arXiv:2603.25141v1 [math.QA] 26 Mar 2026

量子对称性导论

CHRISTIAN VOIGT

Abstract. 这些讲义介绍有限集、无限集、图和局部紧空间的量子对称性理论。

1. Preface

对量子对称性 的研究是一项研究方向，始于 Wang [26], 的工作。他定义了有限集的量子对称群，并更一般地利用 Woronowicz 紧量子群理论 [28]定义了有限维 C^*-代数的量子对称群。在过去三十年间，人们对由此得到的量子群进行了深入研究，并发现它们与自由概率、子因子、张量范畴、组合学和量子信息论之间存在引人入胜的联系。

这些讲义旨在介绍这一主题，不要求读者事先熟悉量子对称性或量子群。不过，假定读者具备一些希尔伯特空间算子和 C^*-代数方面的基础知识，例如 [19]中所涉及的内容。

我们的出发点是有限集的量子置换这一概念，并将说明此类量子置换如何自然地构成一个 C^*-张量范畴。这是对 Wang 原始方法的补充，因为它将关注点从 [26]中引入的 C^*-代数转向它们的表示范畴。从C^*-张量范畴迈向量子群只有一步之遥；我们将讨论离散量子群，以及上文提到的与之密切相关的紧量子群。不过，重要的是要指出，与 Wang 理论中的紧致 量子群不同，我们的方法确实得到了离散 量子群。无论如何，我们主要会直接研究量子置换；我们的主要目标是展示，这一视角可以自然地推广到无限集和图，甚至局部紧空间领域。在所有这些情形中，我们都会一边讲解，一边通过实例展示相关构造。

这些讲义不 涉及 Wang 的量子置换群及其量子子群的组合与分析研究，尤其是那些作为有限图及相关结构的量子自同构群而出现的量子子群。幸运的是，关于这一主题已有大量文献，包括优秀的教科书 [3], [11]。我们建议读者参阅这些资料及其中的参考文献，作进一步学习。

这些是为在拉普拉塔（阿根廷）于2025年7月28日至8月1日举行的 CIMPA 学校“K-理论与算子代数”所撰写的讲义。特别感谢 G. Corti˜nas 和 G. Tartaglia 出色的组织工作，也借此机会感谢学校的参与者在讲座期间及讲座结束后的精彩讨论。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46L67,05Cxx.*Key words and phrases.* 量子置换、张量范畴、量子自同构群。

2. Introduction

2.1. 什么是量子对称性? 为了阐释量子对称性背后的核心思想，我们从最基本的例子入手，即有限集的量子置换。

回顾一下， n 个点的置换 是一个双射映射 $\sigma : [n] \to [n]$, 记作 $[n] = \{1, \dots, n\}$。我们可以用由下式给出的$n \times n$-矩阵 u^σ 来表示这种置换:

$$u^\sigma_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = \sigma(y) \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

这种形式的矩阵称为置换矩阵。根据定义可直接得出，矩阵 $u \in M_n(\mathbb{C})$ 是置换矩阵，当且仅当其所有元素均为 0 或 1，且 u 的每一行和每一列恰好包含一个元素 1。等价地，这可以表述如下。

引理 2.1. 矩阵 $u = (u_{x,y}) \in M_n(\mathbb{C})$ 是置换矩阵，当且仅当满足以下条件。

- $u^2_{x,\,y} = u_{x,\,y}$ 对所有 $1 \le x, y \le n$ 均成立。
- 我们有
$$\sum_{t=1}^{n} u_{x,t} = 1 = \sum_{t=1}^{n} u_{t,y}$$
对所有 $1 \le x, y \le n$ 均成立。

Wang [26], 提出的关键思想是：通过考虑系数取自（非交换） C^*-代数的矩阵，而非 $\mathbb{C}$，来研究更一般的“置换矩阵”；具体来说，就是考察引理 2.1 中的关系。接下来，以下定义将发挥核心作用。

定义 2.2。 $[n] = \{1, \dots, n\}$ 上的量子置换 是一个二元组$(\mathcal{H}, u)$，由希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和一个$(u_{x,y})$ $u =$矩阵组成，其元素为 $u_{x,y} \in B(\mathcal{H})$，并满足

- $u^2_{x,\,y} = u_{x,\,y} = u^*_{x,\,y}$ 对所有 $1 \le x, y \le n$ 均成立。
- 我们有
$$\sum_{t=1}^{n} u_{x,t} = 1 = \sum_{t=1}^{n} u_{t,y}$$
对所有 $1 \le x, y \le n$。

满足这些条件的矩阵 $u = (u_{x,y}) \in M_n(B(\mathcal{H}))$ 也称为魔法酉矩阵。

这里我们用 T^* 表示 $T \in B(\mathcal{H})$ 的伴随，并注意到，定义 2.2 中的第一个条件是说，魔法酉矩阵的所有元素都是投影。利用下面的练习 2.13，不难验证魔法酉矩阵确实是 $M_n(B(\mathcal{H}))$中的一个酉元。

还要注意，条件 $u_{x,y} = u^*_{x,y}$ 并非引理 2.1 的一部分，不过本可以将其加入其中，因为元素 $0, 1 \in \mathbb{C}$ 显然是自伴的。由此我们得到以下基本事实。

引理 2.3。 $[n]$ 的量子置换（其底层希尔伯特空间为 $\mathbb{C}$ ）与 $[n]$的置换是一回事。

我们所说的量子置换 $(\mathcal{H},\ u)$ 的维数，是指其底层希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的维数。鉴于引理 2.3，我们主要关注维数严格大于一的希尔伯特空间上的量子置换。

我们再引入一些术语。若量子置换 $(\mathcal{H},\ u)$ 的所有矩阵元 $u_{x,\ y}$ 彼此可交换，我们就称其为经典 量子置换。显然，每个一维量子置换都是经典的，这意味着由经典置换产生的量子置换确实是经典的。并非每个经典量子置换都具有这种形式，但我们稍后会说明，经典量子置换与（经典）置换之间确实存在密切联系。

现在我们来描述 n取较小值时量子置换的结构。

引理 2.4. $[n]$ 对于 $n=1$，2、3 的每个量子置换都是经典的。

证明。当 $n=1$时，这显然成立。当 $n=2$ 时，注意到每个量子置换 $(\mathcal{H},u)$ 必须具有如下形式

$$u=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

其中 $p\in B$是一个投影 $\mathcal{H}$。

对于 $n=3$，只需证明矩阵元 $u_{i,j}$ 与 $u_{k,l}$ 在 $i\neq k$ 和 $j\neq l$成立时可交换。例如，考虑 u_{11} 和 u_{22}。我们得到

$$u_{1,1}u_{2,2}u_{1,3}=u_{1,1}(1-u_{2,1}-u_{2,3})u_{1,3}=0,$$

这意味着 $u_{1,1}u_{2,2}=u_{1,1}u_{2,2}(u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3})=u_{1,1}u_{2,2}u_{1,1}$。由此得到

$$u_{1,1}u_{2,2}=u_{1,1}u_{2,2}u_{1,1}=(u_{1,1}u_{2,2}u_{1,1})^*=(u_{1,1}u_{2,2})^*=u_{2,2}u_{1,1}$$

这正是所需的结果。其余情形也可以用类似的方法验证，另见习题 2.15。□

引理 2.4 基本上说明，基数至多为 3 的集合上的量子置换并没有太多有趣之处。相比之下，只要 $n\geq 4$，就能找到非经典量子置换。例如，给定任意投影 $p,\ q\in B(\mathcal{H})$，矩阵

$$\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 1-q & q \end{pmatrix}$$

定义了四个点的一个量子置换。

为了更详细地理解 $n=4$ 这一情形，我们来讨论一种方法，它能构造出更多非经典量子置换的例子，也适用于 n 的较大取值；比较 [3, 第 16a 章]。固定 $N\in\mathbb{N}$，并考虑一个阶为 N 的阿贝尔群 A，例如 $A=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。将 A 与庞特里亚金对偶群 $A\widehat{\ }$ 等同，并令 $[\ ,\ ]\colon A\times A\to U(1)$ 为由 A 与 A 之间的典范配对 $\widehat{\ }$ 所诱导的映射。例如，在 $A=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的情形下，我们得到

$$[k,l]=e^{2\pi ikl/N}$$

对于 $k,\ l\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^N$，并用群元素 $a\in A$为其标准基向量 e_a 标记。我们将韦尔矩阵定义为 韦尔矩阵 $W_{a,\ b}$：

$$W_{a,b}e_c=[a,c]e_{b+c}$$

对于 $a,\ b,\ c\in A$。此外，令 $\mathrm{tr}\colon M_N(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ 为归一化迹，使得 $\mathrm{tr}(1)=1$。

引理 2.5。 韦尔矩阵是酉矩阵，并满足以下关系。*a)* $W_{a,b}^*=[a,b]W_{-a,-b}$ *b)* $W_{a,b}W_{c,d}=[a,d]W_{a+c,b+d}$

c) $W^*_{a,b}W_{c,d} = [a, b-d]W_{c-a,d-b}$
d) $\mathrm{tr}(W^*_{a,b}W_{c,d}) = \delta_{a,c}\delta_{b,d}$

证明。 a）我们计算

$$\begin{aligned}\langle W^*_{a,b}e_c, e_d\rangle = \langle e_c, [a,d]e_{b+d}\rangle &= [a,d]\delta_{c,b+d}\\ &= [a, c-b]\delta_{c-b,d}\\ &= [a,-b][a,c]\langle e_{c-b}, e_d\rangle = \langle [a,b]W_{-a,-b}e_c, e_d\rangle\end{aligned}$$

对所有 c，$d \in A$，由此得出结论。
b）我们计算

$$W_{a,b}W_{c,d}e_f = [c,f]W_{a,b}e_{d+f} = [c,f][a,d+f]e_{b+d+f} = [a,d]W_{a+c,b+d}e_f$$

如所需。
c）由组合 a）和 b）可得。取 $a = c$，$b = d$ 特别表明$W_{a,\ b}$ 是酉矩阵。

d) 使用 c) 我们计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(W^*_{a,b}W_{c,d}) &= \frac{1}{N}\sum_{f\in A}\langle e_f, W^*_{a,b}W_{c,d}e_f\rangle\\ &= \frac{1}{N}\sum_{f\in A}[a,b-d]\langle e_f, [c-a,f]e_{f+d-b}\rangle\\ &= \delta_{b,d}\frac{1}{N}\sum_{f\in A}[a,0]\langle e_f, [c-a,f]e_f\rangle\\ &= \delta_{b,d}\frac{1}{N}\sum_{f\in A}[c-a,f] = \delta_{b,d}\delta_{a,c}\end{aligned}$$

如前所述。 □

我们注意到，韦尔矩阵构成一个酉误差基。也就是说，它们构成 $M_N(\mathbb{C})$ 的一组基，由酉矩阵组成，且这些矩阵关于希尔伯特–施密特内积两两正交

$$\langle S, T\rangle = \mathrm{tr}(S^*T).$$

在量子信息论中，酉误差基与“紧致”的量子隐形传态和超密集编码方案密切相关，参见 [27]。

命题 2.6. 设 A是一个阶为 N 的阿贝尔群。令 $n = N^2$并将$M_N(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$视为相同。对于每个酉矩阵 $g \in U(N)$，通过如下定义，我们得到一个作用于 n 个点的量子置换 $\pi^g = (\mathbb{C}^n, u^g)$

$$u^g_{(a,b),(c,d)} = |W_{a,b}gW^*_{c,d}\rangle\langle W_{a,b}gW^*_{c,d}|$$

对于(a,b)，$(c,d) \in A \times A \cong [n]$，也就是说，$u^g{}_{(a,b),(c,d)}$ 是到由 $W_{a,b}gW^*_{c,d}$ 张成的线性子空间上的正交投影。

证明。 由引理 2.5 c)、d) 可知，$W_{a,b}gW^*_{c,d}$是 $M_N(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$中的一个单位向量。因此，每个 $u^g{}_{(a,b),(c,d)}$ 都是一个投影。此外，对固定的 a, b，矩阵$W_{a,b}gW^*_{c,d}$（其中 $c, d \in A$）构成 $M_N(\mathbb{C})$的一组标准正交基，因为

$$\mathrm{tr}((W_{a,b}gW^*_{c_1,d_1})^*W_{a,b}gW^*_{c_2,d_2}) = \mathrm{tr}(W_{c_1,d_1}W^*_{c_2,d_2}) = \delta_{c_1,c_2}\delta_{d_1,d_2}$$

由引理 2.5 d) 可知。类似地，可以验证对所有 c、$d \in A$，关系 $\sum_{a,\ b} u^g{}_{(a,\ b),(c,\ d)} = 1$ 均成立。□

请注意，命题 2.6 中构造的魔法酉矩阵仅取决于酉矩阵 g 在射影酉群 $PU(N) = U(N)/U(1)$ 中的等价类。换言之，我们可以用任意相位对 g 进行缩放，而不改变与其关联的魔法酉矩阵。

在特殊情形 $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 下， [6], [5] 中的以下结果表明，命题 2.6 中的魔法酉矩阵给出了对四个点的不可约量子置换的完整描述；另见 [25，引理 5.4]。这里，如果量子置换（$\mathcal{H}$，u）中，B（$\mathcal{H}$）的元素中只有单位元的倍数会与其所有元素 $u_{x,\,y}$（属于）u 交换，则称其为不可约。

定理 2.7 (Banica-Collins2008, Banica-Bichon 2009)。集合 $\{1,2,3,4\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的不可约量子置换的维数为 1 、 2 或 4，并且都可以表示为以下形式的 *Weyl* 量子置换的直和项：$\pi^g =$（$\mathbb{C}^4$，u^g），其中 $g \in PU$（2）$\cong SO$（3），

$$u^g_{(a,b),(c,d)} = |W_{a,b} g W^*_{c,d}\rangle\langle W_{a,b} g W^*_{c,d}|.$$

此外，两个不可约量子置换 π^g、π^h 等价，当且仅当对角子群 SO 中存在元素 α、β，使得 $g = \alpha h \beta(3)$。

这里我们不证明定理 2.7。事实上，定理的陈述本身就涉及一些我们尚未解释的术语，例如量子置换的直和项 和等价。这些概念将在第 3 节讨论。

定理 2.7 中的构造为幻影酉矩阵4×4提供了一个矩阵模型 。关于量子置换的矩阵模型，更多信息请参阅 [3] 的第四部分。

2.2. 图的量子自同构。当 n的值较大时，很难具体描述 n 点的一般量子置换的结构。因此，自然会去寻找具有额外性质的量子置换。此类“结构化”量子置换的一个重要例子源自图的量子对称性，见 [2], [4], [23]。

下文中，图 指的是没有自环的简单无向图。更精确地说，图 $X = (V_X, E_X)$由一个顶点集合 V_X和一个边集合$E_X \subset V_X \times V_X$ 组成。边集 E_X 须满足以下条件：对所有 $x \in V_X$，$(x, y) \in E_X$当且仅当 $(y, x) \in E_X$ 且 $(x, x) \notin E_X$。我们注意到，X的结构完全由集合 V_X 及其对应的邻接矩阵 A_X决定，该矩阵是一个条目为

$$(A_X)_{x,y} = \begin{cases} 1 \text{ if } (x,y) \in E_X \\ 0 \text{ else.} \end{cases}$$

如果图 X 是有限 的，那么 V_X 是有限集；在这种情况下， E_X 显然也是有限的，因为我们不允许重边。

若 $X = (V_X, E_X)$ $Y = (V_Y, E_Y)$ 是图，那么映射 $\sigma\colon V_X \to V_Y$ 称为从 X 到 Y 的图同态，如果对所有$x, y \in V_X$，$(x, y) \in E_X$蕴含 $(\sigma(x)\ \sigma(y)) \in E_Y$。根据定义，图同构 是双射图同态。在这种情况下，保持顶点间邻接关系的条件也可以等价地表述为：与 σ相关联的矩阵 u^σ （其定义见引理 2.1 之前的讨论）满足 $A_Y u^\sigma = u^\sigma A_X$。目前我们只关注有限图，但要注意，矩阵乘积$A_Y u^\sigma$ 和 $u^\sigma A_X$ 在一般情况下也有意义。关于无限图，我们将在第 4 节进一步讨论。

X 的图自同构是一个从 X 到其自身的图同构 σ，根据上述内容，相应的置换矩阵满足 $A_X u^\sigma =$

$u^\sigma A_X$。有鉴于此，我们自然得出以下量子自同构的定义，比较 [2]。

定义 2.8. 设 $X=(V_X,E_X)$ 是一个有限图。X 的量子自同构是一个 V_X 的量子置换$(\mathcal{H},u)$，满足 $A_Xu=uA_X$。

在此定义中，公式 $A_Xu=uA_X$ 被理解为$M_n(B(\mathcal{H}))$中的一个等式，其中 $n=|V_X|$，而 A_X 的各项则以显然的方式视为 $B(\mathcal{H})$中单位元的标量倍数。作为定义 2.8 的扩展，我们也称两个有限图 X，Y 是量子同构的，如果它们的顶点数相同，且存在一个 $[n]$的量子置换 $(\mathcal{H},\ u)$，使得 $A_Yu=uA_X$。这里我们默认认定 $V_X=[n]=V_Y$。

引理 2.9. 设 $X=(V_X,E_X)$ 是一个邻接矩阵为 A_X 的有限图，并设$(\mathcal{H},u)$ 是顶点集 V_X 的一个量子置换。那么以下条件等价。

a) $(\mathcal{H},u)$ 是 X 的量子自同构。
b) 对所有的 $i,j,k,l\in V_X$，都有 $u_{i,\ j}u_{k,\ l}=0=u_{k,\ l}u_{i,\ j}$，只要 $(A_X)_{i,\ k}\neq(A_X)_{j,\ l}$。

证明。首先注意到，条件 $A_Xu=uA_X$ 意味着

$$\sum_t(A_X)_{r,t}u_{t,s}=(A_Xu)_{r,s}=(uA_X)_{r,s}=\sum_t(A_X)_{t,s}u_{r,t}$$

对所有 $r,\ s\in V_X$。

a) $\Rightarrow$ *b)* 假设 $i,\ k,\ j,\ l\in V_X$ 满足 $(A_X)_{i,\ k}=0$，$(A_X)_{j,\ l}=1$。在上面的公式中取 $r=i,\ s=l$，并从左侧和右侧分别乘以 $u_{k,\ l}$，得到

$$\sum_t(A_X)_{t,l}u_{k,l}u_{i,t}u_{k,l}=\sum_t(A_X)_{i,t}u_{k,l}u_{t,l}u_{k,l}=(A_X)_{i,k}u_{k,l}=0.$$

由于元素 $u_{k,\ l}u_{i,\ t}u_{k,\ l}$ 都是正元，且 $(A_X)_{j,\ l}=1$，我们得出$u_{k,\ l}u_{i,\ j}u_{k,\ l}$为零。但这意味着 $u_{i,\ j}u_{k,\ l}=0$，因为 $(u_{i,\ j}u_{k,\ l})^*u_{i,\ j}u_{k,\ l}=u_{k,\ l}u_{i,\ j}u_{k,\ l}$。

若 $(A_X)_{i,\ k}=1$且 $(A_X)_{j,\ l}=0$，我们可以采用类似的论证。再次考虑$r=i,\ s=l$，并将上述关系从左侧和右侧分别乘以 $u_{i,\ j}$。我们得到

$$0=(A_X)_{j,l}u_{i,j}=\sum_t(A_X)_{t,l}u_{i,j}u_{i,t}u_{i,j}=\sum_t(A_X)_{i,t}u_{i,j}u_{t,l}u_{i,j}$$

在这种情况下，并推出 $u_{i,\ j}u_{k,\ l}=0$。

b) $\Rightarrow$ *a)* 假设 $u_{i,\ j}u_{k,\ l}=0=u_{k,\ l}u_{i,\ j}$ 对任意 $(A_X)_{i,\ k}\neq(A_X)_{j,\ l}$均成立。那么

$$\begin{aligned}\sum_t(A_X)_{t,s}u_{r,t}=\sum_{t,p}(A_X)_{t,s}u_{r,t}u_{p,s}&=\sum_{t,p|(A_X)_{t,s}=1}u_{r,t}u_{p,s}\\&=\sum_{t,p|(A_X)_{r,p}=1}u_{r,t}u_{p,s}\\&=\sum_{t,p}(A_X)_{r,p}u_{r,t}u_{p,s}=\sum_p(A_X)_{r,p}u_{p,s}\end{aligned}$$

对所有 $r,\ s\in V_X$ 均成立，符合要求。 □

确定给定图 X的量子自同构通常是一个困难的问题。如果 X 没有量子对称性，我们就说它不具有量子对称性；也就是说，它的每个不可约量子自同构都是经典的，即维数为一。否则，我们就说 X 具有量子对称性。

只有对于顶点数量较少的图，量子对称性的存在性才得到了全面理解，参见 [4]。

2.3. 图同构博弈。 通过图同构博弈 [1], [16]，对图的量子对称性的研究与量子信息论之间产生了一个引人入胜的联系。这是一个非局域游戏的例子，也就是说，这是由两名合作玩家爱丽丝和鲍勃对阵裁判进行的游戏。在每一轮游戏中，裁判都会向爱丽丝和鲍勃分别发送一个输入，他们必须彼此独立地返回一个输出。玩家可以在游戏开始时商定一个共同策略，但在游戏过程中不能交流。爱丽丝和鲍勃是否赢得游戏，由验证函数决定；该函数以及输入集和输出集均会事先告知所有参与方。

在图同构博弈中，输入数据由两个有限图 X、Y组成，爱丽丝和鲍勃的任务是说服裁判，他们能够构造出 X 与 Y之间的图同构。该博弈的输入集和输出集相同，均为 X、Y的底层顶点集的（不相交）并集 $V = V_X \cup V_Y$。每一轮中，裁判分别向爱丽丝和鲍勃发送顶点 x、$y \in V$，这些顶点可能来自同一个图，也可能不是。爱丽丝和鲍勃必须返回顶点 a、$b \in V$，并且这些顶点须满足以下条件。首先，如果 x 来自 V_X，那么 a 也必须来自 V_Y，反之亦然；对于 y和 b，情况也相同。如果满足这一条件，那么四个顶点 a、b、x、y中有两个来自 X，另两个来自 Y。第二个条件是，来自 X 的顶点对必须与来自 Y的顶点对满足相同的邻接关系。例如，如果 x、y都来自 Y，那么爱丽丝和鲍勃要想赢得博弈，他们的回答 a、b必须来自 X，并且两者相等、相邻或不相邻，当且仅当 x、y相等、相邻或不相邻。该博弈可以重复多轮，以降低爱丽丝和鲍勃靠运气获胜的可能性，但不要求玩家在后续轮次中对相同的问题给出相同的回答。

如上所述，爱丽丝和鲍勃在游戏过程中不得交流。这意味着他们不知道对方收到的是哪个顶点，也不知道对方返回的是哪个顶点。不过，他们可以事先商定一种策略。用数学术语来说，策略由一个关联或条件概率密度来编码。我们先给出以下一般定义，然后再回到图同构博弈的情形。

定义 2.10. 固定基数分别为 $|I| = n$ 和 $|O| = k$的有限集 I 和 O。关联是一个映射 $p\colon O\times O\times I\times I \to [0,1]$，满足 $\sum_{a,b\in O} p(a,b|x,y) = 1$，对所有 $x, y \in I$均成立。

关联有多种类别，取决于它们的构造方式。根据定义，如果存在映射 $f\colon I \times I \to O \times O$ 使得

$$p(a,b|x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x,y) = (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

那么，p 称为一个确定性关联。

另一类重要的关联可通过以下方式获得。设 $\mathcal{H}$为一个希尔伯特空间，且令 $\psi \in \mathcal{H}$ 为一个单位向量。此外，假设 A_x^a，B_y^b是 $B(\mathcal{H})$中的正算子，满足 $\sum_a A_x^a = 1 = \sum_b B_y^b$对所有 x，$y \in I$均成立，并且对于所有 a，$b \in O$ 和 x，$y \in I$，算子 A_x^a 和 B_y^b 均可交换。于是，通过令下式成立，我们得到一个关联 p

$$p(a,b|x,y) = \langle \psi, A_x^a B_y^b \psi \rangle.$$

这种形式的关联称为量子可交换关联。

回想一下，在图同构博弈中，我们有 $I = O = V_X \cup V_Y$。如果 $p(a,\ b|x,\ y) \neq 0$意味着 a，b是问题的有效答案，那么关联 p 就称为完美的，或者等价地称为图同构博弈的获胜策略。

问题 x, y。例如，若 $\sigma: X \to Y$ 是一个图同构，那么以显而易见的方式扩展 σ 和 σ^{-1} 所得到的确定性关联 $I \times I \to O \times O$ 就是一种获胜策略。

[1], [16] 的以下结果表明，图的量子同构可以用图同构博弈的获胜策略来刻画。

定理 *2.11.* </style>两个有限图 X、Y 量子同构，当且仅当 X 与 Y 的图同构博弈存在获胜的量子交换策略。

一个引人入胜的事实是，即使图 X 与 Y 不同构，爱丽丝和鲍勃也能凭借完美的量子交换策略赢得 X-Y-图同构博弈。换言之，存在一些图对，它们量子同构但并不同构 [1]。

值得注意的是，图的量子同构最终可以完全用图论术语来刻画。以下 Manˇcinska-Roberson [17] 的著名结果阐述了这一点。

定理 *2.12.* </style>设 X、Y 为有限图。则下列条件等价。

a) X 和 Y 量子同构。*b)* 对于每个平面图 P，都存在一个双射 $\mathrm{Hom}(P, X) \cong \mathrm{Hom}(P, Y)$。

这里，对于图 P, Q，我们用 $\mathrm{Hom}(P, Q)$ 表示从 P 到 Q 的所有（经典）图同态所组成的集合。定理 2.12 特别表明，如果 X 和 Y 量子同构，那么它们不仅顶点数相同，边数也相同。

我们注意到，如果 X, Y 量子同构，那么定理 2.12 的证明并未给出实现双射 $\mathrm{Hom}(P, X) \cong \mathrm{Hom}(P, Y)$ 的显式映射，而只是表明集合 $\mathrm{Hom}(P, X)$ 和 $\mathrm{Hom}(P, Y)$ 的基数相同。我们还要指出，判定两个图是否量子同构的问题是不可判定的 [1]。

2.4. **习题**。

练习 2.13. 设 $p_1, \ldots, p_n$ 是含幺 C^*-代数中的投影，满足 $p_1 + \cdots + p_n = 1$。证明，对于 $i \neq j$，$p_i p_j = 0$。

练习 2.14. 设 $\sigma = (\mathcal{H}, u)$ 是四个点上的量子置换。要确保 σ 是经典置换，至少需要多少个彼此对易的矩阵元 $u_{i,j}$？

习题 2.15. 设 σ, τ 是经典置换，且 $(\mathcal{H}, u)$ 是 $[n]$ 的量子置换。证明，由 $v_{i,j} = u_{\sigma(i),\tau(j)}$ 定义的 $v = (v_{i,j})$仍是量子置换。利用这一点，在不进行任何额外计算的情况下完成引理 *2.4* 的证明。

练习 2.16. 对于群 $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，求酉元 $g, h \in U(2)$，使得 *Weyl* 量子置换 π^g 是经典的，而 π^h 是非经典的。

3. Tensor categories and quantum groups

本章将介绍张量范畴与量子群理论中的一些背景知识。这两个概念通过 Tannaka-Krein 形式主义相互关联，更多信息请参阅 [20] 。这里我们将重点讨论与量子置换相关的张量范畴。

3.1. **量子置换的构造**。回顾定义 2.2，有限集 X 上的量子置换 $(\mathcal{H}, u)$ 由希尔伯特空间 $\mathcal{H}$以及一个投影矩阵 $u = (u_{x,y})\ u_{x,y} \in B(\mathcal{H})$ 构成，该矩阵构成一个幻影酉矩阵。

定义 3.1。设 X 是一个有限集，且 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ 和 $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$ 是 X 的量子置换。

a) 直和 $\sigma \oplus \tau = (\mathcal{H}_\sigma \oplus \mathcal{H}_\tau, u^\sigma \oplus u^\tau)$ 定义为对底层希尔伯特空间取直和，并令

$$(u^\sigma \oplus u^\tau)_{x,y} = u^\sigma_{x,y} \oplus u^\tau_{x,y}$$

对于 $x, y \in X$。

b) 张量积 $\sigma \otimes \tau = (\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau, u^\sigma \intercal\bigcirc u^\tau)$ 定义为对底层希尔伯特空间取希尔伯特空间张量积，并令

$$(u^\sigma \circledast u^\tau)_{x,y} = \sum_{t \in X} u^\sigma_{x,t} \otimes u^\tau_{t,y}$$

对于 $x, y \in X$。

c) $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ 的共轭 $\bar{\sigma} = (\bar{\mathcal{H}}_\sigma, u^\sigma)$ 定义如下：令 $\bar{\mathcal{H}}_\sigma$ 为 $\mathcal{H}_\sigma$ 的共轭希尔伯特空间，并取由 $u^\sigma_{x,y}(\xi) = u^\sigma_{y,x}(\xi)$ 确定的 $u^\sigma = (u^\sigma_{x,y})$，其中 $\xi \in \mathcal{H}_\sigma$ 和 $x, y \in X$。

我们注意到，直和的定义可以很直接地扩展到任意的量子置换族，包括无限族。

定义 3.1 中的构造使我们能够由给定的量子置换得到新的量子置换。

引理 3.2. 量子置换的直和、张量积和共轭仍然是量子置换。

证明. 直和的情形显然。对于张量积，注意到

$$\sum_{x \in X} (u^\sigma \circledast u^\tau)_{x,y} = \sum_{x,t \in X} u^\sigma_{x,t} \otimes u^\tau_{t,y} = \sum_{t \in X} 1 \otimes u^\tau_{t,y} = 1 \otimes 1$$

对所有 $y \in X$均成立，类似地，$\sum_{y \in X} (u^\sigma \intercal\bigcirc u^\tau)_{x,y} = 1$。因此，$u^\sigma \intercal\bigcirc u^\tau$是所需的幻影酉矩阵。共轭的情形同样显然。□

量子置换之间也有一个自然的态射概念，我们将在下文介绍。

定义 3.3。设 X是一个有限集，且 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$和 $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$是 X的量子置换。从 σ 到 τ 的交织算子是一个有界线性算子 $T\colon \mathcal{H}_\sigma \to \mathcal{H}_\tau$，满足 $Tu^\sigma_{x,y} = u^\tau_{x,y} T$，对所有 $x, y \in X$均成立。

使用这一术语，我们可以将上一章引入的量子置换 $\sigma = (\mathcal{H}, u)$ 不可约这一条件重新表述为：σ 与自身之间唯一的交织算子是单位元的倍数。根据定义，量子置换 $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$ 的子对象是一个量子置换$\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$，以及一个从 σ到 τ的等距交织算子。在这种情况下，我们可以将 $\mathcal{H}_\sigma$ 视为 $\mathcal{H}_\tau$的一个闭子空间，使得对所有 $x, y \in X$，$u^\sigma_{x,y}$ 均由 $u^\tau_{x,y}$ 限制得到。

让我们回到这个问题：经典量子置换在何种意义上与（通常的）经典置换相关。如果 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 是一维量子置换，那么根据引理 2.3，它们分别对应于 X 的经典置换；此时它们的直和 $\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_n$ 是一个经典量子置换。此外，每个有限维经典量子置换都具有这种形式。事实上，不难证明，每个经典量子置换都等价于一个

（可能无限个）一维量子置换的直和，见练习 3.13。总之，并非每个经典量子置换都能用一个（单独的）经典置换来描述。然而，每个不可约经典量子置换都是一维的，并且对应于一个唯一确定的经典置换。

3.2. **C^*-张量范畴。** 上一节介绍的量子置换运算，对应于C^*-张量范畴的主要结构要素。本节将讨论 C^*-张量范畴的定义，并陈述关于它们的一些一般事实。更全面的论述请参阅 [20]。

3.2.1. C^*-范畴。回顾一下，范畴 C 由一类对象及其态射集构成；对于每一对对象 $X, Y \in \mathsf{C}$，都有态射集 $\mathsf{C}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(X,Y)$。所谓 $*$-范畴，是指具有以下结构和性质的范畴 C。首先，对于对象 $X, Y \in \mathsf{C}$，所有态射空间 $\mathsf{C}(X,Y)$ 都是复向量空间，且复合映射 $\mathsf{C}(X,Y) \times \mathsf{C}(Y,Z) \to \mathsf{C}(X,Z)$、$(f,g) \mapsto g \circ f$ 均为双线性映射。其次，该范畴配备了一个反线性对合逆变自函子 $* : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$，它在对象上为恒等映射，并将$f \in \mathsf{C}(X,Y)$映射到 $f^* \in \mathsf{C}(Y,X)$。特别地，对于所有恒等态射，我们都有 $1^* = 1$。

定义 3.4。 *C^*-范畴是一个 $*$-范畴$\mathbf{C}$，满足所有态射空间$\mathbf{C}(V,W)$ 都是巴拿赫空间，复合映射 $\mathbf{C}(X,Y) \times \mathbf{C}(Y,Z), (f,g) \mapsto g \circ f$满足 $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$，并且 C^*-单位元*

$$||f^* \circ f|| = ||f||^2$$

成立，而且对于所有 $f \in \mathbf{C}(X,Y)$，$f^* \circ f \in \mathbf{C}(X,X)$ 都是正元。

我们注意到，最后一个条件意味着，对于任意 $f \in \mathbf{C}(X,Y)$，都存在$g \in \mathbf{C}(X, X)$，使得 $f^* \circ f = g^* \circ g$。这是为了排除某些病态现象而设定的技术性要求。对于下文将进一步讨论意义下的加性C^*-范畴，该条件会自动满足。

一个 C^*-范畴的基本例子是范畴 HILB，它由所有希尔伯特空间构成，其态射空间 $\mathrm{HILB}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$由它们之间所有有界线性算子组成。在 HILB 中，我们有由所有有限维希尔伯特空间构成的 C^*-范畴 Hilb。另一个基本例子是取一个含幺 C^*-代数 A，并将其视为一个只有单个对象 $\star$、态射空间为$\mathbf{C}_A(\star,\star) = A$的 C^*-范畴$\mathbf{C}_A$。从这个角度看，C^*-范畴可以视为（含幺）C^*-代数的“多对象”推广。

定义 3.5。 *范畴 $\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$ 之间的线性 $*$-函子是一个函子 $\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$，满足所有关联的态射空间映射都是线性的，并且对所有态射 f，$\mathbf{f}(f^*) = \mathbf{f}(f)^*$。*

若$\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是范畴之间的线性 $*$-函子，则映射 $\mathbf{f} : \mathbf{C}(X,Y) \to \mathbf{D}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y))$ 自动是压缩的。这个事实的证明与说明 $*$-代数之间的 C^*-同态是压缩的论证类似。

线性 $*$-函子 f、g：$\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 之间的酉自然同构 $\tau : \mathsf{f} \Rightarrow \mathsf{g}$，是指满足以下条件的自然变换：对于所有 $X \in \mathsf{C}$，$\tau(X)$ 都是酉同构。这里，酉同构是满足 $u^* \circ u = 1$ 和 $u \circ u^* = 1$ 的态射 u。如果存在从 f 到 g 的酉自然同构，我们记作 $\mathsf{f} \cong \mathsf{g}$。若存在满足 $\mathsf{f} \circ \mathsf{g} \cong \mathrm{id}$ 且 $\mathsf{g} \circ \mathsf{f} \cong \mathrm{id}$ 的线性 $*$- 函子 f：$\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 和 g：$\mathsf{D} \to \mathsf{C}$，则称两个 C^*-范畴 C、D 等价。

若线性 $*$-函子$\mathbf{f}:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ 对所有 $X,Y\in\mathbf{C}$ 都使相关映射$\mathbf{f}:\mathbf{C}(X,Y)\to\mathbf{D}(\mathbf{f}(X),\mathbf{f}(Y))$ 为单射，则称其忠实 。每个（小） C^*-范畴都允许嵌入到 HILB 中，且该嵌入是忠实的；参见 [18,定理 6.12]。

定义 3.6. 设 $\mathbf{C}$ 是一个 C^*-范畴，且 $X_1,\dots,X_n$ 是 $\mathbf{C}$中的对象。那么， $X_1,\dots,X_n$ 的直和是一个对象 $X=X_1\oplus\cdots\oplus X_n\in\mathbf{C}$，连同态射 $\iota_j\colon X_j\to X$，满足 $\iota_k^*\circ\iota_l=\delta_{k,l}1$，对所有 $1\le k,l\le n$ 及

$$\sum_{j=1}^{n}\iota_j\circ\iota_j^*=1.$$

我们称$\mathbf{C}$ 为加性的，如果$\mathbf{C}$中每个有限对象族都有直和。

根据定义，加性 C^*-范畴$\mathbf{C}$必须包含一个零对象，它对应于定义 3.6 中空对象族的直和。也就是说，存在一个对象 $0\in\mathbf{C}$，使得对所有 $X\in\mathbf{C}$，都有 $\mathbf{C}(0,X)=0=\mathbf{C}(X,0)$。希尔伯特空间范畴 HILB 是加性的，其直和具有通常的含义。

非零对象 X 若满足$\mathbf{C}(X,X)=\mathbb{C}\,\mathrm{id}$，则称为不可约或简单。此外，若$\mathbf{C}$ 中的每个对象都同构于若干简单对象的直和，则称$\mathbf{C}$ 为半单。有限维希尔伯特空间范畴 Hilb 是半单 C^*-范畴的一个例子。

设$\mathbf{C}$ 是一个 C^*-范畴，且 $X\in\mathbf{C}$。 X 的子对象是一个对象 $U\in\mathbf{C}$，连同一个态射 $\iota\colon U\to X$，满足 $\iota^*\circ\iota=1$。此时， $p=\iota\circ\iota^*\in\mathbf{C}(X,X)$ 是一个投影。反过来，若存在一个 X 的子对象 U，满足 $\iota\colon U\to X$ 和 $p=\iota\circ\iota^*$，则称投影 $p\in\mathbf{C}(X,X)$ 为可分裂。若$\mathbf{C}$ 中的每个投影都可分裂，则称 C^*-范畴$\mathbf{C}$ 为子对象完备。

C^*范畴 HILB 和 Hilb 是子对象完备的，而对于幺$_A$ 元 C^*代数 A 而言，$\mathbf{C}$ 通常并非如此。我们只关注子对象完备的C^*范畴。

3.2.2. C^*-张量范畴。 加性 C^*范畴的概念已经涵盖了量子置换范畴中的许多结构。更准确地说，有限集 X 上的量子置换构成一个加性 C^*范畴 $\mathrm{PERM}^+(X)$，其态射由交织算子给出，直和则如上一节所定义。图景中尚缺少的是张量积运算。由此引出以下定义。

定义 3.7。 C^*-张量范畴 是一个子对象完备的加性 C^*范畴$\mathbf{C}$ ，并配有

- 一个双线性 $*$函子 $\otimes$： $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$,
- 一个简单对象 $1\in\mathbf{C}$,
- 一个酉自然同构

$$\alpha:\otimes\circ(\otimes\times\mathrm{id})\Rightarrow\otimes\circ(\mathrm{id}\times\otimes)$$

记作

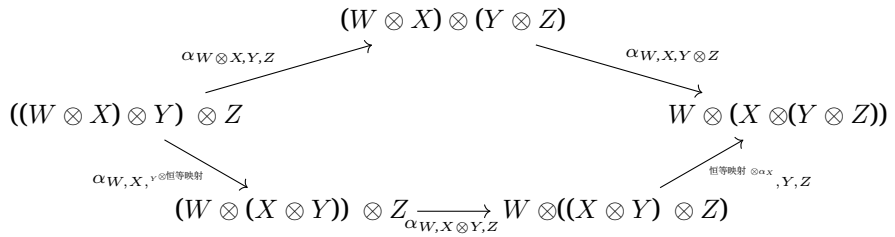
$$\alpha_{X,Y,Z}:(X\otimes Y)\otimes Z\to X\otimes(Y\otimes Z)$$

对所有 $X,Y,Z\in\mathbf{C}$ 均成立，并称为结合子，

- 酉自然同构 $\lambda\colon 1\otimes-\Rightarrow\mathrm{id}$ 和 $\rho\colon -\otimes 1\Rightarrow\mathrm{id}$，称为左、右单位子，分别记作 $\lambda_X\colon 1\otimes X\to X$ 和 $\rho_X\colon X\otimes 1\to X$，对应于 $X\in\mathbf{C}$。

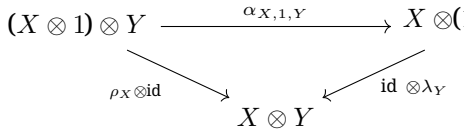
这些数据应满足以下条件。

- *(结合约束)* 对所有对象 $W,X,Y,Z\in\mathbf{C}$ 该图



是交换的。

- *(单位约束)* $\lambda_1 = \rho_1$ 并且对所有对象 $X, Y \in \mathbf{C}$ 该图



是交换的。

若范畴 $\mathbf{C}$ 中 α、λ 和 ρ 均等于单位元，则称其为严格范畴。

若 C、D 是 C^*张量范畴，则从 C 到 D 的酉张量函子是一个线性 $*$函子 $\mathsf{F}: \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，并且配有一个酉自然同构 $\mathsf{F}_2: \mathsf{F}(X) \otimes \mathsf{F}(Y) \to \mathsf{F}(X \otimes Y)$ 以及一个酉同构 $\mathsf{F}_0: 1_{\mathbf{D}} \to \mathsf{F}(1_{\mathbf{C}})$，满足某些相容条件，参见 [20, 定义 2.1。3]。两个酉张量函子之间的酉自然变换 $\tau: \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ 若与 $\mathsf{F}_2, \mathsf{G}_2$ 和 $\mathsf{F}_0, \mathsf{G}_0$ 相容，如 [20, 定义 2.1。5]所述，则称其为幺半范畴的。此时记作 $\mathsf{F} \simeq \mathsf{G}$。最后，如果存在一个酉张量函子 $\mathsf{G}: \mathsf{D} \to \mathsf{C}$，以及幺半范畴的酉自然同构 $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ 和 $\mathsf{F} \circ \mathsf{G} \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$，则称酉张量函子 $\mathsf{F}: \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是幺半等价。

我们主要关注具备 刚性 的 C^*-张量范畴。刚性是指每个对象 $X \in \mathbf{C}$ 都存在一个共轭对象 $\bar{X}$，以及满足所谓之字形方程的态射 $X \otimes \bar{X} \to 1$ 和 $\bar{X} \otimes X \to 1$，参见 [20, 定义 2.2。1]。

希尔伯特空间范畴 HILB 是一个以希尔伯特空间张量积为张量积、以 $\mathbb{C}$ 为张量单位的 C^*-张量范畴。在这种情况下，结合约束是典范同构 $(X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z)$，$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$，单位约束也类似。有限维希尔伯特空间范畴 Hilb 是刚性的，其共轭对象由共轭希尔伯特空间给出。这里需要注意，共轭希尔伯特空间对任意希尔伯特空间都有定义，但之字形方程仅在有限维情形下成立。

就我们目前所见而言，C^*-张量范畴中最重要的例子是有限集 X 上量子置换构成的范畴 $\mathrm{PERM}^+(X)$。当然，$\mathrm{PERM}^+(X)$ 的张量积运算由量子置换的张量积给出，参见定义 3.1。结合约束和单位约束是从 HILB 继承而来的“显然”约束。同理，我们得到由 X 的所有有限维 量子置换构成的刚性 C^*-张量范畴 $\mathrm{Perm}^+(X)$，它是 $\mathrm{PERM}^+(X)$ 的一个全子范畴。

3.3. **离散量子群**。离散群 G 可以用 C^*-代数 $C_0(G)$ 以及非退化的 $*$-同态 $\Delta: C_0(G) \to M(C_0(G) \otimes C_0(G)) = C_b(G \times G)$ 来描述，其中该同态由对所有 $s, t \in G$ 都成立的 $\Delta(f)(s, t) = f(st)$ 给出。这里回顾一下，$G \times G$ 上所有有界函数构成的 C^*-代数 $C_b(G \times G)$ 是 $C_0(G) \otimes C_0(G)$ 的乘子代数，参见例 3.13]。

群运算的结合性等价于余乘法 Δ满足余结合性 条件（$\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$。这里我们默认非退化的 $*$-同态可自然延拓到乘子代数。此外，还

可以验证， $\Delta(C_0(G))(1\otimes C_0(G))$是 $C_0(G)\otimes C_0(G)$的一个 $*$-子代数，并且能严格分离点，因此由Stone-Weierstrass定理可知它是稠密的。回顾一下，若 X 是局部紧豪斯多夫空间，则称 $*$-代数 $\mathcal{A}\subset C_0(X)$能严格分离 X 中的点，是指对于所有 x， $y\in X$，若 $x\neq y$，则存在$f\in\mathcal{A}$使得 $f(x)\neq f(y)$；并且对于所有 $x\in X$，存在 $f\in\mathcal{A}$使得 $f(x)\neq 0$。同理可得， $\Delta(C_0(G))(C_0(G)\otimes 1)\subset C_0(G)\otimes C_0(G)$是稠密的。

接下来考虑非退化的 $*$-同态 ϵ： $C_0(G)\to\mathbb{C}$，它由在单位元处求值得到，因此 $\epsilon(f)=f(e)$。 e 是 G 的单位元这一事实，由 余单位关系 $(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=\mathrm{id}=(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta$ 表示。

最后，我们有定义在 G 上的 *Haar*测度，它由计数测度给出。这对应于权： $C_0(G)_+\to[0,\infty]$，其定义为

$$\varphi(f)=\sum_{s\in G}f(s).$$

这里，我们用 $C_0(G)_+$ 表示 $C_0(G)$ 中所有正函数 $f\geq 0$ 的集合。注意， φ 是忠实的，也就是说，对于 $f\geq 0$， $\varphi(f)=0$ 当且仅当 $f=0$；并且它是稠密定义的，即所有满足 $\varphi(f)<\infty$ 的 $f\in C_0(G)_+$ 构成的集合在 $C_0(G)_+$ 中稠密。

离散量子 群将上述结构和性质加以推广，使我们能够用有限维矩阵代数替代 G 中的点。下文中，我们用 $[X]$ 表示巴拿赫空间中子集 X 的闭线性张成。

定义 3.8。 离散量子群由一个 C^*-代数 H 及一个非退化的 $*$-同态 $\Delta\colon H\to M(H\otimes H)$ 给出，并满足以下条件。

a)（离散性） C^*-代数 $H=\bigoplus_{i\in I}M_{n_i}(\mathbb{C})$ 是矩阵代数的 C^*-直和。***b)***（余结合性）有 $(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta$。***c)***（稠密性条件）有 $[\Delta(H)(1\otimes H)]=H\otimes H=[(H\otimes 1)\Delta(H)]$。***d)***（余单位）存在一个非退化的 $*$-同态 $\epsilon\colon H\to\mathbb{C}$，使得

$$(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=\mathrm{id}=(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta.$$

e)（不变权重）存在定义在 H 上的稠密定义的忠实权重 φ,ψ，使得

$$(\mathrm{id}\otimes\varphi)\Delta(f)=\varphi(f)1,\qquad(\psi\otimes\mathrm{id})\Delta(f)=\psi(f)1$$

对所有正元素 $f\in H$，均成立。

这个定义中的最后一个条件需要作一些说明。对于形如 $H=\bigoplus_{i\in I}M_{n_i}(\mathbb{C})$ 的 C^*-代数上的稠密定义的忠实权，我们指的是一个具有如下形式的映射 $\omega\colon H_+\to[0,\infty]$

$$\omega(f)=\sum_{i\in I}\mathrm{tr}(Q_i^{1/2}f_iQ_i^{1/2})$$

其中 $Q_i\in M_{n_i}(\mathbb{C})$ 是可逆正矩阵， $f=(f_i)_{i\in I}$ 是 H 中的一个正元素。注意，满足 $\omega(f)<\infty$ 的正元素集合 f 在 H_+ 中是稠密的，因为它包含所有仅有有限个非零分量 f_i 的 $f=(f_i)_{i\in I}\in H_+$；并且，对于 $f\in H_+$， $\omega(f)=0$ 当且仅当 $f=0$。这两个性质分别对应于 ω 是稠密定义的和忠实。这种权以典范方式扩展到乘子代数中的正元素，而 $e)$ 中的不变性条件应理解为要求

$$\varphi((\theta\otimes\mathrm{id})\Delta(f))=\varphi(f)\theta(1),\qquad\psi((\mathrm{id}\otimes\theta)\Delta(f))=\psi(f)\theta(1)$$

对所有作用于 H 和 $f\in H_+$ 上的正线性泛函 θ。

我们还要指出，我们始终使用 C^*-代数的 最小张量积 。对于离散量子群，其底层的 C^*-代数 H 根据定义 3.8 中的条件 a) 自动是核的，因此张量积的选择实际上不存在歧义。

类比于离散群的情形，我们常常会形式上写作 $H = C_0(\mathbb{G})$，并称 $\mathbb{G}$ 是一个离散量子群。事实上，如果$C_0(\mathbb{G})$中的所有矩阵块都是一维的，那么可以证明存在一个经典离散群G ，使得 $C_0(\mathbb{G}) = C_0(G)$ 是定义在 G 上、在无穷远处消失的函数代数，其结构映射如前文所述。从这个意义上说，离散量子群理论是离散群理论的推广。

请注意，对于离散量子群$\mathbb{G}$ ， $C_0(\mathbb{G})$的底层代数结构并没有特别重要的意义，关键的结构性质由余乘法编码。经典情形也是如此：也就是说，离散群的底集所包含的信息并不多。

由离散量子群 $\mathbb{G}$ 可如下得到一个 C^*-张量范畴$\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ 。$\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ 的对象是所有有限维非退化的 $*$-表示π： $C_0(\mathbb{G}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$，态射则是它们之间的交织算子。 $\pi, \rho \in \mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ 的张量积是底层希尔伯特空间的张量积 $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\rho$ ，并配以 $(\pi \otimes \rho)\Delta$。也就是说，我们将余乘法与该映射到乘子上的延拓复合

$$\pi \otimes \rho : C_0(\mathbb{G}) \otimes C_0(\mathbb{G}) \to B(\mathcal{H}_\pi) \otimes B(\mathcal{H}_\rho) = B(\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\rho).$$

张量单位是 $\mathbb{C}$，通过余单位 ϵ视为一个非退化的 $*$-表示。可以证明，范畴$\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ 总是刚性的。

3.4. 田中-克莱因对偶。 上一节最后的构造为离散量子群与刚性 C^*-张量范畴建立了联系。事实上，结果表明，每个具有到有限维希尔伯特空间范畴 Hilb 的忠实酉张量函子的刚性 C^*-张量范畴，都具有离散量子群 $\mathbb{G}$ 所对应的$\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ 形式。这就是著名的田中-克莱因对偶 定理的内容，接下来我们将讨论该定理。

设$\mathbf{C}$ 是一个刚性 C^*-张量范畴。所谓纤维函子 ，是指一个酉张量函子$\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{Hilb}$，它是忠实的，也就是说，在态射上是单射。给定一个离散量子群 $\mathbb{G}$，遗忘函子 $\iota : \mathbf{C}_{\mathbb{G}} \to \mathbf{Hilb}$ 会将有限维非退化 $*$-表示 π： $C_0(\mathbb{G}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 映射为其底层希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$，它就是一个纤维函子的例子。

定理 3.9 (Tannaka-Krein)。 设$\mathbf{C}$ 是一个刚性 C^*-张量范畴，并配有纤维函子 $\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathrm{Hilb}$。那么存在一个离散量子群 $\mathbb{G}$ 以及一个幺半等价 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_{\mathbb{G}}$，使得 $\mathbf{f} \simeq \iota \circ F$。

这里我们不证明定理 3.9，而请读者参阅 [20,第 2 节。3]。不过要指出的是，在 [20] 该定理是用紧致量子群而非离散量子群来表述的。这与上面的表述等价，我们将在下文简要说明。

我们选择使用离散量子群而非紧致量子群的语言，因为从我们感兴趣的例子的角度来看，这样更自然。事实上，利用定理 3.9，我们可以立即给出如下定义。

定义 3.10. 设 X 是一个有限集。量子置换群$\mathrm{Sym}^+(X)$是通过 *Tannaka-Krein* 重构与刚性 C^*-张量范畴 $\mathrm{Perm}^+(X)$ 相关联的离散量子群；该范畴由X 的有限维量子置换及其到 Hilb的自然遗忘函子构成。在 $X = [n] = \{1, \dots, n\}$ 的情况下，我们也用 Sym_n^+ 表示这个量子群。

在第 4 节中，我们将对 Sym$^+(X)$ 给出更具体的描述，包括 C^*-代数 C_0 (Sym$^+(X)$) 及其余乘法的公式，并将讨论稍具一般性的情形。

现在让我们回到紧量子群，以及它们在 Tannaka-Krein 重构中的作用。与定义 3.8 相比，紧量子群的定义实际上稍微简单一些。

定义3.11。 紧量子群由一个 C^*-代数 H 以及一个非退化的 $*$-同态 $\Delta: H \to M(H \otimes H)$ 构成，并满足以下条件。

a)（紧性） C^*-代数 H 是含幺的。*b)*（余结合性）有$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$。
c)（稠密性条件）有 $[\Delta(H)(1 \otimes H)] = H \otimes H = [(H \otimes 1)\Delta(H)]$。

根据条件 a)，紧量子群 H 中的余乘法 Δ是从 H 到 $H \otimes H$的一个含幺 $*$-同态，因此无需考虑乘子。我们之所以将 Δ 视为从 H 到 $M(H \otimes H)$ 的映射，只是为了强调它与定义 3.8 的相似性。

请注意，定义3.11中没有提及余单位或不变权重。事实证明，每个紧量子群都自动存在唯一确定的左不变态和右不变态，称为*Haar*态。此外还有余单位，但一般而言，它仅作为一个稠密定义的无界算子存在。更多信息请参阅 [28] 。

紧量子群的典型例子是紧群 G上的函数 H =$C(G)$构成的 C^*-代数，其余乘法由群乘法诱导。在这种情况下，由在单位元处取值给出的余单位作为从 H 到 $\mathbb{C}$的 $*$-同态是完全合理的。

至关重要的是，紧量子群与离散量子群之间存在对偶性，这是对紧阿贝尔群与离散阿贝尔群之间*Pontrjagin*对偶的推广。也就是说，紧量子群与离散量子群本质上是描述同一数学结构的等价方式。因此，我们对定理 3.9 的表述等价于 [20]中的表述。

3.5. **离散化**。 G 是紧群时， G的底集（记作 G_δ）可以视为一个离散群；紧群与离散量子群之间还有另一种与我们的讨论相关的联系。请注意，这个离散群通常会“很大”；例如，圆群 $U(1)$ 的离散化是不可数的。

在函数代数 $C(G)$ 的层面上，我们可以将从紧群 G 到其离散化 G_δ 的过程，视为从 G 到 C^*-张量范畴 Rep($C(G)$) 的转变；该范畴由 $C(G)$ 的所有有限维幺 $*$-表示构成，其张量积运算由余乘法 $\Delta: C(G) \to C(G \times G)$ 定义，这与第 3.3 节末尾的讨论完全类似。事实上， $C(G)$ 的不可约 $*$-表示都是一维的，并且恰好对应于在 G 各元素处的点求值。此外，点求值的张量积由群运算给出，单位对象由在单位元处求值给出，而共轭则通过在 G 中取逆得到。因此， C^*-张量范畴 Rep($C(G)$) 不过就是与 G 的离散化 G_δ 相关联的范畴 $\mathbf{C}^{G_\delta}$ 。

如果 G 是紧致阿贝尔群，那么 G 的离散化与其庞特里亚金对偶的$\widehat{Bohr}$紧化 密切相关。更确切地说，若 G表示 G的庞特里亚金对偶，那么离散化 G_δ 的庞特里亚金对偶可与 G的 Bohr$\widehat{}$紧化相对应。也就是说，在 Pontrjagin对偶下，离散化与 Bohr 紧化彼此对应。

事实证明，离散化和 Bohr 紧化的概念分别可以自然地推广到紧量子群和离散量子群的领域[24]。就我们的目的而言，关键在于我们迄今遇到的离散量子群实际上都是紧量子群的离散化。具体而言，定义 3.10 中的离散量子群 Sym_n^+ 是 Wang [26]引入的紧量子群 S_n^+ 的离散化。这里我们不详述 S_n^+ 的定义，只需指出，$C(S_n^+)$ 是由一个幻影酉矩阵 $n \times n$-矩阵生成的通用含幺 C^*-代数。

量子置换群 S_n^+ 及其量子子群已得到深入研究，并通过其表示论 [3], [11]呈现出丰富的组合结构。然而，对于本讲义余下部分将要讨论的大多数构造，在紧量子群领域中都没有与之对应的对象，因此从一开始就确实需要在离散量子群的框架下进行研究。

3.6. **习题**。

习题 3.12. 证明每个有限维的有限集上的量子置换都可以分解为不可约量子置换的直和。

习题 3.13. 证明每个有限集上的（可能是无限维的）经典量子置换都等价于经典置换的直和。

习题 3.14. 设 G 为一个幺半群（赋予离散拓扑）。此外，给定 $H = C_0(G)$ 和 $\Delta : C_0(G) \to M(C_0(G) \otimes C_0(G)) = C_b(G \times G)$，由$\Delta(f)(s,t) = f(st)$给出。证明稠密性条件

$$[\Delta(H)(1 \otimes H)] = H \otimes H = [(H \otimes 1)\Delta(H)]$$

等价于具有 G 左右消去律。也就是说，对于任意的 s、r、$t \in G$，等式 $ts = tr$ 蕴含 $s = r$；同理，$st = rt$ 蕴含 $s = r$。

练习 3.15。证明，满足左右消去律的紧拓扑幺半群是群。由此得出，底层C^*-代数为阿贝尔的紧量子群 H 具有如下形式：$H \cong C(G)$，其中 G是一个紧群。

练习 3.16。设 H 是一个交换 C^*-代数，并配有一个非退化的 $*$-同态 $\Delta : H \to M(H \otimes H)$，且满足定义 *3.8* 中的前四个条件。$H$ 是否必然是离散量子群？

4. Infinite quantum symmetries

到目前为止，我们的讨论仅限于有限集。现在我们将取消有限性假设，考察任意集合上的量子置换，并沿用 [25]的方法。这样我们便能研究无限图的量子对称性，将第 2.2 节中的构造推广到更一般的情形。

4.1. **无限量子置换**。为了将定义 2.2推广到 X 为无限集的情形，需要关注条件的第二部分。回想一下，若 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间，则 $B(\mathcal{H})$上的强算子拓扑是这样定义的：网$(T_i)_{i\in I}$ 强收敛到 T，当且仅当对所有 $\xi \in \mathcal{H}$，$T_i(\xi) \to T(\xi)$在范数下收敛。

定义 4.1。设 X 为一个集合。X 的量子置换是一个二元组$(\mathcal{H}, u)$，由一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和一族元素 $u = (u_{x,y})_{x,y\in X}$ 组成，其中$u_{x,y} \in B(\mathcal{H})$ 满足

- 对于每个 $x, y \in X$，我们都有 $u_{x,y}^2 = u_{x,y} = u_{x,y}^*$。

- 我们有
$$\sum_{t\in X} u_{x,t} = 1 = \sum_{t\in X} u_{t,y}$$
对所有 $x, y \in X$，其中收敛是指在强算子拓扑下收敛。在这种情况下，我们也称 u 是幻影酉矩阵。如果 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ 和 $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$ 是 X 的量子置换，那么从 σ 到 τ 的交织算子是一个有界线性 r 算子 $T\colon \mathcal{H}_\sigma \to \mathcal{H}_\tau$，满足 $Tu^\sigma_{x,\,y} = u^\tau_{x,\,y}T$，对所有 $x, y \in X$ 均成立。

不难验证，定义 4.1 中无穷和的收敛可以等价地用弱、强、强*、 σ-弱、σ-强或 σ-强* 拓扑中的任一种来解释。相反，若要求在范数拓扑下收敛，则条件过强，因为 X 是无限的。

引理 4.2。 幻影酉矩阵每一行和每一列中的投影两两正交。

证明。 固定一个集合 X。只需证明：若 $\sum_{x\in X} p_x = 1$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $B(\mathcal{H})$ 中投影的强收敛和，则 $p_x p_y = 0$ 对 $x \neq y$成立。为此，令 $\xi \in \mathcal{H}$ 和 $y \in X$，并注意到 $p_y\xi = p_y 1 p_y\xi = \sum_{x\in X} p_y p_x p_y\xi$，因为乘法分别关于强算子拓扑连续。由此可得 $\sum_{x\neq y} p_y p_x p_y\xi = 0$，因此
$$0 = \langle \xi, \sum_{x\neq y} p_y p_x p_y \xi\rangle = \sum_{x\neq y} \langle p_x p_y\xi, p_x p_y\xi\rangle.$$
此等式右边的所有项均非负，因此对所有 $x \neq y$都有$p_x p_y\xi = 0$。由于 ξ 是任意的，故 $p_x p_y = 0$，如所需。□

下文中，希尔伯特空间里两两正交投影族 $(p_i)_{i\in I}$ 的所有无穷和均按强算子拓扑理解；若$\sum_{i\in I} p_i = 1$，则称 $(p_i)_{i\in I}$ 为单位分解。我们可以将定义 4.1 改述如下：集合 X 上的量子置换是一个以 X为指标的投影矩阵，且其所有行和列均构成单位分解。

无限集上的量子置换的直和、张量积和共轭的定义与有限情形相同，见定义 3.1。此外，使用与引理 3.2 的证明相同的论证，可以验证这些运算得到的仍然是量子置换。

定义 4.3。 设 X 是一个集合。我们用 $\mathrm{PERM}^+(X)$ 表示 C^*-张量范畴，其中包含 X 上的所有量子置换及其交织算子。类似地，我们用$\mathrm{Perm}^+(X)$ 表示有限维量子置换的 C^*-张量范畴。

与有限集的情形相同， C^*-张量范畴 $\mathrm{Perm}^+(X)$ 是刚性的。因此，Tannaka-Krein 重构定理 3.9 使我们能够给出以下定义。

定义 4.4。 设 X 是一个集合。量子置换群 $\mathrm{Sym}^+(X)$ 是通过 *Tannaka-Krein* 重构，与由 X 上的有限维量子置换组成的刚性 C^*-张量范畴$\mathrm{Perm}^+(X)$ 及其到 Hilb 的典范遗忘函子相关联的离散量子群。

具体而言，$\mathrm{Sym}^+(X)$ 上的 C^*函数代数可以写成矩阵代数的 C^*直和
$$C_0(\mathrm{Sym}^+(X)) = \bigoplus_\sigma B(\mathcal{H}_\sigma),$$

其指标取遍 X的有限维不可约量子置换 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma,\ u^\sigma)$的同构类集合。

为了描述 $C_0(\mathrm{Sym}^+(X))$的量子群结构，使用 X的泛量子置换会更方便；所谓泛量子置换，是指由元素$u_{x,y} \in M(C_0(\mathrm{Sym}^+(X)))$组成的族 $u = (u_{x,y})_{x,y\in X}$，其分量为$u^\sigma_{x,y}$。$C_0(\mathrm{Sym}^+(X))$的余乘法是唯一确定的非退化

$*$-同态 $\Delta\colon C_0(\mathrm{Sym}^+(X)) \to M(C_0(\mathrm{Sym}^+(X)) \otimes C_0(\mathrm{Sym}^+(X)))$，满足

$$\Delta(u_{x,y}) = \sum_{t\in X} u_{x,t} \otimes u_{t,y}$$

对所有 $x, y \in X$均成立。余单位 $\epsilon\colon C_0(\mathrm{Sym}^+(X)) \to \mathbb{C}$ 是唯一的（非退化）$*$-同态，满足 $\epsilon(u_{x,y}) = \delta_{x,y}$，其中 $x, y \in X$。此外，可以证明，$C_0(\mathrm{Sym}^+(X))$的左右不变权 φ 由下式给出

$$\varphi(f) = \sum_\sigma \dim(\mathcal{H}_\sigma)\,\mathrm{tr}(f_\sigma),$$

其中，$f =(f_\sigma)$包含在 $C_0(\mathrm{Sym}^+(X))$的正部中。这里，tr表示 $B(\mathcal{H}_\sigma)$上的迹，并作归一化，使得对于单位矩阵$1 \in B(\mathcal{H}_\sigma)$，$\mathrm{tr}(1) =\dim(\mathcal{H}_\sigma)$。

4.2. 泛性质。 现在我们将说明，量子置换如何被视为普适量子对称性。

定义 4.5。 离散量子群 $\mathbb{G}$ 在 C^*代数 B 上的作用，是一个单射非退化的 $*$同态 $\beta\colon B \to M(C_0(\mathbb{G}) \otimes B)$，满足

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\beta = (\mathrm{id} \otimes \beta)\beta$$

和 $[\beta(B)(C_0(\mathbb{G}) \otimes 1)] = C_0(\mathbb{G}) \otimes B$。

请注意，稠密性条件 $[\beta(B)(C_0(\mathbb{G})\otimes 1)] = C_0(\mathbb{G})\otimes B$ 包含两个要求：首先，对于 $b \in B$，$f \in C_0(\mathbb{G})$，元素 $\beta(b)(f \otimes 1)$的线性张成包含在 $C_0(\mathbb{G}) \otimes B$中，而不仅仅包含在 $M(C_0(\mathbb{G}) \otimes B)$中；其次，这个线性张成在其中稠密。

对于任意离散量子群 $\mathbb{G}$，作用最基本的例子是给任意 C^*-代数 B 赋予平凡作用，其定义为$\beta(b) = 1 \otimes b$，对所有 $b \in B$均成立。另一个例子是 $\mathbb{G}$ 在 $B = C_0(\mathbb{G})$上的平移作用，定义为 $\beta = \Delta\colon C_0(\mathbb{G}) \to M(C_0(\mathbb{G}) \otimes C_0(\mathbb{G}))$。由定义 3.8 可直接得出，这确实定义了 $\mathbb{G}$ 在 $C_0(\mathbb{G})$上的一个作用。

我们主要关注如下情形：对于集合 X，将其视为离散拓扑空间时，$B = C_0(X)$。回顾定义 3.8 后的讨论，其中介绍了此类 C^*-代数上的稠密定义的忠实权这一概念。

定义 4.6。设对于集合 X，有 $B = C_0(X)$，并设 $\beta\colon B \to M(C_0(\mathbb{G}) \otimes B)$ 是离散量子群 $\mathbb{G}$ 在 B上的一个作用。若稠密定义的忠实权 ω 在B 上满足 $\omega((\theta \otimes \mathrm{id})\beta(b)) = \omega(b)\theta(1)$，对所有 $b \in B_+$以及 $C_0(\mathbb{G})$上的所有正线性泛函 θ 均成立，则称其相对于 β 是不变的。

我们称离散量子群 $\mathbb{G}$ 是 $(B,\ \omega)$ 的离散量子对称群，如果存在一个作用 $\beta\colon B \to M(C_0(\mathbb{G}) \otimes B)$，使得 ω 相对于 β 不变，并且满足以下泛性质。若 $\mathbb{H}$ 是任意一个离散量子群，且配有一个作用 $\gamma\colon B \to M(C_0(\mathbb{H})\otimes B)$，使得 ω 相对于 γ不变，则存在唯一的态射

离散量子群 $\iota\colon \mathbb{H}\to\mathbb{G}$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & M(C_0(\mathbb{G})\otimes B) \\ & \searrow^{\gamma} & \downarrow{\scriptstyle \iota^*\otimes\mathrm{id}} \\ & & M(C_0(\mathbb{H})\otimes B) \end{array}$$

是交换的。这里，按照定义，离散量子群的态射 $\iota\colon \mathbb{H}\to\mathbb{G}$ 是一个非退化的 $*$-同态 $\iota^*\colon C_0(\mathbb{G})\to M(C_0(\mathbb{H}))$，并且与余乘法相容，即 $\Delta\circ\iota^*=(\iota^*\otimes\iota^*)\circ\Delta$。

容易验证，C^*-代数 B 的离散量子对称群在同构意义下唯一确定。若 X 是一个集合，且$B=C_0(X)$配备由计数测度诱导的权，我们将相应的离散量子对称群称为作用于 X的泛离散量子群。以下结果表明这个量子群确实存在，同时也给出了 $\mathrm{Sym}^+(X)$ 的另一种刻画，参见 [25,命题 4.6]。

命题 4.7。设 X 是一个集合。量子置换群 $\mathrm{Sym}^+(X)$ 是作用于 X 上的泛离散量子群。

证明。回忆一下，X 的泛量子置换是 $u=(u_{x,\,y})_{x,\,y\in X}$，其中$u_{x,\,y}\in M(C_0(\mathrm{Sym}^+(X)))$。若以 $e_x\in C_0(X)$ 表示以 $x\in X$ 为底点的特征函数，则公式

$$\beta(e_x)=\sum_{y\in X}u_{x,y}\otimes e_y$$

确定了一个非退化的 $*$-同态 β，从 $C_0(X)$ 到 $M(C_0(\mathrm{Sym}^+(X))\otimes C_0(X))$；不难验证，这给出了 $\mathrm{Sym}^+(X)$ 在 $B=C_0(X)$ 上的一个作用。此外，与计数测度对应的 $C_0(X)$ 上的权 ω 关于此作用不变。

假设 $\gamma\colon B\to M(C_0(\mathbb{H})\otimes B)$ 是离散量子群 $\mathbb{H}$ 在 B 上的一个作用，并且 ω 关于 γ 不变。首先注意，我们可以写成 $\gamma(e_x)=\sum_{y\in X}v_{x,y}\otimes e_y$，其中 $v_{x,y}\in M(C_0(\mathbb{H}))$ 是唯一确定的元素。我们声称，元素 $v_{x,y}$，更确切地说，它们在 $C_0(\mathbb{H})$ 的各个矩阵块中的分量，满足量子置换的定义性质。事实上，注意由 $e_x^2=e_x=e_x^*$ 可得，对所有 $x,y\in X$，都有 $v_{x,y}^2=v_{x,y}=v_{x,y}^*$。由于 γ 非退化，对所有 $y\in X$，都有 $\sum_{x\in X}v_{x,y}=1$。此外，由于权 ω 关于 γ 不变，对所有 $x\in X$，我们得到 $\sum_{y\in X}v_{x,y}=1$。

由于 $C_0(\mathbb{H})$ 是矩阵代数的直和，这使我们能够定义一个非退化的 $*$-同态 $\iota^*\colon C_0(\mathrm{Sym}^+(X))\to M(C_0(\mathbb{H}))$，使得 $\iota^*(u_{x,y})=v_{x,y}$对所有 $x,y\in X$ 都成立。直接验证可知，ι^* 与余乘法相容，并满足 $(\iota^*\otimes\mathrm{id})\beta=\gamma$。此外，$\iota^*$ 由这些性质唯一确定。□

4.3. 无限图的量子自同构。设 $X=(V_X,E_X)$ 是一个图。回顾一下，我们分别用 V_X 和 E_X 表示 X 的顶点集合和边集合，并要求 E_X 是 $V_X\times V_X$ 的一个与对角线不相交的对称子集。

延续第 2 节的讨论，接下来我们将在 X 为无限的情形下定义并研究量子自同构，也就是说，V_X 和 $E_X\subset V_X\times X_X$ 都可以具有任意基数。与有限图的情形一样，无限图 X 的邻接矩阵是由 $A_X\in M_{V_X}(\{0,1\})$ 确定的矩阵，其中

$$(A_X)_{x,y}=1\Leftrightarrow(x,y)\in E_X$$

对于 x，$y \in V_X$。

定义 4.8。设 $X = (V_X, E_X)$ 是一个图。X 的量子自同构是一个 X 的量子置换$(\mathcal{H}, u)$，满足

$$A_X u = u A_X$$

作为 $M_{V_X}(B(\mathcal{H}))$中的矩阵，其中 A_X 是 X的邻接矩阵。

我们注意到，定义 4.8 中的等式确实有意义，因为 u 和 A_X 两侧乘积的矩阵元都是两两正交投影的强收敛和。

不难验证，X 的所有量子自同构组成的集合在取直和、张量积和共轭下封闭。这意味着在这种情形下，我们自然得到一个 C^*-张量范畴。此外，根据 Tannaka-Krein 定理 3.9，有限维量子自同构会导出一个相应的离散量子群 Qut$_\delta$ (X)。

定义 4.9。设 X 是一个图。我们称量子群$\mathrm{Qut}_\delta(X)$ 为 X的离散量子自同构群。

对于有限图，Banica 在 [2], 中通过修改 Bichon [7]较早给出的定义，提出了紧量子自同构群的定义。相比之下，定义 4.9 中的量子群 Qut$_\delta$(X) 是离散的，无论 X是否有限。容易证明，若 X 是有限图，则

$$\mathrm{Qut}_\delta(X) = \mathrm{Qut}(X)_\delta$$

它等于 X的 Banica 量子自同构群 Qut(X) 的离散化。尤其是，量子群 Qut(X) 和 Qut$_\delta$(X) 一般来说并不同构。

值得一提的是，Rollier 和 Vaes 在 [21]中提出了另一种非常优雅的无限图量子对称性研究方法。他们的构造直接受到 Man$\check{}$cinska-Roberson [17]的工作的启发。定义 4.9 适用于任意图，而 [21]中的理论仅适用于局部有限连通图。同时，在 [21] 适用的情形下，它给出了一种更精细的不变性，通过离散化可以得到定义 4.9 意义下的量子自同构群。

4.4. 例子。下面我们来看一些图及其量子对称性的例子，主要参考 [25]。

4.4.1. 不相交自同构。如果图 X 的两个自同构 $\sigma, \tau \in$ Aut(X) 满足 $\sigma(x) \neq x \implies \tau(x) = x$，或者等价地，对所有 $x \in V_X$ 都有 $\tau(x) \neq x \implies \sigma(x) = x$，则称它们不相交 。根据 Schmidt [22, 定理 2.2], ，图存在一对不相交自同构就足以保证它具有量子对称性；另见 [25, 命题 7.7]。

命题 4.10。设 X 是一个图，存在一对不相交自同构$\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(X)$，并且假设 $k \in \mathbb{N}$ 不超过这两个自同构中任一个的阶。那么 X 存在一个维数为 k的不可约量子自同构。特别地，如果$\mathrm{Aut}(X)$ 包含一对非平凡的不相交自同构，那么 X 具有量子对称性。

证明。令 $k \in \mathbb{N}$满足 $k \leq \min(\mathrm{ord}(\sigma), \mathrm{ord}(\tau))$，并注意，若 ord($\sigma$) $= \infty =$ ord(τ)，这意味着我们可以任意选择 k 。我们将按如下方式构造一个不可约量子自同构 $\rho = (\mathbb{C}^k, u^\rho)$。

令 $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$，并考虑由 $C(G)$ 中函数的逐点乘法以及 G 的正则表示分别诱导的 $C(G)$ 和 $C^*(G)$ 在 $\mathbb{C}^k = l^2(G)$ 上的作用。我们将 $p_1, \ldots p_k$ 和 $q_1 \ldots, q_k$ 记为这些表示下

中 $C(G)$ 和 $C^*(G)$ 的极小投影在 $M_k(\mathbb{C}) = B(l^2(G))$ 中的像。

定义 $u^\rho = (u^\rho_{x,\ y})_{x,\ y\in V_X}$ 为 $u^\rho = \sum_{r=1}^k u^{\sigma^r} p_r + \sum_{s=1}^k u^{\tau^s} q_s - u^{\mathrm{id}} 1$。也就是说，矩阵 $u^\rho_{x,\ y} \in M_k(\mathbb{C})$ 定义为

$$u^\rho_{x,y} = \sum_{r=1}^k \delta_{x,\sigma^r(y)} p_r + \sum_{s=1}^k \delta_{x,\tau^s(y)} q_s - \delta_{x,y} 1$$

对于 $x,\ y \in V_X$。由于 σ 和 τ 是图自同构，显然有 $u^\rho A_X = A_X u^\rho$。令

$$M_{xy} = \{1 \le r \le k \mid \sigma^r(y) = x\},$$
$$N_{xy} = \{1 \le s \le k \mid \tau^s(y) = x\},$$

并注意到

$$u^\rho_{x,y} = \begin{cases} \sum_{r\in M_{xy}} p_r & \text{if } \sigma(y) \neq y \\ \sum_{s\in N_{xy}} q_s & \text{if } \tau(y) \neq y \\ \delta_{x,y} 1 & \text{if } \sigma(y) = y = \tau(y). \end{cases}$$

特别地，对于 $x,\ y \in V_X$，每个 $u^\rho_{x,\ y}$ 都是一个投影。此外，我们有

$$\sum_{x\in V_X} u^\rho_{x,y} = \sum_{r=1}^k \sum_{x\in V_X} \delta_{x,\sigma^r(y)} p_r + \sum_{s=1}^k \sum_{x\in V_X} \delta_{x,\tau^s(y)} q_s - 1 = \sum_{r=1}^k p_r + \sum_{s=1}^k q_s - 1 = 1,$$

类似地

$$\sum_{y\in V_X} u^\rho_{x,y} = \sum_{r=1}^k \sum_{y\in V_X} \delta_{x,\sigma^r(y)} p_r + \sum_{s=1}^k \sum_{y\in V_X} \delta_{x,\tau^s(y)} q_s - 1 = \sum_{r=1}^k p_r + \sum_{s=1}^k q_s - 1 = 1$$

如所要求。因此，$\rho = (\mathbb{C}^k,\ u^\rho)$ 是 X 的量子自同构。

现在来验证 ρ 是不可约的。若 $\mathrm{ord}(\sigma) = m < \infty$，那么将 X 分解为 σ 的轨道后，我们看到存在有限多个元素 v_1、……、$v_a \in V_X$，它们在 τ 下保持不变，使得对于 $0 \le t < k$，$(\sigma^t(v_1) \dots, \sigma^t(v_a)) = (v_1, \dots, v_a)$ 意味着 $t = 0$。若 $\mathrm{ord}(\sigma) = \infty$，我们要么找到一个无限轨道，要么找到大小任意大的有限轨道。同样，这使我们能够选取 v_1、……、$v_a \in V_X$，使得对于 $0 \le t < k$，$(\sigma^t(v_1) \dots, \sigma^t(v_a)) = (v_1, \dots, v_a)$ 意味着 $t = 0$。事实上，在这种情况下，我们可以令 $v_1 = \cdots = v_a$ 为一个经过适当选择的顶点。无论哪种情况，都可得 $u^\rho_{\sigma^r(v_1)\ v_1} \cdots u^\rho_{\sigma^r(v_a)\ v_a} = p_r$。

同理，我们可以找到 $w_1, \dots, w_b \in V_X$ 使得 $u^\rho_{\tau^r(w_1)\ w_1} \cdots u^\rho_{\tau^r(w_b)\ w_b} = q_r$。由于投影 p_i, q_j（其中 $1 \le i, j \le k$）生成 $M_k(\mathbb{C})$，因此得证。□

4.4.2. 有限树。 回顾一下，如果对于任意顶点 $x, y \in V_X$，都存在一条连接 x, y 的唯一路径，那么图 $X = (V_X, E_X)$ 就称为树。这里，路径指顶点的有限序列 $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$，满足对于所有 $i = 1, \dots, n$，$(x_{i-1}, x_i) \in E_X$。

命题 4.10 可用于证明，一般的有限树具有量子对称性。更确切地说，Junk-Schmidt-Weber 在 [15] 中证明，几乎所有有限树都包含一对互不相交的“樱桃”，其含义如下。

定义 4.11。设 $X = (V_X, E_X)$ 是一个图。在 X 中，樱桃是由 X 中两两不同的顶点构成的三元组 (x, x_1, x_2)，满足

a) $(x_i, x) \in E_X$ 对于 $i = 1,2$。 *b)* x_i 的度对于 $i = 1,2$ 而言为 *1*。 *c)* x 的度为 *3*。

这里，顶点 x 的度 是满足 $(x, y) \in E_X$的顶点 $y \in V_X$ 的数量。我们可以将带有樱桃的图 X 想象成图1所示的样子，其中方框表示一个任意的图，它通过一条边与顶点 x 相连。

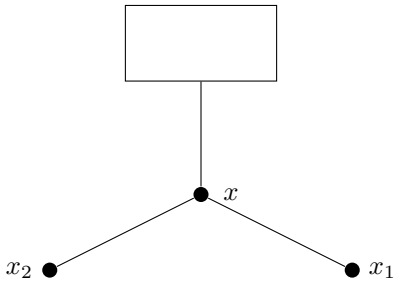


FIGURE 1. 一棵带有樱桃的图

任何含有一对不相交樱桃的图，都存在一对不相交的自同构，它们通过翻转樱桃的“分支”实现，因此根据命题 4.10，这种图具有量子对称性。
Junk-Schmidt-Weber 的研究由此确立了以下结果，它是 Erd˝os-R´enyi [10] 关于有限树的经典对称性的一个著名结果的类似版本。

定理4.12（Junk-Schmidt-Weber 2020）。 几乎所有有限树都具有量子对称性。

事实上，可以如下完整刻画有限树的量子自同构群 [9]。

定理4.13（de Bruyn-Kar-Roberson-Schmidt-Zeman 2023）。 量子自同构群 $\mathcal{T}$ 这一类有限树，是具有以下性质的离散量子群中最小的一类。

a) 平凡量子群包含于 $\mathcal{T}$。*b)* 如果 $\mathbb{G}$、 $\mathbb{H} \in \mathcal{T}$，那么它们的自由积 $\mathbb{G} * \mathbb{H}$ 包含于 $\mathcal{T}$。*c)* 如果 $\mathbb{G} \in \mathcal{T}$，那么自由 *wreath* 积 $\mathbb{G}\, wr_*\, \mathrm{Sym}_n^+$ 包含于 $\mathcal{T}$。

这里我们不解释离散量子群的自由积或自由 wreath 积的定义。我们只指出，[9] 的主要结果采用了不同的表述方式，使用的是紧量子群的语言。通过离散化，很容易验证这意味着定理4.13。

de Bruyn-Kar-Roberson-Schmidt-Zeman 的证明首先将命题归结为有根树的情形，然后运用归纳论证。详情及更多信息请参见 [9]。

4.4.3. 无限直线。 让我们研究“无限直线”图 L的量子对称性，也就是顶点集为 $\mathbb{Z}$ 、对所有 $n \in \mathbb{Z}$均连接 n 和 $n+1$ 的图。这是群 $\mathbb{Z}$ 关于生成集 $\{\pm 1\}$的（无向）凯莱图。

我们需要一个辅助结果。对于图 X 中的顶点 x、 y，用 $d(x,\ y)$ 表示 x 与 y之间的距离，即连接它们的最短路径长度。根据定义，如果不存在这样的路径，我们令 $d(x,\ y) = \infty$ 。

引理 4.14 (Schmidt 2020)。 设 X 是一个图，且 x_1、 x_2、 y_1、 $y_2 \in V_X$ 满足 $d(x_1$、 $x_2) \neq d(y_1$、 $y_2)$。若 $(\mathcal{H}$、 $u)$ 是 X 的量子自同构，则 $u_{x_1,\ y_1} u_{x_2,\ y_2} = 0$。

证明。 以下论证引自 [23, 引理 3.2]。不失一般性，设 $m = d(x_1,\ x_2) < d(y_1,\ y_2)$。若 $m = 0$，则有 $x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$，因此由引理 4.2 可得 $u_{x_1,\ y_1}u_{x_1,\ y_2} = 0$。若 $m = 1$，则有 $(x_1,\ x_2) \in E_X$ 且 $(y_1,\ y_2) \notin E_X$，此时结论由引理 2.9 得出。这里我们指出，该引理的陈述和证明可以直接推广到无限图。

因此，只需考虑 $m \geq 2$。设 $x_1 = v_0,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_m = x_2$ 是一条长度为 m、连接 x_1 与 x_2 的路径。由魔术酉条件可得

$$\begin{aligned} u_{x_1,y_1}u_{x_2,y_2} &= u_{x_1,y_1}\Big(\sum_{z_1\in V_X} u_{v_1,z_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{z_{m-1}\in V_X} u_{v_{m-1},z_{m-1}}\Big)u_{x_2,y_2} \\ &= \sum_{z_1,\ldots,z_{m-1}\in V_X} u_{x_1,y_1}u_{v_1,z_1}\cdots u_{v_{m-1},z_{m-1}}u_{x_2,y_2}, \end{aligned}$$

第二个等号用到了乘法在有界集合上联合强连续这一性质。由于 $d(y_1,\ y_2) > m$，从 y_1 到 y_2 不存在长度为 m 的路径。这意味着，在最后一个求和的每一项中，都存在一个指标 $0 \leq k \leq m-1$，使得 $(z_k,\ z_{k+1}) \notin E_X$，其中我们将 $z_0 = y_1,\ z_m = y_2$ 解释为……。于是有$u_{v_k,\ z_k}u_{v_{k+1},\ z_{k+1}} = 0$，因此也有 $u_{x_1,\ y_1}u_{v_1,\ z_1}\cdots u_{v_{m-1},\ z_{m-1}}u_{x_2,\ y_2} = 0$。由此得到所述结论。□

现在我们可以讨论以下结果了。

命题 4.15。 “无限直线”图没有量子对称性。

证明。 为简单起见，我们只证明无限直线图 L 没有非经典的有限维量子自同构。一般情形请参见 [25,命题 7.9]。

假设 $(\mathcal{H}, u)$ 是 L 的有限维量子自同构，并选取 $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$，使得 $u_{i,j}, u_{k,l}$ 不交换。根据引理 4.14，不失一般性，我们可以假设 $k = i + m$ 和 $l = j \pm m$，其中 $m > 0$。由于所有$u_{k,s}$ 都与$u_{i,j}$ 交换（除非 $|s - j| = m$），因此实际上$u_{i,j}$ 与 $u_{i+m,j\pm m}$中的任意一个都不交换。

由于在 u的第 j列中，除$u_{i,j}$ 之外，只有$u_{i+2m,j}$ 的第一个指标与 $i + m$的距离为 m，因此魔术酉条件意味着$u_{i+2m,j}$ 与$u_{i+m,j\pm m}$中的任意一个都不交换。现在考虑集合

$$S = \{(i + rm, j + sm) \mid r, s \in \mathbb{Z} \text{ and } r + s \text{ even}\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

反复运用上述论证可知，若 $(a, b), (c, d) \in S$相邻，即 $(c, d) = (a \pm m, b \pm m)$，则投影 $u_{a,b}$,$u_{c,d}$ 不对易。这尤其意味着，对于满足 $(a, b) \in S$ 的所有矩阵元 $u_{a,b}$，它们都必须非零。因此，对于 $r \in \mathbb{Z}$，所有算子 $u_{i+2rm,j}$ 都非零。有限维量子自同构不可能具有这一性质。□

4.4.4. 拉多图。 最后，我们来考察拉多图 R，它也称为随机图或 Erd˝os-R´enyi 图，综述见 [8] 。该图有许多等价的描述；如果取一个可数顶点集并随机为其添加边，那么以概率 1 得到的就是该图。

具体而言，图 R 可定义为顶点集为 V_R 的图，其中 V_R 由模 4 同余于 1 的素数组成；当且仅当 p 是模 q的二次剩余时，$(p, q) \in E_R$ 构成边。根据二次互反律，对称关系 $(p, q) \in E_R$ 当且仅当 $(q, p) \in E_R$成立。

R 的一个关键性质是，对于任意一对不相交的有限集 $A,\ B \subset V_R$ 都存在一个顶点 $w \in V_R$，使得对于所有 $x \in A$，$(x,\ w) \in E_R$；并且对于所有$y \in B$，$(y,\ w) \notin E_R$。利用这一性质可以证明，任意两个

有限子图之间的部分同构都可以扩展为全局自同构。这里，有限子图之间的部分同构指的是有限子集 A, $B \subset V_R$ 之间的一个双射 $\theta: A \to B$，它以如下意义保持邻接关系：对于所有 x, $y \in A$, $(\theta(x)\ \theta(y)) \in E_R \Leftrightarrow (x,\ y) \in E_R$。这意味着 R 具有一个很大的自同构群。

相反 ，我们有以下由 Ismae el [14] 得出的结果。

定理 4.16. 拉多图 R 没有量子对称性。

证明. 我们只证明一个更简单的事实： R 不存在非经典的有限维量子自同构，参见 [25, 命题 7.15]。

假设 $\sigma = (\mathcal{H},\ u)$ 是一个非经典有限维量子自同态，因此由投影 $u_{x,\ y}$ 生成的代数是非交换的，其中 x, $y \in V_R$。

根据假设，我们于是找到顶点 $x(+)\ x(-)$ 和 $y_1(+)\ y_1(-)$，使得 $u_{x(+),\ y_1(+)}$ 与 $u_{x(-),\ y_1(-)}$ 不交换。我们将 $u_{x(\pm),\ y_j(\pm)}$ 记为 $j = 2, \ldots, r_\pm$ 中剩余的非零投影，它们位于 $x(\pm)$ 这一行。令

$$p_\alpha(\pm) = u_{x(\pm),y_1(\pm)}, \qquad p_\beta(\pm) = \sum_{j>1} u_{x(\pm),y_j(\pm)}.$$

于是，投影 $p_\alpha(+)\ p_\beta(+)$ 两两正交，且 $p_\alpha(+) + p_\beta(+) = 1$；同理， $p_\alpha(-)\ p_\beta(-)$ 两两正交，且 $p_\alpha(-) + p_\beta(-) = 1$。根据构造， $p_\alpha(+)$ 与 $p_\alpha(-)$ 不交换，因此 $p_\beta(+)$ 与 $p_\beta(-)$ 也不交换。

选取一个顶点 w，使得对所有 $i > 1$, $(w, y_1(+)) \in E_R$, $(w, y_1(-)) \in E_R$，且 $(w,\ y_i(\pm)) \notin E_R$；并考虑$w$对应的列中的非零投影 $u_{v_i,w}$，其中 $1 \le i \le k$，对某个 k成立。若 $(v_i, x(\pm)) \in E_R$，则 $u_{v_i,w}$ 与$p_\beta(\pm)$正交；若 $(v_i, x(\pm)) \notin E_R$，则 $u_{v_i,w}$ 与 $p_\alpha(\pm)$正交。由此可知，在第一种情况下$u_{v_i,w} \le p_\alpha(\pm)$，在第二种情况下 $u_{v_i,w} \le p_\beta(\pm)$。由于投影 $u_{v_i,w}$ 构成单位分解，因此可以将 $p_\alpha(\pm)$ 和 $p_\beta(\pm)$分别写成若干 $u_{v_i,w}$之和。

然而，这意味着这些投影两两可交换，从而导致矛盾。□

4.5. **习题**。

习题 4.17. 设 X 是一个图。 X 的补图是图 X^c，它与 X具有相同的顶点集，并且对于满足 $x \ne y$ 的 x、 $y \in V_X$，有$(x, y) \in E_{X^c}$当且仅当$(x, y) \notin E_X$。证明， V_X 的量子置换$(\mathcal{H}, u)$ 是 X 的量子自同构，当且仅当它是 X^c的量子自同构。

习题 4.18. 设 X 是一个没有量子对称性的连通图， Y是两个 X的副本的不交并。 Y 是否具有量子对称性？

习题 4.19. 在上一道习题的情形中，如果不再假设 X 是连通的，会有什么结果？

习题 4.20. 如果图 X 的每个顶点 $x \in V_X$ 都只与有限多个其他顶点相连，则称该图为局部有限图。在这种情况下， X 的邻接矩阵 A_X 是局部有限的，也就是说， A_X 的每一列和每一行中都只有有限多个非零项。

根据定义，局部有限图 X 的相干代数是局部有限 $V_X \times V_X$ 矩阵中包含 id 和 A_X 且对逐项乘法封闭的最小子代数。证明：如果 $(\mathcal{H}, u)$ 是 X 的量子自同构，那么对于 X 的相干代数中的所有 T，都有 $Tu = uT$。

练习 4.21. 描述所有顶点数不超过 4 的图的不可约量子自同构。

5. Quantum symmetries in topology

在本书最后一章中，我们研究局部紧拓扑空间中的量子对称性。这建立在无限量子置换理论的基础上，并引入了连续性的自然概念。

5.1. **定义**。设 X 是一个局部紧空间，并将其底层集合记作 X_δ，或者等价地，将赋予离散拓扑的空间 X 记作 X_δ。那么恒等映射 $X_\delta \to X$ 是连续的，并诱导出一个非退化单射 $*$-同态 $can: C_0(X) \to M(C_0(X_\delta)) = C_b(X_\delta)$。注意，事实上，任意从 X 到拓扑空间 Y 的集合论映射 $X \to Y$，在视为映射 $X_\delta \to Y$时都是连续的。

我们感兴趣的是与 X 的拓扑以某种恰当方式相容的 X_δ 的量子置换。注意，若 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$是定义 4.1 意义下 X_δ 的量子置换，那么通过如下设定，我们得到一个相应的非退化 $*$-同态 $\alpha_\delta: C_0(X_\delta) \to M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X_\delta)$

$$\alpha_\delta(e_x) = \sum_{y \in X_\delta} u^\sigma_{x,y} \otimes e_y,$$

其中，e_x 表示以 x为支撑的特征函数。这里，$K(\mathcal{H}_\sigma)$表示 $\mathcal{H}_\sigma$上的紧算子代数。

定义 5.1. 设 X 是一个局部紧空间。若存在一个非退化的 $*$-同态$\alpha: C_0(X) \to M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X))$ 使图表交换，则称 X_δ 的量子置换 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ 是连续的。

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & \xrightarrow{\alpha} & M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)) \\ {\scriptstyle can}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes can} \\ M(C_0(X_\delta)) & \xrightarrow{\alpha_\delta} & M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X_\delta)) \end{array}$$

可交换，且 $[\alpha(C_0(X))(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes 1)] = K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)$。
X 的量子同胚是 σ 对 $\underline{X_\delta}$的连续量子置换，且其共轭 σ 也为连续量子置换。

当然，若 X 具有离散拓扑，则根据定义 4.1，X 的量子同胚不过是量子置换。

对于一般的 X，由映射 can是单射这一事实可知，$(\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$的连续性等价于：映射$\alpha_\delta$ 将 $C_0(X)$的像包含在子代数

$$M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)) = C_b(X, B(\mathcal{H}_\sigma)_{st}) \subset C_b(X_\delta, B(\mathcal{H}_\sigma)) = M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X_\delta))$$

由所有满足以下条件的 $g \in C_b(X, B(\mathcal{H}_\sigma)_{st})$ 构成：对于所有 $T \in K(\mathcal{H}_\sigma)$，均有 $g(T \otimes 1)$，$(T \otimes 1)g \in C_0(X, K(\mathcal{H}_\sigma))$；并且 $[\alpha_\delta(C_0(X))(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes 1)] = K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)$。这里我们将$B(\mathcal{H}_\sigma)_{st}$ 记作赋予严格拓扑的 $B(\mathcal{H}_\sigma)$。

在附加假设下，上述描述可以简化。若 $\mathcal{H}_\sigma$ 是有限维的，则 $B(\mathcal{H}_\sigma) = K(\mathcal{H}_\sigma)$ 上的严格拓扑与范数拓扑一致，且 α 的目标变为 $B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)$。此外，若$X$ 是紧致的，则定义 5.1 中的上方箭头是一个幺正 $*$-同态$\alpha: C(X) \to B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C(X) \cong M_n(C(X))$，其中 $n = \dim(\mathcal{H}_\sigma)$。

引理 5.2。设 X 是一个局部紧空间，且 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ 是 X_δ的有限维量子置换。则以下条件等价。

a) σ 是一个量子同胚。
b) 对于每个 $f \in C_0(X)$，这些映射

$$X \ni y \mapsto \sum_{x \in X} f(x) u^{\sigma}_{x,y} \in B(\mathcal{H}_\sigma)$$
$$X \ni x \mapsto \sum_{y \in X} f(y) u^{\sigma}_{x,y} \in B(\mathcal{H}_\sigma)$$

都包含在 $C_0(X, B(\mathcal{H}_\sigma)) = B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)$ 中。

证明。 $a) \Rightarrow b)$ 根据假设，$\alpha(f)(y) = \sum_x f(x) u^{\sigma}_{x,y}$ 对每个 $f \in C_0(X)$ 都定义了一个元素 $\alpha(f) \in C_0(X, B(\mathcal{H}_\sigma))$。对 σ 应用相同的论证，即可得到第二个映射的结论，其中使用由 $j(T)(\xi) = T^* \xi$ 给出的 $*$-反同构 $j\colon B(\mathcal{H}_\sigma) \to B(\mathcal{H}_\sigma)$。

$b) \Rightarrow a)$ $b)$ 中关于第一个映射的条件意味着我们得到了一个定义良好的 $*$-同态 $\alpha\colon C_0(X) \to B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X) = C_0(X, B(\mathcal{H}_\sigma))$，其定义公式为 $\alpha(f)(y) = \sum_x f(x) u^{\sigma}_{x,y}$。为了证明 $[\alpha(C_0(X))(B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes 1)] = B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X)$，显然只需验证 $1 \otimes C_0(X) \subset [\alpha(C_0(X))(B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes 1)]$。令 $f \in C_0(X)$，并选取 $\mathcal{H}_\sigma$ 的一组标准正交基 $e_1, \ldots, e_n$。$b)$ 中关于第二个映射的条件蕴含

$$f_{i,j}(x) = \sum_z f(z) \langle e_i, u^{\sigma}_{x,z} e_j \rangle$$

包含于所有 $1 \leq i, j \leq n$ 的 $C_0(X)$ 中。我们计算

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \alpha(f_{i,j})(y) |e_i\rangle\langle e_j| &= \sum_{i,j} \sum_x f_{i,j}(x) u^{\sigma}_{x,y} |e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \sum_{i,j} \sum_{x,z} f(z) \langle e_i, u^{\sigma}_{x,z} e_j \rangle u^{\sigma}_{x,y} |e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \sum_{j} \sum_{x,z} f(z) u^{\sigma}_{x,y} u^{\sigma}_{x,z} |e_j\rangle\langle e_j| \\
&= \sum_x f(y) u^{\sigma}_{x,y} = f(y) 1,
\end{aligned}$$

由此得到所需结论。因此，σ 是连续的。

对于共轭量子置换 σ，论证完全类似。□

利用引理 5.2，很容易验证：X_δ 的一维量子置换是 X 的量子同胚，当且仅当相应的经典置换在通常意义下是 X 的同胚。注意，对于量子同胚 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$，固定 $y \in X$ 时的映射 $x \mapsto u^{\sigma}_{x,y}$ 和 $x \mapsto u^{\sigma}_{y,x}$ 通常并非（严格）连续，即使 $\mathcal{H}_\sigma$ 是有限维的。

命题 5.3。设 X 是一个局部紧空间。所有 X 的量子同胚构成一个满的 C^*-张量子范畴 $\mathrm{HOMEO}^+(X)$，它是量子置换范畴 $\mathrm{PERM}^+(X_\delta)$ 中 X_δ 的子范畴。

证明。我们来验证，X 的两个连续量子置换 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$ 的张量积仍然是连续的。根据假设，存在非退化的 $*$-同态 $\alpha\colon C_0(X) \to M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X))$ $\beta\colon C_0(X) \to M(K(\mathcal{H}_\tau) \otimes C_0(X))$，并具有定义 5.1 中的性质。于是，$\gamma = (\mathrm{id} \otimes \beta)\alpha$ 是一个从 $C_0(X)$ 到 $M(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes K(\mathcal{H}_\tau) \otimes C_0(X))$ 的非退化 $*$-同态。注意到

$$\gamma(f)(z) = (\mathrm{id} \otimes \beta)\alpha(f)(z) = \sum_{x,y \in X} f(x) u^{\sigma}_{x,y} \otimes u^{\tau}_{y,z}$$

对于 $f \in C_0(X)$ 和

$$\begin{aligned}[\gamma(C_0(X))(K(\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau) \otimes 1)] &= [\gamma(C_0(X))(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes K(\mathcal{H}_\tau) \otimes 1)] \\ &= [(\mathrm{id} \otimes \beta)(\alpha(C_0(X))(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes 1))(1 \otimes K(\mathcal{H}_\tau) \otimes 1)] \\ &= [(\mathrm{id} \otimes \beta)(K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(X))(1 \otimes K(\mathcal{H}_\tau) \otimes 1)] \\ &= K(\mathcal{H}_\sigma) \otimes K(\mathcal{H}_\tau) \otimes C_0(X) = K(\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau) \otimes C_0(X),\end{aligned}$$

我们看到， γ 为$\sigma \intercal \bigcirc \tau$提供了所需的 $*$-同态。将这一论证应用于一对量子同胚及其共轭，可知量子同胚类在张量积下保持不变。

X 的单位量子置换显然是一个量子同胚。同样，不难验证，量子同胚的直和和子对象仍然是量子同胚。□

根据定义，量子同胚的共轭仍是量子同胚。因此，由命题 5.3 可知，由所有有限维量子同胚构成的 HOMEO$^+(X)$ 的满子范畴 Homeo$^+(X)$ 是一个刚性的C^*-张量范畴。结合 Tannaka-Krein 定理 3.9，这意味着 Homeo$^+(X)$ 确定了一个量子子群 Qut$_\delta(X) \subset$ Sym$^+(X_\delta)$。

定义 5.4。 设 X 是一个局部紧空间。我们称 $\mathrm{Qut}_\delta(X)$ 为 X的量子同胚群。

如上所述，离散量子群 Qut$_\delta(X)$ 将经典同胚群 Homeo(X)作为量子子群包含在内。

在此阶段，给定一个局部紧空间 X，自然会问是否存在非经典的量子同胚，换言之， X 是否具有量子对称性。以下论证以命题 4.10 为范本，说明非经典量子同胚通常大量存在。我们称局部紧空间 X的两个经典同胚 σ, τ 为不相交，如果 $\sigma(x) \neq x \implies \tau(x) = x$，或者等价地，对所有 $x \in X$， $\tau(x) \neq x \implies \sigma(x) = x$。

命题 5.5。 设 X 是一个局部紧空间，存在一对不相交同胚 $\sigma, \tau \in \mathrm{Homeo}(X)$，并假设 $k \in \mathbb{N}$ 不超过其中任一个的阶数。那么 X 具有一个维数为 k的不可约量子同胚。特别地，如果$\mathrm{Homeo}(X)$包含一对非平凡的不相交同胚，那么 X 具有量子对称性。

证明。 使用命题 4.10 证明中的相同记号和论证，我们通过令 u^ρ of X_δ of dimension k ，得到一个不可约量子置换

$$u^\rho_{x,y} = \sum_{r=1}^{k} \delta_{x,\sigma^r(y)} p_r + \sum_{s=1}^{k} \delta_{x,\tau^s(y)} q_s - \delta_{x,y} 1$$

对于 x， $y \in X$。唯一需要验证的是 u^ρ 是一个量子同胚。为此，令 $f \in C_0(X)$，并注意到

$$\begin{aligned}\sum_{y \in X} f(y) u^\rho_{x,y} &= \sum_{y \in X} f(y) \left(\sum_{r=1}^{k} \delta_{x,\sigma^r(y)} p_r + \sum_{s=1}^{k} \delta_{x,\tau^s(y)} q_s - \delta_{x,y} 1 \right) \\ &= \sum_{r=1}^{k} f(\sigma^{-r}(x)) p_r + \sum_{s=1}^{k} f(\tau^{-s}(x)) q_s - f(x) 1,\end{aligned}$$

类似地

$$\sum_{x\in X} f(x)u^{\rho}_{x,y} = \sum_{r=1}^{k} f(\sigma^r(y))p_r + \sum_{s=1}^{k} f(\tau^s(y))q_s - f(y)1.$$

因此，该论断可由引理 5.2 得出。 □

命题 4.10 使我们能够在各种具体情形中展示量子对称性。例如，考虑圆 $X = S^1$，并令 τ，$\sigma \in \mathrm{Homeo}(S^1)$ 为将圆的两个相对半圆互换的同胚。具体来说，将 S^1 视为端点相粘合的单位区间，我们可以取 τ 和 σ为分段线性同胚

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} & \text{if } \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ x & \text{if } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\tau(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{if } \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{if } \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

如图 2 所示。

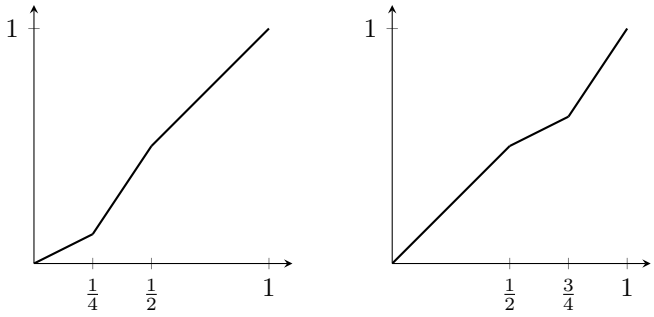


FIGURE 2. 同胚 σ 和 τ

运用类似的论证可以发现，几乎所有局部紧空间都具有上述意义下的量子对称性。特别地，每个维数大于 0 的流形都具有量子对称性。

这与 Goswami [12] 的一项结果形成了鲜明对比。该结果断言，连通黎曼流形不允许存在非经典量子等距变换，也就是说，不允许存在以适当意义而言光滑且与黎曼度量相容的量子对称性。关于黎曼流形的量子等距群的定义及更多背景知识，请参阅 [12] 及其中的参考文献。

5.2. 覆盖空间。 我们已经看到，局部紧空间的量子同胚群通常十分庞大，因此，试图明确描述所有量子同胚并不现实。然而，与我们在第 4 节中的讨论类似，一旦为图景增添更多结构，就会出现一些有趣的问题。

回顾一下，覆盖空间 是由拓扑空间 E, X 以及一个连续映射 $p\colon E \to X$ 组成的一对，并满足：每个点 $x \in X$ 都有一个开邻域U，使得 $E_{|U} = p^{-1}(U) \cong \bigsqcup_{i\in I} U$ 同胚于若干个 U的不交并，并且 p 在 $E_{|U}$ 上的限制$p_{|U} : E_{|U} \to U$ 是典范投影，参见

例如， [13, 第 1.3] 节。我们有时会用简写记号 $E|X$ 表示覆盖空间，而省略覆盖映射 p。

p 的甲板变换 是一个同胚 T： $E \to E$，满足$p \circ T = p$。下文中，我们始终假设 X 是连通且局部紧的。在这种情况下，总空间 E 也局部紧，并且对于 $x \in X$，所有纤维$E_x = p^{-1}(x)$具有相同的基数，称为$E|X$的片数 。

定义 5.6。 设 p： $E \to X$ 是一个覆盖空间。若$u_{x,\ y} = 0$，除非 $p(x)$ $=p(y)$，则称 E 的量子同胚$\sigma = (\mathcal{H}, u)$ 为量子甲板变换。

每个量子甲板变换 σ 都会对任意 $x \in X$诱导纤维 E_x 上的量子置换$\sigma_{|x}$，并且对每个开集 $U \subset X$，其限制都是一个量子同胚$\sigma_{|U}$： $E_{|U} \to E_{|U}$。

X 的典范覆盖 由 $E = X$ 和 $p = \mathrm{id}$给出，下面的观察可直接由定义得出。

例5.7。 典范覆盖的每个量子甲板变换$(\mathcal{H}, u)$ 都具有形式$u_{x,y} = \delta_{x,y}\mathrm{id}$。

更一般地，形如 $E = X \times I \to X$的覆盖，其中 I 是某个指标集，且覆盖映射由投影到第一个因子给出，称为 X 的平凡覆盖 ，其纤维为 I。

例5.8。 考虑纤维为 I的平凡覆盖 $E = X \times I \to X$ 。那么， I 的每个量子置换$(\mathcal{H}, u)$ 都会通过如下方式诱导出 $E|X$ 的一个量子甲板变换$(\mathcal{H}, u^E)$ ：

$$u^E_{(x,i),(y,j)} = \delta_{x,y} u_{i,j}$$

对于$(x, i), (y, j) \in E$。我们称这类量子甲板变换为常值的。

与经典甲板变换的情形不同，平凡覆盖的量子甲板变换不一定是常值的，即使它在各纤维上的限制都是经典量子置换。解释这一点之前，我们先讨论一个用于刻画有限维量子甲板变换的有用判据。

引理 5.9。 设 p： $E \to X$ 是一个覆盖空间，且 $\sigma = (\mathcal{H}, u)$ 是 E_δ 的一个有限维量子置换，满足 $u_{x,y} = 0$，除非 $p(x) = p(y)$。那么， σ 是量子甲板变换，当且仅当对每个 $x \in X$，都存在一个开邻域 U，使得 $E_{|U} \cong \bigsqcup_{i \in I} U = U \times I$ 是平凡的，并且映射

$$U \ni y \mapsto u_{(y,i)(y,j)} \in B(\mathcal{H})$$

对所有 i、 $j \in I$ 都是连续的。

证明。首先假设 σ 是 $E|X$的量子甲板变换。此外，设$x \in X$，并设 V 是 x 的一个开邻域，在该邻域上 E 是平凡的。取 x 的一个开邻域 $U \subset V$，使得闭包$\overline{U}$是紧致的，且包含于V中。于是我们可以找到一个函数 $f \in C_0(E)$，其支撑位于$E_{|V} \cong \overline{V} \times I$中 V的第 i 个副本内，并且在 $U \subset V$ 上满足 $f = 1$。若将与 σ关联的 $*$-同态写为 α: $C_0(E) \to B(\mathcal{H}_\sigma) \otimes C_0(E) = C_0(E, B(\mathcal{H}_\sigma))$，则 $\alpha(f)(e)$ 仅在 $e \in E_{|V}$ 时非零，因此对所有$y \in U$，我们有 $\alpha(f)(y, j) = f(y, i)u_{(y,i),(y,j)} = u_{(y,i),(y,j)}$。由此可知$U \ni y \mapsto u_{(y,i),(y,j)}$ 是连续的

反过来，假设量子置换 σ 满足 $u_{x,\ y} = 0$ 除非$p(x) = p(y)$，从而在局部得到连续映射 $U \ni y \mapsto u_{(y,i)(y,j)} \in$

$B(\mathcal{H})$。那么这些映射

$$(y,j) \mapsto \sum_{i\in I} f(y,i)u_{(y,i),(y,j)}, \qquad (y,i) \mapsto \sum_{j\in I} f(y,j)u_{(y,i),(y,j)}$$

在 $E_{|U}$ 上对所有 $f \in C_0(E)$ 都是连续的，由引理 5.2 可知，$(\mathcal{H}, u)$ 是一个量子同胚。□

现在我们来给出一个最基本的例子：一个允许存在非恒定量子甲板变换的平凡覆盖。

例 5.10. 设 $X = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，并设 $E = X \times \{0,1\} = X \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是 X 的平凡二层覆盖。此外，令 $p_0, p_1 \in M_2(\mathbb{C})$ 为标准投影

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

并令 $\gamma\colon X \to U(2)$ 为映射

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

利用引理 *5.9*，容易验证，通过定义如下映射，我们得到 $E|X$ 的一个 2 维非恒定量子甲板变换$(\mathbb{C}^2, u)$

$$u_{(x,i),(y,j)} = \delta_{x,y}\gamma(x)^* p_{i-j}\gamma(x)$$

对所有 $x, y \in X, i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 都成立。这个量子甲板变换是非经典的，因为它在 $a = 0$ 和 $b = \pi/4$ 处纤维上的限制分别为

$$u_{|a} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ p_1 & p_0 \end{pmatrix}, \qquad u_{|b} = \begin{pmatrix} p_+ & p_- \\ p_- & p_+ \end{pmatrix},$$

其中

$$p_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

分别。

注意，例 5.10 中的量子甲板变换在每个纤维上都是经典的，但整体上却不是经典的。这种现象并非平凡覆盖所独有，我们也可以轻松地将上述构造推广到非平凡覆盖。

例 5.11。考虑 $X = S^1$ 的非平凡二层覆盖 E，我们可以将其视为映射 $p(z) = z^2$，其中 $z \in E = X = U(1) \subset \mathbb{C}$。此外，令 $\gamma\colon X \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to U(2)$，并取与例 *5.10* 中相同的 p_0, p_1。于是，通过如下设定，我们得到 E 的一个2维量子甲板变换$(\mathbb{C}^2, u)$

$$u_{e,f} = \gamma(p(e))^*(\delta_{e,f}p_0 \oplus \delta_{e,-f}p_1)\gamma(p(e))$$

对于 $e, f \in E = U(1)$。这里请注意，限制 $u_{|x} \in M_2(B(\mathbb{C}^2))$ 到任意点 $x \in X$ 上方的纤维$E_x \cong \{0,1\}$，在同时翻转行和列后仍保持不变，因此这一构造确实与覆盖的结构相容。

尽管通过例 5.10 和 5.11 中的方法得到的量子甲板变换是非经典的，但它们显然与经典甲板变换的直和密切相关。事实上，在以下意义上，它们与经典量子覆盖变换甲板等价。

定义 5.12。设 $p:\ E \to X$ 是一个覆盖空间，且 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$ 是 $E|X$的量子甲板变换。从 σ到 τ的（酉）甲板交织算子是一个严格连续的有界映射 $T:\ X \to B(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\tau)$，使得（$T_x$ 对所有 $x \in X$ 都是酉的，并且）

$$T_{p(e)} u^\sigma_{e,f} = u^\tau_{e,f} T_{p(e)}$$

对所有 $e, f \in E$。如果两个量子甲板变换 $\sigma = (\mathcal{H}_\sigma, u^\sigma)$ $\tau = (\mathcal{H}_\tau, u^\tau)$之间存在酉甲板交织算子，则称它们为甲板等价。

根据构造，例 5.10 和 5.11 中的映射 γ 实现了给定量子甲板变换与经典量子甲板变换之间的酉甲板交织算子。

我们得到一个 C^*-张量范畴 $\mathbf{DECK}^+(E|X)$，它由 $E|X$ 的所有量子甲板变换组成，并以它们之间的甲板交织算子作为态射。在此范畴中，我们有有限维量子甲板变换构成的满 C^*-张量子范畴 $\mathbf{Deck}^+(E|X)$，且该范畴是刚性的。依照之前的相同模式，我们可以给出以下定义。

定义 5.13。覆盖空间 $E|X$ 的量子甲板变换群 $\mathrm{Qut}_\delta(E|X)$ 是与 $E|X$ 的有限维量子甲板变换所构成的刚性 C^*-张量范畴 $\mathrm{Deck}^+(E|X)$ 相关联的离散量子群。

鉴于引理 2.4 以及目前为止的例子，人们或许会想知道，对于片数不超过三片的覆盖，其量子甲板变换是否总是甲板等价于经典量子甲板变换的直和。事实并非如此，下面的例子将说明这一点。

例 5.14. 令 $X = S^2$ 为 2 球面。此外，令 $L \to X$ 和 $L^\perp \to X$ 为非平凡复线丛，且 $L \oplus L^\perp$ 是平凡的。例如，将 X 视为 $\mathbb{C}P^1$，可以取 L 为典范线丛，$L^\perp$ 为其对偶。选取一个平凡化 $L \oplus L^\perp \cong X \times \mathbb{C}^2$，可得到投影 $p, q \in C(S^2, M_2(\mathbb{C}))$，使得 $p + q = 1$，且与 p 和 q 对应的向量丛分别同 L 和 $L^\perp$ 同构。通过如下方式定义平凡二层覆盖 $E = X \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的量子置换 $\sigma = (\mathbb{C}^2, u)$

$$u_{(x,i),(y,j)} = \delta_{x,y}(\delta_{i,j} p(x) + \delta_{i,1-j} q(x)).$$

根据引理 *5.9*，容易验证这确实是 $E|X$ 的量子甲板变换。然而，不存在从 σ 到 $E|X$ 的经典甲板变换直和的酉甲板交织算子，因为这样的交织算子会导出 L 和 $L^\perp$ 的平凡化。

接下来我们考虑在每个纤维中都是非经典的量子甲板变换的例子。对于至少有四个片的平凡覆盖，可以通过取纤维的非经典量子置换所对应的常值量子甲板变换，轻易得到此类例子，如例5.8所示。

为了给出非平凡覆盖的例子，我们先说明量子置换按定义是“广义对称性”，它们本身也能以何种意义拥有对称性。

定义 5.15. 设 X 是一个集合，G 是一个从右侧作用于 X 的经典离散群。若存在射影酉表示 $\theta:\ G \to U(\mathcal{H})$，使得集合 X 上的量子置换 $(\mathcal{H}, u)$ 是 G-等变的，则称其为 G-等变量子置换。

$$u_{x\cdot g, y\cdot g} = \theta_g^* u_{x,y} \theta_g$$

对于所有 x、$y \in X$ 和 $g \in G$。

我们注意到，在定义 5.15 中要求严格相等 $u_{x\cdot g,y\cdot g} = u_{x,y}$ 会过于严格。例如，如果 G 在 X 上传递作用，那么这个更强的条件就会直接迫使 $(\mathcal{H}, u)$ 成为经典的，参见习题 5.20。

相反，允许非平凡的射影酉表示，使我们拥有足够的灵活性，即使 G 在 X 上的作用是传递的，也能得到非经典的 G- 等变量子置换。具体而言，回顾命题 2.6 中对与有限阿贝尔群相关联的 Weyl 量子置换的描述。

引理 5.16。设 A 是一个阶为 N 的阿贝尔群，并令 $n = N^2$。此外，将 $A \times A$ 视为一个带有平移作用的 $A \times A$- 集合。那么，对于 $g \in U(N)$，*Weyl* 量子置换 $\pi^g = (\mathbb{C}^n, u^g)$ 是 $A \times A$ 的 $A \times A$-等变量子置换；这里所用的是 $A \times A$ 在 $M_N(\mathbb{C})$ 上由下式给出的酉表示 θ：

$$\theta_{(r,s)}(T) = W_{r,s}^* T W_{r,s}$$

对于 $(r, s) \in A \times A$。

证明。由引理 2.5 b) 可知，θ 是一个酉表示。此外，对于 $(a, b), (c, d), (r, s) \in A \times A$ 和 $g \in U(N)$，我们计算得

$$\begin{aligned}
u^g_{(a+r,b+s),(c+r,d+s)} &= |W_{a+r,b+s} g W_{c+r,d+s}^* \rangle\langle W_{a+r,b+s} g W_{c+r,d+s}^*| \\
&= |\overline{[r,b]}[r,d] W_{r,s} W_{a,b} g W_{c,d}^* W_{r,s}^* \rangle\langle \overline{[r,b]}[r,d] W_{r,s} W_{a,b} g W_{c,d}^* W_{r,s}^*| \\
&= |W_{r,s} W_{a,b} g W_{c,d}^* W_{r,s}^* \rangle\langle W_{r,s} W_{a,b} g W_{c,d}^* W_{r,s}^*| \\
&= |\theta^*_{(r,s)}(W_{a,b} g W_{c,d}^*)\rangle\langle \theta^*_{(r,s)}(W_{a,b} g W_{c,d}^*)| \\
&= \theta^*_{(r,s)} u^g_{(a,b),(c,d)} \theta_{(r,s)}
\end{aligned}$$

如所需，再次使用引理 2.5 b)，并注意到 $\theta^*_{(r,s)}(T) = W_{r,\ s} T W^*_{r,\ s}$。 □

利用 Weyl 量子置换的等变性，我们可以为某些非平凡覆盖构造量子甲板变换的例子。为简单起见，我们只讨论最简单的情形 $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，如下所示。

例 5.17。考虑环面 $X = S^1 \times S^1$，令 $E|X$ 为由两个来自例 *5.11* 的覆盖空间取笛卡尔积得到的四层连通覆盖空间。

此外，令 $g \in U(2)$ 满足条件：$\pi^g = (\mathbb{C}^4, u^g)$ 是纤维 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$上的不可约 *Weyl* 量子置换。使用引理 *5.16* 中的记号以及识别 $\mathbb{C}^4 \cong M_2(\mathbb{C})$，可以验证酉元 $\theta_{(a,b)} \in U(4)$ 对$a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的行列式均为 *1*。选取一个从 $\mathbb{R}^2$ 中单位正方形的边界到 $SU(4)$ 的连续映射 γ，使得

$$\gamma(0,0) = \mathrm{id}, \quad \gamma(s,1) = \theta_{(0,1)}\gamma(s,0), \quad \gamma(1,t) = \theta_{(1,0)}\gamma(0,t)$$

对所有 $s, t \in [0,1]$ 均成立。这是可行的，因为 $SU(4)$ 是连通的，且 $\theta_{(1,0)}\theta_{(0,1)} = \theta_{(1,1)} = \theta_{(0,1)}\theta_{(1,0)}$。由于 $SU(4)$ 是单连通的，因此可以将此映射扩展为连续映射 $[0,1] \times [0,1] \to SU(4)$，我们仍将其记作 γ。

现在定义投影 $v^g{}_{(x,a,b),(y,c,d)} \in M_4(\mathbb{C})$，对于 $x, y \in [0,1] \times [0,1]$ 和$(a, b),(c, d) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，定义如下：

$$v^g_{(x,a,b),(y,c,d)} = \delta_{x,y} \gamma(x)^* u^g_{(a,b),(c,d)} \gamma(x).$$

根据构造，这些投影组成了 $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的一个量子同胚$(\mathbb{C}^4, v^g)$。此外，利用 γ的性质和引理

5.16，我们得到

$$\begin{aligned} v^g_{((s,1),a,b),((s,1),c,d)} &= \gamma(s,1)^* u^g_{(a,b),(c,d)} \gamma(s,1) \\ &= \gamma(s,0)^* \theta^*_{(0,1)} u^g_{(a,b),(c,d)} \theta_{(0,1)} \gamma(s,0) \\ &= \gamma(s,0)^* u^g_{(a,b+1),(c,d+1)} \gamma(s,0) \\ &= v^g_{((s,0),a,b+1),((s,0),c,d+1)}, \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} v^g_{((1,t),a,b),((1,t),c,d)} &= \gamma(1,t)^* u^g_{(a,b),(c,d)} \gamma(1,t) \\ &= \gamma(0,t)^* \theta^*_{(1,0)} u^g_{(a,b),(c,d)} \theta_{(1,0)} \gamma(0,t) \\ &= \gamma(0,t)^* u^g_{(a+1,b),(c+1,d)} \gamma(0,t) \\ &= v^g_{((0,t),a+1,b),((0,t),c+1,d)} \end{aligned}$$

对所有 $s,t \in [0,1]$均成立。因此，若将 $S^1 = [0,1]/\sim$视为把端点识别后得到的单位区间的商，则可知$(\mathbb{C}^4, v^g)$ 诱导出覆盖空间 $E|X$的量子甲板变换。此外，根据构造， $E|X$ 各纤维所诱导的量子置换都是不可约的。

若 $E|X$ 是一个覆盖空间，则称量子甲板变换σ 是局部常值的，如果存在底空间 X的一个开覆盖 $(U_j)_{j\in J}$ ，使得 $E_{|U_j} \cong U_j \times I$ 是平凡的，并且对于每个 $j \in J$，$E|_{U_j}$ 所诱导的量子甲板变换$\sigma_{|U_j}$ 都与一个常值量子甲板变换甲板等价。所有经典甲板变换在此意义下都是局部常值的。不难验证，例5.10、5.11、5.14和5.17中构造的量子甲板变换也都是局部常值的。

局部常值量子甲板变换仍然是“温和的”，因为它们本质上由其在单个纤维上的限制以及覆盖的拓扑决定。最后，我们来举例说明一些并非局部常值的量子甲板变换。为明确起见，我们考虑对应于子群 $4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ 的 $X = S^1$ 的覆盖。

命题5.18。设 $E = X = U(1)$ 且 $p: E \to X$ 由 $p(z) = z^4$给出。那么存在 $E|X$ 的 4 维量子甲板变换，它们不是局部常值的。

证明。设 $\tau = (\mathbb{C}^4, v)$ 是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的一个不可约 4 维量子置换。那么 $w_{i,j} = v_{i-1,j-1}$ 定义了 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的另一个不可约 4 维量子置换 $\zeta = (\mathbb{C}^4, w)$。注意，若 $\sigma: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \sigma(i) = i+1$ 表示移位置换，则 ζ 可写为 $\zeta = \sigma \intercal\!\!\bigcirc \tau \intercal\!\!\bigcirc \sigma^{-1}$。

固定 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$之间的一个双射。于是，根据四个点上的不可约量子置换的结构（见定理 2.7），我们得到 $g,h \in U(2)$，使得 $\tau \cong \pi_g$和 $\zeta \cong \pi_h$。选取一条连接 g 与 h的路径 $\gamma: [0,1] \to U(2)$，并视情况用 $U(4)$中的一条酉元路径共轭相应的 Weyl 量子置换，我们得到连续映射 $u_{i,j}: [0,1] \to M_4(\mathbb{C})$，使得对于所有 t ，$(u_{i,j}(t))$ 都是一个幻影酉矩阵，并且 $u_{i,j}(0) = v_{i,j}, u_{i,j}(1) = w_{i,j}$ 对所有 i,j 都成立。这使我们能够通过识别 $X \cong [0,1]/\sim$和 $E_{[0,1)} \cong [0,1) \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，定义 E的一个量子甲板变换 $(\mathbb{C}^4, u^E)$，并令

$$u^E_{(x,i)(y,j)} = \delta_{x,y} u_{i,j}(x)$$

对于 $x, y \in [0,1)$ 和 $i, j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。

在这种情况下，纤维上诱导的量子置换的同构类不会在底空间上保持局部常值。特别是，量子甲板变换（$\mathbb{C}^4$， u^E）不是局部常值的。□

不用说，对于带有 $n > 4$的 n层覆盖，情况会比我们上面的例子更加复杂，因此无法完整描述所有量子甲板变换。

5.3. 习题。

习题 5.19. 局部紧空间的量子同胚群具有什么泛性质？

习题 5.20. 证明：若我们在定义 *5.15* 中要求严格相等 $u_{x\cdot g,\ y\cdot g} = u_{x,\ y}$，且 G 在 X 上传递作用，那么$(\mathcal{H}, u)$ 必定是经典的。

习题 5.21. 将例 *5.17* 中的构造推广到这样的 $X = S^1 \times S^1$ 覆盖：它由两个 S^1 的连通覆盖的副本的笛卡尔积给出，其中 $N > 2$ 有 N 片。

References

[1] A. Atserias, L. Manˇcinska, D.E. Roberson, R. ˇS´amal, S. Severini, A. Varvitsiotis，量子与非信号图同构。 *J. Combin. Theory Ser. B* **136** (2019), 289–328. MR 3926289[2] T. Banica，齐性图的量子自同构群， *J. Funct. Anal.* **224** (2005 243 280 2146039), – . MR T. Banica，量子置换群， [3] 2012, 2012 10975 arXiv: . T. Banica, J. Bichon，阶为 [4] ≤ 11 2007 83 105 2335703 的顶点传递图的量子自同构群。 *J. Algebraic Combin.* **26** [5] ( ), – . MR T. Banica, J. Bichon，作用于四个点的量子群。 *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009 75 114 2492990), – . MR T. Banica, B. Collins，泡利量子群上的积分， *J. Geom. Phys.* **58** (2008), 942–961. MR 2437834 (2009i:46127) [7] J. Bichon，有限图的量子自同构群。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003 665 673 1937403), – . MR P. J. Cameron，重新探讨随机图。载于 [8] *European Congress of Mathematics Vol. I* , , Progr. Math. pp. – *(Barcelona, 2000)* 201, 267 274, ¨ 2001 1905324 Birkhauser, Basel, . MR [9] J. van Dobben de Bruyn, P. N. Kar, D. E. Roberson, S. Schmidt, P. Zeman，树的量子自同构群，2023, arXiv:2311.04891[10] P. Erd˝os, A. R´enyi，非对称图， *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14**(1963), 295–315. MR 156334[11] A. Freslon， *Compact matrix quantum groups and their combinatorics*，伦敦数学学会学生文本丛书 106, 2023 4599898 剑桥大学出版社，. MR D. Goswami，紧致 [12] 连通光滑流形不存在真正的（紧）量子对称性， *Adv. Math.* **369** (2020 107181, 25 4092984), . MR A. Hatcher，, 剑桥大学出版社，剑桥， [13] *Algebraic topology* 2002 1867354 . MR H. Ismaeel，拉多图 [14] 2025, 2511 17536 没有量子对称性，arXiv: .[15] L. Junk, S. Schmidt, M. Weber，几乎所有树都有量子对称性， *Arch. Math.* ( ), – . MR *(Basel)* **115** 2020 367 378 4145763 [16] M. Lupini, L. Manˇcinska, D. E. Roberson，非局域博弈与量子置换群， *J. Funct. Anal.* **279** (2020 108592, 44 4097284), . MR L. Manˇcinska, D. E. Roberson，量 [17] 子同构等价于来自平面图的同态计数相等。载于 *61st Annual Symposium on Foundations of ComputerScience*, pp. 661–672, IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2020. MR 4232075 [18] *C** 2002 375 404 1881396 P. D Mitchener，-范畴， [19] *C*-algebras and operator theory* 1990 *Proc. London Math. Soc. (3)* **84** ( ), – . MR G. J. Murphy，, Academic Press Inc., Boston, MA, . MR MR1074574 (91m:46084) [20] S. Neshveyev, L. Tuset， *Compact quantum groups and their representation categories*，Cours Sp´ ecialis´es [Specialized Courses] 20, Soci´et´e Math´ematique de France, Paris, 2013. MR 3204665[21] L. Rollier, S. Vaes，连通局部有限图的量子自同构群与离散群的量子化。 *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2024 2219 2297 4702276), – . MR S. Schmidt 折叠 [22] 超立方体图的量子自同构， *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* ( ), – **70** 2020 4147954 949 970 . MR [23] S. Schmidt，距离传递图的量子对称性， *Adv. Math.* **368** (2020), 107150, 50. MR 4082994

[24] P. M. So-ltan，量子玻尔紧化， *Illinois J. Math.* **49**(2005), 1245–1270. [25] C. Voigt，无限量子置换。 *Adv. Math.* **415** (2023), Paper No. 108887. MR 4543448[26] S. Wang，有限空间的量子对称群。 *Comm. Math. Phys.* **195** (1998), 195– 211. MR 1637425[27] R. F. Werner，所有量子隐形传态和密集编码方案。 *J. Phys. A* **34**(2001), 7081–7094. MR 1863141[28] S. L. Woronowicz，紧量子群。载于 *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*, pp. 845–884，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1998. MR MR1616348 (99m:46164)

School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow, University Place, Glasgow G12 8QQ, United Kingdom*Email address*: christian.voigt@glasgow.ac.uk