arXiv:2603.24727v1 [econ.TH] 25 Mar 2026

对抗性选择*

Alma Cohen† Alon Klement‡ Zvika Neeman§ Eilon Solan¶

2026年3月7日

摘要

在许多制度场景中，人们会选择k个项目，以期代表大型总体中主张、意见或特征的潜在分布。我们研究这样一种环境：两个对抗方的偏好众所周知，且彼此对立；这些偏好涉及所选项目。我们提出分位数机制：一方将总体划分为k个互不相交的子集，另一方则从每个子集中选择一个项目。我们证明，在所有可行机制中，该程序最能代表总体情况，并说明其在陪审团遴选、多地区诉讼和委员会组建中的应用。 [100 词语]

关键词：纳什实施、切分选择、陪审团遴选、多地区诉讼、重新划分选区委员会。

JEL分类代码：D82、K40、K14。

*我们感谢 Ron Solan 的宝贵讨论，感谢 Tamar Itzkovitz 提供的宝贵研究协助，也感谢 Geoffroy de Clippel、Jack Fanning、Faruk Gul、Teddy Mekonnen、Fedor Sandomirskiy、Roberto Serrano 和 Leeat Yariv，以及柏林、布朗大学、欧洲大学学院、普林斯顿和特拉维夫各研讨会的与会者提出的意见。Solan 感谢以色列科学基金会的资助，项目编号：211/22。

†哈佛法学院和特拉维夫大学伯格拉斯经济学院。

‡特拉维夫大学布赫曼法学院。§欧洲大学学院和特拉维夫大学伯格拉斯经济学院。

¶特拉维夫大学数学科学学院。

1 引言

在许多制度场景中，决策者必须从一个庞大的总体中遴选出一个小型子集。遴选出的子集旨在代表总体中偏好、主张、意见或特征的潜在分布。然而，子集的规模通常受法律、行政或实际因素的限制，因此无法依赖传统统计抽样理论所提供的大样本保证。因此，核心挑战属于制度层面，而非纯粹的统计层面：如何设计一种遴选程序，使其产生的小样本的经验分布能够紧密追踪总体的分布。

我们研究的是这样一类情境：两个对抗性当事方掌握有关总体的序数信息，并且对所选子集的构成有着相反的偏好。这种结构出现在若干重要场景中，包括：（1）从符合资格的陪审员中遴选陪审团；（2）多地区诉讼（MDL），其目标是从在同一法院立案并合并审理的一组案件中，选出针对同一被告提起的法律案件的代表性样本；以及（3）任命独立选区重划委员会成员。[1]

在每种情形下，都必须从一个总体中选出一个小群体，而该总体中的成员可以根据其对两个当事方之一的相对支持程度进行排序；当事方则对应该选择哪些个人或案件意见不一。问题在于如何设计一种遴选程序，利用当事方掌握的信息，选出一个构成最能反映总体中意见或特征分布的样本。

形式上，我们考虑一个由n 个排序项目组成的总体，但其排序未知。两名参与者观察到该排序，并且对这些项目有着相反的偏好。一名参与者偏好排名较高的项目，另一名参与者则偏好排名较低的项目。目标是选出一个大小为k的代表性样本。

这个问题可以看作是在无知之幕后进行设计，并可建模为纳什实施问题（Maskin，1999年）。规则

[1]其他作者在选择仲裁员、法官合议庭和公民议会成员的背景下考察了这一问题。参见下文所列参考文献。

规范互动的规则必须在事前选定，即在各方偏好尚未确定之前；而在互动过程中，偏好被假定为共同知识。因此，设计目标是选出一套规则，使其在偏好的每一种可能实现情况下都能取得良好效果。

出于多种原因，从实施角度来看，我们所研究的问题既易于处理，也颇有意义。首先，我们所考察的应用都只涉及两方，他们参与的是一场零和博弈。因此，可以合理地假设，他们对总体的排序完全相反或几乎完全相反。其次，我们所考察的应用都满足这样一个条件：理论分析所依赖的完全信息假设是合理的。事实上，在这三种应用中，相关各方对于待选个体或项目拥有相同的信息。第三，在这三种应用中，目标都是选取一个能够代表整个总体的小样本。

我们通过抽样程序生成的累积分布与整个总体的累积分布之间的距离，来评估所选样本的“代表性”。我们提出了一种选择规则，称为分位数机制。该规则仅使用参与者的序数排名信息来构造样本，使其在项目分布可能为任意分布的情况下，按照三种不同的距离度量都具有最大的代表性：柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫（KS）、L_1，以及克拉默-冯·米塞斯统计量（CvM）。

分位数机制受到切蛋糕文献中的切分选择程序启发（Brams andTaylor, 1996）。一名参与者将包含 n 个项目的总体划分为 k 个不相交集合，另一名参与者则从每个集合中选择一个项目。[2] 分位数机制建立在这样一个观察之上：负责划分总体的参与者——假设是偏好高排序项目的参与者——预料到另一名偏好低排序项目的参与者会从每个集合中选择排序最低的项目。因此，第一名参与者有动机将所有排序最高的项目放入最小的集合，将接下来排序较高的项目放入次小的集合，依此类推。同样，如果偏好低排序项目的参与者被选来划分总体，那么她就会有相反的动机，把所有排序最低的项目放入最小

[2]本文中，“划分”指由不相交集合构成的集合；这些集合不必覆盖整个总体。

的集合，将接下来排序较低的项目放入次小的集合，依此类推。重要的是，分位数机制具有对称性：无论由第一名还是第二名参与者进行划分，它都会产生相同的选择集合，即所选样本。

我们的主要结论是，分位数机制在上述三种距离度量下，都能产生最具代表性的样本。具体而言，分位数机制优于上述情境中目前使用的所有机制，包括随机选择，以及陪审团遴选和多地区诉讼中使用的淘汰机制。[3] 此外，我们证明，由分位数机制获得的样本严格优于任何其他同等大小的样本。

本文其余部分安排如下。下一节将详细介绍上文提到的三个现实场景：陪审团遴选、多地区诉讼案件选择，以及独立选区重划委员会成员的遴选。第 3 节回顾相关理论文献。第 4 节构建模型。第 5 节介绍三种备选的“代表性”统计量：柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫（KS）、L_1, 和克拉默-冯·米塞斯统计量（CvM），并给出主要结果。第6 节包含对主要结果的三项扩展。第一项结果表明，任何分位数选择都可以通过某种切分选择机制实现。第二项结果将主要结果扩展到两位参与者并非偏好相反的情形，第三项结果则讨论只有一位参与者的情形。最后，第7 节给出总结性评论。所有证明均放在附录中。

[3]分位数机制也优于直接机制：在该机制中，两个参与者都报告排序。如果报告一致，机制就根据所报告的排序选出尽可能好的样本（正如我们的分析所示，这会选出与分位数机制相同的分位数）；如果报告不同，机制则随机抽取一个大小为k的样本。这是因为，当两个参与者的偏好截然相反时，诚实报告并非直接机制的纳什均衡：如果一个参与者严格倾向于诚实报告，另一个参与者就会倾向于不诚实报告，反之亦然。因此，直接机制只能实现一种选择规则，使两个参与者都认为该规则与随机选择无差别。

2 在陪审团遴选、多地区诉讼及重新划区委员会中的应用

本节考察三种会面临从庞大总体中选择一个规模较小且具有代表性的子集这一难题的不同场景：陪审团遴选、多地区诉讼，以及独立选区重划委员会成员的任命。我们简要概述目前在每种场景中如何进行遴选。正如我们将在下文各节中所展示的，在所有这些场景中，以分位数机制取代现行程序，都能提升所选个人或项目的“代表性”。

陪审团遴选。 根据《美国法典》第28编第1863条，各美国联邦地区法院均须制定并实施书面计划，以规范陪审员的随机选择。该计划必须旨在确保选出的陪审员能够公平代表居住在法院所在地区或分区社区内的居民。公平代表要求源自《美国宪法第六修正案》，其解释依据为美国最高法院在*Taylor* 诉 *Louisiana* 案419 U.S. 522（1975）和*Duren* 诉 *Missouri* 案439 U.S. 357（1979）中的裁定。

陪审团遴选程序始于编制主名单。随后，从主名单中随机抽取一部分符合条件的候选陪审员，并传唤至法院接受进一步评估。最终陪审团将从中选出的合格人员群体称为候选陪审员团(Kovera 和 Cutler，2013年）。在遴选过程中，原告（刑事案件中则为控方）和被告可以申请以“有因”理由排除特定陪审员。此外，双方各有一定数量的无因回避权，可以不说明理由而剔除陪审员；被剔除的陪审员由同一天被传唤的其他候选陪审员递补（Wagner，1981年）。[4]

[4]各司法辖区允许当事人行使回避权的具体程序差异很大，有时由法官酌情决定。最常用的程序有两类。在剔除式程序中，当事人可以先观察所有可能参与其审判的陪审员，并对他们进行深入询问，然后再行使回避权（这一询问过程称为陪审员资格审查）。相比之下，在罢免与替换程序中，较小的

实证证据一再表明，少数群体在陪审员候选池和候选陪审员团中的代表性不足。例如，Rose、Casarez 和 Gutierrez(2018年）记录了联邦陪审员候选池中普遍存在的少数群体代表性不足：候选陪审员团中少数群体人数通常有所缺失，绝对数量不多，但从概率角度看，这一缺失会显著影响是否有少数群体陪审员入选。相关研究中，Anwar、Bayer 和 Hjalmarsson(2022年）指出，陪审团成员构成中的地域代表性差异，与候选陪审员池中已经存在的差异密切吻合。

对某些群体的错误代表，在已组成的陪审团中也有文献记载。Anwar、Bayer 和 Hjalmarsson(2012年)发现，候选池构成对案件结果的简约式效应，远大于仅依据已组成陪审团中陪审员种族得出的简单相关性所显示的效应，这与以下解释一致：律师选择行为及其他策略性应对，会干扰基于已组成陪审团特征所作的比较。Anwar、Bayer 和 Hjalmarsson (2014)进一步表明，检察官不成比例地排除较年轻的候选陪审员，而辩护律师不成比例地排除较年长的候选陪审员，导致相较于年龄分布的中间部分，分布两端的候选陪审员入选概率都较低。Flanagan(2018年)报告称，随机抽选的候选池的人口构成会因果性地影响定罪概率，且律师会据此调整其无因回避策略。相比之下，Diamond 等人(2009)发现，彼此对立的无因回避平均而言可能会部分抵消；而陪审团规模等结构性特征，则会对少数群体代表性产生独立且更稳定的影响。

多地区诉讼。 **多地区诉讼（MDL）是**依据《美国法典》第28编第1407条设立的一种联邦程序机制。对于待审于不同联邦地区、但涉及共同事实问题的民事诉讼，该机制允许将其集中移送至单一地区法院（移送法院），以协调进行审前程序。多地区诉讼案件在联邦法院案件总表中占据相当大的比例，有时甚至占所有联邦民事案件的40%以上（Gluck 和 Burch，2021）。尽管移送法院——所有案件集中于此——原则上只负责监督审前程序，但实际上，超过98%的此类案件都在该法院结案，通常以和解或驳回告终（

依次向双方当事人展示一组陪审员。当事人可以观察并询问所展示的这组人（有时只有一名陪审员），但必须在不知道下一批候选陪审员身份的情况下，对这组人行使回避权（Moro和 Van der Linden，2024年）。

。Fallon，2020）。

由于当事人和法院都需要有关多地区诉讼索赔可能价值的可靠信息，却又无法切实地为每项索赔都进行完整审判，法官往往会采用风向标审判程序来估算这些价值。“风向标”一词源于一种做法：在领头羊（阉羊）身上挂一只铃铛，以引导羊群。这一说法强调，这些审判旨在为其余案件的解决提供指引。风向标审判的结果不会对未参加相关审判的诉讼当事人产生排除效力或约束效力，而仅作为信息依据。不过，这种方法的价值取决于所选案件是否真正能代表范围更广的主张群体（Fallon、Grabill和Wynne，2007年；Lahav，2007年，2018年；Whitney，2019年）。

移送案件法官采用风向标审判，以促进复杂多地区诉讼案件的高效解决。这些审判旨在通过实际审判收集有关责任、因果关系和抗辩的信息；阐明陪审团如何看待证据和专家证词；为和解谈判中其余案件的估值确立基准或参考点，进而往往促成全面和解；并协助法院解决反复出现的法律和证据问题。

因此，风向标案件的选择过程至关重要，因为这取决于所选案件的代表性。法院会采用多种方法选择风向标案件，通常分为当事人选择、随机选择和司法选择。采用当事人选择方法时，原告和被告各自选择指定数量的案件。或者，也可以从案件总体中随机抽取案件，或通过分层抽样进行抽取。最后，法院可以选取一个代表性样本，通常是在听取当事人建议并运用某些随机抽样方法之后作出选择（Whitney，2019；Fallon，2020）。

尽管法律文献对通过上述技术选出的风向标审判的代表性提出了重大关切，但对这些选择过程进行系统性实证评估的研究仍然有限。Brown、Holian和Ghosh(2014年)分析了万络

多地区诉讼（MDL）程序中的案件，并证明由原告方代表选出的案件与随机选择下的预期结果存在显著偏差，而被告选出的案件则未出现类似偏差。然而，这些结果来自单一的多地区诉讼程序。Villalón (2022年)比较了两个多地区诉讼中的案件选择做法，并得出结论：随着合并案件池规模的扩大，法官相较于由当事方主导的选择，会更加倾向于随机选择。

选举 独立 选区重划 委员会。 选区重划是重新划分立法选区边界的过程，即将选民划分到不同的地理区域，让他们从中选出自己的代表。这一过程影响各级政府的选区，包括地方议会、州立法机构和美国众议院。边界的划定方式决定了哪些选民被划分在一起，直接影响哪些社区能够获得代表，以及哪些候选人能够赢得选举。

选区重划通常在人口普查之后启动。联邦人口普查每十年进行一次，在每个新十年的开端举行。这一周期的法律依据源于美国最高法院在20世纪60年代确立的“一人一票”宪法原则。在 Reynolds v. Sims案（377 U.S. 533, 1964）和 Wesberry v. Sanders案（376 U.S. 1, 1964）等案件中，法院裁定立法选区的人口必须大致相等。

由于人口会随时间变化，实际上各州都必须在每次人口普查后重新划定选区边界，以确保这种平等得以维持（Karlan，1992）。虽然选区边界每十年至少必须重划一次，但有些州允许更频繁地进行选区重划，而另一些州则禁止在十年周期中途变更（Cox，2004）。

各州采用不同的程序来决定由谁划定选举区边界。当立法者自行划定选区边界时，便会产生利益冲突：政客可能实际上是在选择自己的选民，而不是由选民选择其代表。因此，现任者可能会进行杰利蝾螈式划区，即通过操纵选区边界来影响选举结果（Ima-mura，2022）。

为缓解这一顾虑，一些州，例如科罗拉多州、密歇根州和加 -

利福尼亚州，将选区重划工作交由独立公民委员会负责。[5] 这些委员会的成员通过一套程序选出，该程序将随机抽选与无党派机构（如州审计官或司法小组）开展的多阶段审查相结合。这些程序通常会对委员会的党派构成设定限制，例如确保民主党和共和党成员人数相等，并由一组独立或无党派委员共同组成委员会（Torchinsky 和 Polio (2022年）。其目标是组建一个能够反映该州政治和人口多样性的委员会，从而更有可能制定出公平的选区地图。

3 相关文献

与本研究所探讨的问题密切相关的理论文献相对有限。De Clippel、Eliaz 和 Knight（2014）将仲裁员的遴选分析为一个纳什实施问题。他们提出了一种称为短名单程序的程序：一方从n_2^{+1}个n 项目中选择一个子集，另一方再从该子集中选择一项。他们证明，这一机制能够实施一种帕累托有效结果，且该结果对双方而言都帕累托优于中位数选项。[6]

当 $k = 1$ 时，他们的候选名单程序与我们的分位数机制一致。不过，我们的贡献在几个方面有所不同。首先，我们研究的是选择$k \geq 1$ 个项目，而非单个仲裁员。其次，他们的目标是帕累托效率，而我们关注的是代表性，以样本分布与总体分布之间的距离来衡量。（重要的是，在我们的设定中，分位数机制同样具备帕累托效率。）第三，他们允许采用一般的偏好剖面，而我们关注的是偏好严格对立的环境。[7]

[5]科罗拉多州独立选区重划委员会，委员遴选流程，https://redistricting.colorado.gov/content/commissioner-selection-process；Jason Torchinsky 和 Dennis W. Polio，独立到何种程度才算过度独立？：选区重划委员会与不受问责的行政国家的扩张，《乔治城法律与公共政策杂志》20卷，533、543–550页（2022年）。[6]另见Barberà 和 Coelho（2022年），其比较了该程序的不同变体，这些变体允许各方决定提议方的角色以及短名单的规模。另见Barberà 和 Coelho（2024年），其将该程序推广至在仲裁员和法官小组遴选情境下选择$k \geq 1$ 个备选项。[7]关于将我们的框架扩展至更一般的偏好剖面，请参见第6.2节。

近来，Bogomolnaia、Holzman 和 Moulin (2023) 研究了这一问题的一个更一般版本：可能有两名以上的代理人，他们需要从给定的集合中选择一个备选项。他们证明，根据模型参数的不同，任何能保证代理人获得最高福利水平的机制，都必须结合随机独裁的变体与否决投票机制，或完全采用随机方式。他们的目标是福利最大化，而我们的评判标准是分布代表性。

理论计算机科学中还有一些关联性较弱的相关文献，研究如何在 人口统计约束下设计具有代表性的公民议会。例如，参见 Flanigan 等人 （2021）及其中的参考文献。该领域的论文旨在满足不同（可观测）人口统计群体在议会中得到公平代表这一约束的同时，最大化个体的入选概率。相比之下，我们考虑的是这样一种情形：社会规划者无法观测项目的底层排序，只能依靠各参与者掌握的序数信息。

4 模型

一个总体由n 个项目组成：$x = (x_1,.....x_n)$ 。这些项目按照完全且传递的排序 $\succsim$ 进行排序。一位对该排序不掌握任何信息的社会规划者，希望以我们将在下文定义的方式，选出一个规模为k的、能够代表总体的样本。社会规划者可以向参与者 I 和 II 寻求帮助；他们了解该排序，但对选定样本有各自不同的偏好：玩家 I 偏好排序较高的项目，而玩家 II 偏好排序较低的项目。

遴选程序或机制是一种博弈形式，用于选择一组k 个索引（可能是随机选择）。机制为每位参与者指定一个消息集，并规定从参与者选择的消息到k 个索引所组成的集合的映射（如果机制是确定性的），或到k 个索引所组成集合上的分布的映射（如果机制是随机的）。该机制会诱导出一个标准式博弈。在这个博弈中，参与者都知道各项目的排序，并同时选择各自的消息，试图分别促成按照排序选出排名靠前和靠后的项目——

。我们聚焦于这个博弈的纳什均衡。

固定总体规模n 和所需样本量$k \leq n$，记作$\mathcal{P}(n, k)$，表示所有大小为k的索引子集 $\{1, ..., n\}$ 的集合。

机制的正式定义如下：

定义 1（机制）一个机制是一个元组 $M = \langle A_I, A_{II}, f \rangle$ 其中

- AI 是玩家 I 的有限消息集，
- $AI\ I$ 是玩家 II 的有限消息集，
- f 是一个函数，对于每一对行动 $aI \in AI$ 和 $aII \in AII$，返回 $\mathcal{P}(n, k)$ 上的一个概率分布。

备注 1 我们将机制描述为同时行动博弈形式。这种表示方式并不失一般性。序贯程序（包括涉及自然行动的程序）也可以使用从扩展式博弈到标准式博弈的标准转换，纳入这一框架进行表示。

机制的结果 是集合 $\mathcal{P}(n, k)$上的一个概率分布。为了分析参与者如何在机制M所诱导的博弈中行动，我们需要描述参与者对 $\mathcal{P}(n, k)$上的概率分布空间的偏好。

定义 2（效用函数）设 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 为一个总体，$\succsim$ 为 x 上的一个排序，且 y 和 y' 为从 x 中抽取的两个包含 k 个项目的样本。玩家 I 的效用函数是一个函数 u_I，它为每个包含 k 个项目的样本赋予一个实数，使得当样本 y 相对于 y'向右移动时，$u_I(y) \geq u_I(y')$，或者

$$\#\{j \in \{1, \ldots, k\} : y_j \precsim x_i\} \leq \#\{j \in \{1, \ldots, k\} : y'_j \precsim x_i\}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

同样，玩家 II 的效用函数 是一个函数 u_{II}，它为每个包含 k 个项目的样本赋予一个实数，使得只要 y'相对于 y 向右移动，就有 $u_{II}(y) \geq u_{II}(y')$。

注 2 注意，样本“y 相对于 y'向右移动”这一说法等价于要求样本 y 的累积分布函数（*CDF*）满足如下定义：

$$F_y(x_i) \equiv \frac{1}{k} \cdot \#\{j \in \{1,\dots,k\} : y_j \precsim x_i\}, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

一阶随机占优于 y' 的累积分布函数，定义方式类似。等价地，当且仅当“y 相对于 y' 向右移动”这一说法成立时，

$$F_y(x_i) \leq F_{y'}(x_i) \quad \textit{for every } i \in \{1,\dots,n\}.$$

假设参与者的效用函数相对于一阶随机占优是单调的，体现了这样一种假设：玩家 I 偏好排名较高的项目，而玩家 II 偏好排名较低的项目。

对于无法通过随机占优排序的两个样本，我们不对其比较施加任何额外假设。

注 3 虽然在我们的应用中，假设两位参与者的偏好完全相反是自然的，但以下分析并不依赖这一假设。特别是，我们的结果允许存在满足 $u_I \neq -u_{II}$ 的偏好剖面。

由于机制的结果是样本上的概率分布，我们必须明确参与者在这一空间上的效用函数。我们假设参与者的偏好满足冯·诺依曼—摩根斯特恩公理，因此他们是期望效用最大化者。也就是说，参与者对样本上某个概率分布的效用，等于实际实现的样本的期望效用。

机制的具体规定会在参与者之间诱导出一个完全信息博弈，具体如下。

定义 3（机制博弈） 机制博弈是一个三元组 $\langle M,\ u_I,\ u_{II}\rangle$，其中 $M = \langle A_I,\ A_{II},\ f\rangle$ 是一个机制，而 u_I和 u_II 是两位参与者的收益函数。

机制博弈按如下方式进行。

- 固定一个总体 $x = (x_i)_{ni=1}$ 以及一个关于 x 的排序 $\succsim$。

- 观察到 x 和 $\gtrsim$后，玩家 I（分别地，玩家 II）选择 $a \in A_I$ （分别地，$a_{II} \in A_{II}$）。双方同时作出选择。
- 随机按照概率分布k 个索引$S \in \mathcal{P}(n,k)$ $f(a_I, a_{II})$进行选择。
- 博弈的结果是向量$y := (x_s)_{s \in S}$。

玩家 I 的纯策略 是一个函数，它为A_I 中的任意可能输入$x, \gtrsim$指定一条消息；玩家 I 的混合策略 是一个函数，它为A_I 中的任意可能输入$x, \gtrsim$指定一个概率分布。玩家 II 的纯策略和混合策略定义类似。

我们假设参与者在所诱导的博弈中采用纳什均衡，其定义如下：

定义 4（均衡）一对策略$(\alpha_I^*, \alpha_{II}^*)$是纳什均衡，如果对于玩家 I 的任意两种策略 α_I 和玩家 II 的任意两种策略 α_{II}，我们都有

$$\mathbf{E}_{\alpha_I^*, \alpha_{II}^*}[u_I(y)] \geq \mathbf{E}_{\alpha_I, \alpha_{II}^*}[u_I(y)], \quad \forall \alpha_I,$$
$$\mathbf{E}_{\alpha_I^*, \alpha_{II}^*}[u_{II}(y)] \geq \mathbf{E}_{\alpha_I^*, \alpha_{II}}[u_{II}(y)], \quad \forall \alpha_{II}.$$

根据纳什定理，每个机制博弈都存在一个混合策略纳什均衡。

请注意，博弈中存在两种随机化来源。首先，玩家随机选择自己的消息；其次，样本根据f随机抽取。机制博弈完全可能存在一个混合策略纳什均衡。

接下来，我们给出一些选择机制的示例，以说明该模型以及如何利用机制选出代表性样本。第一个示例展示了如何从总体中实现随机样本的抽取。

例1（随机样本）给定总体 $x = (x_i)_{i=1}^n$。实现从总体 x 中选取大小为 k 的随机样本的机制 $M = \langle A_I, A_{II}, f \rangle$ 定义如下：A_I 和 A_{II} 是任意集合，尤其可以是单元素集合。对每个 a_I, a_{II}），函数 f（在 $\mathcal{P}(n,k)$上服从均匀分布，

$a_I \in A_I$ 和 $a_{II} \in A_{II}$。由于参与者的消息不会影响机制的结果，因此，任意一对策略都是相应机制博弈的均衡。

例2（罢免与替换机制）给定一个总体 $x = (x_i)_{i=1}^n$、总体上的一个排序 $\succsim$ 以及样本量 $k \leq n$。程序随机抽取一个大小为 k 的样本，允许玩家 I 否决最多 c 个项目，然后允许玩家 II 否决最多 c 个项目。每个被否决的项目都会从总体中重新随机抽取一个项目来替换，且不放回。程序输出经过这一淘汰过程后保留下来的样本。该程序可以通过一种机制来实现，其中两位参与者的消息集 A_I和 A_{II} 包含所有可能的顺序否决策略。

在均衡中，只要这些项目比从总体中随机抽取的项目更差，每位参与者都会否决样本中自己最不喜欢的 c 个项目（玩家 I 否决排序最低的项目；玩家 II 否决排序最高的项目）。

例3（中位数样本机制）$Flanagan$ 最近提出了一项改进，能够同时改进随机抽样机制和淘汰陪审团机制：*Flanagan (2025)* 建议抽取$2c+1$ 个随机样本，并允许每位参与者否决其中 c 个样本。该程序也可以通过一种机制来实现。在均衡中，每位参与者都会否决自己最不喜欢的 c 个样本，最终机制的结果将是中位数样本。*Flanagan(2025)* 主张，与随机选择和淘汰陪审团机制相比，该程序能够降低选定样本的方差。

下一个例子表明，存在一种机制，对于任何总体$x = (x_i)_{i=1}^n$ 均衡地总是输出中位数项目。

例 4（中位数机制）固定一个总体 $x = (x_i)_{i=1}^n$ 和一个关于$\succsim x$ 的排序。假设 $k = 1$。该机制按如下方式运作：让玩家 I 从总体 x 中选择一个包含 a_I个$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 项目的子集；让玩家 II 从 a_I中选择一个项目；然后选出玩家 II 从玩家 I 所选子集中选出的项目。如上所述，中位数机制等同于*De Clippel、Eliaz 和 Knight(2014)* 提出的候选名单程序。在他们的程序中，一位参与者将 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个项目列入短名单，另一位参与者再从中选择一个项目。

由于玩家 II 想要最小化选定项目的排序，她会选择 a_I 中最小的项目（按照 $\succsim$）。预料到这一点后，想要

最大化选定项目排序的玩家 I 将选择包含 x 中排名前 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 项目的子集（按照 $\succsim$）。

形式上，机制 $M = \langle A_I、A_{II}、f \rangle$ 描述如下。

- AI 是所有包含 $\lceil n_2 \rceil$ 个项目的 $\{1,.....n\}$ 子集的集合。
- AII 包含所有函数 $aI\ I:\ AI \to \{1,.....n\}$，这些函数将每个由 $\lceil n_2 \rceil$ 个项目组成的子集 $aI \subset \{1,.....n\}$ 映射到 aI 中的一个项目。
- $f(aI,\ aII)$ 以概率 1 实施玩家 II 针对玩家 I 的选择所做出的选择，即 $aII(aI)$。

如果 $\succsim$关于 x 的排序是严格的，那么该机制博弈存在唯一的均衡：玩家 I 选择包含最高 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个项目的集合，玩家 II 则选择一个函数，将每个子集 $a_I \subseteq \{1,.....n\}$ 映射到该集合中按 $\succsim$ 排序最靠后的项目。否则，均衡不止一个，但均衡结果总是取自一组项目，即这些项目按照 $\succsim$ 与排序第 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 位的项目等价。

下一个例子介绍一类一般性的机制，我们称之为切分选择机制。在这些机制中，一名参与者需要从索引集合 $\{1,...,n\}$ 中选择$...,n_k$ 个子集（这些子集不一定互不相交），每个子集分别包含k 个索引；另一名参与者则需要从每个子集中选择一个索引。该机制输出第二名参与者选择的$k_1,...,n_k$个索引。通过改变每个集合中的索引数量n，以及对子集之间重叠程度的限制，就可以得到一般性的切分选择机制。例*4*中描述的中位数机制，是一种切分选择机制，其中$\mathrm{k}_1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$且$\mathrm{n}$。

示例 5（切分选择机制）固定一个总体 $x = (x_i)_{i=1}^n$、样本量 k，以及总体 x 上的一个排序 $\succsim$。一个由 k 个互不相交子集组成、各子集大小为 $n_1,...,n_k$, $\sum_i^k n_i \leq n$ 的切分选择机制按如下方式运作。假设不失一般性，$n_1 \leq \cdots \leq n_k$。要求其中一位参与者将索引集合 $\{1,...,n\}$划分为 k 个互不相交的子集，各子集分别包含 $n_1,...,n_k$ 个索引。另一位参与者则从这 k 个子集中各选择一个索引，该机制最终输出所选的 k 个索引。

假设要求玩家 I 选择这些子集（切分），并要求玩家 II 从每个子集中选择一个索引（选择）。在这种情况下，切分选择机制的均衡（在等价结果意义下唯一）是：玩家 I 将排序最高的 n_1 个项目的索引放入第一个集合，将接下来排序最高的 n_2 个项目的索引放入第二个集合，依此类推，直到第 k 个集合；玩家 II 则从每个子集中选择排序最低项目的索引。

要理解这一点，请注意，对于参与者 II，选择参与者 I 所选每个指标集子集中排名最低的项，是一种占优策略。至于参与者 I，设有两个指标集 I_1 和 I_2，其中，由 I_1 所索引的项目中排名最低的项 x^1，排在由 I_2, 索引的排名最低的项 x^2 之后；也就是说，$x^1 \prec x^2$, 。如果 I_1 中还有另一项 x_1' 排在 x^2, 之前，那么参与者 I 可以通过在两项 x_1' 和 x_2, 之间切换而获益，因为这种切换不会影响参与者 II 从 I_1, 中的选择，并且会使从集合 I_2中选出的项排名不降。这一论证表明，参与者 I 选出的 k 个指标子集是有序的：第 i 个指标子集中排名最低的项，排在第 $i+1$ 个子集中排名最高的项之前。

此外，玩家 I 将排名最高的 n_1 个项目放入第一组，将接下来排名最高的 n_2 个项目放入第二组，以此类推，从而使选出的样本尽可能向右偏移，这对他有利。

由此可知，在这种切分选择机制的均衡中，结果包含排名第 $n - n_1 + 1$ 的项目、第 $n - n_1 - n_2 + 1$ 的项目，以此类推。相反，如果由玩家 II 切分、玩家 I 选择，那么在均衡中，结果将包含排名倒数第 n_1、倒数第 $n_1 + n_2$ 的项目，以此类推，直至总体中排名倒数第 $\sum_i^k n_i$ 的项目。

5 最大化代表性

如上所述，我们的目标是找出能够产生最具总体代表性样本的机制。本节将介绍三种代表性度量，它们均定义为样本与总体的累积分布函数（CDF）之间的距离：柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫统计量、L_1-统计量以及克拉默-冯·米塞斯

统计量。这些统计量在统计应用中被广泛使用。[8] 我们将证明，根据这三种度量，下面定义的分位数机制所产生的样本最具代表性。

对于任意总体 $x = (x_i)_{i=1}^n$ 以及关于 x 的排序 $\succsim$，用 F_x 表示x的累积分布函数（CDF）：

$$F_x(x_i) \equiv \frac{1}{n} \cdot \#\{j \in \{1,\dots,n\} : x_j \precsim x_i\}, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}. \tag{2}$$

类似地，对于从x中抽取的包含k 个项目的样本 $y = (y_i)_{i=1}^k$，回顾方程（1）中 y 的样本F_y 的累积分布函数定义。

K柯尔莫哥洛夫-S米尔诺夫统计量。 柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫（KS）统计量（柯尔莫哥洛夫，1933）通过比较样本累积分布函数与总体累积分布函数之间的最大差异，来衡量总体与从该总体中抽取的样本之间的差异。最大差异。

定义 5（KS统计量） 设 x 为总体，$\succsim$ 为关于 x 的排序，并令

[8]另一种常用于经济学文献、用于衡量分布之间距离的备选项是库尔贝克-莱布勒（KL）散度。KL散度比较总体分布（而非累积分布函数）与样本分布。对于每个 $i \in \{1,\dots, n\}$，记$P_x(x_i) = \#\{j : x^j = x_i\}$ 以及 $P_y(x_i) = \#\{j : y^j = x_i\}$，KL 散度定义为

$$\mathrm{KL}(x,y) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{P_x(x_i)}{P_y(x_i)}\right).$$

在我们的设置中，有两个理由不使用这一度量。首先，当总体中项目的等价类数量大于k时，必然存在$i \in \{1,\dots, n\}$，使得$F_y(x_i) = 0$，此时 KL 散度没有定义。其次，即使总体中项目的等价类数量不超过k，使 KL 散度最小的样本也未必能代表总体。例如，考虑一个由两类项目（红色和蓝色）组成的总体。假设总体中有一个红色项目和 99 个蓝色项目，因此$n = 100$，并假设$k = 2$。使 KL 散度最小的样本是各包含一个项目的两类项目组成的样本。然而，包含两个蓝色项目的样本更能代表总体。

另一种常用的分布间距离度量是p-瓦瑟斯坦距离。当总体中的项目之间存在自然距离时，可以应用这一度量，而我们所考虑的应用场景并非如此。在以下项目间的自然距离定义下：若 x_i 与x^j 之间没有其他项目，则两者的距离为 0；否则，距离为 1 加上严格位于x_i 与x^j 之间的项目数。如果$p = 1$，那么这一距离度量等价于L_1-统计量，因此分位数机制在这一度量下也是最优的。

y 是从 x 中抽取的大小为 k 的样本。x 和 y 的KS统计量为

$$\mathrm{KS}(x,y) \equiv \max_{1\le i\le n} |F_x(x_i) - F_y(x_i)|.$$

因此，如果样本y 使 KS统计量最小，我们就称其为 KS 最优；如果某个机制对每个总体都能产生 KS 最优样本，我们就称该机制为 KS 最优。

定义 6（KS 最优性）如果样本y是总体 x 的 *KS* 最优样本，则

$$\mathrm{KS}(x,y) = \min_{y'\in\mathcal{P}(n,k)} \mathrm{KS}(x,y').$$

如果对于每个总体 x，与机制 M 对应的机制博弈的所有（可能是混合策略的）均衡，都以1的概率将结果赋予总体 x 的 *KS* 最优样本，则称机制 M为 KS 最优机制。

KS 最优性的定义非常严格；它要求任何可能在M的均衡中获得的样本，按照 KS统计量衡量，都不劣于任何其他样本。

L_1 **S统计量**。L_1 统计量通过衡量累积分布函数之间的平均距离来比较总体和样本。与关注最大偏差的 KS统计量不同，L_1 统计量汇总了整个分布范围内的差异。在尾部噪声较为重要的情形下，人们通常更倾向于使用该统计量。

定义 7（L_1 统计量）设 x 为总体，$\succsim$ 为 x 上的一个排序，y 为从 x 中抽取的大小为 k 的样本。x 和 y 的 L_1 统计量为

$$L_1(x,y) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |F_x(x_i) - F_y(x_i)|.$$

样本和机制的L_1-最优性，定义方式与样本和机制的 KS 最优性类似。

定义 8（L_1-最优性）若样本 y 对总体 x 是 L_1-最优的，则

$$L_1(x,y) = \min_{y'\in\mathcal{P}(n,k)} L_1(x,y').$$

如果对于每个总体 x，机制博弈 M 所对应的所有（可能是混合的）均衡都以概率1 分配给 x 的 L_1-最优样本，则机制 M 是 L_1-最优的。

Cramér-von Mises 统计量。 Cramér-vonMises（CvM）统计量（Cramér, 1928年；von Mises，2013年）通过测量总体与样本的累积分布函数之间的 均方距离来进行比较。与 L_1 统计量相比，它对噪声尾部更敏感。

定义 9（CvM 统计量）设 x 为总体，$\succsim$ 为 x 上的一个排序，y 为从 x 中抽取的大小为 k 的样本。x 和 y 的CvM统计量为

$$\mathrm{CvM}(x,y) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F_x(x_i) - F_y(x_i))^2.$$

CvM 最优性的定义方式与 KS 和 L_1 最优性类似。

定义 10（CvM 最优性）如果样本 y 对总体 x 是 CvM 最优的，则

$$\mathrm{CvM}(x,y) = \min_{y' \in \mathcal{P}(n,k)} \mathrm{CvM}(x,y').$$

如果对于每个总体 x，机制 M 对应的机制博弈的所有（可能为混合策略的）均衡都以概率1 分配给针对 x 的 CvM 最优样本，那么机制 M是 CvM 最优的。

注释4 总体和样本累积分布函数都是序数概念。它们不取决于赋予总体中各项的具体数值。如果 $x = (x_i)_{i=1}^n$ 和 $x' = (x'_i)_{i=1}^n$ 是两个具有不同排序的不同总体$\succsim$, $\succsim'$，并且当且仅当 $x'_i \succsim' x'_j$时 $x_i \succsim x^j$，那么对于每个 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$F_x(x_i) = F_{x'}(x'_i)$。因此，我们对代表性的定义仅取决于总体的抽样分位数，而非抽样项目的具体数值。

为说明这一点，考虑两个总体，每个总体都由四个按大小顺序排列的自然数组成。第一个总体为 $x = \{1,10,12,100\}$，第二个总体为 $\tilde{x} = \{1,2,3,4\}$。样本 $y = \{10,12\}$ 和 $\tilde{y} = \{2,3\}$

由两个总体中间的两项组成。因此，$\mathrm{KS}(x,\ y) = \mathrm{KS}(\tilde{x},\ \tilde{y})$，$L_1(x,\ y) = L_1(\tilde{x},\ \tilde{y})$，以及 $\mathrm{CvM}(x,\ y) = \mathrm{CvM}(\tilde{x},\ \tilde{y})$。

因此，样本 y 是否能很好地代表总体 x，并不取决于 x 中最小项和最大项（或任何其他项）的绝对值。

接下来的机制称为分位数机制，它是一种切分选择机制，能够生成均衡的总体样本，或称代表性样本。

例6（分位数机制）给定总体 $x = (x_i)_{i=1}^n$、样本量 k，以及 x 上的一个排序 $\succsim$。假设 $n = (2m+1)k$。分位数机制是一种切分选择机制，其中一个子集包含 $m+1$ 个索引，$k-1$ 个子集各包含$2m+1$ 个索引（注意，有 m 个索引未分配给任何子集）。分位数机制实现了对排名第$(m+1)$高的项、第 $m+1+(2m+1)$高的项，依此类推，直到排名第 $m+1+(k-1)(2m+1)$高的项的选择。分位数机制具有对称性：无论选择玩家 I 还是玩家 II 作为切分者（相应地由玩家 II 或玩家 I 作为选择者），它输出的样本都相同。

实施分位数机制的另一种方式是：让玩家 I（或者玩家 II；这种实施方式也是对称的）排除 m 个索引，再让玩家 II（相应地，玩家 I）选择一个索引；然后让玩家 I（相应地，玩家 II）再排除$2m$ 个索引，并让玩家 II（相应地，玩家 I）再选择一个索引，如此继续，玩家 I（相应地，玩家 II）始终排除$2m$ 个索引，直到选出 k 个索引。

我们的主要结果证明了分位数机制的最优性。该结果表明，根据上述三种距离度量，分位数机制得到的样本严格优于任何其他样本（与之不等价的样本）。

定理1（最优机制的刻画）假设 $n = (2m+1)k$。那么，分位数机制是 KS 最优、L_1 最优且 CvM 最优的。此外，对于每个总体 x 和排序 $\succsim$，任何不等价于分位数机制所产生的样本 y 的样本 y'

$$\begin{aligned} & \mathrm{KS}(x,y') > \mathrm{KS}(x,y), \qquad L_1(x,y') > L_1(x,y), \\ \textit{and} \quad & \mathrm{CvM}(x,y') > \mathrm{CvM}(x,y). \end{aligned}$$

定理1 说明了分位数机制相较于任何其他机制的优势，无论是确定性机制还是随机机制。特别是，任何未生成与分位数机制结果等价结果的确定性机制，根据柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫统计量、严格劣于分位数机制，依据柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫统计量、L_1 统计量以及克拉默-冯·米塞斯统计量。随机机制不可能产生优于分位数机制的结果；如果它以某个正概率输出的样本不等价于分位数机制的输出，那么它必然更差。

注释5（统计量对 n、m和 k 的依赖关系）对于任意总体 x，如果总体中项目的排序 $\succsim$ 是严格的，那么由分位数机制生成的样本 y 的 KS、L_1，和 CvM 统计量分别等于

$$\mathrm{KS}(x,y) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad L_1(x,y) = \frac{m(m+1)}{n(2m+1)} = \frac{1}{4k}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right),$$

$$\textit{and} \qquad \mathrm{CvM}(x,y) = \frac{2m(m+1)}{n^2} = \frac{1}{2k^2}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right),$$

这些界描述了分位数机制生成的样本与总体之间的差异如何随样本量和总体规模变化，并描述了样本累积分布函数与总体累积分布函数之间的距离如何分别随样本量 k 和总体规模 n 增大而减小。

定理1 的证明思路是，根据这三种度量，总体累积分布函数 F_x 和 F_y 之间的距离在所选分位数之前紧邻处和分位数处达到最大值，并随着与最近所选分位数的距离增加而减小。不妨设$x_1 \precsim \cdots \precsim x_n$。那么，在第一个所选分位数 x_{m+1} 之前紧邻处，

$$F_x(x_m) - F_y(x_m) = \frac{m}{n} - 0 = \frac{m}{n}.$$

而且，恰好在第一个选定的分位数 x_{m+1} 处：

$$F_x(x_m) - F_y(x_m) = \frac{m+1}{n} - \frac{1}{k} = \frac{m+1}{n} - \frac{2m+1}{n} = -\frac{m}{n},$$

因为条件 $n = (2m + 1)k$ 意味着 $\frac{1}{k} = \frac{2m+1}{n}$。每个额外的指标子集都包含 $2m + 1$ 个索引，这一事实确保在所有其他分位数之前及恰好在分位数处，都会重复这一计算。例如，恰好在第二个分位数 x_{3m+2} 之前

$$F_x(x_{3m+1}) - F_y(x_{3m+1}) = \frac{3m+1}{n} - \frac{1}{k} = \frac{3m+1}{n} - \frac{2m+1}{n} = \frac{m}{n}.$$

而且，恰好在第二个选定的分位数x_{3m+2}处：

$$F_x(x_m) - F_y(x_m) = \frac{3m+2}{n} - \frac{2}{k} = \frac{3m+2}{n} - \frac{4m+2}{n} = -\frac{m}{n},$$

依此类推。

上述计算表明，分位数机制产生的 KS统计量为mn。为了理解为什么选择不同分位数的机制必然会产生严格更大的 KS统计量，假设某个备选机制$x_{m'}$ 选择的最小分位数小于分位数机制选择的最小分位数，即x_{m+1}，或$m' < m + 1$。在这种情况下，

$$F_y(x_{m'}) - F_x(x_{m'}) = \frac{1}{k} - \frac{m'}{n} = \frac{2m+1}{n} - \frac{m'}{n} > \frac{2m+1}{n} - \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n}.$$

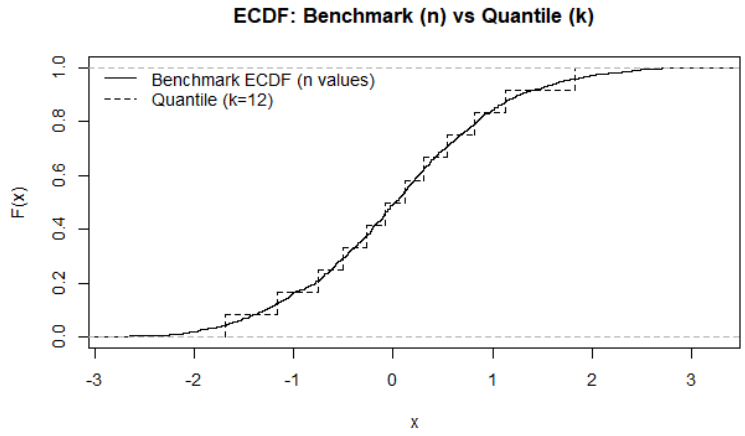
而且，如果统计量$x_{m'}$ 大于x_{m+1}，或$m' > m + 1$，那么在点$x_{m'-1}$处：

$$F_x(x_{m'-1}) - F_y(x_{m'-1}) = \frac{m'-1}{n} - 0 > \frac{m}{n}.$$

类似的论证表明，如果某个备选机制选择的最小分位数等于x_{m+1} ，但该机制选择的下一个分位数与分位数机制选择的第二个分位数不同x_{3m+2}，那么备选机制产生的 KS统计量同样严格大于mn，依此类推。

分位数机制的优势在下方的图1 和2中得到了展示。图1 比较了总体累积分布函数与分位数机制生成的样本的累积分布函数。如图所示，样本累积分布函数与总体累积分布函数十分接近，这体现了分位数机制所生成样本的独特特征

：它具有对称性，并能很好地代表总体。



Fi图1：在分位数机制下，F_x和F_y，其中$n = 972$、$k = 12$、$m = 40$.

图2 比较了总体累积分布函数与样本累积分布函数之间的 KS统计量，涉及五种选择程序：分位数机制、随机机制（例1）（其中k 个项目是随机选出的）、罢免与替换机制（例2）、中位数样本机制（例3），以及随机机制，其中$k = 12$ 和$n^* = 259$ 个项目是随机选出的。[9]

如图所示，分位数机制的 KS统计量最小，等于常数 mn。在一种切分选择机制中，要求负责切分的参与者将总体划分为 k个大小相等的子集，其 KS统计量为常数 ^2mn 。图中还展示了

—

[9]在模拟中，我们从标准正态分布中抽取 $972 = (2 \cdot 40 + 1) \cdot 12$ 个观测值，并将由此得到的经验累积分布函数视为总体累积分布函数。选择$n^* = 259$ 的值，使得从总体累积分布函数中抽取大小为n^* 的随机样本所产生的平均 KS统计量，与分位数机制产生的相应平均距离在较小容差范围内相匹配。为实现罢免与替换机制，我们首先抽取大小为$k = 12$的随机样本，允许双方各自否决样本两端最多3个观测值，然后从剩余总体中随机抽取观测值，补足被否决的观测值。为实现中位数样本机制，我们抽取7个大小为$k = 12$的随机样本，按其样本中位数对这些样本排序，并允许双方各自从两端否决3个样本，从而使剩余样本成为其中位数在候选样本中位数里居中的那个样本。我们重复这一模拟程序1,000次，并记录每种方法得到的 KS统计量。

三种涉及随机化的机制的 KS统计量分布：Flanagan 提出的中位数的中位数 Flanagan (2025)、Struck Full Jury，以及随机选择一个样本。这三种机制的表现都明显不如分位数机制。

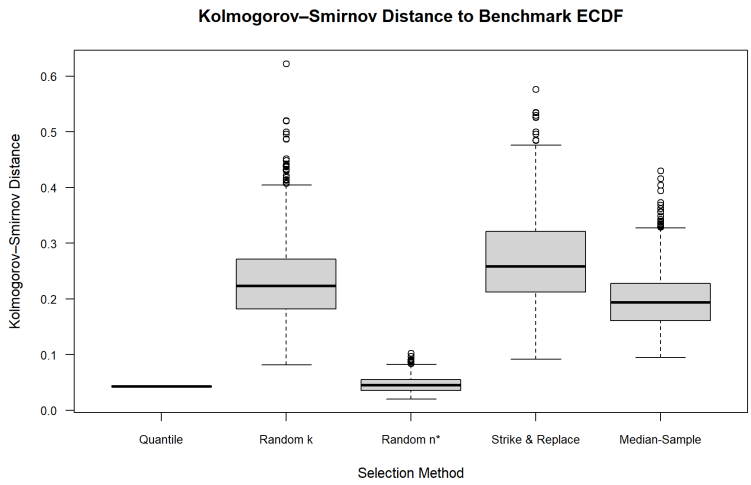


图2：以 KS 统计量比较分位数、中位数样本、先切分后替换和随机机制，其中选择了$k = 12$ 个$n^* = 259$ 个项目；从$n = 972$、$k = 12$、$m = 40$中抽样 100 次。

6 扩展

6.1 任意分位数选择均可实现

如备注 4所述，总体和样本累积分布函数都是序数概念，这一事实表明，代表性仅取决于从总体中抽取的分位数，而不取决于抽取项目的具体取值。下一个定理表明，任意选择 k 个分位数都可以通过某种切分选择机制来实现。

定理 2 固定总体规模 n 和样本量 $k \leq n$。那么，任何 k 个分位数的选择$(q_1, \ldots, q_k) \in \{{}^{j_1}n, \ldots, {}^{j_k}n : j_i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall i, j_1 < \cdots < j_k\}$ 都可以通过某种切分选择机制实现。

定理 2的证明可由前述分析得出：注意，在切分选择机制中，若要求玩家 II 选择 k 个不一定互不相交的子集，每个子集包含 $q_1,\ldots,q_k$ 个项目，则玩家 II 会选择包含排序最低的 k 个子集：其中包含 q_1 个排序最低的项目，q_2 个排序最低的项目，依此类推；这会促使玩家 I 选择排序最低的 q_1 个项目、排序最低的 q_2 个项目，依此类推，直到排序最低的 q_k 个项目，正如所需。

定理2 意味着，如果人们认为最具代表性的样本由最接近总体样本的k 个项目组成，那么就存在一种切分选择机制，可以生成这些分位数，或任何其他分位数。

6.2 非对抗性玩家

到目前为止，我们假设参与者具有对抗性：玩家 1 偏好排名较高的项目，而玩家2偏好排名较低的项目。本小节将探讨这样一种模型：每位参与者$i \in \{1,2\}$ 对总体都有自己的排序 $\succsim_i$，并且每位参与者i 的效用函数u_i 满足：只要F^y 随机占优$F^{y'}$，就有$u_i(y) \geq u_i(y')$。

机制和机制博弈的定义与之前相同。由于与分位数机制相对应的机制博弈是一个完全信息博弈（其中不包含同时行动），因此该博弈存在纯策略子博弈精炼均衡。

下一个结果表明，分位数机制在以下意义上仍表现良好。对于每个总体 x，记 y(x) 为这样一种结果：当两位参与者的偏好分别为 $\succsim_1$ 和 $\succsim_2$ 时，由分位数机制诱导的机制博弈的一个纯策略子博弈精炼均衡所产生的结果。记 y_1^*(x) 为这样一种博弈结果：当总体的排序由玩家 1 的排序 $\succsim_1$ 给定时，该博弈由分位数机制诱导（也就是说，当且仅当 F^y 一阶随机占优 $F^{y'}$ 时，$u_1(y) \geq u_1(y')$，并且对于每个样本 y，均有 $u_2(y) = -u_1(y)$）。记 y_2^*(x) 为这样一种博弈结果：当总体的排序由玩家2的排序给定时，该博弈由分位数机制诱导。

我们的结果表明，每位参与者i 都更偏好$y(x)$ ，而非$y_i^*(x)$。也就是说，当参与者没有相反的偏好时，与各自面对一位偏好与自己相反的参与者相比，他们的境况都会更好。

直观而言，切分的参与者境况更好，因为他们可以像在选择的参与者偏好相反时那样切分，并且无论面对哪个子集，所得结果对他们而言都至少同样好。而选择的参与者境况更好，因为偏好与自己相反的参与者会以对他们最不利的方式切分。双方都认同这一结果优于偏好相反时可能得到的结果，这意味着在纯粹代表性方面的任何损失，都远不及双方境况改善所带来的益处。

定理 3 给定一个总体 x 和两个排序 $\succsim_1$ 与 $\succsim_2$，我们有

i. $u_1(y(x)) \geq u_1(y_1^*(x))$ 在 $\succsim_1$ 下。
ii. $u_2(y(x)) \geq u_2(y_2^*(x))$ 在 $\succsim_2$ 下。

6.3 一名玩家

到目前为止，除了第 6.2 节之外，我们讨论的都是两名参与者都观察到排序的情况。如果只有一名参与者，或者其中一名参与者没有观察到排序，会怎样？例如，在多地区诉讼中，如果一方掌握有关个体案例值的私人信息，就可能出现这种情况。考虑以下机制。

定义 11（随机切分选择机制） 假设 $n = km$。随机切分选择机制是这样一种机制：了解排序的玩家 *1* 将总体划分为 k 个大小均为 m 的互不相交的子集，并从每个子集中随机且均匀地独立选择一个项。

随机切分选择机制的结果是一个随机样本 y。假设总体中的项目是实数，且排序$\succsim$按照这些数的基数对其进行排序。给定玩家 1 所选择的划分 P，随机样本 $\mu_P(y)$ 的均值和方差 $\sigma_P^2(y)$ 是依赖于该划分的随机变量。我们证明，样本均值 $\mu_P(y)$ 与划分无关，而使方差 $\sigma_P^2(y)$ 最小的划分，正是例 11 中所述的随机切分选择机制的均衡划分。

定理 4 假设 $n = km$。对于参与者选择的任意划分，

$$\mu_P(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

此外，有序划分使方差$\mathbf{E}[\sigma_P^2]$ 最小。在这种划分中，各项目按顺序分配到 k 个子集中，使得每个子集中的最大项目都小于下一个子集中的最小项目。

由此可知，参与者无法影响所选样本的均值。如果参与者风险厌恶，并希望样本的方差尽可能小，那么随机切分选择机制就会产生有序划分。在这种划分中，各子集的中位数项目按顺序分别与分位数机制选出的分位数相对应。

7 结论

我们研究了如何从一个大总体中选择一个小型代表性样本。陪审团遴选、多地区诉讼和重新划区委员会这三个法律案例表明，当前用于进行此类遴选的方法并不理想。

我们提出了一种遴选程序——分位数机制，它根据统计学中常用的三种不同度量，即柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫、L_1, 和克拉默–冯·米塞斯，选出最具代表性的样本。这一程序是切分选择机制的对称化版本，易于解释且实施简单。事实上，实现该机制只需参与者对总体进行排序，这项任务的复杂度为 $O(n\log(n))$。

分位数机制严格优于现有的选择方法，包括随机选择和若干种当事人选择变体。我们设想，这些发现将推动分位数机制在法律、政治和制度场景中的应用；在这些场景中，对立方可能影响样本的选择，样本量受到严格限制，而总体目标是选出尽可能忠实反映总体的样本。

的目标是选出尽可能忠实反映总体的样本。

参考文献

Anwar、Shamena、Patrick Bayer 和 Randi Hjalmarsson。2012年。“刑事审判中陪审团种族构成的影响。”《经济学季刊》，127(2)：1017–1055。

Anwar、Shamena、Patrick Bayer 和 Randi Hjalmarsson。2014年。“年龄在陪审团遴选和审判结果中的作用。”《法律与经济学杂志》，57(4)：1001–1030。

Anwar、Shamena、Patrick Bayer 和 Randi Hjalmarsson。2022年。“陪审团代表性不平等及其后果。”《美国经济评论：洞见》，4(2)：159–174。

Barberà、Salvador 和 Danilo Coelho。2022年。“在妥协规则上达成妥协。”《兰德经济学杂志》，53(1)：95–112。

Barberà、Salvador 和 Danilo Coelho。2024年。“通过相关方协商妥协来任命仲裁员小组或法官集合的机制。”巴塞罗那经济学院工作论文，1442。

Bogomolnaia, Anna、Ron Holzman 和 Hervé Moulin。2023。“关于保障、否决权和随机独裁者。”《理论经济学》，18(1)：97–127。

Brams, Steven J. 和 Alan D. Taylor。1996。《公平分配：从切蛋糕到争端解决》。剑桥：剑桥大学出版社。

布朗大学，Loren H、Matthew A Holian 和 Arindam Ghosh。2014。“多地区诉讼中的风向标案件审判选择：支持随机选择的实证证据。”《阿克伦法学评论》，47：663。

Cox，Adam。2004年。《党派公平与选区重划政治》。《纽约大学法律评论》，79：751。

Cramér，Harald。1928年。《论初等误差的构成》。《斯堪的纳维亚精算学杂志》，1：141–180。**De Clippel，Geoffroy、Kfir Eliaz 和 Brian Knight**。2014年。《论仲裁员的遴选》。《美国经济评论》，104(11)：3434–58。**Diamond，Shari Seidman、Destiny Peery、Francis J Dolan 和 Emily Dolan**。2009年。《实现陪审团多元化：陪审团规模与无因回避挑战》。《实证法律研究杂志》，6(3)：425–449。

Fallon, Eldon E. 2020年。“示范性审判。” *UMKC* 法学评论，89：951。

Fallon, Eldon E, Jeremy T Grabill, and Robert Pitard Wynne. 2007年。“多地区诉讼中的示范性审判。” *Tulane* 法学评论，82：2323。

Flanagan, FrancisX.2018年。“种族、性别与陪审团：来自北卡罗来纳州的证据。”《法律与经济学杂志》，61(2)：189–214。

Flanagan, Francis X.2025年。“（并未）抵消横截面：减轻无因回避权对陪审团遴选的影响。”《国际法律与经济学评论》，82：106259。

Flanigan, Bailey, Paul Gölz, Anupam Gupta, Brett Hennig, and Ariel D. Procaccia.2021年。“用于遴选公民议会的公平算法。”《自然》，596(7873)：548–552。

Gluck，Abbe R 和 Elizabeth Chamblee Burch。2021。“多地区诉讼革命”。*NYULRev*。，96：1。

Imamura, David. 2022年。“选区重划委员会的兴衰：来自2020年选区重划周期的经验教训。”《人权杂志》，48(1)。**Karlan, Pamela S.** 1992年。“投票权：对形式主义的些许悲观。”《德克萨斯法律评论》，71：1705。**Kolmogorov, Andrey Nikolaevich.** 1933年。“关于分布定律的经验确定。”*Giorn Dell'inst ItalDegli Att*，4：89–91。**Kovera, Margaret Bull, and Brian LCutler.** 2013年。陪审团遴选。牛津大学出版社。

Lahav,AlexandraD.2007年。“示范性审判。”《乔治·华盛顿法律评论》，76：576。

Lahav, Alexandra D. 2018年。《先导审判入门》。《诉讼评论》，37：185。

Maskin, Eric. 1999年。《纳什均衡与福利最优性》。《经济研究评论》，66(1)：23–38。

Moro, Andrea，以及 Martin Van der Linden。 2024年。《排除极端陪审员与少数群体代表性：陪审员遴选程序的影响》。《法律与经济学杂志》，67(2)：295–336。

Rose, Mary R、Raul S Casarez，以及 Carmen M Gutierrez。 2018年。《现代陪审团时代的陪审员池代表性不足：来自联邦法院的证据》。《实证法律研究杂志》，15(2)：378–405。

Torchinsky, Jason，以及 Dennis W Polio。 2022年。《独立性何时过度：选区重划委员会与不受问责的行政国家的扩张》。《乔治敦法律与公共政策杂志》，20：533。

Villalón, Felipe. 2022年。“不同的先导审判适用于不同案件：产品责任多地区诉讼中的随机抽样及其他风向标遴选趋势。”《康涅狄格法律评论》，55：501。

von Mises, Richard. 2013年。《概率、统计与真理》。第7卷，施普林格出版社。

Wagner,Ward.1981年。《辩护艺术：陪审团遴选》。M. Bender。

Whitney, Melissa J. 2019年。多地区诉讼程序中的风向标审判：转属法官指南。联邦司法中心和多地区诉讼司法小组。

定理证明 1

固定一个总体$x = (x_1, \ldots, x_n)$ 以及其上的排序 $\precsim$。不失一般性，假设$x_1 \precsim x_2 \precsim \cdots \precsim x_n$。如例6所述，当$n = (2m + 1)k$时，在所有

分位数机制的均衡中，选定样本等价于

$$y = (x_{m+1}, x_{m+1+(2m+1)}, \ldots, x_{m+1+(2m+1)(k-1)}). \tag{3}$$

我们将证明分为三个部分。在第 7 节，我们证明分位数机制是 KS 最优的；在第 7 节，我们证明分位数机制是 L_1 最优的；在第 7 节，我们证明分位数机制是 CvM 最优的。

分位数机制是 KS 最优的

在步骤 1 中，我们将证明 $\mathrm{KS}(x,y) \leq mn$，其中 y 由方程（3）定义。在步骤 2 中，我们将证明，对于任何不等价于 y 的样本 y'，必有 $\mathrm{KS}(x,y') > mn$。因此，$\mathrm{KS}(x,y) < \mathrm{KS}(x,y')$。特别地，对于机制博弈中某个均衡下可能出现的任何样本 y'，只要该均衡对应于某个机制 M'，上述结论都成立。由于 x 是任意的，这意味着分位数机制是 KS 最优的。

步骤 1： $\mathrm{KS}(x,y) \leq mn$。

为了证明 $\mathrm{KS}(x,y) \leq mn$，我们将证明

$$|F_x(x_i) - F_y(x_i)| \leq \frac{m}{n}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

固定 $i \in \{1, \ldots, n\}$。我们将依次刻画 $F_x(x_i)$ 和 $F_y(x_i)$。回忆一下，我们不失一般性地假设 $x_1 \precsim x_2 \precsim \cdots \precsim x_n$。

若 $x_i \prec x_{i+1}$，则 $F_x(x_i) = in$。否则，$x_i \approx x_{i+1}$，且 $F_x(x_i)$ 高于 in。实际上，记 ℓ 为满足 $x_i \prec x_\ell$ 的最小索引，因此 $x_i \approx x_{i+1} \approx \cdots \approx x_{\ell-1} \prec x_\ell$。用此记法，$F_x(x_i) = {}^{\ell-1}n$。 ——

接下来计算 $\mathrm{F_y(x_i)}$。满足 $\mathrm{y_j \precsim x_i}$ 的 y 中样本元素 $\mathrm{y^j}$ 的数量，是满足 $\mathrm{m + 1 + (2m + 1)(r - 1) < \ell}$ 的最大 r。特别地，$\mathrm{\ell \leq m + 1 + (2m + 1)r}$ 且 $\mathrm{F_y(x_i) = rk = r(2m+1)\, n}$。请注意，若 $\mathrm{r = 0}$，则 $\mathrm{x_i}$ 严格小于 y 中的所有项；而若 $\mathrm{r = m}$，则 $\mathrm{x_i}$ 大于或等于

y中的所有项。最后，

$$\begin{aligned} -\frac{m}{n} &= \frac{m+1+(2m+1)(r-1)}{n} - \frac{r(2m+1)}{n} \\ &\le \frac{\ell-1}{n} - \frac{r(2m+1)}{n} = F_x(x_i) - F_y(x_i) \qquad (5) \\ &\le \frac{m+(2m+1)r}{n} - \frac{r(2m+1)}{n} \qquad (6) \\ &= \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

其中方程 (5) 成立，因为 $m+1+(2m+1)(r-1) < \ell$ 且方程 (6) 成立，因为 $\ell \le m+1+(2m+1)r$。因此，方程 (4) 成立。

步骤 2： $\mathrm{KS}(x,y') > mn$**，对于每个与** y **不等价的样本** y'。

固定一个与 y 不等价的样本 $y' = (x^{\ell_1}, \ldots, x^{\ell_k})$。不失一般性，假设 $\ell_1 < \cdots < \ell_k$。令 $r \in \{1,\ldots,k\}$ 为最小索引，使得y' 中的第r项与y中的第r项不同；也就是说，$x_{\ell_r} \not\approx x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$。

如果$x_{\ell_r} \prec x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$，那么特别地 $\ell_r < m+1+(2m+1)(r-1)$ 且$F_x(x^{\ell_r}) < m+1+(2m+1)(r-1)\,n$。此外，$F_{y'}(x^{\ell_r}) \ge rk$。因此，

$$F_{y'}(x_{\ell_r}) - F_x(x_{\ell_r}) > \frac{r}{k} - \frac{m+1+(2m+1)(r-1)}{n} = \frac{m}{n}.$$

如果 $x_{\ell_r} \succ x^{m+(2m+1)(r-1)}$，那么特别地 $\ell_r > m+(2m+1)(r-1)$。因此，$F_x(x^{m+(2m+1)(r-1)}) > m+(2m+1)(r-1)\,n$。由于 $x_{\ell_r} \succ x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$，我们有 $F_y(x^{m+1+(2m+1)(r-1)}) = r^{-1}k$。因此，

$$F_x(x_{m+(2m+1)(r-1)}) - F_{y'}(x_{m+(2m+1)(r-1)}) > \frac{m+(2m+1)(r-1)}{n} - \frac{r-1}{k} = \frac{m}{n}.$$

在两种情况下，$\mathrm{KS}(x,y') > mn$，正如我们要证明的那样。

分位数机制是 L_1-最优的

我们将证明，任何 不等同于y' 的样本y 都满足$L_1(x,y') > L_1(x,y)$。由于这一不等式对每个机制M' 以及在M'的某个均衡下可能出现的每个样本y' 都成立，因此可以得出

分位数机制是L_1-最优的。

那么，$y' = (x^{\ell_1}, x^{\ell_2}, \ldots, x^{\ell_k})$ 是任意一个与y不等价的样本，并且不失一般性地假设 $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k$。

步骤 1：证明思路。

为证明 $L_1(x, y) < L_1(x, y')$，我们将构造一个由样本 $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}$组成的序列，使得 $y^{(1)} = y$、$y^{(p)} = y'$，并且对每个$\pi \in \{1, \ldots, p-1\}$，都有 $L_1(x, y^{(\pi)}) < L_1(x, y^{(\pi+1)})$。

为证明这样的序列存在，我们将论证：如果$y' \not\approx y$，那么就存在另一组k 个索引$(j_1, j_2, \ldots, j_k)$，满足以下性质：

P1) $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ 与$(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$ 恰好相差一个索引。

P2) $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ 比$(m+1, m+1+(2m+1), \ldots, m+1+(2m+1)(k-1))$ 更接近$(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$，其含义将在稍后定义。

P3) 记$y'' = (x^{j_1}, x^{j_2}, \ldots, x^{j_k})$，则有$L_1(x, y'') < L_1(x, y')$。

递归地应用这一结果，可得到如上所述的序列$(y^{(\pi)})_{\pi=1}^{p}$。

步骤 2：定义$(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ 比$(m+1, m+1+(2m+1), \ldots, m+1+(2m+1)(k-1))$ 更接近$(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$的含义。

如果满足以下条件之一，我们就称索引j_r 比索引l_r 更接近 $m+1+(2m+1)(r-1)$：

- $x_{j_r} \approx x_{m+1+(2m+1)(r-1)}$ and $x_{\ell_r} \not\approx x_{m+1+(2m+1)(r-1)}$.
- $x^{j_r} \not\approx x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$，$x^{\ell_r} \not\approx x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$，并且 x 中严格位于 x^{j_r} 与 $x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$ 之间的项数，小于 x 中严格位于 x^{ℓ_r} 与 $x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$ 之间的项数。

根据定义，不可能j_r 和$x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$ 都比 ℓ_r更近，同时 ℓ_r 又比$x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$ 更接近j_r。

如果j_r 不像$x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$ 那样比 ℓ_r 更近，且 ℓ_r 不像$x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$那样比j_r 更近，那么要么 (a) $x^{j_r} \approx x^{\ell_r}$，要么 (b) $x_{j_r} \not\approx x^{\ell_r}$，且$x$ 中严格位于x^{j_r} 与$x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$ 之间的项目数等于

x 中严格位于x_{ℓ_r} 与$x^{m+1+(2m+1)(r-1)}$之间的项目数。注意，如果 (b) 成立而 (a) 不成立，那么j_r 和 ℓ_r 中必有一个小于$m+1+(2m+1)(r-1)$，而另一个大于$m+1+(2m+1)(r-1)$。

如果对于满足以下条件的最小 r：j_1，比索引 $m+1+(2m+1)(r-1)$更接近索引 ℓ_r，小于满足以下条件的最小 r：ℓ_r 比索引 $m+1+(2m+1)(r-1)$ 更接近索引 j_r，那么我们就说向量 $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ 比向量 $(m+1, m+1+(2m+1), \ldots, m+1+(2m+1)(k-1))$ 更接近向量 $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$。

步骤 3：确定 y' 与 y 不同的最小项。

令 i 为满足 $x_{\ell_i} \approx x^{m+1+(2m+1)(i-1)}$ 的最大索引。这意味着，除去等价关系，样本 y' 与 y 在较低的 i 个项目上相同。如果$x_{\ell_1} \not\approx x^{m+1}$，则令 $i := 0$。

若 $i = k$，则 $y' \approx y$。由于根据假设，y 和y' 并不等价，因此 $i < k$，从而 $x_{\ell_{i+1}} \not\approx x^{m+1+(2m+1)i}$。特别地，$\ell_{i+1} \neq m+1+(2m+1)i$。

步骤 4：情形 $\ell_{i+1} > m+1+(2m+1)i$。

我们将证明，在这种情况下，最好将y' 中的$x_{\ell_{i+1}}$ 替换为某个满足$\ell < \ell_{i+1}$的 x_ℓ。

步骤 4.1：定义新的顶点集j。

令 $\ell < \ell_{i+1}$ 为满足$x_\ell \prec x_{\ell_{i+1}}$的最大索引。特别地，

$$x_\ell \prec x_{\ell+1} \approx x_{\ell+2} \approx \cdots \approx x_{\ell_{i+1}}.$$

由于$x_{\ell_{i+1}} \not\approx x^{m+1+(2m+1)i}$，我们有 $\ell \geq m+1+(2m+1)i$。

考虑通过将 ℓ_{i+1} 替换为 ℓ，从 ℓ 得到的指标集 j：

$$\vec{j} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_i, \ell, \ell_{i+2}, \ldots, \ell_k).$$

特别地，(P1) 成立。由于 ℓ 和 j 在较低的 $i+1$ 个项目上相同，且由于 $x_{m+1+(2m+1)i} \precsim x_\ell \prec x_{\ell_{i+1}}$，$\vec{j}$ 比 $(m, m(m), \ldots, m(m)(k))$，更接近 $\vec{\ell}$，且 (P) 成立。

用y'' 表示由索引向量 $\vec{j}$诱导的样本：

$$y'' = (x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, \ldots, x_{\ell_i}, x_\ell, x_{\ell_{i+2}}, \ldots, x_{\ell_k}).$$

步骤 4.2： $L_1(x,\ y')$ **与**$L_1(x,\ y)$**之差。**

由于 $\ell < \ell_{i+1}$，统计量 $L_1(x, y')$ 和 $L_1(x, y'')$ 在对应于 x_ℓ、$x_{\ell+1}$、……、$x_{\ell_{i+1}-1}$ 的求和项上有所不同：由于我们将索引 ℓ_{i+1} 更改了 $\ell <\ell_{i+1}$，因此在 x_ℓ、……、$x_{\ell_{i+1}-1}$ 这些点上，样本的累积分布函数增加了 $\frac{1}{k}$。下表给出了这些点处的 F_x、$F_{y'}$ 和 $F_{y''}$，其中 $F_x(x_{\ell_{i+1}}) \geq \frac{\ell_{i+1}}{n}$：

	x_ℓ	$x_{\ell+1}$	…	$x_{\ell_{i+1}-1}$
F_x	$\frac{\ell}{n}$	$F_x(x_{\ell_{i+1}})$	…	$F_x(x_{\ell_{i+1}})$
$F_{y'}$	$\frac{i}{k}$	$\frac{i}{k}$	…	$\frac{i}{k}$
$F_{y''}$	$\frac{i+1}{k}$	$\frac{i+1}{k}$	…	$\frac{i+1}{k}$

因此，只需证明

$$\left|\frac{\ell}{n} - \frac{i}{k}\right| \overset{?}{>} \left|\frac{\ell}{n} - \frac{i+1}{k}\right| \tag{7}$$

and

$$\left|F_x(x_{\ell_{i+1}}) - \frac{i}{k}\right| \overset{?}{>} \left|F_x(x_{\ell_{i+1}}) - \frac{i+1}{k}\right|. \tag{8}$$

当 $\frac{\ell}{n} \geq \frac{i+1}{k}$ **时，方程 (7) 成立。**

若 $\frac{\ell}{n} \geq \frac{i+1}{k}$，则方程 (7) 成立。事实上，在这种情况下，我们可以从方程 (7) 的两边去掉绝对值，并且从右边减去的量大于从左边减去的量。

当 $\frac{\ell}{n} < \frac{i+1}{k}$ 时，方程 (7)成立。

在这种情况下，我们接下来应证明

$$\frac{\ell}{n} - \frac{i}{k} \overset{?}{>} \frac{i+1}{k} - \frac{\ell}{n}, \tag{9}$$

解得

$$2\ell \overset{?}{>} (2i+1)(2m+1).$$

不过，由于 $\ell \geq m + 1 + (2m + 1)i$，该不等式成立。

步骤 4.5：方程 (8) 在 $F_x(x^{\ell_{i+1}}) \geq \frac{i+1}{k}$ **时成立。**

论证与步骤 4.3 中的类似。

步骤 4.6：方程 (8) 成立的条件是 $F_x(x^{\ell_{i+1}}) < \frac{i+1}{k}$。

在这种情况下，我们需要证明

$$F_x(x_{\ell_{i+1}}) - \frac{i}{k} \stackrel{?}{>} \frac{i+1}{k} - F_x(x_{\ell_{i+1}}). \tag{10}$$

由于方程 (9) 成立，且 $Fx(x^{\ell_{i+1}}) > {}^{\ell}n$，方程 (10) 也成立。事实上，方程 (10) 左边的值大于方程 (9) 左边的值，而方程 (10) 右边的值小于方程 (9) 右边的值。

步骤 5：情形 $\ell_{i+1} < m+1+(2m+1)(i+1)$。

注意，在这种情况下 $x^{\ell_{i+1}} \prec x^{m+1+(2m+1)(i+1)}$，并且可能出现$x^{m+1+(2m+1)(i+1)}$ 属于样本 y'的情况。

我们将通过替换$x^{\ell_{i+1}}$ 为一个包含 $\ell > \ell_{i+1}$ 的项x_ℓ 来构造y''。事实上，ℓ 将是一个大于 ℓ_{i+1} 且未出现在定义y'的索引中的最小索引。

步骤 5.1：定义新的顶点集 j。

令 $\ell > \ell_{i+1}$ 为满足以下条件的最小索引：(a) $x_\ell \not\approx x^{\ell_{i+1}}$，且 (b) $\ell \notin \{\ell_{i+2}, \ell_{i+3}, \ldots\ldots, \ell_k\}$。我们将证明，在这种情况下，最好将$y'$中的$x^{\ell_{i+1}}$ 替换为x_ℓ。

我们首先论证这样的索引 ℓ 确实存在。事实上，由于 $m \geq 1$，且由于$\ell_{i+1} < m+1+(2m+1)(i+1)$，$\{1,\ldots\ldots n\}$ 中大于ℓ_{i+1} 的索引数量大于 $2(k-i)$。然而，y' 中大于$x^{\ell_{i+1}}$的项目数为$k-i-1$。因此，至少存在一个满足条件 (a) 和 (b) 的索引 $\ell > \ell_{i+1}$。

令$\vec{j}$ 为由 ℓ 替换 ℓ_{i+1} 为 ℓ后得到的向量，使得（P1）成立。由于 $\ell_{i+1} < \ell$，按字典序，该向量比$(m+1, m+1+(2m+1), \ldots, m+1+(2m+1)(k-1))$ 更接近 $\vec{\ell}$，且（P2）成立。我们将证明输出向量

$$y'' := y' \setminus \{x_{\ell_{i+1}}\} \cup \{x_\ell\}$$

满足$L_1(x,y') > L_1(x,y'')$，因此（P3）也成立。

步骤 5.2： $L_1(x,y')$ **与**$L_1(x,y)$**之差**。

由于 $\ell_{i+1} < \ell$，统计量 $L_1(x,y')$ 和 $L_1(x,y'')$ 在对应于所有满足 $x_r \approx x^{\ell_{i+1}}$ 的 r 的求和项，以及对应于 $\ell_{i+1}+1, \ell_{i+1}+2, \ldots, x_{\ell-1}$ 的求和项中有所不同。由于我们将 $x^{\ell_{i+1}}$ 改为 x_ℓ，从而由 y' 得到 y''，

并且由于 $\ell > \ell_{i+1}$，对于任意满足 $xj \approx x^{\ell_{i+1}}$ 的 j–，以及 $\ell_{i+1}+1, \ell_{i+1}+2, \ldots,$ $x_{\ell-1}$，都有 $Fy'(xj) = Fy(xj) + {}^{1}k$。下表描述了这些求和项中的量 Fx、Fy' 和 Fy''：

	$x_r \approx x_{\ell_{i+1}}$	$x_{\ell_{i+1}+1}$	$x_{\ell_{i+1}+2}$	$\ldots$	$x_{\ell-1}$
$F_x(\cdot)$	$F_x(x_{\ell_{i+1}})$	$F_x(x_{\ell_{i+1}+1})$	$F_x(x_{\ell_{i+1}+2})$	$\ldots$	$F_x(x_\ell)$
$F_{y'}(\cdot)$	$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{1}{k}$	$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+1}) + \frac{1}{k}$	$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+2}) + \frac{1}{k}$	$\ldots$	$F_{y''}(x_{\ell-1}) + \frac{1}{k}$
$F_{y''}(\cdot)$	$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}})$	$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+1})$	$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+2})$	$\ldots$	$F_{y''}(x_{\ell-1})$

我们将证明，在所有这些求和项中，$L_1(x,y'')$ 的贡献小于$L_1(x,y')$的贡献。

步骤 5.3：比较求和项。

任取一个 ≥ 0 满足 $\ell_{i+1}+q < \ell$的 q。我们将证明

$$\left|F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q}) - \frac{1}{k}\right| \overset{?}{>} \left|F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q})\right|. \tag{11}$$

如果$Fx(x_{\ell_{i+1}+q}) \leq F''(x_{\ell_{i+1}+q})$，那么如步骤 4.3 中所示，方程 (11) 成立。

那么假设 $Fx(x_{\ell_{i+1}+q}) > F''(x_{\ell_{i+1}+q})$。要证明方程 (11)，只需证明

$$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q}) + \frac{1}{k} - F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) \overset{?}{>} F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q}). \tag{12}$$

我们首先关联$Fx(x_{\ell_{i+1}+q})$与$Fx(x^{\ell_{i+1}})$，以及$Fy''(x_{\ell_{i+1}+q})$与$Fy''(x^{\ell_{i+1}})$。令$D \geq 0$为满足j 使$x^{\ell_{i+1}} \prec x_j \precsim x_{\ell_{i+1}+q}$的索引数量。那么

$$F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) = F_x(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{D}{n}. \tag{13}$$

根据 ℓ 的定义，对于每个这样的 j，xj 都属于 y''，因此我们有

$$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q}) = F_{y''}(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{D}{k}. \tag{14}$$

将方程（13）和（14）代入方程（12），并化简所得方程，

我们得到需要证明

$$2F_{y''}(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{2D+1}{k} \overset{?}{>} 2F_x(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{2D}{n}. \tag{15}$$

然而，$F_{y''}(x_{\ell_{i+1}}) \geq ik$，而 $F_x(x_{\ell_{i+1}}) \leq m + (2m+1)i$。因此，方程 (15) 的左边为 $(2i+2D+1)(2m+1)n$，而右边至多为 $2m+2i(2m+1)+2Dn$，前者始终大于后者。

分位数机制是*CvM*-最优的

证明与第 7 节中的证明类似。这里详细说明二者的差异。

步骤 1：情形 $\ell_{i+1} > m + (2m+1)(i+1)$。

当 $\ell_{i+1} > m + (2m+1)(i+1)$ 时，方程 (7) 的对应形式为

$$\left(\frac{\ell}{n} - \frac{i}{k}\right)^2 \overset{?}{>} \left(\frac{\ell}{n} - \frac{i+1}{k}\right)^2.$$

该方程可化简为

$$2\frac{\ell}{nk} \overset{?}{>} \left(\frac{i}{k} + \frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{i}{k}\right)^2,$$

解得

$$2\ell \overset{?}{>} (2i+1)(2m+1).$$

然而，由于 $\ell \geq m + 1 + (2m+1)i$，该方程成立。

步骤 2：情况 $\ell_{i+1} < m + (2m+1)(i+1)$。

方程（11）的类似形式为

$$\left(F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q}) - \frac{1}{k}\right)^2 \overset{?}{>} \left(F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q})\right)^2,$$

简化后得到

$$\frac{1}{k^2} \overset{?}{>} \frac{2}{k}\left(F_x(x_{\ell_{i+1}+q}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}+q})\right). \tag{16}$$

将方程（16）两边乘以 k^2 并考虑方程（13）和（14），方程（16）可改写为

$$1 \overset{?}{>} 2k\left(F_x(x_{\ell_{i+1}}) - F_{y''}(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{D}{n} - \frac{D}{k}\right),$$

这等价于

$$2kF_{y''}(x_{\ell_{i+1}}) + 2D + 1 \overset{?}{>} 2kF_x(x_{\ell_{i+1}}) + \frac{2kD}{n}.$$

然而，这个不等式等价于方程（15）。

定理3的证明

我们先证明断言（i）。对于每个划分$P \in \mathcal{P}(n、k)$，令$y(P)$ 为这样一个样本：对P中的每个元素，都包含一个按照 $\precsim_2$最大化的项。当玩家 1 按P对x 进行划分、玩家 2 的排序为 $\precsim_2$，且玩家2对P作出最佳响应时，结果就是样本$y(P)$。

令 $P^* \in \mathcal{P}(n, k)$ 为玩家 1 在 $\precsim_1$下的最优划分。注意，$y(P^*)$随机占优于y_1^*。事实上，这两个样本都是从划分 P^*导出的；然而，y_1^* 是在假设玩家 2 的排序为 $\succsim_1$ ——从玩家 1 的角度来看最差的排序——的情况下导出的。因此，在 $\precsim_1$下，$u_1(y(P^*)) \geq u_1(y_1^*)$。由此，在均衡中，玩家 1 的效用至少为 $u_1(y(P^*))$，断言（i）得证。

下面我们证明断言（ii）。我们将证明，在 $\precsim_2$ 下，$F^{y_2^*}$ 随机占优$F^{y(x)}$，由此即可推出（ii）。

因此，固定$i \in \{1,。 \ldots, n\}$，并假设 $\#\{j \in \{1,。 \ldots, n\}: x_j \precsim_2 x_i\} = r$。在样本 $y_2^*(x)$ 中，有 $\lceil r-m2m+1 \rceil$个项目在 $\precsim_2$ 下低于或等同于 x_i。

无论均衡下玩家 1 的划分是什么，$\{x^j : x_j \precsim_2 x_i\}$ 中的 r 个项目都至少位于划分的 $\lceil r2m+1 \rceil$ 个元素中。由于均衡时，玩家2会根据 $\precsim_2$ 从划分的每个元素中选出最小项，因此 $y(x)$ 中至少有 $\lceil r2m+1 \rceil$ 个项目在 $\precsim_2$下低于或等价于 x_i。由于 $\lceil r2m+1 \rceil \geq \lceil r - m \rceil$，根据 $\precsim_2$，我们有 $F^{y(x)}(x_i) \geq F_{y_2^*}(x)$。由于 i 是任意的，因此 $F^{y_2^*}$ 随机占优$F^{y(x)}$，证毕。

定理4的证明

暂且固定玩家 1 选定的一个划分 $P = (Q_1, \ldots, Q_k) \in \mathcal{P}(n,k)$。由于 P 的所有元素都包含 m 个项目，因此项目 x_i 被选入样本的概率为 $\frac{1}{m}$。根据期望算子的线性性，

$$\mu_P(y) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\left(\frac{1}{m}\sum_{x_i\in Q_\ell} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

用 $(j_1, \ldots, j_k)$ 表示样本中各项的随机指标；也就是说，对于每个 $1 \le \ell \le k$，j_ℓ 从Q_ℓ中均匀选取。样本的方差为

$$\sigma_P^2(y) = \sum_{P\in\mathcal{P}(n,k)}\left(\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} x_{j_\ell}^2 - \left(\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} x_{j_\ell}\right)^2\right).$$

由于有m^k 个不同的样本，且它们出现的可能性都相同，因此期望方差为

$$\mathbf{E}[\sigma_P^2(y)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{m^k}\sum_{P\in\mathcal{P}(n,k)}\left(\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} x_{j_\ell}\right)^2.$$

由于第一项与P无关，要使$\mathbf{E}[\sigma_P^2(y)]$ 最小，只需使第二项最大。由于函数$x \mapsto x^2$ 是凸函数，根据詹森不等式，当P 将总体划分为k 个大小为m的区块，且每个区块都按照 $\precsim$包含连续的项时，第二项达到最大值。