arXiv:2603.25087v1 [math.DG] 26 Mar 2026

# 映射锥托姆形式

Hao Zhuang

2026年3月27日

**摘要**

对于由光滑闭 2-形式诱导的德拉姆映射锥上链复形，我们按照 Mathai-Quillen 的方式，明确写出相应的映射锥托姆形式。我们的构造使用映射锥协变导数，该导数携带了 2-形式带来的额外信息。我们的主要工具是贝雷津积分。作为主要结果，我们证明该托姆形式关于映射锥微分是闭的，其沿纤维积分为 1，并且满足转移公式。

## 目录

**1 引言 1 2 映射锥协变导数 4 3 斜伴随 Bianchi 恒等式 5 4 对偶组的Berezin积分 8 5 映射锥复形的托姆形式 9 6 托姆形式的转移 13**

## 1 引言

与光滑闭形式相关联的德拉姆映射锥上链复形，从几何和拓扑等多个角度得到了研究。辛情形与本原上同调和过滤上同调相关[9, 10, 11, 12]。对于与一般闭形式相关联的德拉姆映射锥上链复形，我们已经看到其在特征类 [19, 20, 21],规范理论 [13, 14, 15],Morse理论 [5, 6, 22],等方面的研究。

支持特征类、规范理论和 Morse理论研究的一项重要机制是托姆同构 [2, 第 6] 节。相关托姆形式的解析表达式由 Mathai和Quillen 明确给出 [7, 定理 4.5]。现在，对于映射锥情形，我们也希望建立

这样一种机制。在 [8, 定理 3.13], 中，托姆同构是通过拓扑方法表述的。这使我们意识到，有必要按照 Mathai-Quillen 的思路，明确构造映射锥托姆形式。

本文给出这一构造。我们作如下设定：

**假设 1.1.** 设 $M$ 是无边界光滑流形， $\omega$ 是 $M$上的光滑闭 2-形式， $E$ 是 $M$上的秩为 $n$的定向光滑向量丛。此外，我们在 $E$ 上赋予光滑向量丛度量 $g$。

构造映射锥托姆形式时，我们遵循[1, 第 1.6], [17, 节、第 3], 章和第 [18, 章 3]中的方法。对于映射锥协变导数的概念，我们遵循 [13, 命题 3.8] 和 [15,第 2.1]节。

关于 $g$，设 $\nabla$ 是 $E$上的欧几里得联络，并令 $\Phi \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$ 为斜伴随的。它们构成一个映射锥协变导数

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : \Omega^i(M,E) \oplus \Omega^{i-1}(M,E) &\to \Omega^{i+1}(M,E) \oplus \Omega^i(M,E) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\nabla\alpha + \omega \wedge \beta, \Phi\alpha - \nabla\beta). \end{aligned} \tag{1.1}$$

令 $\sigma : E \to M$ 为到基空间的投影。于是我们得到拉回$\widetilde{\ }$丛 $E = \sigma^* E$ 及其相应的

$$\widetilde{\omega} = \sigma^*\omega, \ \widetilde{\nabla} = \sigma^*\nabla, \ \widetilde{\Phi} = \sigma^*\Phi, \ \widetilde{g} = \sigma^* g. \tag{1.2}$$

于是，我们得到德拉姆映射锥上链复形

$$\begin{aligned} d^{\widetilde{\omega}} : \Omega^i(E) \oplus \Omega^{i-1}(E) &\to \Omega^{i+1}(E) \oplus \Omega^i(E) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (d\alpha + \widetilde{\omega} \wedge \beta, -d\beta) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$(E, \widetilde{\omega})$ 的映射锥协变导数

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{A}} : \Omega^i(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \oplus \Omega^{i-1}(E, \Lambda^* \widetilde{E}) &\to \Omega^{i+1}(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \oplus \Omega^i(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \left( \widetilde{\nabla}\alpha + \widetilde{\omega} \wedge \beta, \ \widetilde{\Phi}^{\Lambda}\alpha - \widetilde{\nabla}\beta \right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

在 $\Lambda^* E$上。这里， $\widetilde{\Phi}^{\Lambda}$ 是由 $\widetilde{\Phi}$诱导的导子（见（2.9）-（2.11））， 且 $\widetilde{\nabla}$ 自然延拓$\widetilde{\ }$ $\Lambda^* E$。

设 $e_1, \cdots, e_n$是 $E$的定向局部正交标架，则其提升为$\sim\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_n$到 $E$。于是，我们令

$$Q_{\widetilde{\mathbb{A}}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \widetilde{g} \left( \widetilde{\nabla}^2 \widetilde{e}_i + \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\Phi} \widetilde{e}_i, \ \widetilde{e}_j \right) \otimes (\widetilde{e}_i \wedge \widetilde{e}_j) \in \Omega^2(E, \Lambda^2 \widetilde{E}), \tag{1.5}$$

and

$$S_{\widetilde{\mathbb{A}}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \widetilde{g} \left( \widetilde{\Phi} \widetilde{\nabla} \widetilde{e}_i - \widetilde{\nabla} \widetilde{\Phi} \widetilde{e}_i, \ \widetilde{e}_j \right) \otimes (\widetilde{e}_i \wedge \widetilde{e}_j) \in \Omega^1(E, \Lambda^2 \widetilde{E}). \tag{1.6}$$

它们在全局上有定义，因为 $\nabla$是欧几里得的，且 $\Phi$是斜伴随的。

~令 $\mathbf{v} \in \Omega^0(E,E)$ 为典范截面（见（5.5））。然后，我们定义

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2, 0\right) + \widetilde{\mathbb{A}}(\mathbf{v}, 0) - \left(Q_{\widetilde{\mathbb{A}}}, S_{\widetilde{\mathbb{A}}}\right). \tag{1.7}$$

By $f(z) = e^z$ 的泰勒级数以及微分形式对上的楔积，我们令

$$\mathcal{U} = (-1)^{n(n+1)/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int^B e^{-\mathcal{A}}. \tag{1.8}$$

这里，$\int^B$ 表示对一对微分形式中的每个微分形式应用贝雷津积分。

通过验证闭性和沿纤维积分，我们的第一个主要结果表明，$\mathcal{U}$ 正是我们所需的映射锥 Thom 形式：

**定理 1.2。** 这一对 $\mathcal{U} \in \Omega^n(E) \oplus \Omega^{n-1}(E)$ 是 $d^{\widetilde{\omega}}$-闭的。此外，它满足 $es$

$$\int_{E/M} \mathcal{U} = (1, 0). \tag{1.9}$$

这里，$\int_{E/M}$ 表示沿纤维积分。

设 $\nabla_t$ 为欧几里得联络的光滑族，$\Phi_t$ 为斜伴随端omorphism 的光滑族（$t \in \mathbb{R}$）。我们有如下转移：

**定理 1.3.** 设 $\omega$ 和 $g$ 为固定对象。对于与 $\nabla_t$ 和 $\Phi_t$ $(t \in \mathbb{R})$相关联的映射锥托姆形式族$\mathcal{U}_t$，存在 $\psi_b, \rho_t \in \Omega^*(E)$ 使得

$$\frac{d\mathcal{U}_t}{dt} = d^{\widetilde{\omega}}(\psi_t, \rho_t). \tag{1.10}$$

$(\psi_t, \rho_t)$ 的精确表达式见命题 *6.2*。

与 [1, 第 1 节6], [17, 第 3], [18, 章 3], 中验证定理 1.2 和定理 1.3时相比，$\omega$ 和 $\Phi$ 带来的额外项造成了主要困难。为处理这些额外项，我们需要使 $\Phi$ 成为斜伴随算子。这使 $\mathbb{A}$ 成为欧几里得联络的类似物。

本文按以下顺序组织：第 2 节回顾映射锥协变导数及其向外丛值微分形式的扩张。第3 节证明映射锥 Bianchi 恒等式的斜伴随版本，这是定理 1.2 所需的结果。第 4 节回顾贝雷津积分，并将其推广到映射锥情形。第 5 节利用扩展后的贝雷津积分构造 $\mathcal{U}$ 并证明定理1.2。第 6 节证明定理 1.3 并介绍与本研究相关的一些启发。


# 致谢

感谢刘晓波教授、唐翔教授、曾立生教授、王善文教授、陈锦轩博士、David Clausen 博士、DanhuaSong 博士和徐世坦博士

感谢他们提供了有益的讨论。此外，感谢北京国际数学研究中心提供了良好的工作环境。

## 2 映射锥协变导数

本节回顾向量丛值微分形式上的映射锥协变导数。目前，我们不要求 $\nabla$ 是欧几里得的，也不要求 $\Phi$ 是斜伴随的。

设 $E$ 是定义在 $M$上的光滑向量丛。给定 $\nabla$ 上的 Koszul联络 $E$，它诱导出协变导数 [17,(1.2)]

$$\nabla : \Omega^i(M, E) \to \Omega^{i+1}(M, E) \quad (0 \leqslant i \leqslant \dim M) \tag{2.1}$$

取值于 $E$的微分形式上。该 $\nabla$ 由下式确定

$$\nabla(\eta \otimes v) = d\eta \otimes v + (-1)^i \eta \wedge \nabla v \tag{2.2}$$

对任意 $\eta \in \Omega^i(M)$ 以及 $E$ 的任意光滑截面 $v$。

令

$$\Lambda^* E \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k E \tag{2.3}$$

为 $E$ 的外丛。于是，联络 $\nabla$ 可扩展为 $\Lambda^* E$:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(\Lambda^* E) \to \Gamma(\Lambda^* E). \tag{2.4}$$

这里，$\Gamma(\Lambda^* E)$（分别地，$\Gamma(TM)$）是 $\Lambda^* E$（分别地，$TM$）的光滑截面空间。局部地，设 $M$ 上有一个光滑向量场 $X$、一个光滑函数 $f$，并且 $M$ 上有一个局部标架 $e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$，则对于 $E$ 中的 $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$，

$$\begin{aligned} &\nabla_X(f e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) \\ &= X(f) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} + f \sum_{j=1}^{r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \nabla_X e_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

立即可得相应的协变导数

$$\nabla : \Omega^i(M, \Lambda^* E) \to \Omega^{i+1}(M, \Lambda^* E) \quad (0 \leqslant i \leqslant \dim M) \tag{2.6}$$

由以下条件确定

$$\begin{aligned} &\nabla(\alpha \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r})) \\ &= d\alpha \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) + (-1)^i \alpha \wedge \nabla(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

对所有 $\alpha \in \Omega^i(M)$ 均成立。

现在，我们将上述方法推广到对德拉姆映射锥上链复形的研究。我们从.....中提出的映射锥协变导数开始

[13, 命题 3.8]和 [15, 第 2 节1]。关于定义在超向量丛上的映射锥超联络，参见 [20, 定义 1.3]。

**定义 2.1.** 设 $\Phi \in \Omega^0(M,\mathrm{End}(E))$。我们称线性映射为

$$\begin{aligned}\mathbb{A} : \Omega^i(M,E) \oplus \Omega^{i-1}(M,E) &\to \Omega^{i+1}(M,E) \oplus \Omega^i(M,E)\\ (\alpha,\beta) &\mapsto (\nabla\alpha + \omega\wedge\beta, \Phi\alpha - \nabla\beta)\end{aligned} \tag{2.8}$$

映射锥协变导数。

$\Phi$ 保持 $E$ 的光滑截面空间上的 $C^\infty(M)$-模结构。根据 [3, 第三章 §10.9，命题 14 和 (36)], ，它诱导出一个导子

$$\Phi^\Lambda \in \Omega^0(M, \mathrm{End}\,(\Lambda^* E)). \tag{2.9}$$

此导子定义如下。设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $E$ 的一个局部标架。那么，对于任意

$$a = \sum_{r=0}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} a_{i_1\cdots i_r} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r} \tag{2.10}$$

其中 $a_{i_1\cdots i_r}$ 是局部定义的光滑函数，我们有

$$\Phi^\Lambda a = \sum_{r=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \sum_{j=1}^{r} a_{i_1\cdots i_r} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\Phi(e_{i_j})\wedge\cdots\wedge e_{i_r}. \tag{2.11}$$

数值 $r$ 在 (2.11) 中从 1 开始，因为作为一个与$C^\infty(M)$-模结构相容的导子， $\Phi^\Lambda$ 在 $\Omega^0(M,\Lambda^0 E) = C^\infty(M)$ 上必须为 0。

由（2.6）和（2.9，我们得到 $\mathbb{A}$的如下推广：

$$\begin{aligned}\mathbb{A} : \Omega^i(M,\Lambda^* E) \oplus \Omega^{i-1}(M,\Lambda^* E) &\to \Omega^{i+1}(M,\Lambda^* E) \oplus \Omega^i(M,\Lambda^* E)\\ (\alpha,\beta) &\mapsto (\nabla\alpha + \omega\wedge\beta, \Phi^\Lambda\alpha - \nabla\beta).\end{aligned} \tag{2.12}$$

接下来，我们定义经典欧几里得联络的对应概念：

**定义 2.2。** 若在 $E$ 上某个光滑向量丛度量下，联络 $\nabla$ 是欧几里得的，且 $\Phi$ 是斜伴随的，则称 $\mathbb{A}$ 为该度量下的欧几里得映射锥协变导数。

# 3 斜伴随 Bianchi 恒等式

在本节中，我们证明 $\mathbb{A}$ 的斜伴随 Bianchi 恒等式。假设 $E$ 是 $M$ 上秩为 $n$ 的定向光滑向量丛。此外，我们在 $E$ 上赋予光滑向量丛度量 $g$，并令 $\mathbb{A}$ 关于 $g$ 为欧几里得的，也就是说， $\nabla$ 是欧几里得的，且 $\Phi$ 关于 $g$ 是斜伴随的。

令 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $E$ 的定向局部正交标架。于是，我们定义

$$Q_{\mathbb{A}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g\left(\nabla^2 e_i + \omega \wedge \Phi e_i,\ e_j\right) \otimes (e_i \wedge e_j) \in \Omega^2(M, \Lambda^2 E) \tag{3.1}$$

and

$$S_{\mathbb{A}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g\left(\Phi \nabla e_i - \nabla \Phi e_i,\ e_j\right) \otimes (e_i \wedge e_j) \in \Omega^1(M, \Lambda^2 E). \tag{3.2}$$

该 $Q_{\mathbb{A}}$ 和 $S_{\mathbb{A}}$ 在整体上定义良好，因为 $\mathbb{A}$ 是欧几里得的（参见 [17, (3.9)]）。

我们有以下斜伴随 Bianchi 恒等式。

**命题 3.1.** 当 $\mathbb{A}$在 $g$下是欧几里得的时，我们有

$$\mathbb{A}\left(Q_{\mathbb{A}}, S_{\mathbb{A}}\right) = (0, 0). \tag{3.3}$$

*Pro*证明。 在此证明中，我们暂时采用爱因斯坦求和约定。由于 e

$$\mathbb{A}\left(Q_{\mathbb{A}}, S_{\mathbb{A}}\right) = \left(\nabla Q_{\mathbb{A}} + \omega \wedge S_{\mathbb{A}}, \Phi^{\Lambda} Q_{\mathbb{A}} - \nabla S_{\mathbb{A}}\right), \tag{3.4}$$

我们需要证明 (3.4) 中的两个分量都等于 0。

令 $e_1$、 $\cdots$、 $e_n$ 为 $E$的定向局部正交标架。然后，我们令

$$\nabla e_j = \eta_{ij} \otimes e_i, \tag{3.5}$$
$$\nabla^2 e_j = R_{ij} \otimes e_i, \tag{3.6}$$
$$\Phi e_j = \varphi_{ij} e_i. \tag{3.7}$$

这里， $\eta_{ij}$ 是一个 1-形式， $R_{ij}$ 是一个 2-形式， $\varphi_{ij}$ 是一个函数。它们满足

$$\eta_{ij} = -\eta_{ji},\ R_{ij} = -R_{ji},\ \varphi_{ij} = -\varphi_{ji} \tag{3.8}$$

b因为 $\mathbb{A}$ 是欧几里得的。此外，我们有结构恒等式 [16, 定理 11 .1]

$$R_{ij} = d\eta_{ij} + \eta_{ik} \wedge \eta_{kj} \tag{3.9}$$

以及 Bianchi 恒等式 [16, 命题 22.3]

$$dR_{ij} = R_{ik} \wedge \eta_{kj} - \eta_{ik} \wedge R_{kj}. \tag{3.10}$$

现在，我们看到

$$\begin{aligned}
&2\left(\nabla Q_{\mathbb{A}} + \omega \wedge S_{\mathbb{A}}\right) \\
&= \nabla\left(g(\nabla^2 e_i + \omega \wedge \Phi e_i, e_j) \otimes (e_i \wedge e_j)\right) + \omega \wedge g(\Phi \nabla e_i - \nabla \Phi e_i, e_j) \otimes (e_i \wedge e_j) \\
&= \nabla\left((R_{ji} + \varphi_{ji}\omega) \otimes (e_i \wedge e_j)\right) + \omega \wedge (\varphi_{jk}\eta_{ki} - d\varphi_{ji} - \varphi_{ki}\eta_{jk}) \otimes (e_i \wedge e_j) \\
&= dR_{ji} \otimes (e_i \wedge e_j) + (R_{ji} \wedge \eta_{ki} + \varphi_{ji}\omega \wedge \eta_{ki}) \otimes (e_k \wedge e_j) + (R_{ji} \wedge \eta_{kj} + \varphi_{ji}\omega \wedge \eta_{kj}) \otimes (e_i \wedge e_k) \\
&\quad + (\varphi_{jk}\omega \wedge \eta_{ki} - \varphi_{ki}\omega \wedge \eta_{jk}) \otimes (e_i \wedge e_j)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 $\eta_{ik}=-\eta_{ki}$，我们有

$$\begin{aligned}&\varphi_{ji}\eta_{ki}\otimes(e_k\wedge e_j)+\varphi_{ji}\eta_{kj}\otimes(e_i\wedge e_k)+(\varphi_{jk}\eta_{ki}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\\=&\varphi_{jk}\eta_{ik}\otimes(e_i\wedge e_j)+\varphi_{ki}\eta_{jk}\otimes(e_i\wedge e_j)+(\varphi_{jk}\eta_{ki}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\\=&0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

此外，根据（3.10）和 $\eta_{ik}=-\eta_{ki}$，可得

$$\begin{aligned}&dR_{ji}\otimes(e_i\wedge e_j)+(R_{ji}\wedge\eta_{ki})\otimes(e_k\wedge e_j)+(R_{ji}\wedge\eta_{kj})\otimes(e_i\wedge e_k)\\=&dR_{ji}\otimes(e_i\wedge e_j)+(R_{jk}\wedge\eta_{ik})\otimes(e_i\wedge e_j)+(R_{ki}\wedge\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\\=&0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

根据（3.11）、（3.12）和（3.13），我们得到

$$\nabla Q_{\mathbb{A}}+\omega\wedge S_{\mathbb{A}}=0.\tag{3.14}$$

接下来，我们发现

$$\begin{aligned}&2\left(\Phi^{\Lambda}Q_{\mathbb{A}}-\nabla S_{\mathbb{A}}\right)\\=&g(\nabla^2e_i+\omega\wedge\Phi e_i,e_j)\otimes\Phi^{\Lambda}(e_i\wedge e_j)-\nabla\left(g(\Phi\nabla e_i-\nabla\Phi e_i,e_j)\otimes(e_i\wedge e_j)\right)\\=&(R_{ji}+\varphi_{ji}\omega)\otimes(\varphi_{ki}e_k\wedge e_j+\varphi_{kj}e_i\wedge e_k)-\nabla\left((\varphi_{jk}\eta_{ki}-d\varphi_{ji}-\varphi_{ki}\eta_{ji})\otimes(e_i\wedge e_j)\right)\\=&(R_{ji}+\varphi_{ji}\omega)\otimes(\varphi_{ki}e_k\wedge e_j+\varphi_{kj}e_i\wedge e_k)-d(\varphi_{jk}\eta_{ki}-d\varphi_{ji}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\\&+(\varphi_{jk}\eta_{ki}-d\varphi_{ji}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\wedge\eta_{ri}\otimes(e_r\wedge e_j)+(\varphi_{jk}\eta_{ki}-d\varphi_{ji}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\wedge\eta_{rj}\otimes(e_i\wedge e_r).\end{aligned}\tag{3.15}$$

根据 $\varphi_{ik}=-\varphi_{ki}$，我们有

$$\begin{aligned}&\varphi_{ji}\omega\otimes(\varphi_{ki}e_k\wedge e_j+\varphi_{kj}e_i\wedge e_k)\\=&\varphi_{ji}\varphi_{ki}\omega\otimes(e_k\wedge e_j)+\varphi_{ji}\varphi_{kj}\omega\otimes(e_i\wedge e_k)\\=&\varphi_{jk}\varphi_{ik}\omega\otimes(e_i\wedge e_j)+\varphi_{ki}\varphi_{jk}\omega\otimes(e_i\wedge e_j)\\=&0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

根据 $\eta_{ki}=-\eta_{ik}$，我们有

$$\begin{aligned}&d(\varphi_{jk}\eta_{ki}-d\varphi_{ji}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)+d\varphi_{ji}\wedge(\eta_{ri}\otimes(e_r\wedge e_j)+\eta_{rj}\otimes(e_i\wedge e_r))\\=&d(\varphi_{jk}\eta_{ki}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)+(d\varphi_{jr}\wedge\eta_{ir})\otimes(e_i\wedge e_j)+(d\varphi_{ri}\wedge\eta_{jr})\otimes(e_i\wedge e_j)\\=&(d\varphi_{jk}\wedge\eta_{ki}+\varphi_{jk}d\eta_{ki}-d\varphi_{ki}\wedge\eta_{jk}-\varphi_{ki}d\eta_{jk}+d\varphi_{jk}\wedge\eta_{ik}+d\varphi_{ki}\wedge\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\\=&(\varphi_{jk}d\eta_{ki}-\varphi_{ki}d\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j).\end{aligned}\tag{3.17}$$

根据（3.9）、（3.15）、（3.16）、（3.17）、$\varphi_{ki}=-\varphi_{ik}$以及 $\eta_{ki}=-\eta_{ik}$，我们有

$$\begin{aligned}&2\left(\Phi^{\Lambda}Q_{\mathbb{A}}-\nabla S_{\mathbb{A}}\right)\\=&R_{ji}\otimes(\varphi_{ki}e_k\wedge e_j+\varphi_{kj}e_i\wedge e_k)-(\varphi_{jk}d\eta_{ki}-\varphi_{ki}d\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\\&+(\varphi_{jk}\eta_{ki}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\wedge\eta_{ri}\otimes(e_r\wedge e_j)+(\varphi_{jk}\eta_{ki}-\varphi_{ki}\eta_{jk})\wedge\eta_{rj}\otimes(e_i\wedge e_r)\\=&\varphi_{ik}R_{jk}\otimes(e_i\wedge e_j)+\varphi_{jk}R_{ki}\otimes(e_i\wedge e_j)-(\varphi_{jk}d\eta_{ki}-\varphi_{ki}d\eta_{jk})\otimes(e_i\wedge e_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\varphi_{jk}\eta_{kr}-\varphi_{kr}\eta_{jk})\wedge\eta_{ir}\otimes(e_i\wedge e_j)+(\varphi_{rk}\eta_{ki}-\varphi_{ki}\eta_{rk})\wedge\eta_{jr}\otimes(e_i\wedge e_j)\\
=&(\varphi_{ik}R_{jk}+\varphi_{ki}d\eta_{jk}-\varphi_{ki}\eta_{rk}\wedge\eta_{jr})\otimes(e_i\wedge e_j)\\
&+(\varphi_{jk}R_{ki}-\varphi_{jk}d\eta_{ki}+\varphi_{jk}\eta_{kr}\wedge\eta_{ir})\otimes(e_i\wedge e_j)\\
&+(-\varphi_{kr}\eta_{jk}\wedge\eta_{ir}+\varphi_{rk}\eta_{ki}\wedge\eta_{jr})\otimes(e_i\wedge e_j)\\
=&-\varphi_{kr}\eta_{jk}\wedge\eta_{ir}\otimes(e_i\wedge e_j)+\varphi_{rk}\eta_{ki}\wedge\eta_{jr}\otimes(e_i\wedge e_j)\\
=&-\varphi_{kr}\eta_{jk}\wedge\eta_{ir}\otimes(e_i\wedge e_j)+\varphi_{kr}\eta_{ri}\wedge\eta_{jk}\otimes(e_i\wedge e_j)\\
=&\,0.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

因此，根据（3.18），我们有

$$
\Phi^{\Lambda}Q_{\mathbb{A}}-\nabla S_{\mathbb{A}}=0. \tag{3.19}
$$

命题的证明至此完成。 □

**注 3.2.** 命题 3.1 的证明依赖于（3.8）。这就是我们将（3.3）称为斜伴随 Bianchi 恒等式的原因。关于一般映射锥协变导数的 Bianchi 恒等式，参见 [20, 命题 2。5] 。

# 4 对的贝雷津积分

我们继续采用 $E$ 和 $\mathbb{A}$第 3 节中的设定。本节研究贝雷津积分，并将其推广到丛值微分形式对。

根据 [1, (1.28)], [17, (3.6)], 和 [18, (3.6)], ，我们从贝雷津积分开始

$$
\int^B:\Omega^*(M,\Lambda^*E)\to\Omega^*(M) \tag{4.1}
$$

与 $g$ 相关。在局部坐标图 $V\subseteq M$ 上，令 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $E$ 的一个定向标准正交标架。那么，对于任意 $\alpha\in\Omega^*(M,\Lambda^*E)$，我们记

$$
\alpha|_V=\sum_{r=0}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\alpha_{i_1\cdots i_r}\otimes(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}). \tag{4.2}
$$

这里，$\alpha_{i_1\cdots i_r}\in\Omega^*(V)$。那么，$\alpha$ 的贝雷津积分为

$$
\left(\int^B\alpha\right)\Big|_V=\alpha_{123\cdots n}. \tag{4.3}
$$

由于特殊正交矩阵的行列式为 1，$\int^B\alpha$ 是良定义的。我们将贝雷津积分推广到映射锥情形：

$$
\begin{aligned}
\int^B:\Omega^*(M,\Lambda^*E)\oplus\Omega^*(M,\Lambda^*E)&\to\Omega^*(M)\oplus\Omega^*(M)\\
(\alpha,\beta)&\mapsto\left(\int^B\alpha,\int^B\beta\right).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

它满足以下性质:

**命题 4.1.** 对于任意 $(\alpha,\beta)\in\Omega^*(M,\Lambda^*E)\oplus\Omega^*(M,\Lambda^*E)$，有

$$d^{\omega}\int^B(\alpha,\beta)=\int^B\mathbb{A}(\alpha,\beta). \tag{4.5}$$

证明。由 [17, 命题 3。2], 可得

$$\int^B\mathbb{A}(\alpha,\beta)=(d\int^B\alpha+\omega\wedge\int^B\beta,\int^B\Phi^{\Lambda}\alpha-d\int^B\beta). \tag{4.6}$$

设 $e_1,\cdots e_n$ 是 $E$ 的定向局部正交标架。由于 $\Phi$ 关于 $g$ 是斜伴随的，因此

$$g(\Phi(e_i),e_i)=0\quad(1\leqslant i\leqslant n), \tag{4.7}$$

因此

$$\Phi^{\Lambda}(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=\sum_{j=1}^{n}e_1\wedge\cdots\wedge\Phi(e_j)\wedge\cdots\wedge e_n=0. \tag{4.8}$$

于是，我们有

$$\int^B\mathbb{A}(\alpha,\beta)=\left(d\int^B\alpha+\omega\wedge\int^B\beta,\ -d\int^B\beta\right)=d^{\omega}\int^B(\alpha,\beta). \tag{4.9}$$

证明完毕。 □

# 5 映射锥复形的 Thom 形式

我们沿用第 $E$ 节和 $\mathbb{A}$ 节中的设定。对于本节的德拉姆映射锥上链复形，我们按照 [7, 定理 45] 的含义给出托姆形式。

我们沿用 [1, 第 1 节。6], [17, 第 3], 章和 [18, 第 3]章中的步骤。设

$$\sigma:E\to M \tag{5.1}$$

~是从 $E$ 的全空间到基空间 $M$的投影。接着，令 $E$为 $E$上的拉回丛 $\sigma^*E$ 。此外，令

$$\widetilde{\omega}=\sigma^*\omega,\ \widetilde{\nabla}=\sigma^*\nabla,\ \widetilde{\Phi}=\sigma^*\Phi,\ \widetilde{g}=\sigma^*g. \tag{5.2}$$

于是， $\widetilde{\Phi}\in\Omega^0(E,\mathrm{End}(\widetilde{E}))$以与（2.11）相同的方式诱导出相伴导子 $\widetilde{\Phi}^{\Lambda}$。于是，我们得到 de Rham 映射锥复形

$$\begin{aligned}d^{\widetilde{\omega}}:\Omega^i(E)\oplus\Omega^{i-1}(E)&\to\Omega^{i+1}(E)\oplus\Omega^i(E)\\(\alpha,\beta)&\mapsto(d\alpha+\widetilde{\omega}\wedge\beta,-d\beta),\end{aligned} \tag{5.3}$$

以及映射锥协变导数

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{A}} : \Omega^i(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \oplus \Omega^{i-1}(E, \Lambda^* \widetilde{E}) &\to \Omega^{i+1}(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \oplus \Omega^i(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \left( \widetilde{\nabla} \alpha + \widetilde{\omega} \wedge \beta,\ \widetilde{\Phi}^{\Lambda} \alpha - \widetilde{\nabla} \beta \right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

~令 $\mathbf{v}$ 为 $E$的典范截面。事实上，给定 $E$的一个定向局部标准正交标架 $e_1, \cdots, e_n$，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $\widetilde{e}_i = \sigma^* e_i$。于是，典范~截面 $\mathbf{v} : E \to E$ 定义为

$$\mathbf{v}(y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) = y_1 \widetilde{e}_1 + \cdots + y_n \widetilde{e}_n \tag{5.5}$$

对于所有 $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$，于是有

$$(\mathbf{v}, 0) \in \Omega^0(E, \widetilde{E}) \oplus \Omega^{-1}(E, \widetilde{E}) \tag{5.6}$$

并令

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\widetilde{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}. \tag{5.7}$$

此外，由（3.1）和（3.2），可得

$$Q_{\widetilde{\mathbb{A}}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \widetilde{g} \left( \widetilde{\nabla}^2 \widetilde{e}_i + \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\Phi} \widetilde{e}_i,\ \widetilde{e}_j \right) \otimes (\widetilde{e}_i \wedge \widetilde{e}_j) \in \Omega^2(E, \Lambda^2 \widetilde{E}) \tag{5.8}$$

and

$$S_{\widetilde{\mathbb{A}}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \widetilde{g} \left( \widetilde{\Phi} \widetilde{\nabla} \widetilde{e}_i - \widetilde{\nabla} \widetilde{\Phi} \widetilde{e}_i,\ \widetilde{e}_j \right) \otimes (\widetilde{e}_i \wedge \widetilde{e}_j) \in \Omega^1(E, \Lambda^2 \widetilde{E}). \tag{5.9}$$

根据 [1, 第 1.6 节第 53], 页，令 $\mathbf{v}\lrcorner$ 为收缩算子，其定义为 $\mathbf{v}$: 对于~任意 $\eta \in \Omega^i($ $E)$和任意光滑截面 $w : E \to \Lambda^* E$,

$$\mathbf{v}\lrcorner(\eta \otimes w) = (-1)^i \eta \otimes (\mathbf{v}\lrcorner w) \tag{5.10}$$

定义了关于$\mathbf{v}$的收缩。接着，我们将收缩扩展到有序对:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\lrcorner : \Omega^i(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \oplus \Omega^{i-1}(E, \Lambda^* \widetilde{E}) &\to \Omega^i(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \oplus \Omega^{i-1}(E, \Lambda^* \widetilde{E}) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\mathbf{v}\lrcorner \alpha, -\mathbf{v}\lrcorner \beta). \end{aligned} \tag{5.11}$$

中的负号 $-\mathbf{v}\lrcorner\beta$ 是为了与符号约定以及楔积（5.16）在这一对情形下保持兼容。

根据贝雷津积分的定义，我们将（4.5）进一步精化为:

**推论 5.1.** 对于任意 $(\alpha, \beta) \in \Omega^*(E, \Lambda^* E) \oplus \Omega^*(E, \Lambda^* E)$，有

$$d^{\widetilde{\omega}} \int^B (\alpha, \beta) = \int^B \left( \widetilde{\mathbb{A}} + \mathbf{v}\lrcorner \right) (\alpha, \beta). \tag{5.12}$$

现在，我们令

$$\mathcal{A}=\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2,0\right)+\widetilde{\mathbb{A}}(\mathbf{v},0)-\left(Q_{\widetilde{\mathbb{A}}},S_{\widetilde{\mathbb{A}}}\right), \tag{5.13}$$

and

$$\mathcal{U}=(-1)^{n(n+1)/2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int^B e^{-\mathcal{A}}. \tag{5.14}$$

在 $\mathcal{U}$ 的定义中，我们使用泰勒展开

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots \tag{5.15}$$

以及 $\Omega^*(E,\ \Lambda^*E)\ \oplus\Omega^*(E,\ \Lambda^*E)$ 上由下式确定的楔积

$$\begin{aligned}&(\alpha\otimes x,\beta\otimes y)\wedge(\gamma\otimes u,\delta\otimes v)\\ =\ &\left((-1)^{|x||\gamma|}(\alpha\wedge\gamma)\otimes(x\wedge u),(-1)^{|y||\gamma|}(\beta\wedge\gamma)\otimes(y\wedge u)+(-1)^{|x|(|\delta|+1)}(\alpha\wedge\delta)\otimes(x\wedge v)\right).\\ &\text{(Here, } |x|,|\gamma|\text{, etc., are the degrees.)}\end{aligned} \tag{5.16}$$

换言之，

$$e^{-\mathcal{A}}=(1,0)+(-\mathcal{A})+\frac{1}{2!}(-\mathcal{A})\wedge(-\mathcal{A})+\frac{1}{3!}(-\mathcal{A})\wedge(-\mathcal{A})\wedge(-\mathcal{A})+\cdots. \tag{5.17}$$

由于 $E$ 的秩和 $M$ 的维数均有限，这个级数会终止。

回忆一下， $n$ 是 $E$的秩。现在我们证明主要结果定理 1.2 .

**Pro位置 5.2**。 对 $\mathcal{U}\in\Omega^n(E)\ \oplus\Omega^{n-1}(E)$ 是 $d^{\widetilde{\omega}}$-闭的。此外，它满足

$$\int_{E/M}\mathcal{U}=(1,0). \tag{5.18}$$

这里， $\int_{E/M}$ 表示沿纤维积分。

证明。首先， $U$ 的次数由 $E$ 和（4.3）给出。

其次，由命题3.1，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{A}&=\widetilde{\mathbb{A}}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2,0\right)+\left((\widetilde{\nabla}^2+\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\Phi})\mathbf{v},(\widetilde{\Phi}\widetilde{\nabla}-\widetilde{\nabla}\widetilde{\Phi})\mathbf{v}\right)-\widetilde{\mathbb{A}}\left(Q_{\widetilde{\mathbb{A}}},S_{\widetilde{\mathbb{A}}}\right)\\ &=(-\mathbf{v}\lrcorner\widetilde{\nabla}\mathbf{v},0)+\left((\widetilde{\nabla}^2+\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\Phi})\mathbf{v},(\widetilde{\Phi}\widetilde{\nabla}-\widetilde{\nabla}\widetilde{\Phi})\mathbf{v}\right)\end{aligned} \tag{5.19}$$

然后

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\lrcorner\mathcal{A}&=\mathbf{v}\lrcorner\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2,0\right)+(\mathbf{v}\lrcorner\widetilde{\nabla}\mathbf{v},-\mathbf{v}\lrcorner\widetilde{\Phi}\mathbf{v})-\left(\mathbf{v}\lrcorner Q_{\widetilde{\mathbb{A}}},-\mathbf{v}\lrcorner S_{\widetilde{\mathbb{A}}}\right)\\ &=(\mathbf{v}\lrcorner\widetilde{\nabla}\mathbf{v},-\mathbf{v}\lrcorner\widetilde{\Phi}\mathbf{v})-\left(\mathbf{v}\lrcorner Q_{\widetilde{\mathbb{A}}},-\mathbf{v}\lrcorner S_{\widetilde{\mathbb{A}}}\right).\end{aligned} \tag{5.20}$$

~由于 $\Phi$相对于 $\tilde{g}$是斜伴随的，我们注意到

$$-\mathbf{v}\lrcorner\widetilde{\Phi}\mathbf{v} = -\widetilde{g}(\widetilde{\Phi}\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0. \tag{5.21}$$

此外，我们注意到

$$\mathbf{v}\lrcorner Q_{\widetilde{\mathbb{A}}} = (\widetilde{\nabla}^2 + \widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\Phi})\mathbf{v} \tag{5.22}$$

并且

$$-\mathbf{v}\lrcorner S_{\widetilde{\mathbb{A}}} = (\widetilde{\Phi}\widetilde{\nabla} - \widetilde{\nabla}\widetilde{\Phi})\mathbf{v}. \tag{5.23}$$

由（5.19）、（5.20）、（5.21）、（5.22）和（5.23），可得

$$(\widetilde{\mathbb{A}} + \mathbf{v}\lrcorner)\mathcal{A} = (0,0). \tag{5.24}$$

由（5.10）和（5.11），并检查 $\mathcal{A}$的次数，可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}\lrcorner(\mathcal{A}\wedge\cdots\wedge\mathcal{A})\\ &= (\mathbf{v}\lrcorner\mathcal{A})\wedge\mathcal{A}\wedge\cdots\wedge\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge(\mathbf{v}\lrcorner\mathcal{A})\wedge\cdots\wedge\mathcal{A} + \cdots + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge\cdots\wedge(\mathbf{v}\lrcorner\mathcal{A}).\end{aligned} \tag{5.25}$$

~于是，我们发现 $\mathcal{U}$ 是 $d^{\omega}$-闭的:

$$d^{\widetilde{\omega}}\mathcal{U} = (-1)^{n(n+1)/2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int^{B}(\widetilde{\mathbb{A}} + \mathbf{v}\lrcorner)e^{-\mathcal{A}} = 0. \tag{5.26}$$

第三，根据 [2, (4.4)] 沿纤维积分的定义，我们使用局部表达式（5.5）并得到

$$\begin{aligned}&\int_{E/M}\mathcal{U}\\ &= \left((-1)^{n(n+1)/2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_n^2)}\int^{B}\frac{1}{n!}(1 - dy_1\otimes\widetilde{e}_1 - \cdots - dy_n\otimes\widetilde{e}_n)^n,\ 0\right).\end{aligned} \tag{5.27}$$

Here，幂 $n$ on $(1 - dy_1\otimes\widetilde{e}_1 - \cdots - dy_n\otimes\widetilde{e}_n)^n$ 表示取 $n$ 次楔积。由于 e

$$(dy_i\otimes\widetilde{e}_i)\wedge(dy_j\otimes\widetilde{e}_j) = -(dy_i\wedge dy_j)\otimes(\widetilde{e}_i\wedge\widetilde{e}_j) = (dy_j\otimes\widetilde{e}_j)\wedge(dy_i\otimes\widetilde{e}_i), \tag{5.28}$$

那么，如 [17, 命题 3.1], 所示，我们可以看到

$$\begin{aligned}&(-1)^{n(n+1)/2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_n^2)}\int^{B}\frac{1}{n!}(1 - dy_1\otimes\widetilde{e}_1 - \cdots - dy_n\otimes\widetilde{e}_n)^n\\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_n^2)}dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n\\ &= 1.\end{aligned} \tag{5.29}$$

定理1.2 的证明完成。 □

**注 5.3**。 正如我们所见，得到正态分布和高斯积分并不太难。曲率项不会对沿纤维积分作出贡献。事实上，无论是在 Mathai-Quillen 的原始工作中，还是在我们当前的构造中，最困难的任务都是加入曲率项，使得 $\mathcal{U}$ 是闭的。

**注 5.4**。 在 [8, Setting 3.1], 中，形式 $\widetilde{\omega}$ 被 $\widetilde{\omega} + d\mu$取代。这个 $\mu$ 是 $E$的全空间上的一个 1-形式。实际上，映射

$$\begin{aligned} \varrho : \Omega^i(E) \oplus \Omega^{i-1}(E) &\to \Omega^i(E) \oplus \Omega^{i-1}(E) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha + \mu \wedge \beta, \beta) \end{aligned} \tag{5.30}$$

满足

$$d^{\widetilde{\omega}} \varrho(\alpha, \beta) = \varrho\, d^{\widetilde{\omega}+d\mu}(\alpha, \beta). \tag{5.31}$$

这意味着，添加或减去 $d\mu$ 不会影响由 (5.3) 计算得到的上同调。因此，我们将只使用 $\widetilde{\omega}$。

# 6 托姆形式的转移

~ ~我们继续采用以下设定： $E$、 $\mathbb{A}$、 $E$和 $\mathbb{A}$ 第 3、4和5节中的设定。在本节中，我们证明托姆形式 $\mathcal{U}$的转移公式。证明遵循 [1,命题 154]的思路。

我们固定形式 $\omega$、度量 $g$和典范截面v。接着，令$\nabla_t$ ($t \in \mathbb{R}$)为关于 $g$的欧几里得联络光滑族，并令

$$\Phi_t \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E)) \ (t \in \mathbb{R}) \tag{6.1}$$

为关于 $g$的斜伴随端omorphism光滑族。因此，我们得到 $\Phi_t^{\Lambda}$、 $\mathbb{A}_t$、 $\widetilde{\nabla}_t$、 $\widetilde{\Phi}_t^{\Lambda}$、 $\widetilde{\Phi}_t$、 $\widetilde{\mathbb{A}}_t$，然后得到 $\mathcal{U}_t$。

除了利用 (3.1) 和 (3.2) 得到 $Q_{\mathbb{A}_t}$ 和 $S_{\mathbb{A}_t}$之外，我们还定义

$$Y_{\mathbb{A}_t} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g\left(\frac{d\nabla_t}{dt} e_i, e_j\right) \otimes (e_i \wedge e_j) \tag{6.2}$$

and

$$Z_{\mathbb{A}_t} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g\left(\frac{d\Phi_t}{dt} e_i, e_j\right) \otimes (e_i \wedge e_j). \tag{6.3}$$

它们与所选的定向局部正交标架 $e_1$、 $\cdots$、 $e$无关 $_n$.

**命题 6.1**。对于 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{A}_t(Y_{\mathbb{A}_t}, Z_{\mathbb{A}_t}) = \left(\frac{dQ_{\mathbb{A}_t}}{dt}, \frac{dS_{\mathbb{A}_t}}{dt}\right). \tag{6.4}$$

证明。我们需要证明

$$\nabla_t Y_{\mathbb{A}_t} + \omega \wedge Z_{\mathbb{A}_t} = \frac{dQ_{\mathbb{A}_t}}{dt}, \tag{6.5}$$

$$\text{and} \quad \Phi_t^{\Lambda} Y_{\mathbb{A}_t} - \nabla_t Z_{\mathbb{A}_t} = \frac{dS_{\mathbb{A}_t}}{dt}. \tag{6.6}$$

对于 $t \in \mathbb{R}$，我们令

$$\nabla_t e_j = \eta_{ij} \otimes e_i, \tag{6.7}$$

wh其中 $\eta_{ij}$ 关于 $t$ 是光滑的。为方便起见，我们在 $\eta_{ij}$ 中省略 $t$。于是，我们有 e

$$\begin{aligned}
&2\nabla_t Y_{\mathbb{A}_t} \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} d\left(g\left(\frac{d\nabla_t}{dt}e_i, e_j\right)\right) \otimes (e_i \wedge e_j) - \sum_{i,j=1}^{n} g\left(\frac{d\nabla_t}{dt}e_i, e_j\right) \wedge \nabla_t(e_i \wedge e_j) \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}d\eta_{ji}\right) \otimes (e_i \wedge e_j) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{d\eta_{ji}}{dt} \wedge \eta_{ki}\right) \otimes (e_k \wedge e_j) + \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{d\eta_{ji}}{dt} \wedge \eta_{kj}\right) \otimes (e_i \wedge e_k) \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dt}(d\eta_{ji} + \eta_{jk} \wedge \eta_{ki}) \otimes (e_i \wedge e_j) \quad \text{(This line is guaranteed by } \eta_{ik} = -\eta_{ki}.) \\
=& 2\frac{dQ_{\mathbb{A}_t}}{dt} - 2\omega \wedge Z_{\mathbb{A}_t}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

（6.5）的证明至此完成。接下来，我们令

$$\Phi e_j = \varphi_{ij} e_i. \tag{6.9}$$

这里，$\varphi_{ij}$ 关于 $t$ 是光滑的，并且也省略了记号 $t$。我们得到

$$\begin{aligned}
&2\frac{dS_{\mathbb{A}_t}}{dt} \\
=& -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dt}(d\varphi_{ji}) \otimes (e_i \wedge e_j) + \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\varphi_{jk}\eta_{ki} - \varphi_{ki}\eta_{jk}\right) \otimes (e_i \wedge e_j).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&2\Phi_t^{\Lambda} Y_{\mathbb{A}_t} \\
=& \Phi_t^{\Lambda}\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{d\eta_{ji}}{dt} \otimes (e_i \wedge e_j)\right) \\
=& \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\varphi_{ik}\frac{d\eta_{jk}}{dt} + \varphi_{jk}\frac{d\eta_{ki}}{dt}\right) \otimes (e_i \wedge e_j)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

and

$$\begin{aligned}
&2\nabla_t Z_{\mathbb{A}_t}\\
&= \nabla_t\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{d\varphi_{ji}}{dt}(e_i\wedge e_j)\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{d}{dt}(d\varphi_{ji})\otimes(e_i\wedge e_j)+\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{d\varphi_{jk}}{dt}\eta_{ik}+\frac{d\varphi_{ki}}{dt}\eta_{jk}\right)\otimes(e_i\wedge e_j). \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

利用（6.10）、（6.11）、（6.12）、$\varphi_{ik}=-\varphi_{ki}$以及 $\eta_{ik}=-\eta_{ki}$，我们得到（6.6）。 □

现在，与 [1, 命题 1.54],类似，我们证明转移公式：

**命题 6.2.** 对于族 $\mathbb{A}_t$，我们有

$$\frac{d\mathcal{U}_t}{dt}=d^{\tilde{\omega}}\left((-1)^{n(n+1)/2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int^{B}\left(Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t},Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right)\wedge e^{-\mathcal{A}_t}\right). \qquad (6.13)$$

证明. 对于 $E$ 上的协变导数 $\mathbb{A}_t$，我们有

$$Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\widetilde{g}\left(\frac{d\widetilde{\nabla}_t}{dt}\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j\right)\otimes(\widetilde{e}_i\wedge\widetilde{e}_j) \qquad (6.14)$$

and

$$Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\widetilde{g}\left(\frac{d\widetilde{\Phi}_t}{dt}\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j\right)\otimes(\widetilde{e}_i\wedge\widetilde{e}_j). \qquad (6.15)$$

利用表达式

$$\mathcal{A}_t=\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2,0\right)+\widetilde{\mathbb{A}}_t(\mathbf{v},0)-\left(Q_{\widetilde{\mathbb{A}}_t},S_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right) \qquad (6.16)$$

以及（6.4），我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}_t}{dt}&=(0,0)-\mathbf{v}\lrcorner\left(Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t},Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right)-\widetilde{\mathbb{A}}_t\left(Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t},Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right)\\
&=-\left(\widetilde{\mathbb{A}}_t+\mathbf{v}\lrcorner\right)\left(Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t},Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right). \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

由（6.17）以及

$$(\widetilde{\mathbb{A}}_t+\mathbf{v}\lrcorner)\mathcal{A}_t=(0,0), \qquad (6.18)$$

我们得到

$$\frac{d\mathcal{U}_t}{dt}=(-1)^{n(n+1)/2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int^{B}-\frac{d\mathcal{A}_t}{dt}\wedge e^{-\mathcal{A}_t}$$

$$= (-1)^{n(n+1)/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int^{B} (\widetilde{\mathbb{A}}_t + \mathbf{v}\lrcorner) \left( \left(Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}, Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right) \wedge e^{-\mathcal{A}_t} \right)$$
$$= d^{\widetilde{\omega}} \left( (-1)^{n(n+1)/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int^{B} \left(Y_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}, Z_{\widetilde{\mathbb{A}}_t}\right) \wedge e^{-\mathcal{A}_t} \right). \tag{6.19}$$

最后一个等式由推论 5.1 得出。定理 1.3 的证明至此完成。 □

我们以介绍一些与本研究相关的启发结束本文：

还应存在另一种类型的转移（参见 [1, 命题 1.53] 和[17, 命题 3.5]）。在这种类型中，$\mathbf{v}$ 被重新缩放为 $t\mathbf{v}$，而 $g$、 $\omega$、 $\nabla$和 $\Phi$ 保持不变。读者或许会预期，当 $\dim M$ 为偶数时，这种转移与一个非退化向量场结合，可能会带来高斯-博内-陈定理的映射锥类比。然而，这是不可能的。例如，当$M$ 为闭流形且 $\omega$ 是其德拉姆上同调类为整类的辛形式时，德拉姆映射锥上链复形计算的是 $M$上的圆丛 $C$ 的上同调。$\dim\ C$为奇数，并且

$$(0,1) \in \Omega^1(M) \oplus \Omega^0(M) \tag{6.20}$$

对应于一个处处非零 1-形式 $\theta \in \Omega^1(C)$。直观地说，对于 $M$上的任意非退化向量场 $X$，当我们用 $X$拉回 $\mathcal{U}$时， $X$ 的零点在 $C$ 上表现得像孤立圆，而不是像 $M$上的孤立点。这意味着，本文中围绕孤立零点进行的分析 [17, (3.26)-(3.28)] 无法直接推广到 $X^*\mathcal{U}$ 。

这一特点也解释了为何从本质上说，映射锥莫尔斯理论[5, 6, 22] 有些类似于莫尔斯-博特理论，无论 $\omega$ 是否为辛的。此外，转移6.13也表明，如果 $\Phi = 0$ 需要映射锥托姆类的一个简化代表元，我们就可以令 $\omega$ 因此，研究映射锥莫尔斯理论的解析方面时，主要难点在于对 [6, 22] 的分析。更多详情请参见

最后但同样重要的是，当 $M$ 是光滑闭定向流形时，德拉姆映射锥上链复形的欧拉示性数仅由 $\omega$的次数决定。当 $\omega$ 的次数为偶数时，该示性数等于 0。精确公式参见[4,命题 1.6]和 [5, 定理 1.3]。

# 参考文献

[1] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne。《热核与狄拉克算子》。施普林格，2004年。[2] R. Bott 和 L. W. Tu。《代数拓扑中的微分形式》。施普林格，1982年。[3] N. Bourbaki。《代数 *I*：第 *1–3* 章》。施普林格，1989年。[4] K. S. Brown。完全欧拉示性数与不动点理论。纯粹与应用代数杂志，24(2)：103–121，1982年。

[5] D. Clausen、X. Tang 和 L.-S. Tseng。映射锥与 Morse 理论。剑桥数学杂志，14(1)：117–154，2026年。[6] D. Clausen、X. Tang 和 L.-S. Tseng。辛莫尔斯理论与维滕变形。数学杂志，312(3)：94，2026年。[7] V. Mathai 和 D. Quillen。超联络、托姆类与等变微分形式。《*Topology*》，25(1)：85–110，1986年。[8] D. Morrison。《辛流形的上同调》。博士论文，加州大学欧文分校，2024年。[9] H. L. Tanaka 和 L.-S. Tseng。奇维球面丛、辛流形及其交理论。剑桥数学杂志，6(3)：213–266，2018年。[10] C.-J. Tsai、L.-S. Tseng 和 S.-T. Yau。辛流形上的上同调与霍奇理论：III。《微分几何杂志》，103(1)：83–143，2016年。[11] L.-S. Tseng 和 S.-T. Yau。辛流形上的上同调与霍奇理论：I。《微分几何杂志》，91(3)：383–416，2012年。[12] L.-S. Tseng 和 S.-T. Yau。辛流形上的上同调与霍奇理论：II。《微分几何杂志》，91(3)：417–443，2012年。[13] L.-S. Tseng 和 J. Zhou。辛平坦性与扭曲本原上同调。《几何分析杂志》，32(11)：282，2022年。[14] L.-S. Tseng 和 J. Zhou。辛平坦联络及其泛函，2022年。arXiv:2210.03032v5。[15] L.-S. Tseng 和 J. Zhou。映射锥联络及其杨–米尔斯泛函。《数学物理通讯》，406(7)：156，2025年。[16] L. W. Tu。《微分几何：联络、曲率与特征类》。施普林格，2017年。[17] W. Zhang。《陈–韦伊理论与维滕变形讲义》。世界科技出版公司，2001年。[18] W. Zhang 和 H. Feng。《流形上的几何与分析》。高等教育出版社，中文版，2022年。[19] H. Zhuang。辛半特征，2025年。arXiv:2505.14496。[20] H. Zhuang。本原上同调中的转移，2025年。arXiv:2512.24920。[21] H. Zhuang。关于 (4n+2) 维闭辛流形的 1-滤过上同调群的一种消失性质，2025年。arXiv:2510.10630。

[22] H. Zhuang. 映射锥 Thom-Smale 复形的瞬子构造，2026。arXiv:2603.08404。

北京大学北京国际数学研究中心电子邮箱地址：hzhuang@pku.edu.cn