LU-LC 猜想的 27 量子比特反例是最小的

Nathan Claudet*University of Innsbruck, Department of Theoretical Physics, Technikerstraße 21a, A-6020 Innsbruck, Austria

人们曾猜想，两个图态局域幺正（LU）等价，当且仅当它们局域 Clifford（LC）等价。这个所谓的 LU-LC 猜想于 2007年被推翻：当时人们发现了一对 LU等价但不 LC等价的 27 量子比特图态。我们证明，这个 LU-LC猜想的反例是最小的。换言之，对于至多含 26 个量子比特的图态，局域幺正等价与 LC等价这两个概念是一致的。我们通过研究 2-局部补图的结构得出这一结果；2-局部补图是近期引入的 r-局部补图的一种特殊情形，也是广为人知的局部补图的推广。我们还利用了三正交码与 Reed-Muller 码之间的联系。

arXiv:2603.25219v1 [quant-ph] 26 Mar 2026

图态是一类用途广泛的纠缠量子态。由于图态与数学图一一对应，因此可以轻松而简洁地表示 [1, 2]。图态是基于测量的量子计算的通用资源[3–5], ; 这一计算范式由 Hans Briegel 和 Robert Raussendorf 于 21 世纪初提出。图态最初作为簇态的推广而出现 [6], ; 簇态是基于测量的量子计算的原始资源 [1]。图态也自然出现在量子纠错 [7–11] 和量子通信网络 [12–23]的背景下。在这些应用中，图态被用作纠缠资源。因此，按照纠缠对图态进行分类是一项重要任务。对于一般量子态，具有相同纠缠通常被形式化为彼此之间存在随机局域操作与经典通信关系。特别是对于图态，这等同于局域幺正等价，简称 局域幺正等价 ，也就是说，图态之间可以通过单量子比特幺正算符相互转换 [2, 24]。因此，按照纠缠对图态进行分类，就需要理解两个图态何时局域幺正等价。

如果将单量子比特酉算符限制为所谓的 Clifford 群中的元素，就定义了一种更强的等价关系：图态称为局部 Clifford 等价，简称*LC*等价 。图态的 LC等价特别容易刻画，因为它可以通过一种简单且经过深入研究的图操作来描述，这种操作称为局部补图 [25]。例如，这意味着存在一种高效算法，可用于判定图态是否 LC等价 [26, 27]。

显然，两个 LC 等价的图态也是 LU 等价的。反过来，人们曾猜想，两个 LU 等价的图态总是 LC 等价的 [28]：这通常称为*LU-LC*猜想。更准确地说，对于图态 $|G\rangle$ ，若每个与 $|G\rangle$ LU 等价的图态实际上都与 $|G\rangle$ LC 等价，我们就称$LU{=}LC$ 成立：LU-LC 猜想预测，对于每个图态，LU=LC 都成立。早期令人鼓舞的研究结果为此提供了支持 LU-LC 猜想的证据 [29–32]。事实上，对于多类图态，LU=LC 均成立[31–36]。然而，2007年，Zhengfeng Ji、Jianxin Chen、Zhaohui Wei 和 Mingsheng Ying 证明 LU-LC 猜想是错误的 [37], : 他们发现了一个 27量子比特反例，即一对 27 量子比特图态，它们 LU 等价但不 LC 等价。最初的 27量子比特反例对应一对仅相差一条边的图。此后，人们又发现了一个等价的反例，其二分形式更加优雅 [38]。我们在图 1中展示了它。

自 2007年 以来，这个 27量子比特反例是否是 LU-LC猜想的最小反例（按量子比特数计）一直是一个未解问题。换句话说，对于最多含 26 个量子比特的图态，LU=LC 是否成立?

2003年，通过生成所有顶点数不超过 7 的图，研究者证明了对于最多含 7 个量子比特的图态，LU=LC 成立 [1]。2009年，这个数量提高到了 8 [39]。最近，这个数量先提高到了 10 [40] （将图态视为在量子比特置换下等价），随后又提高到了 11 [41] （同样将图态视为在量子比特置换下等价），之后又提高到了 19 [42]。

在本文中，我们给出最终答案：27量子比特反例是最小的。

定理1. 对于最多含*26*个量子比特的图态，*LU=LC*成立。

由于任意稳定子态都与某个图态LC等价[25], 这一结果也推广到稳定子态。

推论1. 对于最多含*26*个量子比特的稳定子态，*LU=LC*成立。

由于图态与图一一对应，理论上可以 [35] 生成所有图，并检验相应图态是否满足 LU=LC；但实际上这根本不可行。事实上，最多有 26 个顶点的图的数量约为 $2^{\binom{26}{2}} \sim 7\times10^{97}$，即使只考虑无标号图（也就是图的同构类），数量仍然非常庞大：其下界为 $2^{\binom{26}{2}}/26! \sim 2\times10^{71}$。

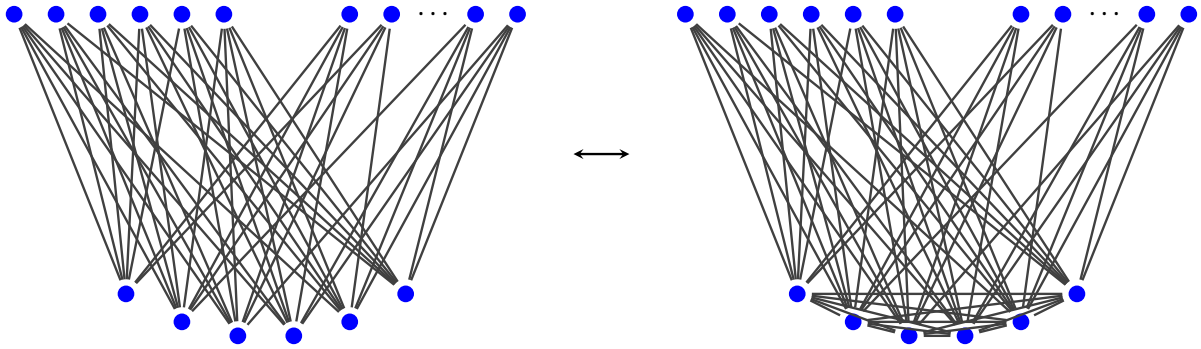


图1。LU-LC 猜想的 27 量子比特反例 [37, 38], 即一对 LU等价但不 LC等价的图态。图中有 6 个底部顶点。每组 5 个底部顶点对应一个度为 5 的顶部顶点，每组 4 个底部顶点对应一个度为 4 的顶部顶点；因此有 $\binom{6}{5}+\binom{6}{4}=21$ 个顶部顶点。在最左侧的图中，底部顶点构成一个独立集，而在最右侧的图中，底部顶点彼此完全连接。在顶部量子比特上施加 $X(\pi/4)$ ，并在底部量子比特上施加 $Z(\pi/4)$ ，即可将一个图态映射为另一个图态。证明这两个图态不 LC等价则更为复杂，证明见 [38]。

相反，我们的证明大量运用了近期引入的 r-局部补图形式化方法。局部补图刻画了图态的 LC 等价性 [25]，而 r-局部补图（其中 r 是一个整数）刻画了图态的局域幺正等价[35], ，具体而言，两个图态局域幺正等价，当且仅当相应的图可以通过 r-局部补边相互关联。在这项工作中，我们尤其关注2-局部补图。事实上，2-局部补图刻画了最多包含 31 个量子比特的图态的局域幺正等价。

我们先介绍相关符号和定义，再引入 2-局部补图。随后，我们证明定理 1。最后，我们讨论尚未解决的问题。

符号。 一个图 $G=(V,E)$由两个集合组成：一个是顶点集合 V，另一个是边集合 E，其中每条边连接两个顶点，即它是 $\{\{u,v\}\mid u,v\in V\}$的一个子集。我们只考虑无向图（即边没有方向）和简单图（任意两个不同顶点之间至多有一条边，且没有边连接顶点自身）。给定 $A\subseteq V$， $|A|$ 表示 A中的顶点数。当$\{u,v\}\in E$时，我们使用记号 $u\sim_G v$ ，并称 u 和 v 相邻。给定一个顶点 $u\in V$， $N_G(u)=\{v\in V\mid u\sim_G v\}$ 是 u的邻域，即与 u相邻的顶点集合。顶点的度 是其邻域的大小。若两个顶点 u 和 v 拥有相同的邻域，更确切地说， $N_G(u)\setminus\{v\}=N_G(v)\setminus\{u\}$，则称它们为孪生顶点。如果顶点集合 S 中的任意两个顶点都不相邻，则称该集合为独立集 。如果一个图的顶点集可以划分为两个不相交的独立集，则称该图为二部图 。

对于任意一个具有 n 个顶点的简单无向图 $G=(V,E)$，都对应一个 n 量子比特量子态 $|G\rangle$，称为图态，其定义为 $|G\rangle=\left(\prod_{\{u,v\}\in E}CZ_{uv}\right)|+\rangle_V$ 其中 $|+\rangle=\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$和 $CZ=|00\rangle\langle 00|+|01\rangle\langle 01|+|10\rangle\langle 10|-|11\rangle\langle 11|$。或者， $|G\rangle$ 定义为以下算子$X_uZ_{N_G(u)}$对每个 $u\in V$ 的唯一不动点（相差一个全局相位），其中 $Z=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|$ 和$X=|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|$。单量子比特酉门包括哈达玛门 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0|+|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|)$、$Z$ 旋转 $Z(\alpha)=|0\rangle\langle 0|+e^{i\alpha}|1\rangle\langle 1|$ 以及X 旋转 $X(\alpha)=HZ(\alpha)H$。单量子比特克利福德门是指由 H和 $Z(\frac{\pi}{2})$ 生成的门（相差一个全局相位）。

局部补图与枢轴变换。 对图中顶点 u 进行局部补图，即对由顶点 u的邻域诱导的子图取补图。形式上，对 u进行局部补图会将图G 映射为图 $G\star u=G\Delta K_{N_G(u)}$ 其中 Δ 表示边集的对称差， K_A 是以 $A\subseteq V$中的顶点为顶点集的完全图。局部补图可通过单量子比特克利福德算符 [25]作用于图态来实现： $X(\frac{\pi}{2})_uZ(-\frac{\pi}{2})_{N_G(u)}|G\rangle=|G\star u\rangle$；反过来，如果两个图态是 LC等价的，则相应的图可通过局部补序列 [25]相互关联。对边 uv 进行枢轴变换，等价于连续进行三次局部补图： $G\wedge uv=G\star u\star v\star u=G\star v\star u\star v$。对于二分图，对 uv 进行枢轴变换，需切换 $N_G(u)\setminus\{v\}$与 $N_G(v)\setminus\{u\}$之间的所有边，然后交换 u 和 v，从而保持图的二分性质（但改变二分划分）。对二分图态进行枢轴变换可通过两个哈达玛门 [43, 44]实现： $H_uH_v|G\rangle=|G\wedge uv\rangle$。

2-局部补图。由于对不相邻顶点进行的局部补图彼此可交换，因此在独立集 S 上进行的局部补图是良定义的，称为 1-局部补图，记作 $G\star^1 S$（即按任意顺序对 S 中的每个顶点进行局部补图）。类似地，2- 局部补图记作 $G\star^2 S$，作用于独立集 S 上。

此外， S 还需满足一个条件，才能进行有效的 2-局部补图，该条件称为*2*-关联。请注意，一般而言， r-局部补图定义在多重集而非集合上，因此 2-局部补图比一般情形更容易介绍。关于[45] -局部补图的通俗介绍，请参阅 r。

定义 1 ([35])。 若一个顶点独立集 S 满足：任意一对或三个顶点在 S中都有偶数个公共邻居，则称其为 2-关联；也就是说，对于任意互不相同的 $u, v, w \in V \setminus S$, $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap S| = 0$ 模 2，且 $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap N_G(w) \cap S| = 0$ 模 2。

定义 2 ([35])。 对一个 2-关联顶点独立集 S 进行 2-局部补图，即翻转在S 中具有 2 mod 4 个公共邻居的顶点之间的边。形式化地，

$$u \sim_{G\star^2 S} v \Leftrightarrow (u \sim_G v \oplus |N_G(u) \cap N_G(v) \cap S| = 2 \bmod 4)$$

其中 $\oplus$ 表示逻辑异或。

例 1. LU-LC猜想的 27量子比特反例（见图 1）对应一对通过对 21 个顶部顶点（它们构成一个 2-关联独立集）进行 2-局部补图而相互映射的图。

命题 1 ([35])。 在图态上，*2*-局部补图可通过局域幺正变换实现：

$$\bigotimes_{u \in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right) \bigotimes_{v \in V \setminus S} Z\left(-\frac{\pi}{4}|N_G(v) \cap S|\right) |G\rangle = |G \star^2 S\rangle$$

如上所述，2-局部补图刻画了小规模图态的局域幺正等价。

命题 2 ([42])。 如果两个至多含 *31* 个量子比特的图态是 *LU* 等价的，那么对应的图可通过一个局部补序列相互关联，其中至多包含一次 *2*-局部补图。

换言之，若至多含 31 个量子比特的系统存在 LU-LC 猜想的反例，则该反例展示了一种无法通过局部补边实现的 2-局部补图。我们将通过证明至多含 26 个量子比特的图态中不会出现这种情况，来证明定理 1 。

定理 *1* 的证明。 一种自然的策略是生成所有可能出现在至多含 26 个顶点的图中的 2-关联独立集。这比生成所有至多含 26 个顶点的图要容易，但要在合理时间内穷举生成所有可能的 2-关联独立集，仍然不切实际。因此我们进一步简化这个问题。

引理 1. 假设存在一个 n量子比特的 *LU-LC*猜想反例，其中 $n \leqslant 31$。那么，存在一个图 G ，相对于顶点的二分划分$S, V \setminus S$ 是二分的，且满足：

1. G 至多有 $n+1$ 个顶点；*2.* 每个顶点的度都是奇数且至少为 *3*；*3.* 不存在两个不同的孪生顶点；*4.* S 是 *2*-关联的；*5.* 不存在集合 $A \subseteq S$ 使得 $G\star^2 S = G\star^1 A$。

引理的证明1 是构造性的，详见附录。

例2. 与 LU-LC 猜想的 27量子比特反例对应的二分图（见图1，左）不满足性质 2。事实上，根据握手引理，只有顶点数为偶数的图才可能满足性质 2。将引理1 应用于该二分图，得到 LU-LC 猜想的 28量子比特反例 [38], , 如图2所示。

借助引理1，只需证明不存在顶点数不超过 27 且满足性质 2–5 的二分图，即可证明定理1。一种自然的策略是生成所有这类图，这或许可行。然而，这并非必要，因为满足性质 2–4 的二分图与三正交码之间存在紧密联系[46——48], 一类用于魔态蒸馏协议的量子纠错码 [49——51]。这种联系并不令人意外，因为正如下文将看到的，2-关联与三正交性的概念非常相似。

为建立与三正交码的联系，对于每个相对于顶点二分划分 G 为二分图S， $V \setminus S$ 的图，我们关联一个矩阵，其行数为 $|V \setminus S|$，列数为 $|S|+|V \setminus S| = |V|$。更准确地说， G 与矩阵 $M_G = [\, I \mid A \,]$ 相关联，其中 I是 $|V \setminus S| \times |V \setminus S|$单位矩阵，而 A 是 G的双邻接矩阵，即 A 描述了 S 与 $V \setminus S$之间的连接关系。具体而言，A 有 $|V \setminus S|$ 行和 $|S|$ 列，对于任意$a \in S$，若 $a \sim_G b$，则 $b \in V \setminus S$；否则为 $A_{ba} = 0$ 。这一构造类似于二分图与二元线性码 [52],或二元拟阵 [53]之间的联系。后者所揭示的联系表明，图态纠缠与拟阵理论之间可能还存在进一步的关联。

引理 2. 二分图 G满足性质 *2–4*，当且仅当：

- M_G 中的每一列都具有奇数汉明重量；
- M_G 没有重复列；
- 对于任意三行 r_1、 r_2 和 r_3，$\sum_{i \in [1,|V|]} {r_1}^i {r_2}^i {r_3}^i = 0$ 模 2，也就是说，任意三行的乘积都具有偶数汉明重量。

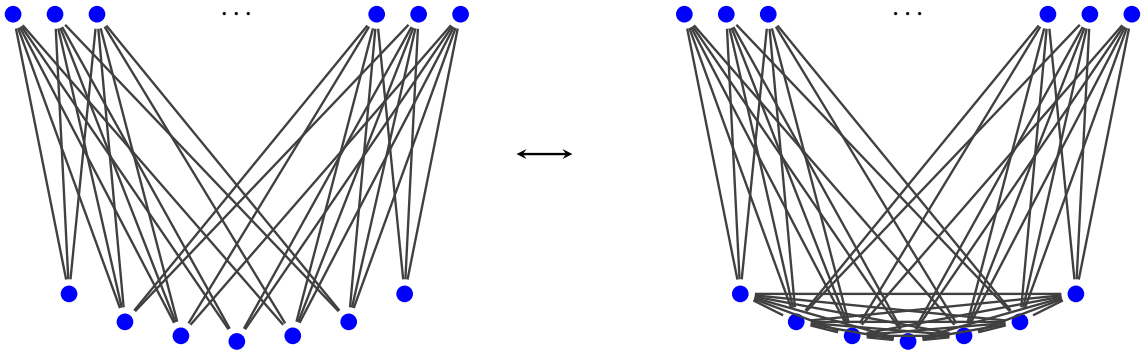


图2。一个 LU-LC 猜想的 28量子比特反例 [38], 也就是说，这是一对图态，它们 LU等价，但不 LC等价。这些图有 7 个底部顶点。顶部顶点的度均为 5，每 5 个底部顶点对应一个顶部顶点，因此共有 $\binom{7}{5} = 21$ 个顶部顶点。左侧图中的底部顶点构成一个独立集，而右侧图中的底部顶点则彼此完全连接。在顶部量子比特上应用 $X(\pi/4)$，并在底部量子比特上应用 $Z(\pi/4$，即可将一个图态映射为另一个图态。证明这两个图态并非 LC等价要复杂得多，证明见 [38], ；而在 r-局部补图形式体系下的证明见 [35]。LU-LC猜想的 27量子比特反例（见图 1）可通过移除一个底部顶点得到。

请注意，这三行 r_1、r_2、r_3 不一定互不相同。引理 2 的证明见附录。由满足引理 $\mathbb{F}_2$2中所述性质的矩阵各行生成的含幺三正交子空间 [47]称为含幺三正交子空间。更准确地说，三正交性对应于对任意三行 r_1、r_2、r_3，$\sum_{i\in[1,k]} {r_1}^i {r_2}^i {r_3}^i = 0$ 模 2 成立；含幺则意味着该子空间包含全 1 向量。这里确实如此，因为每一列的汉明重量都是奇数，所以全 1 向量就是所有行之和。利用其与 Reed-Muller 码之间的紧密联系，文献 [47], 对小型含幺三正交子空间进行了分类。对于给定的含幺三正交子空间，其生成矩阵并无规范的唯一选取；不过，行操作可以得到所有可能的生成矩阵。此外，列置换生成该含幺三正交子空间的同构类。请注意，生成矩阵应具有满行秩，因此含幺三正交子空间的生成矩阵总能通过行操作和列置换化为 M_G 的形式。

在图示中，枢轴变换和顶点置换分别对应这些行操作和列置换。更准确地说，$M_{G'}$ 可以通过行操作和列置换从M_G 得到，当且仅当 G 和 G' 可通过枢轴变换和顶点置换 [52]相互关联。根据引理2，这证明性质 2–4 在枢轴变换和顶点置换下保持不变，并且还得到以下等价关系。

引理 3。满足性质 *2–4* 的二分图在枢轴变换和顶点置换下的等价类，与含幺三正交子空间的同构类之间存在一一对应关系。

因此，我们证明定理 1 的策略是证明：如果一个含幺三正交子空间对应于顶点数不超过 27 的图，那么这些图都不满足性质 5。幸运的是，对于满足性质 2–4 的二分图，枢轴变换不会改变性质 5；我们在附录中证明了这一点（见引理 7），这意味着我们只需检查每个含幺三正交子空间对应的一个代表图。

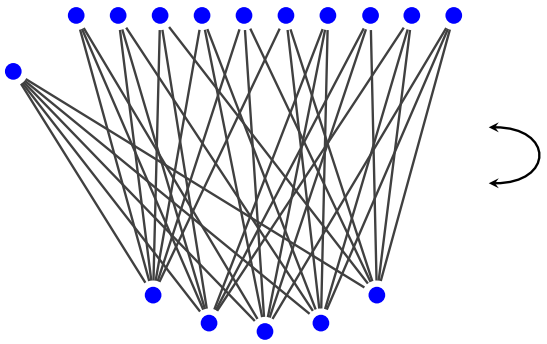


图 3。与 $\mathbb{F}_2^{16}$ 中唯一的含幺三正交子空间相对应的 16 个顶点的二分图之一；Bravyi 和 Kitaev[49] 提出的原始魔态蒸馏码以及 Bravyi-Haah 族 [46] 的第一个码均可由此导出 [47]。我们将底部顶点命名为 1、2、3、4 和 5，并按邻域为顶部顶点命名。其中一个顶部顶点与每个底部顶点都相邻：$\{1,2,3,4,5\}$。其余 $\binom{5}{3} = 10$ 顶部顶点是所有可能的 3 度顶点：$\{1,2,3\}$、$\{1,2,4\}$、$\{1,2,5\}$、$\{1,3,4\}$、$\{1,3,5\}$、$\{1,4,5\}$、$\{2,3,4\}$ $\{2,3,5\}$ $\{2,4,5\}$ $\{3,4,5\}$ 、，以及。顶部顶点集合是 2-关联的。在顶部顶点上进行 2-局部补图不会改变该图，即不会添加或删除任何边。因此，无法从此图导出 LU-LC猜想的反例。

令人惊讶的是，在同构意义下，与至多有 27 个顶点的图对应的含幺三正交子空间只有两个 [47]。第一个对应于一个有 16 个顶点的图（见图3），第二个则对应于一个有

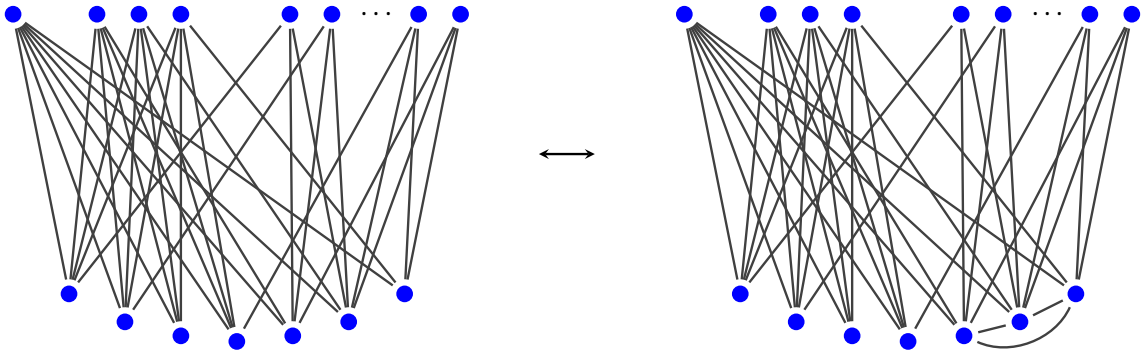


图4。最左侧的图是与 $\mathbb{F}_2^{24}$ [46] [47] 1, 2, 3, 4, 中唯一的含幺 5, 6 7, 三正交子空间对应的 24顶点二分图之一，可以由此导出 Bravyi-Haah 族的第二个码。我们将底部顶点命名为 ，并根据邻域为顶部顶点命名。其中一个顶部顶点与每个底部顶点都相邻：$\{1,2,3,4,5,6,7\}$。有 3 个顶部顶点的度为 5：$\{1,2,3,4,5\}$、$\{1,2,3,4,6\}$ 和 $\{1,2,3,4,7\}$。其余 $\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{3}{3}=3\times4+1=11$ 个顶部顶点的度为 3，它们是所有在顶点 4、5 和 6 中有 2 个或更多邻居的度为 3 的可能顶点：$\{1,5,6\}$、$\{2,5,6\}$、$\{3,5,6\}$、$\{4,5,6\}$、$\{1,5,7\}$、$\{2,5,7\}$、$\{3,5,7\}$、$\{4,5,7\}$、$\{1,6,7\}$、$\{2,6,7\}$、$\{3,6,7\}$、$\{4,6,7\}$ 和 $\{5,6,7\}$。顶部顶点集合是 2-关联的。对顶部顶点进行 2-局部补图，通过创建 3 条边，将最左侧的图变换为最右侧的图：一条连接 5 和 6，一条连接 5 和 7，还有一条连接 6 和 7。对顶点 $\{5,6,7\}$ 进行一次局部补图也可以得到这一变换。因此，无法从这些图导出 LU-LC猜想的反例。

24 个顶点的图（见图4）。正如预期，这两张图都满足性质 2–4。然而，很容易看出，无法从这两张图推导出 LU-LC猜想的反例，因为它们不满足性质 5。事实上，在 16顶点图中，2-局部补图后图保持不变；而在 24顶点图中，2-局部补图可以通过局部补边实现。这证明了定理1，也就是说，LU-LC 猜想的 27 量子比特反例是最小的。

LU-LC猜想的28量子比特反例（见图2）由其中两个含幺三正交子空间之一恢复得到 $\mathbb{F}_2^{28}$。

讨论。 LU-LC猜想被证伪后 [37], ，仍有两个主要问题悬而未决：27量子比特反例是否是最小反例，以及是否存在一种高效算法来判定两个图态何时LU等价。这两个问题都通过 r局部补图形式化得到了处理。本文为第一个问题给出了最终答案。第二个问题得到了部分回答 [42]„ 但目前仍未解决。

虽然 LU-LC猜想的最小反例问题如今已尘埃落定，但图态之间存在无限的局域等价严格层级 [35] ，为这一问题的推广铺平了道路。当 r 固定时， r-局部补边恰好刻画了图态在所谓 Clifford层级 [35]的第 $r+1$ 层中是否在局域幺正变换下等价。已知，对于任意 $r \geqslant 2$，存在一些图，它们通过 r-局部补边相关，但无法通过$(r-1)$-局部补边相关。对于任意整数 $r \geqslant 1$，我们可以定义数值 $c(r)$，表示这样一对最小图的顶点数：这对图通过 r-局部补边相关，但无法通过$(r-1)$-局部补边相关。等价地说，它表示这样一对最小图态的量子比特数：它们在 Clifford层级的第 $r+1$层中通过局域幺正变换等价，但在第 r 层中不等价。虽然0-局部补边没有恰当的定义，但 Clifford层级第1层中的局域幺正变换是 Pauli串，它们只能将给定图态映射到自身。因此，我们令$c(1)=3$，因为 $|K_3\rangle$ 和 $|P_3\rangle$ （其中 K_3 是三角形，P_3 是长度为3的路径）是 LC等价的，但并非同一个图态。本文证明了 $c(2)=27$，但目前尚不清楚 $r \geqslant 3$ 时 $c(r)$的任何取值。不过，我们已知其上下界： $c(r) \geqslant 2^{r+2}$ [42]（当 $r \geqslant 2$时），且 $c(r)=O(2^{r^2})$（文献 [35]给出了一个精确上界）。尽管 c 至少呈指数增长，但上界并未排除超指数增长的可能性，因此 c 的增长问题仍未解决。请注意，若 $c(r)=\Theta(2^{r^2})$，则意味着识别图态的 LU 等价性可在时间 $n^{\sqrt{\log_2(n)}+O(1)}$内完成，而非 $n^{\log_2(n)+O(1)}$（其中 n 为量子比特数） [42]。

本文的主要结果源于2-局部补图与三正交码之间的联系。这种联系并不令人意外，因为二者都与Clifford层级的第三级密切相关。许多研究聚焦于能够在 Clifford层级更高层级实现横向门的码 [30, 54–59]：探究其与r-局部补图之间可能存在的联系，是一个很有前景的研究方向。

致谢。我们感谢Lina Vandr´e和Piotr Mitosek就证明这一结果的早期构想展开讨论。我们感谢Hans Briegel和Robert Raussendorf就图态与LU-LC猜想的历史进行了有益的讨论。本研究由奥地利科学基金（FWF）[SFB BeyondC F7102资助，DOI：10.55776/F71]。为实现开放获取，作者已对本次投稿产生的任何作者接受稿版本采用CC BY公共版权许可。

* Nathan.Claudet@uibk.ac.at

[1]Marc Hein、Jens Eisert 和 Hans J. Briegel。图态中的多方纠缠。*A 69 6 2004 Physical Review* ，( )，6月。arXiv:quant-ph/0307130，DOI:10.1103/physreva.69.062311。[2] Marc Hein、Wolfgang D¨ur、Jens Eisert、Robert Raussendorf、Maarten Van den Nest 和 Hans J. Briegel。图态中的纠缠及其应用。*Quantum computers, algorithms and chaos*，162 2006 10 3254，3月。arXiv:quant-ph/0602096，DOI：. / 978-1-61499-018-5-115。[3] Robert Raussendorf 和 Hans J. Briegel。一种单向量子计算机。*Physical Review Letters*，86 22 5188，2001 10 1103 86 5188 ( )：。DOI：. /PhysRevLett. . .[4] Robert Raussendorf、Daniel E. Browne 和 Hans J. Briegel。簇态上的基于测量的量子计算。*Physical review A*，68(2):022312，2003年。arXiv:quant-ph/0301052，DOI:10.1103/PhysRevA.68. 022312。[5] Hans J. Briegel、David E. Browne、Wolfgang D¨ur、Robert Raussendorf 和 Maarten Van den Nest。基于测量的量子计算。*Nature Physics*，5(1):19– 26，2009年。arXiv:0910.1116，DOI:10.1038/nphys1157。[6] Hans J. Briegel 和 Robert Raussendorf。相互作用粒子阵列中的持久纠缠。*Physical Review Letters 86 910 913, 2001* ，：– 1月。arXiv:quant-ph/ 0004051，DOI:10.1103/PhysRevLett.86.910。[7] Daniel Gottesman。稳定子码与量子纠错，1997年。DOI:10.48550/arXiv.quant-ph/ 9705052。[8] Markus Grassl、Andreas Klappenecker 和 Martin Rot-teler。图、二次型与量子码。*Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2002)* 2002 载于，。arXiv: quant-ph/0703112，DOI:10.1109/ISIT.2002.1023317。[9] Dirk Schlingemann 和 Reinhard F. Werner。与图相关联的量子纠错码。*ical Review A 65 1 012308, 2001 Phys* ，( )：。arXiv:quant-ph/ 0012111，DOI:10.1103/PhysRevA.65.012308。[10] Dirk Schlingemann。稳定子码可以实现为图码，2001年。DOI:10.48550/arXiv.quant-ph/ 0111080。[11] Andrey Boris Khesin。*Quantum Computing from Graphs*。博士论文，2025年。DOI:10.48550/arXiv.2501.17959。[12] Damian Markham 和 Barry C. Sanders。量子秘密共享的图态。*Physical Review A*，78 4 042309，2008年 0808 1532，10 1103 ( )：。arXiv: . DOI：. /《物理评论A》.78.042309。[13] Adrian Keet、Ben Fortescue、Damian Markham 和 Barry C. Sanders。使用量子比特图态进行量子秘密共享。*Physical Review A*，82:062315，2010年12月。arXiv:1004.4619，DOI:10.1103/PhysRevA.82.062315。[14] J´erˆome Javelle、Mehdi Mhalla 和 Simon Perdrix。基于图态的量子秘密共享新协议及下界。载于 *Proceedings of the 7th Conference on the Theory of Quantum Computation Communication and Cryptography (TQC 2012)*，第 –12 页，2013年。arXiv:1109.1487，DOI:10.1007/978-3-642-35656-8_1.[15] Sylvain Gravier、J´erˆome Javelle、Mehdi Mhalla 和 Si-mon Perdrix。基于图态的量子秘密共享。载于 *Proceedings of the 8th Mathematical and Engineering Methods in Computer Science International Doctoral Workshop (MEMICS 2012)* 2013 1 。网址：https: //hal.science/hal-00933722/document，DOI:10.1007/978-3-642-36046-6_3.[16] B. A. Bell、Damian Markham、D. A. Herrera-Mart´ı、Anne Marin、W. J. Wadsworth、J. G. Rarity 和 M. S. Tame。图态量子秘密共享的实验演示。*Nature Communications*，5(1):5480，2014年11月。arXiv:1411.5827，DOI:10.1038/ncomms6480。[17] Koji Azuma、Kiyoshi Tamaki 和 Hoi-Kwong Lo。全光子量子中继器。*Nature communications 6 1 1 7, 2015 1309 7207, 10 1038* ，( ): –。arXiv:。DOI:。/ ncomms7787。[18]Koji Azuma、Sophia E. Economou、David Elkouss、Paul Hilaire、Liang Jiang、Hoi-Kwong Lo 和 Ilan Tz-itrin。量子中继器：从量子网络到量子互联网。*Reviews of Modern Physics*，95 4 045006，2023 2212 10820，10 1103 ( ):。arXiv:。DOI:。/RevModPhys.95.045006。[19] Frederik Hahn、Anna Pappa 和 Jens Eisert。量子网络路由与局部补图。*tum Information 5 1 1 7, 2019 npj Quan-1805 04559,* ，( ): –。arXiv:。DOI:10.1038/s41534-019-0191-6。[20] Sergey Bravyi、Yash Sharma、Mario Szegedy 和 Ronald de Wolf。从多方资源态生成 k epr对。*Quantum*，8:1348，2024年。arXiv:2211.06497，DOI: 10.22331/q-2024-05-14-1348。[21] Cl´ement Meignant、Damian Markham 和 Fr´ed´eric Grosshans。在任意量子网络中分发图态。*Physical Review A*，100:052333，2019年11月。arXiv:1811.05445，DOI:10.1103/PhysRevA.100.052333。[22]Alex Fischer 和 Don Towsley。在量子网络中分发图态。载于 *Proceedings of the 2021 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE 2021)* 324 333, ，第 – 页。2021 2009 10 1109 52317 2021 arXiv: .10888，DOI: . /QCE . . 00049。[23] Vaisakh Mannalath 和 Anirban Pathak。量子网络中的多方纠缠路由。*Physical Review A 108 062614, 2023 2211 06690, ，: 2023* 年12月。arXiv:。DOI:10.1103/PhysRevA.108.062614。[24] Frank Verstraete、Jeroen Dehaene 和 Bart De Moor。多方量子态的标准形与纠缠度量。*Physical Review A*，68:012103，2003年7月。arXiv:quant-ph/0105090，DOI:10.1103/ PhysRevA.68.012103。[25] Maarten Van den Nest、Jeroen Dehaene 和 Bart De Moor。局部克利福德变换对图态作用的图形描述。*Physical Review*

A, 69(2), 2004年2月。arXiv:quant-ph/0308151, DOI: 10.1103/physreva.69.022316。[26] Andr´e Bouchet。一种识别局部等价图的高效算法。 *Combinatorica*, 11(4):315–329, 1991年12月。DOI:10.1007/BF01275668。[27] Maarten Van den Nest、Jeroen Dehaene 和 Bart De Moor。识别图态局部克利福德等价关系的高效算法。*Physical Review A*, 70 034302, 2004 0405023, : 2004年9月。arXiv:quant-ph/, DOI: 10.1103/PhysRevA.70.034302。[28] Olaf Krueger 和 Reinhard F. Werner。量子信息论中的一些开放问题, 2005年。DOI: 10.48550/arXiv.quant-ph/0504166。[29] David Gross 和 Maarten Van den Nest。LU-LC猜想、对角局部操作以及 GF(2 *Quantum Information and Com-*) 上的二*putation* 8 3 263 281, 2008 0707 4000, 次型。, ( ): –。arXiv:。DOI: 10.26421/QIC8.3-4-3。[30] Bei Zeng、Andrew Cross 和 Isaac L. Chuang。加性量子码的横向性与普适性。*IEEE Transactions on Information Theory*, 57(9):6272–6284, 2011年。arXiv:0706.1382, DOI:10.1109/TIT.2011. 2161917。[31] Maarten Van den Nest、Jeroen Dehaene 和 Bart De Moor。稳定子态的局部酉等价与局部克利福德等价。 *Physical Review A*, 71(6), 2005年6月。arXiv:quant-ph/0411115, DOI:10.1103/physreva.71. 062323。[32] Bei Zeng、Hyeyoun Chung、Andrew W. Cross 和 Isaac L. Chuang。稳定子态和图态的局部酉等价与局部克利福德等价。*Physical Re-* *view A* 75 3 2007 , ( ), 。arXiv:quant-ph/0611214, DOI:10.1103/physreva.75.032325。[33] Pradeep Sarvepalli 和 Robert Raussendorf。局部等价、表面码态与拟阵。 *Physical Re-* *view A* 82 2 2010 0911 10 , ( ), 。arXiv: .1571, DOI: . 1103/physreva.82.022304。[34] Ilan Tzitrin。完全二分图态与中继器图态的局部等价。 *Physical Review A* 98 3 032305, , ( ):。2018 1805 10 1103 98 arXiv: .05968, DOI: . /PhysRevA. . 032305。[35] Nathan Claudet 和 Simon Perdrix。稳定子态的局部等价：图形化刻画。*Proceedings of the 42nd Symposium on Theoretical As-* 载于*pects of Computer Science (STACS 2025)* 2025 。arXiv: 2409.20183, DOI:10.4230/LIPIcs.STACS.2025.27。[36] Frederik Hahn、Rose McCarty、Hendrik Poulsen Nautrup 和 Nathan Claudet。圈图态的结构, 2026年。DOI:10.48550/arXiv.2603.08847。[37] Zhengfeng Ji、Jianxin Chen、Zhaohui Wei 和 Ming-sheng Ying。LU-LC猜想不成立。 *Quantum* *Information and Computation* 10 1 97 108, 2010 , ( ): – Jan。arXiv:0709.1266, DOI:QIC10.1-2-8.html。[38] Nikoloz Tsimakuridze 和 Otfried G¨uhne。超越局部克利福德操作的图态与局部酉变换。 *Journal of Physics A: Mathematical and The-* *oretical* 50 19 195302, 2017 1611 06938, , ( ): Apr。arXiv:。DOI:10.1088/1751-8121/aa67cd。[39] Ad´an Cabello、Antonio J. L´opez-Tarrida、Pilar Moreno 和 Jos´e R. Portillo。八量子比特图态中的纠缠。*Physics Letters A*, 373(26):2219–2225, 2009年。arXiv:0812.4625, DOI:10.1016/j.physleta.2009.04. 055。

[40] Lina Vandr´e、Jarn de Jong、Frederik Hahn、Adam Burchardt、Otfried G¨uhne 和 Anna Pappa。根据边缘态的性质区分图态。*cal Review A* 111 052449, 2025 2406 09956, , : May。arXiv: 。doi:10.1103/PhysRevA.111.052449。[41] Adam Burchardt、Jarn de Jong 和 Lina Vandr´e。验证稳定子态局部等价性的算法, 2024年。doi:10.48550/arXiv.2410.03961。[42] Nathan Claudet 和 Simon Perdrix。准多项式时间内判定图态的局部幺正等价性。载于 *Proceedings of the 52nd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2025)*, 2025年 2502 10 4230。arXiv: .06566, doi: ./LIPIcs.ICALP. 2025.59。[43] Maarten Van den Nest 和 Bart De Moor。图的边局部等价性。2005年。doi:10.48550/arXiv.math/ 0510246。[44] Mehdi Mhalla 和 Simon Perdrix。图态、枢轴子图与 (X,Z) 测量的普适性。 *International Journal of Unconventional Computing*, 9(1-2):153–171, 2013年。doi:10.48550/arXiv.1202.6551。[45] Nathan Claudet。*Local Equivalences of Graph States*。博士论文, 2025年。doi:10.48550/arXiv.2511.22271。[46] Sergey Bravyi 和 Jeongwan Haah。低开销魔态蒸馏。 *Physical Review A* 86 5 052329, , ( ): 。2012 1209 10 1103 86 arXiv: .2426, doi: ./PhysRevA. . 052329。[47] Sepehr Nezami 和 Jeongwan Haah。小型三正交码的分类。*Physical Review A*, 106 2022 2107 10 1103 :012437, Jul。arXiv: .09684, doi: ./ PhysRevA.106.012437。[48] Minjia Shi、Haodong Lu、Jon-Lark Kim 和 Patrick Sol ´ *Quan-* e。三正交*tum Information Processing* 23 7 280, 2024 码与自对偶码。, ( ): Jul。arXiv: 2408.09685, doi:10.1007/s11128-024-04485-9。[49] Sergey Bravyi 和 Alexei Kitaev。利用理想 Clifford 门和含噪辅助态实现通用量子计算。 *Physical Review A*, 71:022316, Feb 2005。arXiv: quant-ph/0403025, doi:10.1103/PhysRevA.71.022316。[50] Jeongwan Haah、Matthew B. Hastings、D. Poulin 和 D. Wecker。低空间开销与最优渐近输入数量的魔态蒸馏。 *Quan-* *tum* 1 31, 2017 1703 07847, 10 22331 , : Oct。arXiv: 。doi: ./q-2017-10-03-31。[51] Jeongwan Haah 和 Matthew B. Hastings。蒸馏 T、受控-S和 Toffoli 门的码与协议。 *Quantum*, 2:71, Jun 2018。arXiv:1709.02832, doi:10.22331/q-2018-06-07-71。[52] Lars Eirik Danielsen 和 Matthew G Parker。边局部补图与二元线性码的等价性。*Designs Codes and Cryptography*, 49(1):161–170, 2008年。arXiv:0710.2243, doi:10.1007/s10623-008-9190-x。[53] Sang-il Oum。秩宽度与顶点子图。 *Journal* *of Combinatorial Theory Series B* 95 1 79 100, 2005 , ( ): –。doi:10.1016/j.jctb.2005.03.003。[54] Jonas T Anderson 和 Tomas Jochym-O'Connor。量子比特稳定子码中横向门的分类。2014年。doi:10.48550/arXiv.1409.8320。[55] Jeongwan Haah。广义可整除量子码塔。 *Physical Review A*, 97(4):042327, 2018年。arXiv:1709.08658, doi:10.1103/PhysRevA.97.042327。[56] Narayanan Rengaswamy、Robert Calderbank、Michael Newman 和 Henry D Pfister。关于 CSS 码横向 T 门最优性的研究。 *IEEE Journal on Selected Ar-*

eas in Information Theory, 1(2):499–514, 2020年。arXiv:1910.09333, doi:10.1109/JSAIT.2020.3012914。[57] Jingzhen Hu、Qingzhong Liang 和 Robert Calderbank。攀升对角 Clifford 层级。*Quantum* 2 4 2025 2110 11923, 10 , ( ), 。arXiv: 。doi: 。20935/AcadQuant7957。[58] Louis Golowich 和 Ting-Chun Lin。通过代数码乘积构造具有横向非 Clifford 门的量子 LDPC 码。载于 *Proceedings of the 57th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2025)*, 第689–696页, 2025年。arXiv:2410.14662, doi:10.1145/3717823.3718139。[59] Yichen Xu 和 Xiao Wang。Clifford 层级中的受控跃迁。2026年。doi:10.48550/arXiv.2602.22201。

证明

我们首先给出一些技术性引理，它们将有助于证明引理1。引理4、引理5和引理6 有助于简化涉及图态的证明。通俗地说，它们表明仅靠 X 旋转就能定义图态之间的局部变换。引理7表明性质 4-5 在枢轴变换下保持不变。引理8 说明如何利用枢轴变换得到仅含奇度顶点的二分图。引理9介绍了仅含奇度顶点的二分图的一些性质。

引理 4。给定图态 $|G\rangle$，如果 $\bigotimes_{v\in V} Z(\theta_v)|G\rangle$也是图态 $|G'\rangle$，那么对于每个 $v\in V$，$\theta_v = 0 \bmod 2\pi$ 即 $G'=G$。

证明。对于任意 $a\in V$，$\langle 0|_{V\setminus a}|G'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^{|V|}}(|0\rangle_a + |1\rangle_a)$（例如参见 [45]），因此 $\langle 0|_{V\setminus a}\langle 1|_a|G'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^{|V|}}$。此外，

$$\langle 0|_{V\setminus a}\langle 1|_a \bigotimes_{v\in V} Z(\theta_v)|G\rangle = \frac{e^{i\theta_a}}{\sqrt{2^{|V|}}}$$

□

引理 5。给定一个图 G 和一个独立集合 A，若存在角度 θ_v 使得$\bigotimes_{u\in A} X\left(\frac{\pi}{2}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus A} Z(\theta_v)|G\rangle$ 是一个图态，则角度 θ_v 唯一确定，且是 $\frac{\pi}{2}$和 $\bigotimes_{u\in A} X\left(\frac{\pi}{2}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus A} Z(\theta_v)|G\rangle = |G\star^1 A\rangle$的倍数。

证明。已知 [25]:

$$\bigotimes_{u\in A} X\left(\frac{\pi}{2}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus A} Z\left(-\frac{\pi}{2}|N_G(v)\cap A|\right)|G\rangle = |G\star^1 A\rangle$$

因此，

$$\bigotimes_{u\in A} X\left(\frac{\pi}{2}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus A} Z(\theta_v)|G\rangle = \bigotimes_{v\in V\setminus A} Z\left(\theta_v+\frac{\pi}{2}|N_G(v)\cap A|\right)|G\star^1 A\rangle$$

是一个图态。引理4使我们能够得出结论。 □

引理6。给定一个图 G 和一个独立集合 S，存在角度 θ_v 使得$\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus S} Z(\theta_v)|G\rangle$ 是一个图态，当且仅当 S是2-关联。此外，在这种情况下，角度 θ_v 是唯一确定的，且为 $\frac{\pi}{4}$和 $\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus S} Z(\theta_v)|G\rangle = |G\star^2 S\rangle$的倍数。

证明。以下结论等价 [45]:

- S is 2-incident;
- $\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus S} Z\left(-\frac{\pi}{4}|N_G(v)\cap S|\right)|G\rangle$ is a graph state;
- $\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)|G\rangle$ is a graph state up to Z-rotations on $V\setminus S$.

因此，若 $\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus S} Z(\theta_v)|G\rangle$ 是一个图态，则 S是 2-关联的，且

$$\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus S} Z(\theta_v)|G\rangle = \bigotimes_{v\in V\setminus S} Z\left(\theta_v+\frac{\pi}{4}|N_G(v)\cap S|\right)|G\star^2 S\rangle$$

是一个图态。引理 4使我们能够得出结论。 □

引理 7。设 G 是相对于顶点二分划分 $S, V\setminus S$ 的二分图，其中 S 满足性质 *4-5*。设 $a\in S$ 和 $b\in V\setminus S$ 使得 $a\sim_G b$。

- *If b has odd degree: let $G' = G\wedge ab$ and $S' = S\Delta\{a,b\}$;*
- *If b has even degree: let $G' = G\wedge ab - b$ and $S' = S\setminus\{a\}$.*

那么， G' 是相对于顶点二分划分$S', V'\setminus S'$ 的二分图，并且 S' 满足性质 *4-5*。

证明。在这两种情形下（b 的度为奇数或偶数），我们利用引理 6证明 S' 在 $G\wedge ab$ 中是 2-关联的，并且 $G\star^2 S\wedge ab = G\wedge ab\star^2 S'\star^1 B$，其中 $B=\emptyset$ 或 $\{b\}$。

$$\begin{aligned}
&|G\star^2 S\wedge ab\rangle\\
=&H_aH_b\bigotimes_{u\in S} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus S} Z\left(-\frac{\pi}{4}|N_G(v)|\right)|G\rangle\\
=&\bigotimes_{u\in B} X\left(\frac{\pi}{2}\right)\bigotimes_{u\in S'} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus(S'\cup B)} Z(\theta_v)\,H_aH_b|G\rangle\\
=&\bigotimes_{u\in B} X\left(\frac{\pi}{2}\right)\bigotimes_{u\in S'} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus(S'\cup B)} Z(\theta_v)|G\wedge ab\rangle\\
=&\bigotimes_{u\in S'} X\left(\frac{\pi}{4}\right)\bigotimes_{v\in V\setminus(S'\cup B)} Z\left(\widetilde{\theta_v}\right)|G\wedge ab\star^1 B\rangle\\
=&|G\wedge ab\star^1 B\star^2 S'\rangle = |G\wedge ab\star^2 S'\star^1 B\rangle
\end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为 $S'\cup B$ 是 $G\wedge ab$ [35] 中的一个独立集合。

在两种情况下（b 的度为奇数或偶数），这都意味着 S' 在 G'中是 2-关联的。接下来，反设存在一个集合 $A' \subseteq S'$ 使得$G' \star^2 S' = G' \star^1 A'$。在两种情况下（b 的度为奇数或偶数），这意味着 $G \wedge ab \star^2 S' = G \wedge ab \star^1 A'$。我们利用引理 5证明，这蕴含存在某个集合 $A \subseteq S$ 使得 $G \star^2 S = G \star^1 A$。

$$
\begin{aligned}
&|G \star^2 S\rangle \\
=&|G \star^2 S \wedge ab \wedge ab\rangle \\
=&|G \wedge ab \star^2 S' \star^1 B \wedge ab\rangle \\
=&|G \wedge ab \star^1 A' \star^1 B \wedge ab\rangle \\
=&H_a H_b \bigotimes_{u \in A' \Delta B} X\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&\bigotimes_{v \in V \setminus (A' \cup B)} Z\left(-\frac{\pi}{2}|N_{G \wedge ab}(v) \cap (A' \Delta B)|\right) H_a H_b |G\rangle \\
=&\bigotimes_{u \in A} X\left(\frac{\pi}{2}\right) \bigotimes_{v \in V \setminus A} Z\left(\theta_v\right)|G\rangle \\
=&|G \star^1 A\rangle
\end{aligned}
$$

Overall, $A \Delta A' = \emptyset, \{a\}, \{b\}$ or $\{a, b\}$. □

引理 8. 设 G 是一个图，其顶点相对于二分划分 $S, V \setminus S$ 构成二分图。设 $a \in S$ 和 $b \in V \setminus S$ 满足：$a \sim_G b$，且 b 是 G 中唯一的偶度顶点。那么，$G \wedge ab - b$ 只有奇度顶点。

证明。 b 在 $G \wedge ab$ 中的邻域与 a 在 G 中的邻域相同，更准确地说，$N_{G \wedge ab}(b) = N_G(a) \Delta \{a, b\}$。

首先，我们证明 b 在 $G \wedge ab$ 中的每个邻点的度都是偶数。 $|N_{G \wedge ab}(a)| = |N_G(b) \Delta \{a, b\}| = |N_G(b)| + |\{a, b\}|$ 模 2 $=$ 0 模 2。此外，对于任意 $u \in N_{G \wedge ab}(b) \setminus \{a\} = N_G(a) \setminus \{b\}$， $|N_{G \wedge ab}(u)| = |N_G(u) \Delta N_G(b) \Delta \{a\}| = |N_G(u)| + |N_G(b)| + |\{a\}|$ 模 $2 = 0$ 模 2。

其次，除 b 及其在 $G \wedge ab$ 中的邻域外，每个顶点的度都是奇数；特别地，对于任意 $v \in N_{G \wedge ab}(a) \setminus \{b\} = N_G(b) \setminus \{a\}$, $|N_{G \wedge ab}(v)| = |N_G(v) \Delta N_G(a) \Delta \{b\}| = |N_G(v)| + |N_G(a)| + |\{b\}| \bmod 2 = 1 \bmod 2$。

因此，从 $G \wedge ab$ 中移除 b 后，每个顶点的度都是奇数。 □

引理 9. 设 G 是一个图，相对于顶点的二分划分 S, $V \setminus S$ 是二分的，其中 G 中的每个顶点的度都是奇数；此外， S 是 *2*-关联的，且不含度为 *1* 的顶点。那么，$V \setminus S$ 不含度为 *1* 的顶点，也不含孪生顶点。

证明。 首先，反设 $b, c \in V \setminus S$ 是孪生顶点。那么， $|N_G(b) \cap N_G(c) \cap S| = |N_G(b)| = 1 \bmod 2$，这与 S 的 2-关联性矛盾。

其次，反设 $b \in V \setminus S$ 与唯一一个顶点 $a \in S$ 相邻。由于 a 没有度为 1，因此存在一个与 a 相邻的顶点 $c \in V \setminus S$。于是，$|N_G(b) \cap N_G(c) \cap S| = |\{a\}| = 1$，这与 S 的 2-关联矛盾。 □

现在我们可以证明引理 1，为方便起见，下面重新陈述该引理。

引理 1. 假设存在一个 n量子比特的 *LU-LC*猜想反例，其中 $n \leqslant 31$。那么，存在一个图 G，相对于顶点的二分划分$S, V \setminus S$ 是二分的，并且满足：

1. G 至多有 $n+1$ 个顶点；*2.* 每个顶点的度均为奇数且至少为 *3*；

3. 任意两个不同的顶点都不是孪生顶点；

4. S 是 *2*-关联的；*5.* 不存在满足 $G \star^2 S = G \star^1 A$的集合 $A \subseteq S$。

证明。如果存在一个 n量子比特的 LU-LC猜想反例，其中 $n \leqslant 31$，那么存在一个图 $G = (V, E)$，它有 n 个顶点，且有一个独立集$S \subseteq V$满足性质 4-5 [42]。我们介绍一种算法，将 G转换为满足性质 1-5 的图。

- **步骤 1：** 删除 $V \setminus S$中顶点之间的边。这使得相对于顶点的二分 S， $V \setminus S$， G 成为二分图。
- **步骤 2：** 删除 S 中度为 1 的每个顶点。然后，直到 S 中不再包含孪生顶点为止，删除S 中的孪生顶点对（一次删除一对）。最后，删除 G 中度为 0 的每个顶点。
- **步骤 3：** 如果 $V \setminus S$ 包含一个 b 度为偶度的顶点，选择 $a \in S$ 使得 $a \sim_G b$，然后将 G 替换为$G \wedge ab - b$，并将 S 替换为 $S \setminus \{a\}$，接着转到步骤 2。
- **步骤 4：** 如果 S 包含度为偶度的顶点，即集合 $S_{\text{偶度}} = \{u \in S \mid |N_G(u)| = 0 \text{模 } 2\}$ 不为空，则向 G中添加一个 b 偶度 顶点，并将其连接到 $S_{\text{偶度}}$中的每个顶点，然后转到步骤 3。

正确性。步骤 1 保持性质 4-5，且步骤 1 之后， G 仍为二分图。步骤 2 保持性质 4-5。步骤 2 完成后， G 中不存在度为 0 的顶点，且 S 不含度为 1 的顶点和孪生顶点。根据引理7，步骤 3 保持性质 4-5。步骤 3 完成后，$V \setminus S$中的每个顶点都具有奇度。步骤 4 保持 G 中不存在度为 0 的顶点，且 S 不含度为 1 的顶点和孪生顶点这一性质。此外，我们证明步骤 4 保持性质 4，即 S 仍为 2-关联。我们需要检查，对于任意（不一定互不相同的）u， $v \in (V \setminus S) \setminus b_{\text{even}}$,

$|N_G(u) \cap N_G(v) \cap S_{\text{even}}| = 0$ 模 2。首先注意，$S_{\text{even}} = S\Delta\left(\Delta_{w\in(V\setminus S)\setminus b_{\text{even}}} N_G(w)\right)$。然后，

$$\begin{aligned}&|N_G(u)\cap N_G(v)\cap S_{\text{even}}|\\ =&|N_G(u)\cap N_G(v)|\\ &+\sum_{w\in(V\setminus S)\setminus b_{\text{even}}} |N_G(u)\cap N_G(v)\cap N_G(w)| \bmod 2\\ =&0 \bmod 2\end{aligned}$$

因此，S 仍然是 2-关联的。也很容易验证，步骤 4 保持性质 5。完成步骤 4 后，每个顶点的度都是奇数，并且 S 仅包含度至少为 3 的顶点，且不含孪生顶点。$V \setminus S$根据引理 9，也仅包含度至少为 3 的顶点，且不含孪生顶点。换言之，性质 1–5 均满足。

终止。满足步骤 3 的条件时，顶点数量会严格减少，从而保证算法进入步骤 4。如果不满足步骤 4 的条件，算法就会结束。如果满足步骤 4 的条件，在将 b_{even} 添加到 G 后，除 b_{even} 以外的每个顶点的度都是奇数。如果 b_{even} 的度为奇数，算法随后便会结束，因为步骤 3 和步骤 4 的条件都不满足。如果 b_{even} 的度为偶数，随后步骤 3 会选择 $a_{\text{even}} \in S_{\text{even}}$ 使得 $a_{\text{even}} \sim_G b_{\text{even}}$，然后将 G替换为 $G \wedge a_{\text{even}}b_{\text{even}} - b_{\text{even}}$，并将 S替换为 $S \setminus \{a_{\text{even}}\}$。根据引理 8，中的每个顶点现在的度都是奇数。随后，要么步骤 2 严格减少顶点数量，要么算法结束，因为步骤 3 和步骤 4 的条件都不满足。□

我们也给出引理 2的证明，为方便起见，下面重述该引理。

引理 2。二分图 G满足性质 *2–4*，当且仅当：

- M_G 中的每一列都具有奇数汉明重量；
- M_G 不含重复列；
- 对于任意三行 r_1、r_2 和 r_3，$\sum_{i\in[1,|V|]} {r_1}^i {r_2}^i {r_3}^i = 0$ 模 2，也就是说，任意三行的乘积都具有偶数汉明重量。

证明。显然，若 G满足性质 2–4，则M_G 也满足上述性质。反过来，若 M_G满足上述性质，则 G（根据二分划分 S，$V \setminus S$对顶点进行二分）仅包含奇度顶点。此外，S 仅包含度至少为 3 的顶点，不含孪生顶点，且为 2-关联。引理 9 使我们可以得出结论。

□