(1,0,2), & v\in Y_{102},\\ (0,2,1), & v\in Y_{021},\\ (2,1,0), & v\in Y_{210},\\ (0,1,2), & v\in\{(1,1,m-2),(m-2,1,1)\},\\ (2,0,1), & v\in\{(1,m-1,0),(m-2,2,0)\},\\ (1,2,0), & otherwise.\end{cases}$$

其中 Y_{102}、Y_{021}、Y_{210} 是定义 5中的情形 *II* 第 *0* 层缺陷族。至此定义完毕：令集合 $f_c(v)=v+e_{d_c}(v)$；这些是相关的颜色映射，其在 P_0上的 m 步行为将在下文分析。

注 *4*（第 *0* 层族的几何概述）。默认的第 *0* 层三元组为 *(1, 2, 0)*；具名族是默认值被覆盖时出现的狭窄仿射轨迹。在情形 *I* 中，X_{102}、X_{021}、X_{210}除端点修正外，分别是 P_0 内的三条直线 $j=1$、$k=0$ 和 $i=0$。因此，主要几何结构由三条一维缺陷轨迹构成，周围则是均匀背景。在情形 *II* 中，前两条轨迹在 $i=1$ 附近缩短，而第三条轨迹则通过相邻的仿射直线 $i=1$ 及两个边界点扩展。我们将第三条轨迹的这种扩展称为情形 *II* 修复族。这是情形 *II* 中唯一新增的第 *0* 层要素，后续章节将说明，它改变的是内部返回动力学，而不仅仅是修补边界点。将 P_0 在附录 *B* 中用 *(i, k)* 参数化后，这些轨迹就变为集合 A、B、C 以及孤立点 D、E。

引理 7（第 0 层-0 划分）。在每个奇偶类（$m\equiv 0$、2（模 6）和 $m\equiv 4$（模 6））中，所列出的特殊集合（X_{102}、X_{021}、X_{210} 或 Y_{102}、Y_{021}、Y_{210}）、孤立异常顶点和默认分支两两不相交，并共同构成层 $\{S=0\}$的划分。因此，定义 *6*为 $D_3(m)$ 中的每个顶点恰好指定了一个方向三元组。

证明。由每条第 0 层规则末尾的“否则”子句可立即得到完备性，因此只需检查不相交性。在情形 I 中，除去端点修正后，三个族分别位于 $j=1$、$k=0$ 和 $i=0$ 这三条仿射直线上，并且都包含于 P_0 中。这三条直线在 P_0 中可能的两两交点为 $(0,1,m-1)$、$(1,0,m-1)$ 和 $(m-1,1,0)$。按照构造，第一个点仅属于 X_{021}，第二个点仅属于 X_{210}，第三个点不属于 X_{102}、X_{021} 和 X_{210} 中的任何一个。其余列出的异常顶点 $(0,0,0)$、$(m-1,2,m-1)$、$(m-1,0,1)$、$(m-2,1,1)$ 和 $(m-2,2,0)$，根据坐标范围直接可见均不在其他特殊族中。在情形 II 中，同样的端点约定将 $Y_{102}\subseteq\{j=1\}$、$Y_{021}\subseteq\{k=0\}$ 以及 $Y_{210}\subseteq\{i=0\}$ 的原始部分分隔开来，而新增的情形 II 修复族位于 $i=1$ 上，并包含两个边界点 $(2,0,m-2)$ 和 $(2,m-1,m-1)$。范围 $2\le i\le m-3$ 和 $2\le j\le m-2$ 排除了该新增 $i=1$ 轨迹与 Y_{102} 或 Y_{021} 发生重叠的可能性，两个新增边界点也不在 $Y_{102}\cup Y_{021}$ 中。因此，在两个奇偶类中，所列出的特殊集合均两两不相交。 □

构造一经陈述，便可纯粹通过组合方法加以验证。

定义 7（停滞）。 停滞 是指回归映射偏离一般情形（均匀平移）分支的一步。

每条轨道上的停滞次数都有一个与 m 无关的上界（参见附录C中的轨道轨迹）。

下文将建立回归映射框架（§4.1），完整证明颜色2 （§4.3），并整合出主要的偶数情形定理。例3 展示了如何将完整的工具体系应用于最小的可行情形 $m=6$。

4.1 RouteE 返回映射框架

附录包含详细表格以及更长的逐情形核算过程，但偶数情形证明的逻辑机制可以在正文中阐述。从概念上说，论证分为四个步骤：

(i) 低层上的主要几何结构；

(ii) 该几何结构中的一个精确障碍；

(iii) 一段简短的不可能性论证，说明仅靠剩余的情形 II 边界修正并不可行；

(iv) 实际修复后的路线 E 构造，随后进行有限拼接。

第一个输入是从定义 6 中提取的三步转换器。

命题 4（三步转导器约化）。 参数化

$$P_0=\{(i,j,k)\in\mathbb{Z}_m^3 : i+j+k\equiv 0\}$$

by

$$v(i,k):=(i,-i-k,k),\qquad (i,k)\in\mathbb{Z}_m^2.$$

对于颜色 $c\in\{0,1,2\}$ 和起始点 $v(i,k)\in P_0$，将层 $S=0$、1、2 上的前三个颜色-c 方向记作

$$\omega_c(i,k)=(a_c,b_c,c_c)\in\{0,1,2\}^3.$$

那么返回映射满足

$$R_0(i,k)=\big(i+N_0(\omega_0)-3,\ k+N_2(\omega_0)\big),$$

$$R_1(i,k) = \big(i + N_0(\omega_1),\ k + N_2(\omega_1)\big),$$
$$R_2(i,k) = \big(i + N_0(\omega_2),\ k + N_2(\omega_2) - 3\big),$$

其中， N_r（ω）统计词 ω 中方向 r 出现的次数。此外：

(i) 对于颜色 1，总有 $b_1 = 0$ 和 $c_1 = 1$；

(ii) 对于颜色0 和 2，层1的方向仅取决于步骤后的坐标是否等于 0，而层2 的方向仅取决于步骤后的坐标是否等于0。

附录 B 因此将推导 R_0、R_1、R_2 的分段公式简化为在层 0 划分上的有限表格计算。

证明。从 P_0出发经过前三步后，轨道位于层 $S = 3$。所有后续层都是典范的，因此直到下一次返回 P_0 之前，映射沿方向 c 恰好再走 $m - 3$ 步。这便得到了上面的位移公式。

现在将 $j = -i - k$ 写在 P_0上。步骤 1 之后， i坐标为

$$i_1 = i + \mathbf{1}_{a_c=0}.$$

根据定义 6，在层 $S = 1$ 上，颜色 1 的方向总是 0；颜色 0 的方向在 $i_1 = 0$时为 1 ， 2 否则；颜色 2 的方向在 $i_1 = 0$ 时为 2 ， 1 否则。因此 (i) 部分显然成立；对于颜色 0 和 2 ，第二个字母 b_c 由单一检验 $i_1 = 0$确定。

步骤 2 后， j-坐标为

$$j_2 = j + \mathbf{1}_{a_c=1} + \mathbf{1}_{b_c=1}.$$

再次根据定义 6，在第 $S = 2$ 层上，颜色-0 方向为 2 ，当 $j_2 = 0$ 时；否则为 0 。而颜色-2 方向为 0 ，当 $j_2 = 0$ 时；否则为 2 。因此，对于颜色 0 和 2 ，第三个字母 c_c 由单一检验 $j_2 = 0$ 决定。附录中的表格只是计算了这些检验在由层- P_0 0规则所诱导的有限划分上的取值。 □

引理 8 (一般三步词和主体向量**)。** 考虑路线 E 方向指派。设起始点 $(i,k) \in P_0 \cong \mathbb{Z}_m^2$ 具有基准层-0 三元组 (1,2, 0) ，并且沿轨道的前两个步骤中，层1 上的检验 $i_1 = 0$ 和层2 上的检验 $j_2 = 0$ 均未触发。那么，三个低层词均为常量：

$$\omega_0(i,k) = 120, \qquad \omega_1(i,k) = 201, \qquad \omega_2(i,k) = 012.$$

因此，返回映射遵循主体分支

$$R_0(i,k) = (i-2, k+1), \qquad R_1(i,k) = (i+1, k+1), \qquad R_2(i,k) = (i+1, k-2).$$

证明。第 0 层基准三元组 (1, 2, 0) 表示在第 0 层，颜色 0、1、2 分别使用方向 1、2、0。若未触发步骤 1 后的测试 $i_1 = 0$ ，则第 1 层三元组为一般情形下的三元组 (2, 0, 1)。若未触发步骤 2 后的测试 $j_2 = 0$ ，则第 2 层三元组为一般情形下的三元组 (0, 1, 2)。从这三个一般情形下的三元组中读出颜色-c 字母，可得词 120、201、012。位移公式现由命题 4 立即得出。 □

备注 5 （缺陷集的结构）。 引理 *8* 说明了构造的主体部分：几乎处处，低层词都是常量，因此回归映射是由展示的三个主体向量给出的平移。非一般情形只会由以下三种原因造成：

（a）起始点已经位于某条特殊的第0层缺陷直线或端点修正上；

(b) 第一步之后，测试 $i_1 = 0$ 会在第1层触发；

(c) 第二步之后，测试 $j_2 = 0$ 会在第2层触发。

在 (i<*style id='6'*, k) 坐标中，关于 P_0的每个条件都是仿射的，这就是引理 *11* 中的缺陷支撑由仿射直线和有限个孤立边界点构成的原因。这些边界点例外经过精心设置，用于在有限个桥接顶点处切分较长的算术游程——即共享同一整体行程的连续车道的极大游程——并记录由此得到的有序算术族块上的有限拼接置换。具体而言，一旦得知首次返回公式，诱导的车道映射的单循环问题便归结为该有限拼接置换的循环结构。然而，在 $m \equiv 4$ (模 6) 下，发生变化的不仅是最后的拼接步骤。在将情形 I 的第 0 层族扩展到所有偶数 m 后得到的自然主要几何结构中，颜色0 和 2 已经闭合，而颜色 1 仍受困于三条模 3 同余线束中。情形 II 修复族在最终拼接之前改变颜色1 和 0 的内部高度排序；下文的命题 *5*和 *6* 将精确说明这种必要性。

下一个引理是三个颜色证明中都会用到的计数引理。

引理 9 (首次返回计数)。 设 $F\colon\ X \to X$ 是有限集 $|X| = N$上的一个映射，且$L \subseteq X$。假设对于每个 $x \in L$ ，首次返回时间

$$\rho(x) = \min\{t \geq 1 : F^t(x) \in L\}$$

存在，并记

$$T(x) = F^{\rho(x)}(x) \in L$$

为诱导首次返回映射。若

(i) T 在 L上是一个单独的 $|L|$-循环，且

(ii) $\sum_{x\in L} \rho(x) = N$,

那么 F 是 X上的单个 N-循环。

注6。 引理 *9*是第二次应用返回映射原理。在 P_0 上，状态空间的大小已从 m^3 降至 m^2，但主体部分的动力学仍几乎是纯粹的时钟运动。因此，自然的下一步是再次截取显式的车道横截面，并仅研究诱导进位。至此，偶数情形的证明便化为一维问题。

证明。取 $x_0 \in L$ 。由于 T 是 L上的一个循环，沿着 x_0 的 F-轨道所经过的返回点是 e

$$x_0,\ T(x_0),\ T^2(x_0),\ \ldots,\ T^{|L|-1}(x_0),\ x_0,$$

并且在序列闭合之前， L 中的每个点都恰好出现一次。

Set

$$N_0 := \sum_{r=0}^{|L|-1} \rho(T^r(x_0)).$$

根据构造，经过 N_0 次 F 后，会返回 x_0。因此， x_0 的 F-轨道是一个长度为 N_0 的循环。根据假设，

$$N_0 = \sum_{x\in L} \rho(x) = N.$$

因此，一个 F-循环的大小已经是 $N = |X|$，所以它包含 X的所有点。因此， F 是一个单独的N-循环。 □

现在，对于每种颜色，我们选择适配回归映射主体分支的坐标，也就是说，该分支在有界缺陷集之外应用。在这些坐标中，一般步（也称为主体部分步，并在轨道展示中记作 G ）均匀地推进一个坐标——时钟——同时保持另一个坐标——车道——不变。这仍然是里程表图景：时钟每次都会转动，而车道只在罕见的非一般事件中变化。这些非一般事件就是上文引入的停滞。发生停滞时，车道会移动一个有界量，而时钟可能会获得或失去一个有界修正量。在下面的轨道展示中，主体部分 $\longrightarrow$ 或主体部分 $\xrightarrow{t}$ 表示一个或 t个连续的一般步，而 $\xrightarrow{+1}$ 或 $\xrightarrow{+2}$表示使车道上升 1 或 2 的停滞。

由于每条轨道上的停滞次数独立于 m有界， P_0 上的二维动力学可化为显式截面上的一维首次回归映射。在这些截面上，大多数车道遵循同一条算术规则，只有 $O(1)$条边界车道需要特殊处理。

引理 10 （主体坐标揭示时钟）。 定义线性映射 $\Phi_c:\ P_0 \cong \mathbb{Z}_m^2 \to \mathbb{Z}_m^2$ 为

$$\Phi_1(i,k) = (i-k,\ k),$$

$$\Phi_2(i,k) = (2i+k,\ -i-k),$$

$$\Phi_0(i,k) = (i+2k,\ k).$$

Let

$$b_1 = (1,1), \qquad b_2 = (1,-2), \qquad b_0 = (-2,1).$$

那么每个 Φ_c 在 $\mathbb{Z}_m$上都是可逆的，并且在相应的（u， t）坐标中，主体移动$z \mapsto z + b_c$ 变为

$$(u,t) \mapsto (u, t+1).$$

证明。 Φ_1、 Φ_2、 Φ_0 的矩阵为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

它们的行列式均为 1， -1， 1，因此每个都是 $\mathbb{Z}_m$ 中的单位元，并且每个映射都是可逆的。直接相乘得到

$$M_1 b_1 = (0,1), \qquad M_2 b_2 = (0,1), \qquad M_0 b_0 = (0,1),$$

这正是所要证明的结论。 □

引理11 （路线 E 的有限缺陷里程表标准形）。 对于每种颜色 $c \in \{0,\ 1,\ 2\}$，令

$$\widehat{R}_c := \Phi_c \circ R_c \circ \Phi_c^{-1}.$$

那么存在一个缺陷集 $E_c \subseteq \mathbb{Z}_m^2$，它包含于有限条仿射直线与有限多个孤立点的并集中，使得

$$\widehat{R}_c(u,t) = (u, t+1) \qquad \textit{for } (u,t) \notin E_c.$$

更确切地说：

(i) 对于颜色1，每个缺陷步都是以下之一

$$(u,t)\mapsto(u+1,t),\qquad (u,t)\mapsto(u+2,t),$$

且缺陷集包含于

$$u+t=0,\qquad u+2t=m-1,$$

且当 $m\equiv 4$ (模 6) 时，也有

$$u+t=1,$$

以及有限个孤立点。

(ii) 对于颜色 2，每个缺陷步都是以下之一

$$(u,t)\mapsto(u-1,t+2),\quad (u,t)\mapsto(u+1,t+1),\quad (u,t)\mapsto(u-1,t+1),$$

$$(u,t)\mapsto(u-2,t+2),\quad (u,t)\mapsto(u+1,t),$$

且缺陷集包含于

$$t=1,\qquad t=m-1,\qquad u+2t=0,\qquad u+t=m-1,$$

以及有限个孤立点。

(iii) 对于颜色0，每个缺陷步都是以下之一

$$(u,t)\mapsto(u-2,t),\quad (u,t)\mapsto(u+3,t+3),\quad (u,t)\mapsto(u+2,t+2),$$

$$(u,t)\mapsto(u-1,t),\quad (u,t)\mapsto(u+1,t+2),\quad (u,t)\mapsto(u+1,t+1),$$

且缺陷集包含于

$$t=0,\qquad u=t+1,$$

并且，当 $m\equiv 4$ (模 6) 时，还有

$$u=1+2t,$$

以及有限个孤立点。

证明。 我们直接根据 R_0、R_1、R_2 在附录 A中记录的分段公式计算。

对于颜色 1，一般分支为 $(i,\ k)\mapsto(i+1,\ k+1)$，而两个例外分支为 $(i,\ k)\mapsto(i+1,\ k)$ 和 $(i,\ k)\mapsto(i+2,\ k)$。在 $\Phi_1(i,\ k)=(u,\ t)=(i-k,\ k)$ 下，这些变为

$$(i+1,k+1)\mapsto(u,t+1),\qquad (i+1,k)\mapsto(u+1,t),\qquad (i+2,k)\mapsto(u+2,t).$$

附录中的支撑条件A 为 $i=0,\ i=1$，以及 $i+k\equiv m-1$，再加上有限多个例外边界点。这些恰好就是仿射条件

$$i=0\Leftarrow\!\Rightarrow u+t=0,\qquad i=1\iff u+t=1,\qquad i+k\equiv m-1\iff u+2t=m-1.$$

这就证明了 (i)。

对于颜色2，一般分支为$(i,\ k)\mapsto(i+1,\ k-2)$。附录A 中列出的例外分支是

$$(i+1,k-3),\qquad (i+2,k-3),\qquad (i,k-1),\qquad (i,k-2),\qquad (i+1,k-1).$$

在 $\Phi_2(i,\ k) = (u,\ t) = (2i+k,\ -i-k)$ 的条件下，可以得到

$$(i+1,k-2) \mapsto (u,t+1),$$

$$(i+1,k-3) \mapsto (u-1,t+2), \qquad (i+2,k-3) \mapsto (u+1,t+1),$$

$$(i,k-1) \mapsto (u-1,t+1), \qquad (i,k-2) \mapsto (u-2,t+2), \qquad (i+1,k-1) \mapsto (u+1,t).$$

附录 A 中的支撑条件为 $i+k \equiv m-1$，$i+k \equiv 1$，$k=0$，以及 $i = m-1$，再加上有限多个例外点。这些变为

$$i+k \equiv m-1 \iff t = 1,$$

$$i+k \equiv 1 \iff t = m-1,$$

$$k = 0 \iff u+2t = 0,$$

$$i = m-1 \iff u+t = m-1.$$

这就证明了 (ii)。

对于颜色 0，一般分支为$(i,\ k) \mapsto (i-2,\ k+1)$。附录A 中列出的例外分支为

$$(i-2,k), \qquad (i-3,k+3), \qquad (i-2,k+2), \qquad (i-1,k), \qquad (i-3,k+2), \qquad (i-1,k+1).$$

在 $\Phi_0(i,\ k) = (u,\ t) = (i+2k,\ k)$ 下，这些变为

$$(i-2,k+1) \mapsto (u,t+1),$$

$$(i-2,k) \mapsto (u-2,t), \qquad (i-3,k+3) \mapsto (u+3,t+3), \qquad (i-2,k+2) \mapsto (u+2,t+2),$$

$$(i-1,k) \mapsto (u-1,t), \qquad (i-3,k+2) \mapsto (u+1,t+2), \qquad (i-1,k+1) \mapsto (u+1,t+1).$$

附录 A 中的支撑条件为 $k=0$，$i+k \equiv 1$，以及在情形 II 中 $i=1$，再加上有限多个例外点。这些变为

$$k = 0 \iff t = 0,$$

$$i+k \equiv 1 \iff u = t+1,$$

$$i = 1 \iff u = 1+2t.$$

这就证明了 (iii)。 □

注 7 （案例 I / II 划分的由来）。 下文逐颜色证明中反复出现的情形 I（$m \equiv 0,\ 2 \pmod 6$）与情形 II（$m \equiv 4 \pmod 6$）之分，源于此处。当$m \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ 时，主缺陷支撑已决定首次返回动力学。当 $m \equiv 4 \pmod 6$ 时，情形 II 中额外的仿射直线会出现——对于颜色 1，是直线 $u+t=1$；对于颜色 0，是直线 $u = 1+2t$——它们的作用不只是增加一些端点修正。它们会改变横截面上的内部缺陷高度排序，从而将主要的颜色 1 漂移$x \mapsto x+3$ 变为修复后的 $+2/+6$ 模式，并给出颜色 0 的统一 $+4$ 内部漂移；随后，颜色 0 的 $m \bmod 12$ 拆分，则只是对同一余数 4 拼接图景进行循环重排。

引理 12 (缺陷行程归约)。 设 $F\colon \mathbb{Z}_m^2 \to \mathbb{Z}_m^2$ 是以下形式的映射

$$F(z) = \begin{cases} G(z) := (u, t+1), & z \notin E, \\ D_\alpha(z) := (u + \Delta_\alpha,\ t + \tau_\alpha), & z \in E_\alpha, \end{cases}$$

其中， $E = \bigsqcup_\alpha E_\alpha$ 是缺陷分量的有限不交并，且每个 D_α 都有固定增量$(\Delta_\alpha, \tau_\alpha)$。令

$$L := \{(u, 0) : u \in \mathbb{Z}_m\}.$$

假设 L 中的每个点都会首次回归到 L。那么，对于每个起点$(u,0) \in L$，首次回归前的轨道段都有唯一分解

$$G^{a_0} D_{\alpha_1} G^{a_1} D_{\alpha_2} \cdots D_{\alpha_r} G^{a_r},$$

其中，每个 $a_j \geq 0$ 以及每个一般块中的点都位于 E之外。若

$$F^{\rho(u)}(u, 0) = (T(u), 0),$$

then

$$T(u) = u + \sum_{j=1}^{r} \Delta_{\alpha_j} \pmod m, \qquad \rho(u) = \sum_{j=0}^{r} a_j + r.$$

证明。 由于 F 是确定性的，一旦轨道上的某个点位于 E 之外，它就必定沿一般分支 G 前进，直到返回 L 或首次遇到某个缺陷分量。从$(u,0)$出发，令 a_0 为满足以下条件的最大整数:

$$(u, 0),\ G(u, 0),\ \ldots,\ G^{a_0 - 1}(u, 0)$$

它们都位于 E之外。若 $G^{a_0}(u,0) \in L$，则不存在缺陷步，该结论显然成立。否则， $G^{a_0}(u,0)$位于唯一的缺陷分量 E_{α_1}中，因此下一步必定是 D_{α_1}。递归地重复同样的论证，即可得到上述分解；由于不存在分支选择，分解的唯一性也随之成立。

一般分支 G 保持 u 坐标不变，而每个缺陷步 D_{α_j} 都会使 u 恰好变化 Δ_{α_j}。因此，从 $(u, 0)$ 到 $(T(u), 0)$ 的净通道变化为

$$\sum_{j=1}^{r} \Delta_{\alpha_j},$$

这就证明了 $T(u)$ 的公式。总步数等于一般步数加上缺陷步数，因此

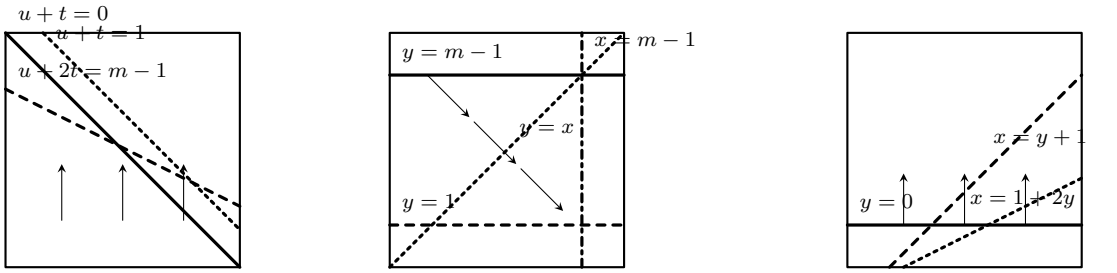
$$\rho(u) = \sum_{j=0}^{r} a_j + r.$$

□

结合引理 11 与引理 12 可将每个路线 E 循环证明归结为截面 $L = \{(u,0) : u \in \mathbb{Z}_m\}$上的一维首次返回问题：列出主体射线从 $(u,0)$ 出发至首次返回前遇到的缺陷分量，读出车道增量和返回时间，并检查诱导映射 T 是一个单一的 m-循环，且 $\sum_u \rho(u) = m^2$。由于路线 E 的缺陷支撑集是仿射的，有序缺陷行程在起始通道的长算术族上保持不变；这些算术族块将在命题 14 中进行拼接（形式块分解见 §C ）。在情形 II 中，情形 II 修复族改变的是这种高度排序，而非仅仅插入少数端点例外。

颜色	主体坐标（u， t）	主体分支	缺陷支撑 / 横截面
1	$(i-k,\ \ k)$	$(u,\ t)\ \mapsto\ (u,\ t+1)$	在 $u+t=0$、 $u+2t=m-1$ 上的缺陷，以及在情形 II 中还有 $u+t=1$ 上的缺陷；横截面 $t=0$
2	$(2i+k,\ \ -i-k)$	$(u,t)\mapsto(u,t+1)$	在 $t=1$、 $t=m-1$、 $u+2t=0$、 $u+t=m-1$ 上的缺陷；横截面 $t=0$
0	$(i+2k,\ \ k)$	$(u,t)\mapsto(u,t+1)$	在 $t=0$、 $u=t+1$ 上有缺陷，而在情形 II 中也在 $u=1+2t$ 上有缺陷；横截面 $t=0$

表 2：路线 E 概览：适配的主体坐标、一般分支，以及三种颜色的仿射缺陷支撑集，推导自引理 10 和 11。正文对颜色 2 进行了详细说明，而附录则计算了所列截面上其余依赖模 6 的首次返回数据。



$(u,\ \ t)$ 坐标中的颜色 1　　$(x,\ \ y)=(i,\ \ i+k)$ 中的颜色 2　　$(x,\ \ y)=(i+2k,\ \ k)$ 中的颜色 0

图 1：示意图展示了 P_0上的缺陷几何。左右两幅图采用引理 10中的主体坐标；中间图（颜色 2）采用工作坐标系 $(x,y)=(i,\,i+k)$。在每幅图中，箭头表示一般情形下的主体分支，实线、虚线和点线表示引理 11中的仿射缺陷族。孤立的边界点修正位于这些直线上，并充当备注5中所述的拼接点。

备注 *8*（工作坐标阅读指南）。颜色 *1* 和 *0* 在主体坐标 (u,t) 中进行分析，其中 t 是返回时钟， u 是通道标签；横截面为 $t=0$。颜色 *2* 使用单独的坐标系 $(x,y)=(i,\,i+k)$，表达更简洁；其中主体移动是原始对角线 $(x,y)\mapsto(x+1,y-1)$，横截面为 $y=0$。表 *2* 和图 *1* 是这些坐标选取的固定参考。

备注 9 (R_2 是普遍的)。 颜色 2 的返回映射公式对所有偶数 $m\geq 6$ 都相同，与 m 模 6 无关；只有颜色 0 和 1 需要进行案例 *I* / *II* 划分。因此，正文先完整推导颜色 2 ，随后附录再讨论真正依赖模 6 的颜色。

4.2 主几何、障碍与路线 E 修复

现在我们来明确案例 II 族在概念上的作用。自然的基线模型保持定义 $S\geq 1$ 6 中的层不变，并对所有偶数 m，都使用情形 I 的第 0 层族。

定义 8 （主要路线 E 几何结构）。 设 $m\geq 6$ 为偶数。 主要路线 E 几何结构 是由定义 *6* 中的方向指派得到的：保持层 $S\geq 1$ 上的规则不变，并且在层 $S=0$上使用情形 *I* 族 X_{102}、 X_{021}、 X_{210} ，而不论 m 模 6。因此，主要几何结构移除了情形 *II* 修复族，但保留了相同的层-1 和层-2转换器。

命题 5（主要几何结构与第一个障碍）。 设 $m = 6q + 4 \geq 10$，并令 T_c^{pri}表示主要路线 E 几何结构在与实际路线 E 证明中相同的截面上的诱导车道映射。那么：

(i) 颜色 2 与实际的 *Route E* 构造保持不变，仍然是哈密顿的；

(ii)颜色 0 具有与情形 I 相同的首次返回公式和相同的拼接顺序，因此仍然是哈密顿的；

(iii) 颜色 1 也具有情形 I 的首次返回公式

$$T_1^{\mathrm{pri}}(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ x + 3, & 1 \leq x \leq m - 4, \\ 1, & x = m - 3, \\ 0, & x = m - 2, \\ 3, & x = m - 1, \end{cases}$$

因此拆分为三个闭合循环

$$(0, 2, 5, 8, \ldots, m - 2), \qquad (1, 4, 7, 10, \ldots, m - 3), \qquad (3, 6, 9, 12, \ldots, m - 1).$$

特别地，当 $m \equiv 4$ (模 6) 时，主要几何结构中的第一个障碍出现在颜色 1 。

证明。 对于颜色 2，情形 II 修复族只改变层-0 和层-1 三元组中的颜色-0字母，绝不改变颜色-2 字母。因此，颜色-2 回归映射与命题7中的完全相同，推论 3的证明可逐字适用。

对于颜色0，命题12 的推导仅用到主要缺陷支撑 $t = 0$ 和$u = t + 1$，以及相关的边界修正。模同余假设 $m \equiv 0,\ 2 (\mathrm{mod}\ 6)$ 在此处之所以起作用，仅仅是因为实际的 Route E 构造在 $u = 1 + 2t$ 时会额外添加一条情形 II 修复直线 $m \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 6)$。由于主要几何结构对所有偶数$m$都省略了这条额外直线，因此相同的首次返回公式和返回时间和仍然成立，而推论7的证明表明颜色0是哈密顿的。

对于颜色 1，利用命题 10 进行相同的推理可知，主要几何结构具有所示的情形 I 公式。这里的一般规则为 $x \mapsto x + 3$，而终端值满足$T_{\mathrm{pri}\,1}(m - 3) = 1$, $T_1^{\mathrm{pri}}(m - 2) = 0$，以及 $T_1^{\mathrm{pri}}(m - 1) = 3$。因此，每个余数 3 分块都会闭合于自身，恰好得到所示的三个循环。因此，主要几何结构中的第一个真正障碍是当 $m \equiv 4$ (mod 6) 时颜色 1 的余数 3 闭合。 □

实际的情形 II 规则会恰好加入所需的情形 II 修复族，以改变该内部闭合。为说明这并非只是边界调整，我们保留完整的情形 II 框架，只删除情形 II 修复族本身。令

$$Y_{210}^{\mathrm{add}} := \{(1, j, m - 1 - j) : 2 \leq j \leq m - 2\} \cup \{(2, 0, m - 2), (2, m - 1, m - 1)\} \subseteq Y_{210},$$

并构造根据定义 6 在情形 II 中恢复默认三元组 (1，2，0) 于 $Y_{\mathrm{add}210}$后得到的辅助方向赋值，同时保持其他所有情形 II 的点不变。将其诱导的车道映射记为 $\widetilde{T}_c$。

命题 6（删除情形 II 修复族后已不再是单射）。假设 $m = 6q+4 \geq 10$。对于仅删除实际情形 *II* 规则中的 Y_{210}^{add} 后得到的辅助方向赋值，有

$$\widetilde{T}_1(1) = \widetilde{T}_1(m-1) = 3, \qquad \widetilde{T}_0(1) = \widetilde{T}_0(2) = 4.$$

特别是，T_1 和 T_0 都是非单射。因此，在实际的情形 *II* 框架中，情形 *II* 修复族执行了真正的整体修复，而其余边界修正无法做到这一点。

证明。对于颜色 1，在引理 10 给出的主体坐标 $\Phi_1(i,k) = (u,t) = (i-k,k)$ 中进行分析，因此一般分支为 $(u,t) \mapsto (u,t+1)$。删除变体移除了内部缺陷直线 $u+t=1$，但保留了其他情形 II 边界点。从通道 1 出发，保留的孤立点 $(u,t) = (1,0)$ 仍然带有 $+2$ 停滞，因此

$$(1,0) \longmapsto (3,0),$$

因此 $T_1(1) = 3$。从通道 $m-1$ 出发，第一步是一般情形，

$$(m-1,0) \xrightarrow{\text{bulk}} (m-1,1),$$

随后，主缺陷直线 $u+t=0$ 带来通常的 $+1$ 停滞，

$$(m-1,1) \longmapsto (0,1),$$

之后，轨道以一般情形的方式攀升至保留的边界点 $(0,m-1)$：

$$(0,1) \xrightarrow{\text{bulk}^{m-2}} (0,m-1).$$

在该处，保留的情形 II 边界修正会导致一次 $+2$停滞，

$$(0,m-1) \longmapsto (2,m-1),$$

随后是与 $(i,k) = (1,m-1)$ 对应的保留点，它会导致最后一次 $+1$ 停滞，

$$(2,m-1) \longmapsto (3,m-1) \xrightarrow{\text{bulk}} (3,0).$$

因此 $T_1(m-1) = 3$。所以 T_1 不是单射。

对于颜色 0，在主体坐标 $\Phi_0(i,k) = (u,t) = (i+2k,k)$ 中进行分析。这里，删除变体移除了内部的情形 II 直线 $u = 1+2t$，但保留了其余情形 II 边界点。从通道 1 出发，保留的孤立点 (1,0) 仍然承载着这次跳跃

$$(1,0) \longmapsto (3,2),$$

而主缺陷线 $u = t+1$ 随后给出

$$(3,2) \longmapsto (4,4).$$

返回前不会遇到其他缺陷，因此轨道一般会向上移动至 (4,0)，并且 $T_0(1) = 4$。从通道 2 出发，$t=0$ 上的普通基缺陷给出

$$(2,0) \longmapsto (3,1) \xrightarrow{\text{bulk}} (3,2) \longmapsto (4,4),$$

轨道再次一般情形下返回到 (4,0)。因此 $T_0(2) = 4$ 也成立。所以 T_0 不是单射。 □

例 2 ($m = 10$处的情形 II 修复）。在命题 5的主要几何结构中，颜色1道映射为

$$T_1^{\mathrm{pri}} = (0, 2, 5, 8)(1, 4, 7)(3, 6, 9),$$

因此，主模型拆分为三个模3 循环。根据命题11，在 $m = 10$ 处的实际路线 E 映射是单循环

$$0 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 1 \mapsto 3 \mapsto 9 \mapsto 7 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 8 \mapsto 0.$$

因此，情形 *II* 修复族所做的不只是重新连接端点：它将偶数车道上的内部漂移从主模型的 $+3$ 规则改为 $+2$，并将奇数车道上的内部漂移从 $+3$ 改为 $+6$，从而将三个模3 轨道交织成一个循环。

一个具有代表性的修复后轨道已出现在车道3上。在颜色1 主体坐标(u, t)中，有

$$(3,0) \xrightarrow{\text{bulk}^3} (3,3) \xrightarrow{+2} (5,3) \xrightarrow{\text{bulk}^2} (5,5) \xrightarrow{+1} (6,5)$$
$$\xrightarrow{+1} (7,5) \xrightarrow{\text{bulk}} (7,6) \xrightarrow{+2} (9,6) \xrightarrow{\text{bulk}^4} (9,0),$$

因此 $T_1(3) = 9$ 且 $\rho_1(3) = 14 = m + 4$。两个 $+2$ 停滞来自对角缺陷线，而两个连续的 $+1$ 停滞来自两条情形 *II* 垂直线 $u + t = 0$ 和 $u + t = 1$。

阅读情形 II 附录公式时应牢记这一视角：在长算术族上，有序缺陷高度是恒定的，因此新增直线 $u + t = 1$ 和$u = 1 + 2t$ 会改变内部位移，而命题14 则将闭合步骤化简为有限拼接置换。

例 3 （颜色 2 对应 $m = 6$）。我们用最小的可取偶数值 $m = 6$ 来说明回归映射机制。在 P_0 上的工作坐标系 $(x, y) = (i, i + k)$ 中，一般情形（主体部分）的步骤为G：$(x, y) \mapsto (x + 1, y - 1)$，横截面为 $L_2 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}_6\}$。

从车道 $x = 0$ 出发：

$$(0,0) \xrightarrow{E} (1,0).$$

这一步单独的缺陷步已经返回到 L_2，得到 $T_2(0) = 1$ 和 $\rho_2(0) = 1$。

从车道 $x = 1$ 出发，轨道在返回前穿过两条缺陷线 ：

$$(1,0) \xrightarrow{G} (2,5) \xrightarrow{C} (2,4) \xrightarrow{G} (3,3) \xrightarrow{D} (3,1) \xrightarrow{B} (5,0).$$

缺陷序列为 C （直线 $y = m-1$），然后是 D （对角线 $y = x$），接着是 B （直线 $y = 1$）。回归数据： $T_2(1) = 5$, $\rho_2(1) = 5$。

对于其余车道，同样的方法给出 $T_2(2) = 0$，其中 $\rho_2(2) = 12 = 2m$；对于 $x \in \{3, 4, 5\}$，则有$T_2(x) = x - 1$ 以及 $\rho_2(x) = 6 = m$。因此，首次回归映射 T_2 是一个6循环

$$0 \to 1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 0,$$

且返回时间和为 $1 + 5 + 12 + 6 + 6 + 6 = 36 = 6^2 = m^2$。引理 9现在推出 R_2 是 36-循环，作用于 P_0。

4.3 颜色-2回归映射

现在我们完整地进行颜色 2 的计算。这是最简洁的代表性情形，因为它的回归映射不依赖于 m 模 6。对于颜色 2，直接使用坐标 $(x, y) = (i, i + k)$ 进行计算较为方便，而不采用引理 10 中的主体坐标系；在此坐标系下，一般分支变为 $G\colon (x, y) \mapsto (x + 1, y - 1)$，缺陷线如图 1中央面板所示。

引理 13。在　　坐标$(x, y) = (i, i + k)$上，对于 P_0，相应的路线 E m 步映射为

$$R_2(x,y) = \begin{cases} (x+1, y-2), & (x,y) = (2,2), \\ (x+2, y-1), & y = 1,\ (x,y) \notin \{(1,1), (m-1,1)\}, \\ (x, y-1), & (y = m-1,\ x \neq m-1)\ \textit{or}\ (x,y) = (m-1, m-2), \\ (x, y-2), & (y = x,\ x \notin \{0, 2, m-1\})\ \textit{or}\ (x,y) = (m-1, 0), \\ (x+1, y), & (x = m-1,\ y \notin \{0, m-2\})\ \textit{or}\ (x,y) = (0,0), \\ (x+1, y-1), & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

所有运算均以 m为模。

证明。 将 $i = x$ 和 $k = y - x$ 代入 R_2 附录 A 中的闭式公式，并化简每个分支。所展示的六个变换恰好是原六个分支经过变换后的像。

□

对于下面的轨道轨迹，记

$$G(x, y) = (x + 1, y - 1)$$

引理 13的一般分支。其余五个显示的分支将按引理中列出的顺序称为A、 B、 C、 D、 E： A适用于孤立点 $(2,\ 2)$； B是直线 $y = 1$上的缺陷； C 是 $y = m - 1$上的缺陷； D 是 $y = x$上的缺陷； E 是$x = m - 1$上的缺陷。

横截面为

$$L_2 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}_m\}.$$

命题 7。 对于每个偶数 $m \geq 6$， L_2 上的首次回归映射为

$$T_2(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ m-1, & x = 1, \\ 0, & x = 2, \\ x-1, & 3 \leq x \leq m-1, \end{cases}$$

带有回归时间

$$\rho_2(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ m-1, & x = 1, \\ 2m, & x = 2, \\ m, & 3 \leq x \leq m-1. \end{cases}$$

证明。我们分别处理边界值 $x \in \{0,1,2,4,m-2,m-1\}$，然后给出一般情形下的奇数-$x$ 和偶数-x 公式。固定 $x \in \mathbb{Z}_m$，并从 $(x,0) \in L_2$开始。

情形 $x = 0$**.** 点 $(0,0)$ 是分支 E，因此

$$(0,0) \xrightarrow{E} (1,0).$$

因此 $T_2(0) = 1$ 且 $\rho_2(0) = 1$。

情形 $x = 1$**.** 轨道为

$$(1,0) \xrightarrow{G} (2,m-1) \xrightarrow{C} (2,m-2) \xrightarrow{G^{\frac{m}{2}-2}} \left(\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right) \xrightarrow{D} \left(\frac{m}{2},\frac{m}{2}-2\right) \xrightarrow{G^{\frac{m}{2}-3}} (m-3,1) \xrightarrow{B} (m-1,0).$$

在所示的缺陷点之间，不会出现其他特殊分支：到达 $(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$ 之前，轨道经过 $x < m-1$, $y \notin \{0,1,m-1\}$，且仅在所示点命中对角线；经过D步之后，下一个特殊点是 $(m-3,1)$。因此

$$T_2(1) = m-1, \qquad \rho_2(1) = 1+1+\left(\frac{m}{2}-2\right)+1+\left(\frac{m}{2}-3\right)+1 = m-1.$$

情形 $x = 2$**.** 轨道为

$$\begin{aligned}(2,0) \xrightarrow{G} (3,m-1) \xrightarrow{C} (3,m-2) \xrightarrow{G^{m-4}} (m-1,2) \xrightarrow{E} (0,2) \xrightarrow{G} (1,1)\\ \xrightarrow{D} (1,m-1) \xrightarrow{C} (1,m-2) \xrightarrow{G^{m-3}} (m-2,1) \xrightarrow{B} (0,0).\end{aligned}$$

同样，所示缺陷之间的每个点都是一般情形：在 $(m-1,2)$ 之前，轨道避开对角线和直线 $y = 1$；在 $(0,2)$ 之后，唯一的对角线命中是 $(1,1)$；在 $(1,m-2)$ 之后，下一个缺陷是 $(m-2,1)$。因此

$$T_2(2) = 0, \qquad \rho_2(2) = 1+1+(m-4)+1+1+1+1+(m-3)+1 = 2m.$$

情形 x **奇数，** $3 \le x \le m-3$。集合

$$d = \frac{x+m-1}{2}.$$

那么轨道为

$$\begin{aligned}(x,0) \xrightarrow{G} (x+1,m-1) \xrightarrow{C} (x+1,m-2) \xrightarrow{G^{\frac{m-x-3}{2}}} (d,d) \xrightarrow{D} (d,d-2)\\ \xrightarrow{G^{\frac{m-x-1}{2}}} (m-1,x-2) \xrightarrow{E} (0,x-2) \xrightarrow{G^{x-3}} (x-3,1) \xrightarrow{B} (x-1,0).\end{aligned}$$

第一个一般块沿普通和为 $x+m-1$ 的直线运行，该直线恰好在 $(d,\ d)$ 处与对角线相交。经过 D 步移动后，轨道沿普通和为 $x+m-3$ 的直线运行，其下一个缺陷为 $(m-1,\ x-2)$。经过 E 步移动后，轨道沿普通和为 $x-2$ 的直线运行，其第一个缺陷为 $(x-3,\ 1)$。因此

$$T_2(x) = x-1,$$

and

$$\rho_2(x) = 1+1+\frac{m-x-3}{2}+1+\frac{m-x-1}{2}+1+(x-3)+1 = m.$$

情形 $x = 4$。这里的轨道是

$$(4,0) \xrightarrow{G} (5,m-1) \xrightarrow{C} (5,m-2) \xrightarrow{G^{m-6}} (m-1,4) \xrightarrow{E} (0,4) \xrightarrow{G^2} (2,2) \xrightarrow{A} (3,0).$$

所显示的公式也涵盖边界情形 $m = 6$，此时块 G^{m-6} 为空。因此

$$T_2(4) = 3, \qquad \rho_2(4) = 1 + 1 + (m-6) + 1 + 2 + 1 = m.$$

情形 x **偶数，** $6 \le x \le m-4$。集合

$$e = \frac{x}{2}.$$

于是轨道为

$$(x,0) \xrightarrow{G} (x+1, m-1) \xrightarrow{C} (x+1, m-2) \xrightarrow{G^{m-x-2}} (m-1, x) \xrightarrow{E} (0, x)$$
$$\xrightarrow{G^e} (e, e) \xrightarrow{D} (e, e-2) \xrightarrow{G^{e-3}} (x-3, 1) \xrightarrow{B} (x-1, 0).$$

在（$m-1$，x）之前没有对角线命中，因为第一个一般块位于普通和为奇数的直线上。经过 E-步移动后，轨道位于普通和为 x的直线上，其第一个对角点为（e，e）。经过 D-步移动后，轨道位于普通和为 $x-2$的直线上，其下一个缺陷为（$x-3$，1）。因此

$$T_2(x) = x - 1,$$

and

$$\rho_2(x) = 1 + 1 + (m-x-2) + 1 + e + 1 + (e-3) + 1 = m.$$

情形 $x = m-2$ **（因此必有** $m \ge 8$**）**。轨道为

$$(m-2, 0) \xrightarrow{G} (m-1, m-1) \xrightarrow{E} (0, m-1) \xrightarrow{C} (0, m-2)$$
$$\xrightarrow{G^{\frac{m-2}{2}}} \left(\frac{m-2}{2}, \frac{m-2}{2}\right) \xrightarrow{D} \left(\frac{m-2}{2}, \frac{m-6}{2}\right) \xrightarrow{G^{\frac{m-8}{2}}} (m-5, 1) \xrightarrow{B} (m-3, 0).$$

因此

$$T_2(m-2) = m-3, \qquad \rho_2(m-2) = 1 + 1 + 1 + \frac{m-2}{2} + 1 + \frac{m-8}{2} + 1 = m.$$

情形 $x = m-1$。轨道为

$$(m-1, 0) \xrightarrow{D} (m-1, m-2) \xrightarrow{C} (m-1, m-3) \xrightarrow{E} (0, m-3)$$
$$\xrightarrow{G^{m-4}} (m-4, 1) \xrightarrow{B} (m-2, 0).$$

So

$$T_2(m-1) = m-2, \qquad \rho_2(m-1) = 1 + 1 + 1 + (m-4) + 1 = m.$$

这七种情形涵盖了 $x \in \mathbb{Z}_m$，合并后的返回时间总和为 m^2，所示公式由此得出。

□

推论 3 (颜色 2 是路线 E 的哈密顿循环)。对于每个偶数 $m \ge 6$，关联映射 R_2 在 P_0上是一个单一的 m^2-循环。

证明。根据命题7，诱导的车道映射遵循以下循环顺序

$$(0, 1 \mid m-1, m-2, \ldots, 2),$$

即 $T_2(0) = 1$, $T_2(1) = m-1$, $T_2(2) = 0$，以及 $T_2(x) = x-1$，其中 $3 \le x \le m-1$。因此，T_2 是一个单一的 m-循环。另外

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m} \rho_2(x) = 1 + (m-1) + 2m + (m-3)m = m^2.$$

引理9 现在意味着 R_2 是一个单一的 m^2-循环。 □

定理 5（偶数 $m \geq 6$ 的路线 E）。 对于每个偶整数 $m \geq 6$，路线 E 方向指派（定义 6）是 $D_3(m)$ 的合法着色，且其三个颜色类都是有向哈密顿圈。

证明。 现在可以将偶数情形的证明概括为四个检查点。

(i) **为何需要情形 II 修复族**。 命题 5 确定了主要几何结构中的第一个障碍，而命题6 表明，在实际的情形 II 框架中，剩余的边界修正无法消除这一障碍；情形 II 修复族确实是一种整体修复。

(ii) **从定义 6 到显式返回映射**。 命题4 将修复后返回映射的推导简化为一个有限的低层表，而附录 B完成了该表的计算，得出 R_0、R_1、R_2 的闭式公式，详见附录 A。引理 10、11和12 表明，在适配工作坐标中，每个返回映射都由一个一般情形的主体分支以及有限个仿射缺陷分量所决定。

(iii) 在 P_0 上闭合循环。正文处理颜色 2：命题 7 推导出首次返回公式，推论 3 表明，R_2 在 P_0 上是一个单独的 m^2 循环。对于颜色 1 和 0，附录 C 推导出修复后的首次返回公式。命题 10 、11、12 和 13 给出了通道映射 T_c 和返回时间 ρ_c；在情形 II 中，这些公式编码了由情形 II 修复族产生的改变后的内部位移。命题 14 将剩余的闭合步骤表述为算术族块上的有限拼接置换，也就是说，在通道动力学偏离纯粹里程表进位的有限多个位置进行拼接。在每个同余类中，该拼接置换都是一个单循环，因此每个 T_c 都是一个单独的 m 循环。随后，推论 6 和 9 以及引理 9 表明，R_1 和 R_0 都是单独的 m^2 循环。

(iv) **从 P_0 提升至 V**。 此时，每个 R_c 都是双射，因此引理 4 表明，Route E 方向指派是一种合法着色。引理 3 随后将 m步回归映射信息提升到整个顶点集，并证明每个颜色映射都是 V上的一个有向哈密顿圈。

由于每个 Route E 方向三元组都是 (0、1、2) 的一个置换，这三个哈密顿圈两两弧不相交，且合起来覆盖了 $D_3(m)$ 的所有弧。 □

5 有限情形 $m = 4$

Route E 是为 $m \geq 6$设计的；情形 $m = 4$ 则由一个单独的有限见证处理。附录 D列出了完整的方向表，据此可通过有限次迭代读出这三个哈密顿圈；机器可读补充材料则明确记录了这些轨道。

命题 8（有限情形 $m = 4$）。 图 $D_3(4)$ 可分解为三个有向哈密顿圈。

证明。 附录 D 记录了 $D_3(4)$的一种着色的完整方向表。从该表出发，可从任意选定的初始顶点通过有限次迭代得到每个颜色轨道。以$(0,0,0)$ 为起点的三个轨道记录在随附的机器可读补充材料中；每个轨道的长度均为64 ，且与所示表格一致。因此，有限验证分为两个清晰的步骤：表格表明，每个顶点对应的三个允许方向构成一个置换，因而定义了一个合法的方向指派；提取出的轨道数据则表明，每个颜色映射在64上构成一个 V循环，因此是双射；两者共同确立了合法着色。因此，三个颜色类都是哈密顿回路，并构成 $D_3(4)$的一个哈密顿分解。

□

6 对所有 $m \geq 3$ 的完成

定理1的证明。 如果 m 是奇数，则应用定理4。如果 $m = 4$，则应用命题8。如果 m 是偶数且 $m \geq 6$，则应用定理5。这些情形涵盖了所有整数 $m \geq 3$。 □

7 讨论与展望

本文最好被视为一条关于隐藏在有向环面中的里程表定理。层函数提供了环境时钟，而证明则在截面 P_0 上识别出相关的时钟与进位动力学。在奇数情形下，这得出了到标准里程表变换的显式仿射共轭。在偶数情形下，奇偶性障碍排除了典范 Kempe 路径，因此构造直接通过低层修复，并进一步进行首次返回约化以得到显式车道，从而重建了这一机制。边界情形 $m = 4$ 是有限的例外情形，本文用表格记录，而非将其纳入统一的算术族。随附的补充文件是独立的回归检查，并不构成证明的一部分。

仍有若干结构性问题有待解决。首先，能否将偶数情形的分析浓缩为一个 Route E 特定的临界通道定理，直接从仿射缺陷高度读出修复后的算术族块和拼接置换，从而略过大部分剩余的轨迹记账？与此相关，颜色-0 m 模 12 的拆分能否统一地推导为单个余数 4 拼接图景中的循环重排？其次，证明启发了一项高维研究方案：通过嵌套返回截面分析低层缺陷排列，直至出现有限缺陷里程表。符号乘积不变量已指出，基于规范着色的 Kempe 策略确实存在奇偶性障碍；而 Route E 构造则表明，打破障碍的见证仍应由时钟、进位和有限次拼接来组织。首个自然的测试情形是有向四维环面，我们可以在此探究，同样的返回截面视角能否仍然分离出一个有限缺陷的时钟与进位核心。更广泛地说，一个自然的问题是，复合高维情形能否具有类似的嵌套返回映射和有限缺陷里程表模型。尤其值得探究的是，高维有向环面能否具有同样清晰的嵌套返回描述，以及奇数和偶数环境维数是否呈现截然不同的奇偶性行为。

软件与形式化。 验证脚本和机器可读见证数据作为辅助文件随 arXiv 投稿一并提供。一个 Lean 4 形式化项目涵盖了奇数-m仿射共轭论证和偶数-m 路线 E 构造，目前维护于 https://github.com/aria1th/Torus-Hamilton-Decomposition/。整个形式化项目均可通过当前版本的 Mathlib (`lake build TorusD3Odometer`) 编译。大语言模型协助完成了写作和编码；所有数学内容均由作者验证。

如何阅读各附录。附录A 是查表附录，记录了 Route E 返回映射的闭式公式 R_0， R_1， R_2。附录 B 是推导附录：从定义 6出发，对低层转换器进行计算，并证明命题 9；该命题给出了所展示公式的来源。附录 C 是循环结构附录：以这些公式为输入，推导颜色 1 和 0的首次返回映射及返回时间和，并将最后的闭合步骤归入命题 14。因此，主要关注证明脉络的读者可以依次阅读附录 A、附录 C，最后阅读附录 B；表7按颜色逐一列出哈密顿性附录的阅读指南。附录 D 和附录 E 是关于有限见证和独立回归检查的存档补充材料。

路线 E 的返回映射

定义 6 见第 4节。本附录记录了由附录 P_0 B中的定义推导而来、并在附录C中分析的闭式回归映射。

在 P_0 上的返回映射。将 $P_0 = \{S = 0\}$ 参数化为

$$v(i,k) := (i, -i-k, k), \qquad (i,k) \in \mathbb{Z}_m^2.$$

对于显式的 Route E 方向指派，定义 $R_c = f_c^m|_{P_0}$。（我们写作 R_c 而不写作 F_c，以区分 Route E 相关的 m步映射与第 F_c 节中分析的 Kempe 交换着色的返回映射 3。以下分段公式可直接由附录 B 中的定义 6推导得出。

情形 I： $m \equiv 0,\ 2$（模 6）。

$$R_0(i,k) = \begin{cases} (i-2,\ k) & (i,k) = (0,0), \\ (i-3,\ k+3) & (i,k) = (1,m-1), \\ (i-2,\ k+2) & (i,k) = (m-2,0), \\ (i-1,\ k) & (i,k) = (m-1,1), \\ (i-3,\ k+2) & i+k \equiv 1 \text{ and } (i,k) \neq (1,0), \\ (i-1,\ k+1) & ((k=0 \text{ and } 1 \le i \le m-3) \text{ or } (i,k) \in \{(0,m-1),(m-2,1)\}), \\ (i-2,\ k+1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$R_1(i,k) = \begin{cases} (i+2,\ k) & ((i+k \equiv m-1 \text{ and } 1 \le i \le m-3) \\ & \quad \text{or } (i,k) \in \{(0,0),(m-2,0),(m-1,m-1)\}), \\ (i+1,\ k) & ((i=0 \text{ and } 1 \le k \le m-2) \\ & \quad \text{or } (i,k) \in \{(1,m-1),(m-2,1)\}), \\ (i+1,\ k+1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

情形 II： $m \equiv 4$ (模 6)。

$$R_0(i,k) = \begin{cases} (i-2,\ k) & (i,k) = (0,0), \\ (i-1,\ k) & (i,k) = (m-1,1), \\ (i-3,\ k+3) & (i,k) \in \{(1,m-1),(2,m-2)\}, \\ (i-2,\ k+2) & ((i=1 \text{ and } 0 \le k \le m-3) \text{ or } (i,k) \in \{(2,m-1),(m-2,0)\}), \\ (i-3,\ k+2) & i+k \equiv 1 \text{ and } (i,k) \notin \{(1,0),(2,m-1)\}, \\ (i-1,\ k+1) & ((k=0 \text{ and } 2 \le i \le m-3) \\ & \quad \text{or } (i,k) \in \{(0,m-1),(1,m-2),(m-2,1)\}), \\ (i-2,\ k+1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$R_1(i,k) = \begin{cases} (i+2,\ k) & ((i+k \equiv m-1 \text{ and } 2 \le i \le m-3) \\ & \quad \text{or } (i,k) \in \{(0,0),(1,0),(m-2,0),(m-1,m-1)\}), \\ (i+1,\ k) & ((i=0 \text{ and } 1 \le k \le m-2) \text{ or } (i=1 \text{ and } 1 \le k \le m-1) \\ & \quad \text{or } (i,k) \in \{(2,m-2),(2,m-1),(m-2,1)\}), \\ (i+1,\ k+1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对所有偶数 $m \geq 6$ 均成立。

$$R_2(i,k) = \begin{cases} (i+1,\ k-3) & (i,k) = (2,0), \\ (i+2,\ k-3) & i+k \equiv 1 \text{ and } (i,k) \notin \{(1,0),(m-1,2)\}, \\ (i,\ k-1) & ((k \equiv m-1-i \text{ and } i \not\equiv m-1) \text{ or } (i,k) = (m-1,m-1)), \\ (i,\ k-2) & ((k = 0 \text{ and } i \notin \{0,2,m-1\}) \text{ or } (i,k) = (m-1,1)), \\ (i+1,\ k-1) & ((i = m-1 \text{ and } k \notin \{1,m-1\}) \text{ or } (i,k) = (0,0)), \\ (i+1,\ k-2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

B RouteE返回映射的推导

在本附录中，我们直接从定义 A 中路线 E 规则的低层部分推导附录 6所列的返回映射。论证不依赖缺陷环结构；它只追踪前三层 $S = 0,1,2$。

命题 9。 对于每个偶数 $m \geq 6$，由定义 R_0, R_1, R_2 导出的返回映射 *6* 恰好是附录 *A*中展示的分段公式。

证明。 参数化

$$P_0 = \{(i,j,k) \in \mathbb{Z}_m^3 : i+j+k \equiv 0\}$$

by

$$v(i,k) := (i, -i-k, k), \qquad (i,k) \in \mathbb{Z}_m^2.$$

固定一种颜色 $c \in \{0,1,2\}$ 并从 $v(i,k) \in P_0$ 出发。将层 $S = 0,1,2$ 上遇到的前三个颜色-c 方向记为

$$\omega_c(i,k) = (a_c, b_c, c_c) \in \{0,1,2\}^3.$$

经过这三步后，轨道位于第 $S = 3$ 层。从那里到下一次返回 P_0 之前，所有层都是典范的，因此剩余的 $m-3$ 步全都沿方向 c。所以，整个返回映射由低层词 $\omega_c(i,k)$ 确定。

若 $N_r(\omega)$ 表示词 ω 中方向 r 出现的次数，则

$$R_0(i,k) = \big(i + N_0(\omega_0) - 3,\ k + N_2(\omega_0)\big),$$
$$R_1(i,k) = \big(i + N_0(\omega_1),\ k + N_2(\omega_1)\big),$$
$$R_2(i,k) = \big(i + N_0(\omega_2),\ k + N_2(\omega_2) - 3\big).$$

因此，只需确定低层词。

根据定义6：

- 在第 $S = 1$ 层，如果 $i = 0$，则三元组为 (1，0，2)；如果 $i \neq 0$，则为 (2，0，1)；
- 在第 $S = 2$ 层，如果 $j = 0$，则三元组为 (2，1，0)；如果 $j \neq 0$，则为 (0，1，2)。

因此：

- 对于颜色 0，第 1 层的方向取决于步骤 1 i 后的坐标是否等于 0，而第 2 层的方向取决于步骤 2 j 后的坐标是否等于 0；
- 对于颜色 1，第 1 层和第 2 层的方向始终分别为 0 和 1；
- 对于颜色 2，第 1 层的方向取决于步骤 1 i 后的坐标是否等于 0，而第 2 层的方向取决于步骤 2 j 后的坐标是否等于 0。

情形 I： $m \equiv 0$，2 (模 6)。在 P_0 上的（i，k）坐标中，第 0 层方向三元组变为

$$A := \{(0,0)\} \cup \{(i,k) : i+k \equiv m-1,\ 1 \le i \le m-3\} \cup \{(m-1,m-1)\},$$
$$B := \{(0,m-1)\} \cup \{(i,0) : 1 \le i \le m-3\} \cup \{(m-1,1)\},$$
$$C := \{(0,k) : 1 \le k \le m-2\} \cup \{(1,m-1)\},$$
$$D := \{(m-2,1)\}, \qquad E := \{(m-2,0)\},$$

对应 分别对应三元组 102，021，210，012，201，而剩下的点 s

$$F := \mathbb{Z}_m^2 \setminus (A \cup B \cup C \cup D \cup E)$$

进位为三元组 120。

颜色 1。 在第 1 层和第 2 层，颜色 1 总是使用方向 0 和 1。因此，低层词总是形如 $(a,\ 0,\ 1)$，其中 a 是第 0 层颜色 1 的方向。因此：

- 如果 $a = 0$，那么 $\omega_1 = 001$ 和 $R_1(i,\ k) = (i+2,\ k)$；
- 如果 $a = 1$，那么 $\omega_1 = 101$ 和 $R_1(i,\ k) = (i+1,\ k)$；
- 若 $a = 2$，则 $\omega_1 = 201$ 和 $R_1(i,\ k) = (i+1,\ k+1)$。

读出第 0 颜色 1 方向等于 0、1或 2 的集合，可恰好得到附录 R_1 中的情形 I 公式 A。

颜色 0。 对于颜色 0，我们用代数方法确定词 $\omega_0 = (a_0,\ b_0,\ c_0)$。步骤 1 沿方向$a_0$进行，得到 $i_1 = i + \mathbf{1}_{a_0=0}$。第 1 层规则给出 $b_0 = 1$，若 $i_1 \equiv 0$ (模 m)，否则为 2。步骤 2 沿方向 b_0进行，得到

$$j_2 = j + \mathbf{1}_{a_0=1} + \mathbf{1}_{b_0=1}, \qquad j \equiv -i-k \pmod{m}.$$

层-2 规则给出 $c_0 = 2$ 当 $j_2 \equiv 0$ (模 m)，否则为 0 。表 3 在 P_0的每个区域上执行这一算术推演。按最终位移对起点分组，恰好得到所示的 R_0情形 I 公式。

表 3：颜色 0、情形 I (ω_0 的低层词 $m \equiv 0$，2 (模 6))。

Set	条件 / 点	a_0	$i_1 = i + \mathbf{1}_{a_0=0}$	b_0	$j_2 = j + \mathbf{1}_{a_0=1} + \mathbf{1}_{b_0=1}$	c_0	ω_0 位移 $R_0(i,\ k)$
A	$(0,0)$	1	$0 \Rightarrow$	1	$0+1+1=2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	110 $(i-2,\ k)$
	$A \setminus \{(0,0)\}$	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+1+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	120 $(i-2,\ k+1)$
B	$(m-1,1)$	0	$0 \Rightarrow$	1	$0+0+1=1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	010 $(i-1,\ k)$
	$B \setminus \{(m-1,1)\}$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+0+0=j \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	020 $(i-1,\ k+1)$
C	$(0,\ 1)$	2	$0 \Rightarrow$	1	$-1+0+1=0 \Rightarrow$	2	212 $(i-3,\ k+2)$
	$(1, m-1)$	2	$1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$0+0+0=0 \Rightarrow$	2	222 $(i-3,\ k+3)$
	剩余 C	2	$0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	210 $(i-2,\ k+1)$
D	$(m-2,1)$	0	$m-1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$1+0+0=1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0 020 $(i-1,\ k+1)$	
E	$(m-2,0)$	2	$m-2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$2+0+0=2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0 220 $(i-2,\ k+2)$	
F	$i+k \equiv 1$ （等价于 $j \equiv -1$）	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$-1+1+0=0 \Rightarrow$	2	122 $(i-3,\ k+2)$
	否则	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+1+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	120 $(i-2,\ k+1)$

颜色 2。 对于颜色 2，层-1 测试仍然是检查步骤1 i后坐标是否为零，而层-2 测试则是检查步骤2 j 后坐标是否为零。表 4 在情形 I 划分的每个区域上评估这些测试。按位移对所得的低层词分组，恰好得到附录 R_2 中所示的A统一公式。

T表 4：颜色 2、情形 I 的低层词推导 ω_2 （$m \equiv 0$,2（模 6））。

Set	条件 / 点	a_2	$i_1 = i + \mathbf{1}_{a_2=0}$	b_2	$j_2 = j + \mathbf{1}_{a_2=1} + \mathbf{1}_{b_2=1}$	c_2	ω_2 位移 R_2 (i,k)
A	$(0,0)$	2	$0 \Rightarrow$	2	$0+0+0=0 \Rightarrow$	0	220 $(i+1, k-1)$
	$A \setminus \{(0,0)\}$	2	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	212 $(i,\ k-1)$
B	$(0,\ m-1)$	1	$0 \Rightarrow$	2	$1+1+0=2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	122 $(i,\ k-1)$
	$(2,\ 0)$	1	$2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$(m-2)+1+1=0 \Rightarrow$	0	110 $(i+1,\ k-3)$
	$B \setminus \{(0,m-1),(2,0)\}$	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+1+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	112 $(i,\ k-2)$
C	$(0,1)$	0	$1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$(m-1)+0+1=0 \Rightarrow$	0	010 $(i+2,\ k-3)$
	$C \setminus \{(0,1)\}$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	012 $(i+1,\ k-2)$
D	$(m-2,\ 1)$	2	$m-2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$1+0+1=2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	212 $(i,\ k-1)$
E	$(m-2,\ 0)$	1	$m-2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$2+1+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	112 $(i,\ k-2)$
F	$i = m-1$ 和 $k \notin \{1, m-1\}$	0	$0 \Rightarrow$	2	$j+0+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	022 $(i+1,\ k-1)$
	$i+k \equiv 1$ 和 $i \neq m-1$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$-1+0+1=0 \Rightarrow$	0	010 $(i+2,\ k-3)$
	否则	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	012 $(i+1,\ k-2)$

情形 II： $m \equiv 4$ (模 6)。 在 P_0 上的（$i,\ k$）坐标中，第 0 层方向三元组变为 e

$$A := \{(0,0)\} \cup \{(i,k) :\ i+k \equiv m-1,\ 2 \le i \le m-3\} \cup \{(m-1, m-1)\}, B := \{(0, m-1)\} \cup \{(i, 0) :\ 2 \le i \le m-3\} \cup \{(m-1, 1)\}, C := \{(0,k) :\ 1 \le k \le m-2\} \cup \{(1,k) :\ 1 \le k \le m-3\} \cup \{(1, m-1)\} \cup \{(2, m-2), (2, m-1)\}, D := \{(1, m-2), (m-2, 1)\} \qquad E := \{(1, 0), (m-2, 0)\},$$

再次分别对应三元组 102，021，210，012，201，其余点对应 120

$$F := \mathbb{Z}_m^2 \setminus (A \cup B \cup C \cup D \cup E).$$

颜色 1。 完全相同的低层论证仍然适用。在情形 II 中，第 0 层颜色 1 方向在

$$(i+k \equiv m-1,\ 2 \le i \le m-3) \text{ or } (i,k) \in \{(0,0), (1,0), (m-2,0), (m-1, m-1)\},$$

它在此处等于 1

$$(i=0,\ 1 \le k \le m-2) \text{ or } (i=1,\ 1 \le k \le m-1) \text{ or } (i,k) \in \{(2, m-2), (2, m-1), (m-2, 1)\},$$

其他情况下等于 2。这正是 R_1 的情形 II 公式。

颜色 0。 表 5 对扩展的情况 II 划分执行相同的算术推演。新增的 Y_{210} 点恰好贡献了带有词 220 和222的新行；按位移分组后，即可得到所示的情形 II 公式 R_0。

表 5：颜色 0、情形 II（$m \equiv 4$ （模 6））的低层词推导 ω_0

Set	条件 / 点	a_0	$i_1 = i + \mathbf{1}_{a_0=0}$	b_0	$j_2 = j + \mathbf{1}_{a_0=1} + \mathbf{1}_{b_0=1}$	c_0	ω_0 位移 $R_0(i,\ k)$
A	$(0,\ 0)$	1	$0 \Rightarrow$	1	$0+1+1=2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	110 $(i-2,\ k)$
	$A \setminus \{(0,0)\}$	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+1+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	120 $(i-2,\ k+1)$
B	$(m-1,1)$	0	$0 \Rightarrow$	1	$0+0+1=1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	010 $(i-1,\ k)$
	$B \setminus \{(m-1,1)\}$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+0+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	020 $(i-1,\ k+1)$
C	$(0,\ 1)$	2	$0 \Rightarrow$	1	$(m-1)+0+1=0 \Rightarrow$	2	212 $(i-3,\ k+2)$
	$(0,k)$，其中 $2 \le k \le m-2$	2	$0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	210 $(i-2,\ k+1)$
	$(1,k)$，其中 $1 \le k \le m-2$，或 $(i,k) = (2, m-1)$	2	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+0+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	220 $(i-2,\ k+2)$
	$(1, m-1)$ 或 $(2, m-2)$	2	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$0+0+0=0 \Rightarrow$	2	222 $(i-3,\ k+3)$
D	$(1, m-2)$ 或 $(m-2, 1)$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+0+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	020 $(i-1,\ k+1)$
E	$(1,0)$ 或 $(m-2, 0)$	2	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+0+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	220 $(i-2,\ k+2)$
F	$i+k \equiv 1$ （等价于 $j \equiv -1$）	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$-1+1+0=0 \Rightarrow$	2	122 $(i-3,\ k+2)$
	否则	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	$j+1+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	0	120 $(i-2,\ k+1)$

颜色 2. 表 6 记录了情形 II 划分下颜色 2对应的低层轨迹。相较于情形 I，唯一真正新增的行是 C 内部的拆分，这是由情形 II 修复族中的额外点所导致的；按位移分组后，再次得到 R_2的统一公式。

表 6：颜色 2、情形 II（$m \equiv 4$ （模 6））的低层词推导 ω_2 。

Set	条件 / 点	a_2	$i_1 = i + \mathbf{1}_{a_2=0}$	b_2	$j_2 = j + \mathbf{1}_{a_2=1} + \mathbf{1}_{b_2=1}$	c_2	ω_2 位移 $R_2(i,\ k)$
A	$(0,\ 0)$	2	$0 \Rightarrow$	2	$0+0+0=0 \Rightarrow$	0	220 $(i+1,\ k-1)$
	$A \setminus \{(0,0)\}$	2	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	212 $(i,\ k-1)$
B	$(0,\ m-1)$	1	$0 \Rightarrow$	2	$1+1+0=2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	122 $(i,\ k-1)$
	$(2,\ 0)$	1	$2 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$(m-2)+1+1=0 \Rightarrow$	0	110 $(i+1,\ k-3)$
	$B \setminus \{(0,m-1),(2,0)\}$	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+1+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	112 $(i,\ k-2)$
C	$(0,1)$ 或 $(2, m-1)$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$(m-1)+0+1=0 \Rightarrow$	0	010 $(i+2,\ k-3)$
	剩余 C	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	012 $(i+1,\ k-2)$
D	$(1,\ m-2)$ 或 $(m-2,\ 1)$	2	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	212 $(i,\ k-1)$
E	$(1,\ 0)$ 或 $(m-2,\ 0)$	1	$i \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+1+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	112 $(i,\ k-2)$
F	$i = m-1$ 和 $k \notin \{1, m-1\}$	0	$0 \Rightarrow$	2	$j+0+0 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	022 $(i+1,\ k-1)$
	$i+k \equiv 1$ 和 $i \neq m-1$	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$-1+0+1=0 \Rightarrow$	0	010 $(i+2,\ k-3)$
	否则	0	$i+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	1	$j+0+1 \not\equiv 0 \Rightarrow$	2	012 $(i+1,\ k-2)$

这证明了所有回归映射公式。 □

C RouteE返回映射的哈密顿性

C.1 设置

第 4 节的首次返回框架统一适用于三种颜色。附录A 给出了闭式回归映射，而本附录利用这些公式恢复哈密顿性。正文已证明颜色 2 ，并阐明了情形 II 的概念性障碍及修复过程，因此这里只需讨论颜色 1和 0 。

为便于快速查阅，表7 列出了每种颜色和同余类对应的命题/推论链。表2总结了每种颜色的工作坐标和缺陷几何结构；随后，命题14 给出了由此得到的算术族块分解和拼接置换。

颜色	同余类	首次返回/车道映射输入	最终循环陈述
2	所有偶数 $m \geq 6$	命题7 （正文）	推论 3
1	$m \equiv 0$，2（模 6）	命题 10以及 命题 14	推论4 和 6
1	$m \equiv 4$ （模 6）	命题11 以及 命题 14	推论5 和 6
0	$m \equiv 0$，2（模 6）	命题 12以及 命题 14	推论7 和 9
0	$m \equiv 4$ (模 6)	命题13 结合 命题 14	推论8 和 9

表 7：附录导航指南C.

在推导出首次返回映射的闭式公式后，下面的引理概括了剩下的循环步骤。

引理 14（拼接　　图引理）。设 X 是一个划分为非空有序块的有限集

$$X = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \cdots \sqcup F_r, \qquad F_j = (x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,\ell_j}).$$

假设 $T\colon\ X \to X$ 满足：对于某个置换 $\pi \in S_r$,

$$T(x_{j,s}) = x_{j,s+1} \qquad (0 \leq s < \ell_j),$$

and

$$T(x_{j,\ell_j}) = x_{\pi(j),0} \qquad (1 \leq j \leq r).$$

那么， T 的循环分解可由 π 的循环分解得到：如果

$$(j_1\, j_2\, \ldots\, j_q)$$

是 π 的一个循环，那么其串接

$$(F_{j_1} \mid F_{j_2} \mid \cdots \mid F_{j_q})$$

是一个单一的 T-循环。特别地， T 是一个单一的 $|X|$-循环，当且仅当 π 是一个单一的 r-循环。

证明。 在每个块 F_j 内，映射 T 向前变换一步，直到到达终端点$x_{j,\ \ell_j}$，然后跳跃到 $F_{\pi(j)}$ 的初始点。因此，在属于一个循环的各块的并集上，

$$(j_1\, j_2\, \ldots\, j_q)$$

π 的映射 T 恰好是串接上的后继映射

$$(F_{j_1} \mid F_{j_2} \mid \cdots \mid F_{j_q}).$$

π 的不同循环给出互不相交的 T循环，因此结论成立。 □

接下来，相关的块是有序算术族块，它们由较长的主体算术游程吸收 $O(1)$ 缺陷集产生的桥接顶点并入相邻游程后得到。一旦得知 T_c 和 ρ_c 的首次返回公式，主体规则便确定每个块内部的后继关系，而缺陷集只决定块标签上的有限拼接置换。这就解决了诱导车道映射 T_c的单循环问题；随后单独使用引理9 将 T_c 为单个 m循环提升为 R_c 为单个 m^2循环。当 m取最小可容许值时，若所显示的某个算术游程为空，则在相应的块分解中省略该游程。

C.2 颜色2

颜色 2 回归映射的完整证明见正文（第 4.3节）。命题 7 导出首次返回数据，推论 3 证明了 R_2 对于所有偶数 m^2，都是单个 $m \geq 6$循环。此处不再重复这些轨道轨迹。

C.3 颜色1

由引理 10，颜色 1 的主体坐标为 $\Phi_1(i,k) = (u,t) = (i-k,\, k)$，其中一般分支为 $(u,t) \mapsto (u,t+1)$。根据引理 11(i)，缺陷集位于仿射直线 $u+t=0$和 $u+2t=m-1$ 上（情形 II 中还包括 $u+t=1$），以及有限个孤立点上。按照相同的模式，只需列出首次返回前经过的缺陷分量，并对车道增量求和。

我们在横截面上进行首次返回分析

$$L_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{Z}_m\} \subseteq P_0.$$

令 $\rho_1(x)$ 为 R_1 从 $(x,\ 0)$ 到 L_1 的首次返回时间，并定义

$$R_1^{\rho_1(x)}(x,0) = (T_1(x),0).$$

在原始的 $(i,\ k)$ 坐标中，$u = i-k$ 是车道坐标。主体移动 $(i,\ k) \mapsto (i+1,\ k+1)$ 保持 u 不变。两个缺陷分支表现为停滞：$(i,\ k) \mapsto (i+1,\ k)$ 使 u 增加 1（缺陷直线$u+t=0$，即 $i=0$），而 $(i,\ k) \mapsto (i+2,\ k)$ 使 u 增加 2（缺陷直线 $u+2t=m-1$，即对角线$i+k=m-1$）。从 $(x,\ 0)$ 出发，首次返回时 i 的净变化恰好等于停滞所贡献的车道增量总和。

C.3.1 情形 I：$m \equiv 0,\ 2 \pmod 6$

命题 10。 假设 $m \equiv 0,2 \pmod 6$。那么，在 L_1 上的首次回归映射和返回时间为 e

$$T_1(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ x+3, & 1 \leq x \leq m-4, \\ 1, & x = m-3, \\ 0, & x = m-2, \\ 3, & x = m-1, \end{cases} \qquad \rho_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \ \textit{or}\ x = m-2, \\ m+2, & 1 \leq x \leq m-4, \\ m+3, & x = m-3 \ \textit{or}\ x = m-1. \end{cases}$$

证明。 闭式映射 R_1 有三种变换：

- bulk $(i,k) \mapsto (i+1, k+1)$,

- $+1$ 在 $i=0$ 处停滞，同时出现 $(1, m-1)$ 和 $(m-2, 1)$，
- $+2$在对角线上停滞。 n，同时还有 $(0,\ 0)$、$(m-2,\ 0)$ 和 $(m-1,\ m-1$ $)$.

直接情形可直接从公式中读出：

$$(0,0) \mapsto (2,0), \qquad (m-2,0) \mapsto (0,0).$$

因此

$$T_1(0) = 2, \quad \rho_1(0) = 1, \qquad T_1(m-2) = 0, \quad \rho_1(m-2) = 1.$$

现在固定 $1 \le x \le m-4$。在奇数和偶数子情形中，从 $(x,\ 0)$ 出发的轨道在首次回归前恰好遇到两次停滞——一次是对角线停滞（$+2$），一次是垂直停滞（$+1$），顺序不限；车道增量总计为 3，返回时间为 $m+2$。

奇数 x： 车道 $u = x$ 在高度 $(m-1-x)/2$ 处与对角线 $i+k = m-1$ 相交，产生一次 $+2$停滞。轨道变换至车道 $x+2$，随后在 $(0,\ m-x-2)$ 处遇到垂直缺陷，产生一次 $+1$ 停滞。在由此得到的车道 $x+3$ 上，其余缺陷都位于当前时钟值之后。

偶数 x： 车道 $u = x$ 没有对角线命中；它的第一个缺陷是 $(0,\ m-x)$（一次 $+1$ 停滞，转入奇数车道 $x+1$）。随后，该车道在高度 $m - x/2 - 1$ 处与对角线相交，发生一次 $+2$ 停滞。同样，所得车道 $x+3$ 在绕回之前没有其他缺陷。

在这两种情形下，

$$T_1(x) = x + 3, \qquad \rho_1(x) = m + 2.$$

还需处理两个边界值。

点 $x = m-3$。 轨道开始

$$(m-3,0) \to (m-2,1) \to (m-1,1) \to (0,2) \to (1,2).$$

因此，它首先在 $(m-2,\ 1)$ 处发生一次 $+1$ 停滞，随后又在 $(0,\ 2)$ 处发生一次 $+1$ 停滞。此时，轨道位于车道 $u = i - k \equiv m-1$上。在 k 绕回之前，该车道上唯一的对角缺陷是

$$\left(\frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}\right),$$

因此轨道继续前进

$$(1,2) \xrightarrow{\text{bulk}\,\frac{m}{2}-2} \left(\frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}\right) \xrightarrow{+2} \left(\frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}\right) \xrightarrow{\text{bulk}\,\frac{m}{2}} (1,0).$$

因此，第三次停滞就是这次 $+2$对角停滞；总共恰有三次停滞，因此

$$T_1(m-3) = 1, \qquad \rho_1(m-3) = m + 3.$$

点 $x = m-1$。 轨道开始

$$(m-1,0) \to (0,1) \to (1,1),$$

因此，它在 $(0,\ 1)$ 处出现一次 $+1$ 停滞。随后它到达 $(m-1,\ m-1)$，出现一次 $+2$ 停滞，接着到达 $(1,\ m-1)$，出现最后一次 $+1$ 停滞。此时，轨道位于车道 3，当前时钟值为 $k = m-1$。车道 3 上的垂直缺陷高度为 $m-3$，而车道 3 上的对角缺陷则要求

$$k = \frac{m-4}{2},$$

因此，这两个可能的缺陷高度都严格落后于当前值 $m-1$。所以，在返回之前不会再出现缺陷。因此，车道增量总计为 4，停滞次数为 3，所以

$$T_1(m-1) = 3, \qquad \rho_1(m-1) = m + 3.$$

这证明了所述公式。 □

C.3.2 情形 II： $m \equiv 4 \pmod 6$

命题 11。 假设 $m \equiv 4$ （模 6）。那么， L_1 上的首次回归映射和返回时间为

$$T_1(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 3, & x = 1, \\ 5, & x = 2, \\ x+2, & x \text{ even}, \ x \notin \{0, 2, m-2\}, \\ 0, & x = m-2, \\ x+6, & x \text{ odd}, \ x \notin \{1, m-3, m-1\}, \\ 4, & x = m-3, \\ 7, & x = m-1, \end{cases}$$

and

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0, 1, m-2\}, \\ m+3, & x = 2, \\ m+2, & x \text{ even}, \ x \notin \{0, 2, m-2\}, \\ m+4, & x \text{ odd}, \ x \notin \{1, m-3, m-1\}, \\ m+6, & x \in \{m-3, m-1\}. \end{cases}$$

证明。 在情形 II 中，闭式映射具有

- 主体部分 $(i, k) \mapsto (i+1, k+1)$ ，
- $+1$ 在直线 $i = 0$ 和 $i = 1$上停滞，并有特殊点 $(2, m-2)$, $(2, m-1)$, $(m-2, 1)$,
- $+2$ 在对角线 $i + k = m - 1$ 上停滞（当 $2 \le i \le m-3$ 时），并有特殊点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(m-2, 0)$, $(m-1, m-1)$.

直接情形可直接由公式读出：

$$(0,0) \mapsto (2,0), \qquad (1,0) \mapsto (3,0), \qquad (m-2,0) \mapsto (0,0),$$

so

$$T_1(0) = 2, \quad T_1(1) = 3, \quad T_1(m-2) = 0,$$

三个返回时间均为 1。

对于 $x = 2$，车道 $u = 2$ 没有对角缺陷。轨道一般会运行至 $(0, m-2)$，随后遇到连续三次 $+1$ 停滞：

$$(2,0) \xrightarrow{\text{bulk}^{m-2}} (0, m-2) \xrightarrow{+1} (1, m-2) \xrightarrow{+1} (2, m-2) \xrightarrow{+1} (3, m-2).$$

从那里经过两次主体移动后即可返回 L_1。因此

$$T_1(2) = 5, \qquad \rho_1(2) = m + 3.$$

现在令 x 为偶数且满足 $4 \le x \le m-4$。车道 $u = x$ 没有对角缺陷；其第一个缺陷是 $(0, m-x)$，紧接着是 $i = 1$ 缺陷。由于 $x \neq 2$，这就是仅有的两个停滞，因此车道增量为 2，且

$$T_1(x) = x + 2, \qquad \rho_1(x) = m + 2.$$

接下来令 x 为奇数且满足 $3 \le x \le m-5$。轨道按+2, +1, +1, +2 的模式遭遇四次停滞（一次对角停滞、两次垂直停滞、一次对角停滞），车道增量总计为 6，返回时间为 $m+4$。对于端点 $x = m-5$，同样适用这四次停滞的模式；第二次对角停滞后，轨道位于高度为 $m/2$ 的通道 1 上，而点 $(0,\ m-1)$ 不是缺陷（它既不属于 $i=0$ 分支，也不属于对角分支），因此轨道正常返回 L_1。因此，对于所有奇数 $x \in \{3,\ \ldots\ldots,\ m-5\}$，

$$T_1(x) = x+6, \qquad \rho_1(x) = m+4.$$

对于 $x = m-3$，轨道为

$$\begin{aligned}(m-3,0) &\xrightarrow{\text{bulk}} (m-2,1) \xrightarrow{+1} (m-1,1) \xrightarrow{\text{bulk}} (0,2) \xrightarrow{+1} (1,2)\\ &\xrightarrow{+1} (2,2) \xrightarrow{\text{bulk}^{m-3}} (m-1,m-1) \xrightarrow{+2} (1,m-1)\\ &\xrightarrow{+1} (2,m-1) \xrightarrow{+1} (3,m-1) \xrightarrow{\text{bulk}} (4,0).\end{aligned}$$

因此，车道增量为 $1+1+1+2+1+1=7$，返回时间为 $m+6$。于是

$$T_1(m-3) = 4, \qquad \rho_1(m-3) = m+6.$$

对于 $x = m-1$，轨道为

$$\begin{aligned}(m-1,0) &\xrightarrow{\text{bulk}} (0,1) \xrightarrow{+1} (1,1) \xrightarrow{+1} (2,1) \xrightarrow{\text{bulk}^{\frac{m}{2}-2}} \left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}-1\right)\\ &\xrightarrow{+2} \xrightarrow{\text{bulk}^{\frac{m}{2}-2}} (0,m-3) \xrightarrow{+1} (1,m-3) \xrightarrow{+1} (2,m-3)\\ &\xrightarrow{+2} (4,m-3) \xrightarrow{\text{bulk}^3} (7,0).\end{aligned}$$

因此，轨道中有四次 $+1$ 停滞和两次 $+2$ 停滞，车道增量总计为 8，返回时间为$m+6$。因此

$$T_1(m-1) = 7, \qquad \rho_1(m-1) = m+6.$$

□

C.4 颜色0

由引理 10，颜色 0 的主体坐标为 $\Phi_0(i,k) = (u,t) = (i+2k,\ k)$，其中一般分支为 $(u,t) \mapsto (u,\ t+1)$。由引理 11(iii)，缺陷集位于直线 $t=0$ 和$u = t+1$ 上（在情形 II 中还包括 $u = 1+2t$），并包含有限多个孤立点。由于主体坐标系已经采用了方便的坐标 $(x,y) = (u,t) = (i+2k,\ k)$，我们直接在此坐标系中进行处理。

横截面是

$$L_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{Z}_m\}.$$

一般移动固定 x 并递增 y，因此 y 确实就是一个时钟，而例外分支只改变泳道坐标 x。

C.4.1 情形 I： $m \equiv 0,\ 2$（模 6）

引理 15。 假设 $m \equiv 0,2$（模 6）。在坐标 $(x, y) = (i + 2k, k)$中，回归映射 R_0变为

$$R_0(x,y) = \begin{cases} (m-2,0), & (x,y) = (0,0), \\ (2,2), & (x,y) = (m-1, m-1), \\ (0,2), & (x,y) = (m-2, 0), \\ (0,1), & (x,y) = (1,1), \\ (x+1, y+2), & x = y+1,\ (x,y) \neq (1,0), \\ (x+1, y+1), & (y = 0,\ 1 \leq x \leq m-3)\ \textit{or}\ (x,y) \in \{(0,1), (m-2, m-1)\}, \\ (x, y+1), & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

所有运算均在模 m下进行。

证明。 将 $i = x - 2y$和 $k = y$代入附录 R_0 A 中情形 I 对 的公式，并逐个化简各分支。一般移动 $(i,\ k) \mapsto (i-2,\ k+1)$ 变为 $(x,\ y) \mapsto (x,\ y+1)$，而六个例外分支则恰好如图所示。 □

记

$$G(x,y) = (x, y+1)$$

为引理 15 中的一般分支。六个例外移动按引理中所示顺序记作 P, Q, R, S, A, B： P和 Q 是在 (0, 0) 和 $(m-1, m-1)$ 处的孤立点缺陷；R 将 $(m-2, 0)$ 映射到 (0, 2)； S将 (1, 1) 映射到 (0, 1)； A 是直线 $u = t + 1$ 上的缺陷（即$x = y + 1$）； B 是直线 $t = 0$ 上的缺陷（即 $y = 0$），并包括边界点 (0, 1) 和 $(m-2, m-1)$。

命题 12. 假设 $m \equiv 0,2 \pmod 6$。那么 L_0 上的首次回归映射为

$$T_0(x) = \begin{cases} m-2, & x = 0, \\ x+2, & 1 \leq x \leq m-5, \\ m-1, & x = m-4, \\ 2, & x = m-3, \\ 1, & x = m-2, \\ 0, & x = m-1, \end{cases}$$

且返回时间为

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ m-1, & 1 \leq x \leq m-4\ \textit{or}\ x = m-1, \\ 2m-3, & x = m-3, \\ 2m-1, & x = m-2. \end{cases}$$

证明. 固定 $x \in \mathbb{Z}_m$， 并从 $(x,0) \in L_0$出发。

情形 $x = 0$. 根据分支 P,

$$(0,0) \xrightarrow{P} (m-2, 0),$$

所以 $T_0(0) = m-2$ 和 $\rho_0(0) = 1$。

情形 $1 \le x \le m-5$。轨道是

$$(x,0) \xrightarrow{B} (x+1,1) \xrightarrow{G^{x-1}} (x+1,x) \xrightarrow{A} (x+2,x+2) \xrightarrow{G^{m-x-2}} (x+2,0).$$

确实，在车道 $x+1$ 上， $y=1$ 上方的第一个缺陷是 A 点（$x+1$， x）。发生这次跳跃后，轨道位于车道 $x+2$ 上，高度为 $y=x+2$。在这条车道上，唯一可能的 A 点是（$x+2$， $x+1$），其高度 $x+1$ 已经落在当前时钟值之后。特殊点 P， Q， R， S 位于不同的车道上，而 B 分支只出现在 $y=0$ 处，或出现在孤立点 $(0,\ 1)$ 和（$m-2$， $m-1$）处；这些点都不在车道 $x+2$ 上前方的位置。因此，在到达 $y=0$ 之前，剩下的每一步都是一般情形。因此

$$T_0(x) = x+2, \qquad \rho_0(x) = 1+(x-1)+1+(m-x-2) = m-1.$$

情形 $x = m-4$。这里

$$(m-4,0) \xrightarrow{B} (m-3,1) \xrightarrow{G^{m-5}} (m-3,m-4) \xrightarrow{A} (m-2,m-2) \xrightarrow{G} (m-2,m-1) \xrightarrow{B} (m-1,0).$$

So

$$T_0(m-4) = m-1, \qquad \rho_0(m-4) = 1+(m-5)+1+1+1 = m-1.$$

情形 $x = m-3$。 轨道为

$$(m-3,0) \xrightarrow{B} (m-2,1) \xrightarrow{G^{m-4}} (m-2,m-3) \xrightarrow{A} (m-1,m-1) \xrightarrow{Q} (2,2) \xrightarrow{G^{m-2}} (2,0).$$

因此

$$T_0(m-3) = 2, \qquad \rho_0(m-3) = 1+(m-4)+1+1+(m-2) = 2m-3.$$

情形 $x = m-2$。 轨道为

$$(m-2,0) \xrightarrow{R} (0,2) \xrightarrow{G^{m-3}} (0,m-1) \xrightarrow{A} (1,1) \xrightarrow{S} (0,1) \xrightarrow{B} (1,2) \xrightarrow{G^{m-2}} (1,0).$$

因此

$$T_0(m-2) = 1, \qquad \rho_0(m-2) = 1+(m-3)+1+1+1+(m-2) = 2m-1.$$

情形 $x = m-1$。轨道是

$$(m-1,0) \xrightarrow{G^{m-2}} (m-1,m-2) \xrightarrow{A} (0,0).$$

So

$$T_0(m-1) = 0, \qquad \rho_0(m-1) = m-2+1 = m-1.$$

这些情形穷尽了 $x \in \mathbb{Z}_m$。 □

C.4.2 情形 II： $m \equiv 4$ (模 6)

引理 16。 假设 $m \equiv 4$ （模 6）。在坐标 $(x, y) = (i + 2k, k)$ 中，回归映射 R_0变为

$$R_0(x,y) = \begin{cases} (m-2,0), & (x,y) = (0,0), \\ (x+3,y+3), & (x,y) \in \{(m-1,m-1),(m-2,m-2)\}, \\ (x+2,y+2), & \substack{(x,y)\in\{(m-2,0),(0,m-1)\} \text{ or } x\equiv 1+2y \pmod m, \\ 0\le y\le m-3,} \\ (0,1), & (x,y) = (1,1), \\ (x+1,y+2), & x = y+1,\ (x,y) \notin \{(1,0),(0,m-1)\}, \\ (x+1,y+1), & \substack{y=0,\ 2\le x\le m-3, \\ \text{or } (x,y)\in\{(0,1),(m-3,m-2),(m-2,m-1)\},} \\ (x,y+1), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所有运算均模 m进行。

证明。 再次将 $i = x - 2y$和 $k = y$代入附录 A中的情形 II 公式。一般分支变为 $(x,\ y) \mapsto (x,\ y+1)$，例外分支则恰好化简为所示形式。 □

和之前一样，记

$$G(x,y) = (x, y+1)$$

为一般移动。对于奇数车道 $u \in \mathbb{Z}_m$，定义两个 R-高度

$$r_-(u) = \frac{u-1}{2}, \qquad r_+(u) = \frac{u-1}{2} + \frac{m}{2}.$$

它们恰好是以下方程的两个解 $y \in \{0,\ \ldots,\ m-1\}$

$$u \equiv 1 + 2y \pmod m.$$

情形 II 颜色的阅读说明 0。 与情形 I 相比，唯一新增的长缺陷分量是仿射直线 R 上额外的 $x \equiv 1 + 2y$ -分支（模 m）。因此，在阅读命题 13 之前，先对车道进行排序会很有帮助：

族	车道	在证明中的作用
特殊点	$x = 0$	一步即可直接连接到 $m-2$
预备通道	$x = 1,\ 2$	首次遇到情形 II 修复族
一般车道	$3 \le x \le m-7$	奇偶性只会改变.....的顺序缺陷遭遇；在两种奇偶性下，净车道增量为 $+4$，而返回时间为 $m-2$
边界拼接车道	$x \in \{m-6, m-5, m-4, m-3, m-2, m-1\}$	孤立点所在的唯一车道 Q，S 或者顶部的 R-命中会改变一般情形模式，并确定最终的余数 4 拼接

因此，按照这个顺序阅读命题最为清晰：先看特殊车道和预备通道，然后看一般族，最后看六条边界拼接车道。

命题 **命题 13.** 假设 $m \equiv 4$ （模 6）。那么在 L_0 上的首次回归映射由以下给出 y

$$T_0(0) = m-2, \qquad T_0(1) = 4, \qquad T_0(2) = 6, \qquad T_0(x) = x+4\ (3 \le x \le m-7),$$

以及

$$T_0(m-6)=3,\quad T_0(m-5)=m-1,\quad T_0(m-4)=0,$$
$$T_0(m-3)=2,\quad T_0(m-2)=5,\quad T_0(m-1)=1,$$

且返回时间为

$$\rho_0(0)=1,\qquad \rho_0(x)=m-2\quad (for\ 1\le x\le m-7\ or\ x=m-4),$$
$$\rho_0(m-6)=2m-4,\quad \rho_0(m-2)=2m-4,\quad \rho_0(m-5)=m-1,$$
$$\rho_0(m-1)=m-1,\quad \rho_0(m-3)=2m-3.$$

证明。 固定 $x\in\mathbb{Z}_m$，并从 $(x,\ 0)\in L_0$开始。

情形 $x=0$。 根据特殊点分支,

$$(0,0)\xrightarrow{P}(m-2,0),$$

所以 $T_0(0)=m-2$ 且 $\rho_0(0)=1$。

情形 $x=1$。 轨道为

$$(1,0)\xrightarrow{R}(3,2)\xrightarrow{A}(4,4)\xrightarrow{G^{m-4}}(4,0).$$

So

$$T_0(1)=4,\qquad \rho_0(1)=1+1+(m-4)=m-2.$$

情形 $x=2$。 轨道为

$$(2,0)\xrightarrow{B}(3,1)\xrightarrow{R}(5,3)\xrightarrow{G}(5,4)\xrightarrow{A}(6,6)\xrightarrow{G^{m-6}}(6,0),$$

因此

$$T_0(2)=6,\qquad \rho_0(2)=1+1+1+1+(m-6)=m-2.$$

情形 $3\le x\le m-7$ **（一般车道）**。在奇数和偶数子情形中，从 $(x,0)$ 出发的轨道恰好遇到一个 B-停滞（位于 $y=0$）、一次或两次经过 R-分支（取决于奇偶性），以及一个 A-停滞，车道增量总计为 4，返回时间为 $m-2$。

奇数 x**：** 轨道沿着 $B\to G^{x-1}\to A\to G^{\frac{m-x-3}{2}}\to R\to G^{\frac{m-x-5}{2}}$ 前进，遇到高度为 x 的 A-点，以及高度为 r_+ 的上方 R-点（$x+2$）。

偶数 x**：** 轨道沿着 $B\to G^{x/2-1}\to R\to G^{x/2}\to A\to G^{m-x-4}$ 前进，遇到高度为 $x/2$ 的下方 R-点，以及高度为 $x+2$ 的 A-点。

在两种情形下,

$$T_0(x)=x+4,\qquad \rho_0(x)=m-2.$$

情形 $x=m-6$。 这里的轨道是

$$(m-6,0)\xrightarrow{B}(m-5,1)\xrightarrow{G^{\frac{m-8}{2}}}\left(m-5,\frac{m-6}{2}\right)\xrightarrow{R}\left(m-3,\frac{m}{2}-1\right)$$
$$\xrightarrow{G^{\frac{m-6}{2}}}(m-3,m-4)\xrightarrow{A}(m-2,m-2)$$
$$\xrightarrow{Q}(1,1)\xrightarrow{S}(0,1)\xrightarrow{B}(1,2)\xrightarrow{G^{\frac{m-4}{2}}}\left(1,\frac{m}{2}\right)\xrightarrow{R}\left(3,\frac{m}{2}+2\right)\xrightarrow{G^{\frac{m-4}{2}}}(3,0).$$

Thus

$$T_0(m-6)=3,$$

and

$$\rho_0(m-6)=1+\frac{m-8}{2}+1+\frac{m-6}{2}+1+1+1+1+\frac{m-4}{2}+1+\frac{m-4}{2}=2m-4.$$

情形 $x=m-5$。 轨道是

$$(m-5,0)\xrightarrow{B}(m-4,1)\xrightarrow{G^{m-6}}(m-4,m-5)\xrightarrow{A}(m-3,m-3)$$
$$\xrightarrow{G}(m-3,m-2)\xrightarrow{B}(m-2,m-1)\xrightarrow{B}(m-1,0).$$

因此

$$T_0(m-5)=m-1,\qquad \rho_0(m-5)=1+(m-6)+1+1+1+1=m-1.$$

情形 $x=m-4$**.** 轨道为

$$(m-4,0)\xrightarrow{B}(m-3,1)\xrightarrow{G^{\frac{m}{2}-3}}\left(m-3,\frac{m-4}{2}\right)\xrightarrow{R}\left(m-1,\frac{m}{2}\right)\xrightarrow{G^{\frac{m}{2}-2}}(m-1,m-2)\xrightarrow{A}(0,0).$$

So

$$T_0(m-4)=0,\qquad \rho_0(m-4)=1+\left(\frac{m}{2}-3\right)+1+\left(\frac{m}{2}-2\right)+1=m-2.$$

情形 $x=m-3$**.** 轨道为

$$(m-3,0)\xrightarrow{B}(m-2,1)\xrightarrow{G^{m-4}}(m-2,m-3)\xrightarrow{A}(m-1,m-1)\xrightarrow{Q}(2,2)\xrightarrow{G^{m-2}}(2,0).$$

因此

$$T_0(m-3)=2,\qquad \rho_0(m-3)=1+(m-4)+1+1+(m-2)=2m-3.$$

情形 $x=m-2$**.** 轨道为

$$(m-2,0)\xrightarrow{R}(0,2)\xrightarrow{G^{m-3}}(0,m-1)\xrightarrow{R}(2,1)\xrightarrow{A}(3,3)$$
$$\xrightarrow{G^{\frac{m-4}{2}}}\left(3,\frac{m}{2}+1\right)\xrightarrow{R}\left(5,\frac{m}{2}+3\right)\xrightarrow{G^{\frac{m-6}{2}}}(5,0).$$

因此

$$T_0(m-2)=5,$$

and

$$\rho_0(m-2)=1+(m-3)+1+1+\frac{m-4}{2}+1+\frac{m-6}{2}=2m-4.$$

情形 $x=m-1$**.** 轨道是

$$(m-1,0)\xrightarrow{G^{\frac{m}{2}-1}}\left(m-1,\frac{m}{2}-1\right)\xrightarrow{R}\left(1,\frac{m}{2}+1\right)\xrightarrow{G^{\frac{m}{2}-1}}(1,0).$$

因此

$$T_0(m-1)=1,\qquad \rho_0(m-1)=\left(\frac{m}{2}-1\right)+1+\left(\frac{m}{2}-1\right)=m-1.$$

这些情形涵盖了 $x\in\mathbb{Z}_m$。 □

C.5 拼接图与完备化

前面的命题确定了显式的首次回归映射 T_c 和返回时间 ρ_c。现在，我们将诱导车道映射的单周期步骤归纳为关于算术族块的有限拼接置换陈述。

命题 14（路线 E 通道映射的缺陷集拼接标准形）。 已知首次返回公式后，缺陷集不会在主体算术游程内部产生任何新的长程动力学。相反，它只决定有限个有序算术族块的切分位置，以及这些块如何拼接在一起。将孤立桥接顶点并入相邻的算术游程后，块数据如下。

颜色 2。

case	有序族块	拼接
所有偶数 $m \geq 6$	$F_{2,\,1} = (0,\ 1)$; $F_{2,\,2} = (m-1, m-2, \ldots, 2)$	(1 2)

颜色1。

case	有序族块	拼接
$m \equiv 2$ (模 6)	$F_{1,\,1} = (0,\ 2,\ 5,\ \ldots,\ m-3)$; $F_{1,\,2} = (1,\ 4,\ 7,\ \ldots,\ m-1)$; $F_{1,\,3} = (3,\ 6,\ 9,\ \ldots,\ m-2)$	(1 2 3)
$m \equiv 0$ (模 6)	$F_{1,\,1} = (0,\ 2,\ 5,\ \ldots,\ m-1)$; $F_{1,\,2} = (3,\ 6,\ 9,\ \ldots,\ m-3,\ 1)$; $F_{1,\,3} = (4,\ 7,\ 10,\ \ldots,\ m-2)$	(1 2 3)
$m \equiv 4$ (模 6)	$F_{1,\,1} = (0,\ 2,\ 5,\ 11,\ \ldots\ldots,\ m-5 1)$; $F_{1,\,2} = (3,\ 9,\ 15,\ \ldots\ldots,\ m-17,\ 13,\ \ldots\ldots,\ m-3)$; $F_{1,\,3} = (4,\ 6,\ 8,\ \ldots\ldots,\ m-2)$	(1 2 3)

颜色 0。

case	有序族块	拼接
$m \equiv 0,2$（模 6）	$F_{0,1} = (0, m-2)$; $F_{0,2} = (1, 3, 5, \ldots, m-3)$; $F_{0,3} = (2, 4, 6, \ldots, m-4)$; $F_{0,4} = (m-1)$	(1 2 3 4)
$m \equiv 10$ （模 12）	$F_{0,1} = (0, m-2, 5, 9, \ldots, m-1, 1)$; $F_{0,2} = (4, 8, \ldots, m-6)$; $F_{0,3} = (3, 7, \ldots, m-3)$; $F_{0,4} = (2, 6, \ldots, m-4)$	(1 2 3 4)
$m \equiv 4$ (模 12)	$F_{0,\,1} = (0,\ m-2,\ 5,\ 9,\ \ldots\ldots,\ m-3)$; $F_{0,\,2} = (2,\ 6,\ \ldots\ldots,\ m-6)$; $F_{0,\,3} = (3,\ 7,\ \ldots\ldots,\ m-1,\ 1)$; $F_{0,\,4} = (4,\ 8,\ \ldots\ldots,\ m-4)$	(1 2 3 4)

每一行中，映射 T_c 都会在每个块内前进到下一项，而$F_{c,\,j}$ 的终端点映射到$F_{c,\,\pi_c(j)}$的初始点。因此，每个 T_c 都是一个单一的 m-循环。

证明。 对于 T_2，命题 7给出

$$T_2(0) = 1, \qquad T_2(1) = m-1, \qquad T_2(2) = 0, \qquad T_2(x) = x-1 \quad (3 \leq x \leq m-1),$$

这恰好是块 $F_{2,\,1}$，$F_{2,\,2}$内部的后继规则，其拼接置换为 $\pi_2 = (12)$。

对于颜色 1，命题 10 给出情形 I 的公式，命题 11 给出情形 II 的公式。在情形 I 中，一般情形的规则 $x \mapsto x+3$ 产生三个较长的算术族，而特殊值 0，$m-3$，$m-2$，$m-1$给出显示的块中记录的从末端到起始位置的跳跃。在情形 II 中，偶数规则 $x \mapsto x+2$ 和奇数规则 $x \mapsto x+6$ 产生三个显示的块，特殊值 0，1，2，$m-3$，$m-2$，$m-1$则再次仅决定块与块之间的跳跃。因此，在每个同余类中，诱导出的拼接置换为 $\pi_1 = (12\,3)$。

对于颜色 0，命题 12 给出了采用一般规则 $x \mapsto x+2$的情形 I 公式，而命题 13 给出了采用一般规则 $x \mapsto x+4$的情形 II 公式。在情形 I 中，特殊值 0、$m-4$、$m-3$、$m-2$、$m-1$将奇数和偶数算术族划分为所展示的四个

块。对于情形 II，我们详细说明非平凡的闭合情形，因为这一行的记账工作最为繁琐。一般规则为 $x \mapsto x+4$，适用于 $3 \le x \le m-7$。若 $m \equiv 10 \pmod{12}$，命题 13 给出特殊值

$$T_0(0) = m-2, \quad T_0(m-2) = 5, \quad T_0(m-1) = 1, \quad T_0(1) = 4,$$

$$T_0(m-6) = 3, \quad T_0(m-3) = 2, \quad T_0(m-4) = 0.$$

因此，轨道片段为

$$0 \to m-2 \to 5 \to 9 \to \cdots \to m-1 \to 1,$$

$$4 \to 8 \to \cdots \to m-6, \qquad 3 \to 7 \to \cdots \to m-3, \qquad 2 \to 6 \to \cdots \to m-4,$$

它们 恰好是显示的块 $F_{0,\,1}$，$F_{0,\,2}$，$F_{0,\,3}$，$F_{0,\,4}$。它们的终端像为 e

$$1 \mapsto 4, \qquad m-6 \mapsto 3, \qquad m-3 \mapsto 2, \qquad m-4 \mapsto 0,$$

因此，$F_{0,\,1}$，$F_{0,\,2}$，$F_{0,\,3}$，$F_{0,\,4}$ 的终端映射到 $F_{0,\,2}$，$F_{0,\,3}$，$F_{0,\,4}$，$F_{0,\,1}$ 的初始点，得到拼接置换 (1 2 34)。若 $m \equiv 4 \pmod{12}$，则相同的一般情形规则与

$$T_0(0) = m-2, \quad T_0(m-2) = 5, \quad T_0(m-3) = 2, \quad T_0(m-6) = 3, \quad T_0(1) = 4, \quad T_0(m-4) = 0$$

给出这些块

$$0 \to m-2 \to 5 \to 9 \to \cdots \to m-3,$$

$$2 \to 6 \to \cdots \to m-6, \qquad 3 \to 7 \to \cdots \to m-1 \to 1, \qquad 4 \to 8 \to \cdots \to m-4,$$

其终端像为

$$m-3 \mapsto 2, \qquad m-6 \mapsto 3, \qquad 1 \mapsto 4, \qquad m-4 \mapsto 0.$$

再次，终端映射到下一个显示块的初始点，因此拼接置换为 (1 23 4)。所以在每个同余类中，诱导的拼接置换为 $\pi_0 =$ (12 3 4)。

因此，引理 14 的假设在每一行中都成立。由于每个显示的 π_c 都是单循环，每个诱导的车道映射 T_c 都是一个单 m循环。 □

对于颜色 2，命题 14 恢复了推论 3中已经使用的循环顺序。对于颜色 1 和0，其余推论将命题 14与首次返回公式中的返回时间和结合起来。

推论 4。 如果 $m \equiv 0{,}2 \pmod 6$，那么 R_1 是一个单 m^2循环。

证明。在情况 I 中，14显示出 T_1 是一个单 m循环。此外，命题 10 给出 s

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m} \rho_1(x) = \underbrace{2}_{x \in \{0, m-2\}} + \underbrace{(m-4)(m+2)}_{\text{generic}} + \underbrace{2(m+3)}_{\text{boundary}} = m^2.$$

现在应用引理9。 □

推论 5. 如果 $m \equiv 4$ (模 6)，那么 R_1 是一个单一的 m^2-循环。

证明. 在情形 II 中，命题 14表明 T_1 是一个单一的 m-循环。此外，命题 11给出

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}_m}\rho_1(x)=\underbrace{3}_{\text{imm.}}+\underbrace{(m+3)}_{x=2}+\underbrace{\tfrac{m-6}{2}(m+2)}_{\text{gen. even}}+\underbrace{\tfrac{m-6}{2}(m+4)}_{\text{gen. odd}}+\underbrace{2(m+6)}_{\text{bdy.}}=m^2.$$

因此引理 9适用。 □

推论 6. 对于每个偶数 $m\geq 6$，回归映射 R_1 在 P_0上是一个单一的 m^2循环。

证明。 结合推论4 和5。 □

推论 7. 如果 $m\equiv 0,2$（模 6），那么 R_0 是一个单一的 m^2循环。

证明。 在情形 I 中，命题 14 表明 T_0 是一个单一的 m循环。此外，命题12 给出

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}_m}\rho_0(x)=\underbrace{1}_{x=0}+\underbrace{(m-3)(m-1)}_{\text{generic}}+\underbrace{(2m-3)}_{x=m-3}+\underbrace{(2m-1)}_{x=m-2}=m^2.$$

引理9 现在适用。 □

推论 8. 若 $m\equiv 4$（模 6），则 R_0 是一个单一的 m^2-循环。

证明. 在情形 II 中，命题 14表明 T_0 是一个单一的 m-循环。此外，命题 13 给出

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}_m}\rho_0(x)=\underbrace{1}_{x=0}+\underbrace{(m-6)(m-2)}_{\text{generic}}+\underbrace{2(2m-4)}_{x\in\{m-6,m-2\}}+\underbrace{2(m-1)}_{x\in\{m-5,m-1\}}+\underbrace{(2m-3)}_{x=m-3}=m^2.$$

引理9 完成了证明。 □

Coro论 9. 对于每个偶数 $m\geq 6$，回归映射 R_0 在 P_0上是一个单一的 m^2-循环。

证明. 结合推论7 和8。 □

D $m=4$的显式分解

对于 $m=4$，通过在每个顶点处指定方向三元组 $(i,j,k)\in(\mathbb{Z}_4)^3$ (d_0,d_1,d_2) 来定义方向指派，该三元组的取值为 $\in\{0,1,2\}^3$,，其中 $0,1,2$ 分别对应方向 $+i,+j,+k$。对于固定的 i 和坐标 (j,k)，表中的条目是三位数字串 $d_0d_1d_2$。

$i=0$

j \ k	0	1	2	3
0	210	012	120	021
1	201	021	120	210
2	120	012	201	210
3	201	201	210	102

$i=1$

j \ k	0	1	2	3
0	120	210	120	210
1	102	021	201	012
2	021	201	210	120
3	210	201	012	201

$i=2$

j \ k	0	1	2	3
0	021	210	201	021
1	012	201	120	210
2	210	120	210	102
3	102	102	012	210

$i=3$

j \ k	0	1	2	3
0	021	201	012	120
1	210	210	120	021
2	201	021	201	210
3	201	120	201	210

上面的方向表就是有限见证。为了便于印刷阅读，这里不再列出完整的 64项颜色循环；它们存储在补充文件 `m4_witness.json` 和`m4_cycle_lists.txt`中。这些文件记录了从 (0, 0,0) 开始迭代得到的三个颜色轨道，以及用于自动执行有限审计的脚本 `verify_m4_witness.py`：

1. 检查每个表项都是 (0, 1,2) 的一个置换；2. 使用该表沿着每种颜色从 (0,0,0) 出发，并验证轨道在返回前长度为 64；3. 确认存储的机器可读数据和人类可读循环列表与直接根据该表计算出的结果一致。

由于 D_3(4) 只有 64 个顶点，这项有限验证完全透明：打印出的表格是人类可读的见证，而补充文件则保留了完整的存档轨道数据。

E 验证材料

验证材料侧重于偶数情形 $m \geq 6$，其中涉及最复杂的情形分析。奇数构造在正文中以简短的闭式给出。对于边界情形 $m = 4$，同一目录还包含有限见证 `m4_witness.json` 及其校验程序 `verify_m4_witness.py`。

The 主脚本 `route_e_even.py` 检查：对于每个满足 $6 \leq m \leq 60$ 的偶数 m：

1. 所得方向指派是合法着色（每种颜色都是一个置换，并且每个顶点的三条出弧各不相同）；

2. P_0 上的回归映射与展示的分段公式一致；

3. P_0 上的诱导返回映射均为单个 m^2-循环；

4. 每个颜色置换都是一个哈密顿回路。

两份辅助脚本针对附录中最需要验证的步骤 :

(a) `routee_return_formula_tables_check.py`检查命题9的划分集合、低层词和回归映射公式；(b) `routee_first_return_check.py` 将附录中的首次返回公式与所述截面上的实际回归映射动力学进行核对。

对于更大的偶数 m，主脚本还可以仅通过检查首次回归映射的闭式表达和返回时间和来验证该构造。本文的证明不包含这些计算；它们用于独立验证偶数情形的构造，并作为文中所示闭式公式的回归检查。

参考文献

[1] A. Kotzig, 《两个回路的每个笛卡尔积都可分解为两个哈密顿回路》，数学研究中心，蒙特利尔，报告233（1973年）。

[2] M. F. Foregger，《圈的乘积的哈密顿分解》，《离散数学》24（1978），251–260。[3] J.-C. Bermond，《图、有向图和超图的哈密顿分解》，载于《图论进展》，《离散数学年刊》3（1978），21–28。[4] B. Alspach、J.-C. Bermond 和 D. Sotteau，《圈分解 I：哈密顿分解》，载于《圈与射线》（G. Hahn、G. Sabidussi、R. E. Woodrow 编），《北约高级研究所系列》第301卷，施普林格，1990年，第9–18页。[5] R. Stong，《图的笛卡尔积的哈密顿分解》，《离散数学》90（1991），169–190。[6] D. Witte 和 J. A. Gallian，《综述：凯莱图中的哈密顿圈》，《离散数学》51（1984），293–304。[7] S. J. Curran 和 D. Witte，《有向圈笛卡尔积中的哈密顿路》，载于《图中的圈》，《离散数学年刊》27（1985），35–74。[8] W. T. Trotter 和 P. Erdős，《有向圈的笛卡尔积何时是哈密顿的》，《图论杂志》2（1978），137–142。[9] S. J. Curran 和 J. A. Gallian，《凯莱图和凯莱有向图中的哈密顿圈与路——综述》，《离散数学》156（1996），1–18。[10] K. Keating，《多重哈密顿图与有向图》，载于《图中的圈》，《离散数学年刊》27（1985），81–88。[11] Z. R. Bogdanowicz，《有向圈笛卡尔积向等长圈的分解》，《离散应用数学》229（2017），148–150。[12] Z. R. Bogdanowicz，《识别有向圈笛卡尔积中的哈密顿圈》，《AKCE 国际图与组合学杂志》17（2020），第1期，534–538。[13] I. Darijani、B. Miraftab 和 D. Witte Morris，《有向圈笛卡尔积中的弧不相交哈密顿路》，《当代数学艺术》25（2025），第2期，P2.10。[14] B. Mohar，《着色的 Kempe 等价》，载于《巴黎图论》，《数学趋势》，Birkhäuser，2006年，第287–297页。[15] M. Stiebitz、D. Scheide、B. Toft 和 L. M. Favrholdt，《图的边着色：Vizing 定理与 Goldberg 猜想》，《Wiley 离散数学与优化系列》，Wiley，2012年。[16] D. E. Knuth，《Claude's Cycles》，预印本，2026年3月。 https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/papers/claude-cycles.pdf。[17] K. Aquino-Michaels，《完成 Claude 的圈》，预印本，2026年3月。 https://github.com/no-way-labs/residue。