arXiv:2603.25242v1 [math.FA] 26 Mar 2026

压缩算子对与耗散算子对的实谱移位函数

M.M. MALAMUD、H. NEIDHARDT 和 V.V. PELLER

谨以此文纪念 Heinz Langer

Abstract. 最近，作者解决了一个长期存在的问题，并证明：对于希尔伯特空间上任意一对差为迹类的压缩算子，都存在定义在单位圆上的可积谱移位函数 $\mathbb{T}$ ，且 Lifshits–Krein 迹公式的一个类似公式成立。已知实值可积谱移位函数可能不存在。本文给出了使差为迹类的一对压缩算子具有 *a real-valued integrable* 谱移位函数的条件。我们还研究了耗散算子对的类似问题。最后，我们将相关结果应用于耗散型 Schr¨odinger 算子。

1. 引言

本文旨在找出这样的条件：在这些条件下，差为迹类的一对压缩算子具有实值可积谱移位函数。我们还研究了如何为差为迹类的一对耗散算子找出实值谱移位函数存在的条件。

物理学家 I.M. Lifshits 在 [Li] 中首次引入了具有迹类差的自伴算子对的谱移位函数概念，并提出了一个迹公式。在该论文中，他将一个实值可积函数$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{A_0,A_1}$ 称为该算子对的谱移位函数 $\{A_0, A_1\}$ ，并将其与一对自伴算子 A_0 and A_1 相关联；这对算子的差属于迹类[1], ，同时提出了迹公式

$$\operatorname{trace}\big(f(A_1) - f(A_0)\big) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\boldsymbol{\xi}_{A_0,A_1}(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

对于实数轴 $\mathbb{R}$ 上的充分光滑函数 f 。然而，事实证明，从数学角度看， [Li] 中的论证并不严谨。

后来，M.G. Krein 在 [Kr1] 中提出了一种数学上严谨的方法，并考虑了最一般的情形。他证明，对于任意一对具有迹类差的自伴算子$\{A_0, A_1\}$ ，存在唯一的 函数 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{A_0,A_1}$ ，属于 $L^1(\mathbb{R})$，使得迹公式 (1.1) 对足够良好的函数 f成立。此外， $\boldsymbol{\xi}$ 必须是实值的。我们将公式 (1.1) 称为*Lifshits–Krein* 迹公式。

第 3—5 节的研究得到俄罗斯科学基金会 [项目编号 23-11-00153] 的资助。[1]关于迹类 $\boldsymbol{S}_1$ 和 Schatten–von Neumann 类 $\boldsymbol{S}_p$的介绍，请参阅 [GK] 一书。

在同一篇论文 [Kr1] 中，Krein 证明了

$$\boldsymbol{\xi}_{A_1,A_0}(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\operatorname{Im}(\log(\Delta_{A_1/A_0}(t+\mathrm{i}y))) \quad \text{for a.e.} \quad t\in\mathbb{R},$$

其中扰动行列式 Δ_{A_1/A_0} 定义为

$$\Delta_{A_1/A_0}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \det(I+(A_1-A_0)(A_0-\zeta I)^{-1}), \quad \zeta\notin\mathbb{R},$$

（另见 [Ya], 第 8 章和 [Sch], 第 9 章；这里还提到了关于谱移位函数的综述 [BP] 和 [BY]。）

后来，克莱因在 [Kr3] 中将公式 (1.1) 推广到函数类 $\mathcal{W}_1(\mathbb{R})$，其中函数的导数是某个复博雷尔测度的傅里叶变换。

克莱因还在 [Kr1] 中指出，公式 (1.1) 的右端对任意利普希茨函数 f 都有意义，并提出了这样一个问题：刻画满足公式 (1.1) 的函数类，使得该公式对所有差为迹类的自伴算子对 $\boldsymbol{S}_1$均成立。

然而，法尔福罗夫斯卡娅在 [F] 中证明，迹公式 (1.1) 不能推广到所有利普希茨函数构成的函数类。事实上， [F] 中证明存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的利普希茨函数 f，以及自伴算子 A_1 和 A_0，使得 $A_1-A_0\in\boldsymbol{S}_1$，但 $f(A_1)-f(A_0)\notin\boldsymbol{S}_1$。

后来， [Pe1] 和 [Pe2] 证明，对于属于（齐次）贝索夫空间 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 的函数 f，(1.1) 成立。 [Pe1]和 [Pe2] 还证明，如果迹公式 (1.1) 对任意一对差为迹类的自伴算子都成立，那么f 在局部属于贝索夫空间 $B^1_{1,1}$。

克雷因问题在 [Pe3] 中得到了彻底解决。该文证明，对于差为迹类的任意一对（不一定有界的）自伴算子 (A_0,A_1)，迹公式 (1.1) 成立，当且仅当 f 是一个算子利普希茨函数[2], ，也就是说，不等式

$$\|f(A)-f(B)\|\le \operatorname{const}\|A-B\|$$

对任意自伴算子 A 和 B 成立。

Alpay 和戈赫贝格在 [AG1] 和 [AG2] 中提出了自伴算子对的利夫希茨–克雷因公式 (1.1) 的进一步发展。他们为谱移位函数提出了不同的公式（关于这一问题，也可参见论文 [MN] ）。他们详细研究了有限秩扰动的情形。

在 [克2]克莱因引入了迹类差酉算子对的谱移位函数这一概念。也就是说，对于一对迹类差酉算子 $(U_1,\ U_0)$，他证明存在一个实值函数 $\boldsymbol{\xi}$ in $L^1(\mathbb{T})$，它在加法常数意义下唯一（称为 $(U_0,\ U_1)$ 的谱移位函数），使得迹公式

$$\operatorname{trace}\big(f(U_1)-f(U_0)\big) = \int_{\mathbb{T}} f'(\zeta)\boldsymbol{\xi}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{1.2}$$

对导数 f' 具有绝对收敛傅里叶级数的函数 f 成立。

关于酉算子的 [Pe3] 结果的一个类似结论见于 [AP2]。具体而言， [AP2] 证明，对于函数类 f，公式 (1.2) 对

[2]关于算子 Lipschitz 函数的详细信息，请参阅综述 [AP]

任意一对满足 $U_1 - U_0 \in \boldsymbol{S}_1$ 的酉算子 $\{U_1, U_0\}$ 成立，当且仅当该函数属于 $\mathbb{T}$上的算子 Lipschitz 函数类 $\mathrm{OL}_{\mathbb{T}}$。

寻找上述迹公式在压缩算子的函数和极大耗散算子情形下的类似公式，这个问题很久以前就已开始受到关注。

回顾一下，希尔伯特空间上的算子 $\mathbb{T}$ 称为压缩算子，如果 $\|T\| \le 1$。稠密定义的算子 L 称为耗散算子，如果对于算子 L的定义域 dom(L) 中任意向量x ，都有 Im(Lx, x) ≥ 0 。如果耗散算子 L 不存在真耗散扩张，则称其为极大耗散算子。

回顾一下，Sz.-Nagy–Foias 函数演算（见 [SNF]）将圆盘代数 $\mathrm{C_A}$ 中的每个函数 f （即在圆盘 $\mathbb{D}$内解析且在其闭包上连续的函数）与希尔伯特空间上的压缩算子 T 相对应，并建立线性且乘法的函数演算

$$f \mapsto f(T), \quad f \in \mathrm{C_A},$$

该函数演算满足冯·诺伊曼不等式

$$\|f(T)\| \le \|f\|_{\mathrm{C_A}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{|f(\zeta)| : \ |\zeta| \le 1\}, \quad f \in \mathrm{C_A}.$$

人们曾多次尝试将 Lifshits–Krein 迹公式推广到压缩算子的函数情形。换言之，对于一对压缩算子 (T_0, T_1)，若其差属于迹类，则问题在于证明存在圆盘上的可积函数 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\mathrm{trace}\left(f(T_1) - f(T_0)\right) = \int_{\mathbb{T}} f'(\zeta)\boldsymbol{\xi}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{1.3}$$

对于足够好的函数 f。另一个相关问题是描述函数 f 的最大类，使得对于任意一对具有迹类差的压缩算子 (T_0, T_1)，迹公式 (1.3) 都成立。

对于极大耗散算子对，类似的问题也长期悬而未决。

关于非自伴和非酉算子的首个结果由 Heinz Langer [La] 得出。他研究了谱包含于开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的压缩算子这一情形，其中包括严格压缩算子的情形，并证明在此情形下存在可积谱移位函数。事实上，他在 [La] 中还考察了更一般的情形，其中涉及的算子不一定是压缩算子。

我们还想提及 Rybkin [R1, R2, R3, R4], 、Adamyan 和 Neidhardt [AN] 以及 M.G. Krein [Kr4] 的部分结果。这里需要指出，在论文 [R2, R3, R4] 中，Rybkin 在附加假设下证明了存在一个复值谱移位函数，该函数是 A-可积的，但不一定是勒贝格可积的。

我们还要指出，在 [AN] 中，在比 $T_1 - T_0 \in \boldsymbol{S}_1$更强的假设下，已经证明了压缩算子对（$T_0, T_1$）存在实值可积谱移位函数：

$$\sum_{k\ge 0} s_k(T_1 - T_0)\log\left(1 + (s_k(T_1 - T_0))^{-1}\right) < \infty \tag{1.4}$$

（假设函数 $x \mapsto x\log(1+x^{-1})$ 对于 $x=0$ 取值 0）。由第 2 节中的定理 2.5 可立即推出，条件（1.4）对于实值可积谱移位函数的存在性而言并非必要。

关于获得压缩算子的函数的 Lifshits–Krein 迹公式类比公式这一长期悬而未决的问题，已在 [MNP1] 中得到彻底解决（参见早期论文 [MN2], ，其中在附加假设下得到了此类迹公式），并由 [MNP2] 采用完全不同的方法解决。在 [MNP1] 中，采用了克莱因基于扰动行列式的方法；而论文 [MNP2] 则发展了比尔曼和索洛米亚克 [BS1] 的一个思想，即使用双算子积分。

还需注意，在 [BS1] 中，作者并未证明差属于迹类的自伴算子对存在可积谱移位函数。他们证明的是谱移位测度的存在，而其方法无法证明该测度具有绝对连续性。在 [MNP2] 中，获得谱移位测度绝对连续性的关键，是应用 Sz.-Nagy–Foiaș 定理；该定理指出，完全非酉压缩算子的最小酉扩张具有绝对连续的谱测度。

需要注意的是，与差为迹类的自伴算子对的情形不同，对于差为迹类的压缩算子对，谱移位函数从来不是唯一的。若 $\boldsymbol{\xi}$ 是一个差为迹类的压缩算子对的谱移位函数，则同一算子的所有谱移位函数均可参数化为 $\{\boldsymbol{\xi}+h\}$，其中 h 取遍 Hardy 类 H^1。

自然会产生一个问题：能否选取实值谱移位函数？一般而言，答案是否定的：存在压缩算子对 $(T_0,\ T_1)$，其差为迹类，但不存在实值可积谱移位函数，见 [MNP1]。然而，正如 [MN2], 所示，在有限秩扰动的情形下，总是存在实值可积函数。

另一方面， [MNP2] 已证明，对于任意差为迹类的压缩算子对 $\{T_0, T_1\}$ ，存在一个实值A-可积谱移位函数；在这种情况下，公式 (1.3) 中的右端应理解为 A-积分。

最后，我们在此提及，对于任意一对差为迹类的压缩算子（$T_0,\ T_1$），使迹公式 (1.3) 成立的函数 f 的最大类，恰好是解析于 $\mathbb{D}$的算子 Lipschitz 函数类，见 [MNP2]。

Lifshits–Krein 迹公式也在 [MN2], [MNP1] 和 [MNP2]中被推广到极大耗散算子对的情形。文献 [MNP1] 和 [MNP2] 证明，若 L_0 和 L_1 是差为迹类的极大耗散算子，则存在定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的可积谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$ ，使得迹公式

$$\operatorname{trace}\big(f(L_1)-f(L_0)\big)=\int_{\mathbb{R}} f'(t)\boldsymbol{\xi}(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

对于极点位于开下半平面的有理函数 f。

另一方面，如果我们不采用条件 $L_1-L_0\in\boldsymbol{S}_1$ ，而是施加预解式条件

$$(\mathrm{i}I+L_1)^{-1}-(\mathrm{i}I+L_0)^{-1}\in\boldsymbol{S}_1,$$

则存在一个谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$，定义在 $\mathbb{R}$ 上，使得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \infty \tag{1.6}$$

并且，对于在下半平面内具有极点的有理函数 f，迹公式 (1.5) 成立，见 [MNP2]。

本文将探讨满足何种条件时，迹类差的压缩算子对具有实值可积谱移位函数。最近，Chattopadhyay 和 Sinha 在 [CS] 中证明，若 T_0 和 T_1 是差为迹类的压缩算子，且 T_0 是严格压缩算子，即 $\|T_0\| < 1$，则压缩算子对 $\{T_0, T_1\}$ 具有实值可积谱移位函数。

我们将在第 2 节对这一结果作实质性改进，并在宽松得多的假设下证明实值可积谱移位函数的存在性。

此处还应提及，[MNP2] 中证明了：若 T 是压缩算子，U 是满足 $U - I \in \boldsymbol{S}_1$ 的酉算子，则压缩算子对 $(T,\ UT)$ 具有实值可积谱移位函数（见 [MNP2] 中的引理 9.1）。另一方面，若 T 和 X 是压缩算子，且满足 $X \geq \mathbf{0}$ 和 $I - X \in \boldsymbol{S}_1$，则压缩算子对 $(T,\ XT)$ 具有纯虚可积谱移位函数（见 [MNP2] 中的引理 9.2）。

在本文第 § 3 节中，我们将研究迹类预解式差的极大耗散算子对 (L_0, L_1) 存在实值谱移位函数的条件。我们找到了新的充分条件，在这些条件下，算子对 (L_0, L_1) 存在实值谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$，满足 (1.6)，并补充了 [MN2], 第 5 节和 [MNP2], 第 9 节中关于这一问题的一些结果。然而，事实证明，在我们的条件下，除非 $\operatorname{trace}(L_1 - L_0) \in \mathbb{R}$，否则算子对 (L_0, L_1) 不可能具有实值的可积谱移位函数。

本文改进了我们在札记 [MNP3] 中得到的结果；该札记公布了一些初步结果。

谨以本文献给杰出的数学家和卓越人物 Heinz Langer。第一作者非常感激他多年来对自己数学事业的支持。

2. 实部 实值可积谱移位函数：压缩算子对

本节给出一对压缩算子 T_0，T_1（其差属于迹类）满足的一个条件；在此条件下，该算子对具有实值可积谱移位函数。为证明本节的主要结果，我们证明定理 2.1。显然，如果我们知道 X 和 Y 是希尔伯特空间上的算子，且满足条件 $\mathbf{0} \leq X \leq I$ 和 $\mathbf{0} \leq Y \leq I$ 和 $Y - X \in \boldsymbol{S}_1$，那么对于 $\sigma \in (0,\ 1)$，算子 $Y^\sigma - X^\sigma$ 不必属于 $\boldsymbol{S}_1$。然而，定理 2.1 表明，如果我们施加某个额外假设，就可以得出结论 $Y^\sigma - X^\sigma \in \boldsymbol{S}_1$。

我们将介绍如下记号。设 Q 是希尔伯特空间上的稠密定义线性算子，并且可通过连续性延拓。对于 Q 到有界线性算子的唯一延拓，我们将使用相同的记号 Q。

定理 2.1。设 $p>0$ 和 $\sigma\in$（0，1）。假设 X 和 Y 是希尔伯特空间上的算子，使得 $\mathbf{0}\le X\le I$， $\mathbf{0}\le Y\le I$、核$X=\{\mathbf{0}\}$ 以及 核$Y=\{\mathbf{0}\}$。如果 $Y-X\in\boldsymbol{S}_p$ 且算子 $Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}$ 是稠密定义的，并且延拓为某个非负 α 和 β 所对应的 $\boldsymbol{S}_p$ 类算子，满足 $\alpha+\beta\in$（$1-\sigma$， 1]，那么 $Y^\sigma-X^\sigma\in\boldsymbol{S}_p$。

证明。我们用记号 clos($Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}$) 表示算子$Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}$的闭包；根据假设，该算子属于 $\boldsymbol{S}_p$。下面这个初等恒等式众所周知（例如参见 [BS2],第 10 章，第 4 节）。

$$c_\sigma\int_0^\infty\frac{t^{\sigma-1}}{t+s}\,\mathrm{d}t=s^{\sigma-1},\quad c_\sigma=\frac{\sin\pi\sigma}{\pi},\quad s>0,\quad 0<\sigma<1,$$

由此很容易得到以下结论，这也是众所周知的（例如参见 Bir-Sol，第10章）：

$$Y^\sigma=c_\sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}Y(tI+Y)^{-1}\mathrm{d}t\quad\text{and}\quad X^\sigma=c_\sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}X(tI+X)^{-1}\mathrm{d}t.$$

容易验证:

$$(tI+Y)\big(Y(tI+Y)^{-1}-X(tI+X)^{-1}\big)(tI+X)=t(X-Y),$$

因此

$$Y(tI+Y)^{-1}-X(tI+X)^{-1}=t(tI+Y)^{-1}(X-Y)(tI+X)^{-1}.$$

于是,

$$\begin{aligned}Y^\sigma-X^\sigma&=c_\sigma\int_0^\infty t^\sigma(tI+Y)^{-1}(X-Y)(tI+X)^{-1}\,\mathrm{d}t\\&=c_\sigma\int_0^1 t^\sigma\big((tI+Y)^{-1}Y^\beta\big)\operatorname{clos}\big(Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}\big)\big(X^\alpha(tI+X)^{-1}\big)\,\mathrm{d}t\\&\quad+c_\sigma\int_1^\infty t^\sigma(tI+Y)^{-1}(X-Y)(tI+X)^{-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 Y 是非负的，容易看出:

$$\big\|t^\sigma(tI+Y)^{-1}\big\|\le t^{\sigma-1},\qquad t\in(0,\infty).\tag{2.1}$$

显然,

$$\begin{aligned}\big\|Y^\sigma-X^\sigma\big\|_{\boldsymbol{S}_p}&\le c_\sigma\left\|\int_0^1 t^\sigma\big((tI+Y)^{-1}Y^\beta\big)\big(Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}\big)\big(X^\alpha(tI+X)^{-1}\big)\,\mathrm{d}t\right\|_{\boldsymbol{S}_p}\\&\quad+c_\sigma\left\|\int_1^\infty t^\sigma(tI+Y)^{-1}(X-Y)(tI+X)^{-1}\,\mathrm{d}t\right\|_{\boldsymbol{S}_p}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

显然，(2.2) 右侧的第一项可以用以下量来估计

$$c_\sigma \left\| \int_0^1 t^\sigma \big((tI+Y)^{-1}Y^\beta\big)\big(Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}\big)\big(X^\alpha(tI+X)^{-1}\big)\,\mathrm{d}t \right\|_{\boldsymbol{S}_p}$$

$$\le c_\sigma \int_0^1 \left\|(tI+Y)^{-1}Y^\beta\right\| \left\|t^\sigma Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}\right\|_{\boldsymbol{S}_p} \left\|X^\alpha(tI+X)^{-1}\right\| \,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

初等不等式

$$\frac{x^\alpha}{t+x} \le t^{\alpha-1} \quad \text{for} \quad x\in[0,1],\ t\in(0,1]$$

立即推出

$$\left\|X^\alpha(tI+X)^{-1}\right\| \le t^{\alpha-1} \quad \text{and} \quad \left\|(tI+Y)^{-1}Y^\beta\right\| = \left\|\big(Y^\beta(tI+Y)^{-1}\big)^*\right\| \le t^{\beta-1},$$

因此，(2.3) 的右端小于或等于

$$\left\|Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}\right\|_{\boldsymbol{S}_p} c_\sigma \int_0^1 t^\sigma t^{\alpha+\beta-2}\,\mathrm{d}t \le \frac{c_\sigma}{(\alpha+\beta+\sigma-1)} \left\|Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}\right\|_{\boldsymbol{S}_p}.$$

接下来,

$$c_\sigma \left\| \int_1^\infty t^\sigma (tI+Y)^{-1}(X-Y)(tI+X)^{-1}\mathrm{d}t \right\|_{\boldsymbol{S}_p}$$

$$\le c_\sigma \int_1^\infty \left\|t^\sigma(tI+Y)^{-1}\right\| \cdot \|X-Y\|_{\boldsymbol{S}_p} \left\|(tI+X)^{-1}\right\| \mathrm{d}t \tag{2.4}$$

显然，对于 $t\ge 1$,

$$\left\|(tI+Y)^{-1}\right\| \le t^{-1} \quad \text{and} \quad \left\|(tI+X)^{-1}\right\| \le t^{-1}.$$

因此，(2.4) 的右端小于或等于

$$c_\sigma \|X-Y\|_{\boldsymbol{S}_p} \int_1^\infty t^{\sigma-2}\mathrm{d}t \le \frac{c_\sigma}{1-\sigma}\|X-Y\|_{\boldsymbol{S}_p}.$$

结合不等式 (2.2) 与估计式 (2.3) 和 (2.4)，我们得出结论$Y^\sigma - X^\sigma \in \boldsymbol{S}_p$。 ■

推论 2.2. 令 $p>0$。假设 $\mathbf{0}\le X\le I$ 和 $\mathbf{0}\le Y\le I$。若 $Y-X\in\boldsymbol{S}_p$且 X 可逆，则 $Y^\sigma - X^\sigma \in \boldsymbol{S}_p$。

证明。若 X 可逆，则对每个 $\alpha\in\mathbb{R}$， $X^{-\alpha}$ 都是有界算子。因此，$(Y-X)X^{-\alpha}\in\boldsymbol{S}_p$。令 $\beta=0$。由定理 2.1 可得结论。 ■

对于压缩算子 T，我们考虑亏损算子

$$D_T \overset{\text{def}}{=} (I-T^*T)^{1/2} \quad \text{and} \quad D_{T^*} \overset{\text{def}}{=} (I-TT^*)^{1/2}.$$

下文约定：若 R 是定义在希尔伯特空间稠密子集上的线性算子，且可延拓为有界线性算子，则用相同的记号 R表示其到整个空间的唯一延拓。

引理 2.3。 设 $p>0$。假设 T_0 和 T_1 是满足下列条件的压缩算子

$$\operatorname{Ker} D_{T_0}=\{\mathbf{0}\} \tag{2.5}$$

并且对于满足 $\alpha+\beta\in(\frac{1}{2},1]$, 的某些 $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$，这些算子

$$D_{T_1^*}^{-2\beta}(T_1-T_0)D_{T_0}^{-2\alpha}\quad and\quad D_{T_1}^{-2\beta}(T_1^*-T_0^*)D_{T_0}^{-2\alpha} \tag{2.6}$$

是稠密定义的，并且可延拓为 $\boldsymbol{S}_p$ 类算子。于是

$$D_{T_1}-D_{T_0}\in\boldsymbol{S}_p\quad and\quad D_{T_1^*}-D_{T_0^*}\in\boldsymbol{S}_p. \tag{2.7}$$

注 1. 实际上，核 $D_{T_0}=\{\mathbf{0}\}$ 当且仅当核 $D_{T_0^*}=\{\mathbf{0}\}$，因此 (2.5) 可替换为条件

$$\operatorname{Ker} D_{T_0^*}=\{\mathbf{0}\}. \tag{2.8}$$

事实上，(2.5) 等价于核$(I-T_0^*T_0)=\{\mathbf{0}\}$，而 (2.8) 等价于条件核$(I-T_0T_0^*)=\{\mathbf{0}\}$。接下来只需利用一个众所周知的事实：1 是 $T_0^*T_0$ 的特征值，当且仅当它是 $T_0T_0^*$ 的特征值。

注 2. 显然，(2.6) 中的每个包含关系都蕴含 $T_1-T_0\in\boldsymbol{S}_p$。

证明. 令 $Y\overset{定义为}{=}I-T_1^*T_1=D_{T_1}^2$，并令 $X\overset{定义为}{=}I-T_0^*T_0=D_{T_0}^2$。容易看出

$$Y-X=T_0^*T_0-T_1^*T_1=-(T_1^*-T_0^*)T_0-T_1^*(T_1-T_0)\in\boldsymbol{S}_p. \tag{2.9}$$

显然，我们有如下显然的交换关系

$$T_0D_{T_0}^2=D_{T_0^*}^2T_0$$

这意味着

$$T_0q(D_{T_0}^2)=q(D_{T_0^*}^2)T_0 \tag{2.10}$$

对任意多项式 q，该结论成立，因此 (2.10) 对任意连续函数 q也成立。特别地,

$$T_0D_{T_0}^{\alpha}=D_{T_0^*}^{\alpha}T_0,\quad \text{for every}\quad \alpha\geq 0.$$

因此,

$$T_0f=D_{T_0^*}^{\alpha}T_0D_{T_0}^{-\alpha}f,\qquad f\in\operatorname{Range}X^{\alpha},$$

于是

$$D_{T_0^*}^{-\alpha}T_0f=T_0D_{T_0}^{-\alpha}f,\qquad f\in\operatorname{Range}X^{\alpha}. \tag{2.11}$$

由 (2.9) 可得

$$\begin{aligned}Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}f=&-Y^{-\beta}T_1^*(T_1-T_0)D_{T_0}^{-2\alpha}f\\&-Y^{-\beta}(T_1^*-T_0^*)T_0D_{T_0}^{-2\alpha}f,\quad f\in\operatorname{Range}X^{\alpha}.\end{aligned}$$

结合 (2.11)，可得

$$\begin{aligned}Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha}f=&-T_1^*D_{T_1^*}^{-2\beta}(T_1-T_0)D_{T_0}^{-2\alpha}f\\&-D_{T_1}^{-2\beta}(T_0^*-T_1^*)D_{T_0^*}^{-2\alpha}T_0f,\quad f\in\operatorname{Range}X^{\alpha}.\end{aligned}$$

注意，由于 (2.6)，该恒等式右端的两个算子都是有界的，且 X^{α} 的值域在 $\mathscr{H}$中稠密。因此，

$$Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha} = -T_1^* D_{T_1^*}^{-2\beta}(T_1-T_0)D_{T_0}^{-2\alpha} - D_{T_1}^{-2\beta}(T_0^*-T_1^*)D_{T_0^*}^{-2\alpha}T_0.$$

因此，考虑到条件 (2.6)，可得 $Y^{-\beta}(Y-X)X^{-\alpha} \in \boldsymbol{S}_p$。

应用定理 2.1，并取 $\sigma = 1/2$，可确保包含关系 $Y^{1/2} - X^{1/2} \in \boldsymbol{S}_p$，这意味着 $D_{T_1} - D_{T_0} \in \boldsymbol{S}_p$。交换 T_1和 T_1^*的角色，可得 $D_{T_1^*} - D_{T_0^*} \in \boldsymbol{S}_p$。 ■

下述引理已在 [MNP2]中证明。为求完整起见，我们在此给出证明。

引理 2.4. 设 (T_0, T_1) 是一个具有迹类差的压缩算子对。假设条件 (2.7) 对 $p = 1$成立。那么压缩算子对 (T_0, T_1) 存在一个实值可积谱移位函数。

为证明该引理，我们需要构造 Sch¨affer 矩阵扩张。设 T 是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$上的一个压缩算子。我们在双边序列空间 $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathscr{H}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}_j$, $\mathscr{H}_j = \mathscr{H}$上考虑 $\mathscr{H}$值序列的 Sch¨affer 矩阵扩张 $U^{[T]}$，参见[SNF], 第 1 章第 5 节。我们将 $\mathscr{H}$ 视为由满足$v_j = \mathbf{0}$ （对 $j \neq 0$）的序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 组成的子空间。此扩张不必是极小的。不过，该扩张的一个优点是，它使我们能够在单个空间 $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathscr{H})$上考虑 $\mathscr{H}$ 上的压缩算子的酉扩张。

$U^{[T]}$的分块矩阵表示形式如下：

$$U^{[T]} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_T & -T^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & T & D_{T^*} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

这里，项 T位于 (0，0) 位置。换言之， $U^{[T]}$的各项 $U^{[T]}_{j\,k}$, 为

$$U^{[T]}_{0,0} = T, \quad U^{[T]}_{0,1} = D_{T^*}, \quad U^{[T]}_{-1,0} = D_T, \quad U^{[T]}_{-1,1} = -T^*, \quad U^{[T]}_{j,j+1} = I \quad \text{for} \quad j \neq 0,\ -1,$$

其余各项均等于 $\mathbf{0}$。

引理 2.4 的证明。考虑 T_0和 T_1的 Sch¨affer 矩阵膨胀 $U^{[T_0]}$和 $U^{[T_1]}$。

由 (2.12) 和 (2.7) 可轻易得出 $U^{[T_1]} - U^{[T_0]} \in \boldsymbol{S}_1$。根据克莱因定理， [Kr2],这一对 $\left(U^{[T_0]}, U^{[T_1]}\right)$ 具有一个实谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$，属于 $L^1(\mathbb{T})$，即以下

迹公式成立

$$\operatorname{trace}\Big(f\big(U^{[T_1]}\big)-f\big(U^{[T_0]}\big)\Big)=\int_{\mathbb{T}}f'(\zeta)\boldsymbol{\xi}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

对于任意三角多项式 f。

容易看出，如果 f是解析多项式，那么 $f\big(U^{[T_1]}\big)_{0,0}$ 的 $(0,0)$ 项以及 $f\big(U^{[T_0]}\big)_{0,0}$ 项由下式给出

$$f\big(U^{[T_1]}\big)_{0,0}=f(T_1)\quad\text{and}\quad f\big(U^{[T_0]}\big)_{0,0}=f(T_0).$$

因此，对于任意解析多项式 f,

$$\operatorname{trace}\big(f(T_1)-f(T_0)\big)=\operatorname{trace}\Big(f\big(U^{[T_1]}\big)-f\big(U^{[T_0]}\big)\Big)=\int_{\mathbb{T}}f'(\zeta)\boldsymbol{\xi}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

因此， $\boldsymbol{\xi}$ 是算子对 $\{T_0,T_1\}$ 的实值可积谱移位函数。 ■

定理 2.5。 设 T_1 和 T_0 是满足 (2.5) 和 (2.6) 的压缩算子，其中$p=1$。则算子对 (T_1,T_1) 具有实值可积谱移位函数。

证明。 该结果直接由引理 2.3 和引理 2.4 得出。 ■

下面的推论表明，与引言中提到的[CS] 的主要结果相比，我们的定理 2.5 在弱得多的假设下仍能保证实值谱移位函数的存在。

推论 2.6. 设 T和 T_0 为压缩算子，且 $T_1-T_0\in\boldsymbol{S}_1$。若 $\|T_0\|<1$，则数对 (T_0,T_1) 存在实值谱移位函数。

证明. 若 $\|T_0\|<1$，则 D_{T_0} 和 $D_{T_0^*}$ 均可逆。结论由推论 2.2 得出。 ■

接下来，我们介绍作者以另一种方式在 [MNP2], 引理 9.5 中得到的一个结果。

推论 2.7. 设 T_0 是一个零指标的 *Fredholm*压缩算子。则存在一个可逆压缩算子 T_1，使得 $T_1-T_0\in\boldsymbol{S}_1$，且数对 (T_0,T_1) 存在实值谱移位函数。

证明。 我们像 [MNP2] 中那样定义扰动 V，将其设为一个初始空间为 Ker T_0、终止空间为 Ker T^* 的偏等距算子。于是，算子 $T_1=T_0+V$ 就是所需的算子。事实上， T_1 是一个可逆压缩算子，因此数对 $(T_0,\ T_1)$ 满足定理 2.5 的假设，其中 $\alpha=0$ 且 $\beta=1$。

推论 2.8。 设 T 和 X 为压缩算子，满足 $X\geq\mathbf{0}$ 和 $I-X\in\boldsymbol{S}_1$。假设以下条件成立:

$$\operatorname{Ker}D_T=\{\mathbf{0}\}$$

and

$$(I-X)TD_T^{-2\alpha}\in\boldsymbol{S}_1\quad and\quad T^*(I-X)D_{T^*}^{-2\alpha}\in\boldsymbol{S}_1$$

对于某个 α 属于 $(\frac{1}{2},1]$。那么，算子对 (T,XT) 既有实值可积谱移位函数，也有纯虚可积谱移位函数。

证明。事实上，结论的第一部分直接由定理 2.5 得出，而第二部分则是文献 [MNP2] 中引理 9.2 的核心内容。 ■

还要指出，如果 $\boldsymbol{\xi}$ 是实值谱移位函数，而 $\mathrm{i}\boldsymbol{\eta}$ 是纯虚谱移位函数，那么函数 $\boldsymbol{\xi} - \mathrm{i}\boldsymbol{\eta}$ 属于 Hardy 类 H^1，因此调和共轭函数 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$ 必定可积。

此外，如果 $\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}$，那么函数 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 Zygmund 条件

$$\int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{\xi}(\zeta) \log(1 + \boldsymbol{\xi}(\zeta)) \, \mathrm{d}\boldsymbol{m}(\zeta) < \infty.$$

在此还需回顾，在论文 [MN] 和 [MNP1] 中，作者指出，如果一个具有迹类差的压缩算子对拥有满足 Zygmund 条件的复值谱移位函数，那么它也具有实值可积谱移位函数。

3. 耗散算子的情形

正如我们在引言中提到的，如果 $(L_0,\ L_1)$ 是一对具有迹类预解式差的极大耗散算子，即

$$(L_1 + \mathrm{i}I)^{-1} - (L_0 + \mathrm{i}I)^{-1} \in \boldsymbol{S}_1, \tag{3.1}$$

迹公式 (1.5) 成立，其中谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 (1.6)。

本节中，我们给出满足 (1.6) 的实值谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$ 存在的一个充分条件，见下文定理 3.1。

还要回顾一下，若我们将条件 (3.1) 替换为条件

$$L_1 - L_0 \in \boldsymbol{S}_1, \tag{3.2}$$

则迹公式 (1.5) 对某个可积的 谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$成立。还要回顾一下，这两个结果均已在 [MNP2]中得到。

然而，事实证明，在条件 (3.2) 下，未必存在可积的实值谱移位函数。此外，若 $\operatorname{trace}(L_1 - L_0) \notin \mathbb{R}$，则此类函数不可能存在，见下文定理 3.2。

对每个极大耗散算子 L，我们关联二次型 $\mathfrak{T}_L^{\mathrm{Im}}[f] = (Lf,\ f),\ f \in \operatorname{dom}(L)$。此型是非负的，但未必可闭。

下文中我们始终假设对称型 $\mathfrak{T}_L^{\mathrm{Im}}[f]$ 是可闭的，因此根据第一表示定理（见 [Ka, 第VI章，定理 2.1]），其闭包 $\operatorname{clos}\mathfrak{T}_{L,\ \mathrm{Im}}$对应于一个非负自伴算子，我们将其记为像 L。

如果 $\operatorname{dom}(L) = \operatorname{dom}(L^*)$，那么算子 $\operatorname{Im} L$ 就是对称算子 $\frac{1}{2\mathrm{i}}(L - L^*) \geq 0$ 的弗里德里希斯扩张（参见 [Ka，第 VI 章，定理 2.9]）。

如果 $\mathfrak{T}_L^{\mathrm{Im}}[f]$ 的数值域包含于扇形

$$S_\vartheta = \{z \in \mathbb{C}_+ : \operatorname{Im} z \geq \cot\vartheta |\operatorname{Re} z|\},$$

那么，形式 $\mathfrak{T}_L^{\mathrm{Im}}[f]$ 必然是可闭的，且算子像 L 确定存在，它是非负的自伴算子（参见 [Ka，第 VI 章，定理 1.27]）。

回顾一下，若 T 和 R 是希尔伯特空间中的线性算子，其定义域分别为 $\mathrm{dom}(T)$ 和 $\mathrm{dom}(R)$，则称算子 R 被控制 T，如果

$$\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(R) \tag{3.3}$$

and

$$\|Rx\|^2 \le a\|Tx\|^2 + b\|x\|^2, \quad x \in \mathrm{dom}(T), \tag{3.4}$$

对某些正数 a 和 b。若 R 被 T控制，则数

$$\mathrm{a}_T(R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{a > 0 : \ \text{there exists positive } b \ \text{ such that } \ (3.3) \ \text{ holds } \}$$

称为 T-界。 R。

众所周知（见 [BS2], §3.4），若 T和 R 是满足 (3.3) 的闭算子，则对于某些正数 a 和 b，不等式 (3.4) 成立。

也容易验证，若 L是极大耗散算子，则算子R 被 L 控制，当且仅当算子 $R(L+\mathrm{i}I)^{-1}$ 有界。

定理 3.1。 设 L_0 和 L_1 是满足(3.1) 的极大耗散算子，且 定义域(L_0) =定义域(L_1) 且 核 像 $L_j = \{\mathbf{0}\}$, $j = 0, 1$。再假设两个形式$\mathfrak{T}_{L_j}^{\mathrm{Im}}$均可闭，且算子 (像 $L_j)^{1/2}$ 被 $L_j + \mathrm{i}I$ 和 $L_j^* - \mathrm{i}I$控制，即这些算子

$$(\mathrm{Im}\, L_j)^{1/2}(L_j + \mathrm{i}I)^{-1} \quad \textit{and} \quad (\mathrm{Im}\, L_j)^{1/2}(L_j^* - \mathrm{i}I)^{-1} \quad \textit{are bounded}, \quad j \in \{0, 1\}. \tag{3.5}$$

此外，假设

$$(\mathrm{Im}\, L_1)^{-1/2}\big(L_1 - L_0\big)(\mathrm{Im}\, L_0)^{-1/2} \in \boldsymbol{S}_1 \tag{3.6}$$

从而式 (3.6) 中的算子在稠密定义域上有定义，并可通过连续性延拓为一个迹类算子。

那么，算子对 (L_0, L_1) 具有一个实值谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$，满足条件

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{1+t^2}\, \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.7}$$

定理 3.1 的证明。 考虑由 L_0 和 L_1 定义的凯莱变换

$$T_0 = (L_0 - \mathrm{i}I)(L_0 + \mathrm{i}I)^{-1} \quad \text{and} \quad T_1 = (L_1 - \mathrm{i}I)(L_1 + \mathrm{i}I)^{-1}. \tag{3.8}$$

容易验证，压缩算子 T_0 和 T_1 满足定理 2.5 关于$\alpha = \beta = 1/2$ 和 $p = 1$的假设。

由式 (3.8) 可轻易推出

$$T_1 - T_0 = -2\mathrm{i}\big((L_1 + \mathrm{i}I)^{-1} - (L_0 + \mathrm{i}I)^{-1}\big). \tag{3.9}$$

将这一恒等式与 (3.1) 结合，我们得到 $T_1 - T_0 \in \boldsymbol{S}_1$。令

$$G_j = (\mathrm{Im}\, L_j)^{1/2}(L_j + \mathrm{i}I)^{-1} \quad \text{and} \quad \widetilde{G}_j = (L_j + \mathrm{i}I)^{-1}(\mathrm{Im}\, L_j)^{1/2}, \quad j \in \{0, 1\}. \tag{3.10}$$

根据 (3.5)，算子 G_j 是有界的。由于

$$(L_j + \mathrm{i}I)^{-1}(\mathrm{Im}\, L_j)^{1/2} \subset \big((\mathrm{Im}\, L_j)^{1/2}(L_j^* - \mathrm{i}I)^{-1}\big)^*,$$

算子 $(L_j + \mathrm{i}I)^{-1}$(像 $L_j)^{1/2}$ 也是有界的。

采用这一记号，可以很容易从 (3.8) 推导出

$$\begin{aligned} D_{T_j}^2 &= I - T_j^* T_j = 2\mathrm{i}\big((L_j+\mathrm{i}I)^{-1} - (L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1} \\ &\quad - 2\mathrm{i}(L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1}(L_j+\mathrm{i}I)^{-1}\big) \\ &= 4\big((L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1}(\operatorname{Im} L_j)^{1/2}\big)(\operatorname{Im} L_j)^{1/2}(L_j+\mathrm{i}I)^{-1} \\ &= 4\big((\operatorname{Im} L_j)^{1/2}(L_j+\mathrm{i}I)^{-1}\big)^*(\operatorname{Im} L_j)^{1/2}(L_j+\mathrm{i}I)^{-1} = 4G_j^*G_j. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 Ker Im $L_j = \{\mathbf{0}\}$，显然可知 Ker $G_j =$ Ker $G_j^*G_j = \{\mathbf{0}\}$，因此 T_0满足 (2.5)。

接下来，(3.11) 意味着 $2|G_j| = 2(G_j^*G_j)^{1/2} = D_{T_j}$, $j \in \{0,1\}$，因此 G_j 的极分解为 $G_j = V_j|G_j| = 2^{-1}V_jD_{T_j}$，其中 V_j, $j \in \{0,1\}$是酉的。

类似地，(3.10) 表明

$$\begin{aligned} D_{T_j^*}^2 &= I - T_jT_j^* = 2\mathrm{i}\big((L_j+\mathrm{i}I)^{-1} - (L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1} \\ &\quad - 2(L_j+\mathrm{i}I)^{-1}\mathrm{i}(L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1}\big) \\ &= 4(L_j+\mathrm{i}I)^{-1}\operatorname{Im} L_j(L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1} \\ &= 4(L_j+\mathrm{i}I)^{-1}(\operatorname{Im} L_j)^{1/2}(\operatorname{Im} L_j)^{1/2}(L_j^*-\mathrm{i}I)^{-1} = 4\widetilde{G}_j\widetilde{G}_j^*, \end{aligned} \tag{3.12}$$

由此可得 $|\widetilde{G}_j^*| = (\widetilde{G}_j\widetilde{G}_j^*)^{1/2} = 2^{-1}D_{T_j^*}$, $j = 0, 1$。

我们还需要 $\widetilde{G}_j$的反极表示： $\widetilde{G}_j = |\widetilde{G}_j^*|\widetilde{V}_j = 2^{-1}D_{T_j^*}\widetilde{V}_j$(见 [BS2,˜第 8], [Ka]章)。注意， V_j, $j \in \{0,1\}$是酉的。因此，结合 G_0 和 G_1 的极分解与˜反极分解，并牢记 (3.10)，我们很容易得到

$$2D_{T_0}^{-1} = G_0^{-1}V_0 = (L_0+\mathrm{i}I)(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}V_0 \tag{3.13}$$

and

$$2D_{T_1^*}^{-1} = \widetilde{V}_1(\widetilde{G}_1)^{-1} = \widetilde{V}_1(\operatorname{Im} L_1)^{-1/2}(L_1+\mathrm{i}I). \tag{3.14}$$

在左侧乘以 $D_{T_1^*}^{-1}$、右侧乘以 $D_{T_0}^{-1}$，利用 $D_{T_0}^{-1}$ 和 $D_{T_1^*}^{-1}$ 的表示式 (3.13) 和 (3.14)，并考虑到 (3.6)，将 (3.9) 代入后得到

$$\begin{aligned} D_{T_1^*}^{-1}(T_1-T_0)D_{T_0}^{-1} &= 2^{-1}\mathrm{i}D_{T_1^*}^{-1}\big((L_1+\mathrm{i}I)^{-1} - (L_0+\mathrm{i}I)^{-1}\big)D_{T_0}^{-1} \\ &= 2^{-1}\mathrm{i}D_{T_1^*}^{-1}(L_1+\mathrm{i}I)^{-1}(L_1-L_0)(L_0+iI)^{-1}D_{T_0}^{-1} \\ &= 2^{-1}\mathrm{i}\widetilde{V}_1(\operatorname{Im} L_1)^{-1/2}(L_1-L_0)(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}V_0 \in \boldsymbol{S}_1 \end{aligned}$$

根据 (3.6)。类似地，

$$D_{T_1}^{-1}(T_1^*-T_0^*)D_{T_0^*}^{-1} \in \boldsymbol{S}_1.$$

因此， T_0 和 T_1 满足 (2.6)，其中 $\alpha = \beta = 1/2$。根据定理 2.5，压缩算子对 $\{T_0, T_1\}$ 具有一个可积实值谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{c}}$。现在我们可以将函数 $\boldsymbol{\xi}$ 定义为

$$\boldsymbol{\xi}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{c}}\left(\frac{t-\mathrm{i}}{t+\mathrm{i}}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

显然，(3.7) 成立，并且对于任意在 $\mathbb{C}_- = \{\zeta \in \mathbb{C}$ 中有极点的有理函数f ，迹公式 (1.5) 都成立：像$\zeta < 0\}$。也就是说， $\boldsymbol{\xi}$ 是压缩算子对 $\{L_0, L_1\}$的一个实值谱移位函数。 ■

最后，我们由定理 5.6 [MN2] 推出以下结果。

定理 3.2. 设 L_0 和 L_1 是满足(3.2)且满足以下条件的极大耗散算子

$$\operatorname{trace}(L_1 - L_0) \notin \mathbb{R}.$$

那么，算子对 (L_0, L_1) 不存在实值可积函数。

此外，如果 $L_1 - L_0$ 是耗散的，那么条件 迹$(L_1 - L_0) \in \mathbb{R}$ 等价于存在一个可积实值谱移位函数。

在继续证明之前，先写出迹公式 (1.5) 的以下特殊情形:

$$\operatorname{trace}\left((L_1 - zI)^{-1} - (L_0 - zI)^{-1}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{\xi}(t)}{(t-z)^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.15}$$

证明. 令 $V \stackrel{\text{def}}{=} L_1 - L_0$.

容易看出，在（3.2）条件下，恒等式（3.15）意味着

$$\operatorname{trace}\left((L_1 - zI)^{-1} V (L_0 - zI)^{-1}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{\xi}(t)}{(t-z)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

在此令 $z = -iy$，将等式两边乘以 y^2 ，并令 $y \to \infty$，取极限可得

$$\operatorname{trace} V = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\xi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理陈述中的两个结论都可由此公式立即得到。

■

4. 在耗散的 Schr¨odinger 算子中的应用

本节将定理 3.1 应用于一对 $\{L_0, L_1\}$ 最大耗散的 Schr¨odinger 算子，其中

$$L_0 = (1+\mathrm{i})D^2 + \mathrm{i}I \qquad \text{and} \qquad L_1 = (1+\mathrm{i})D^2 + M_{\mathrm{i}+q} \tag{4.1}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，使得势 $\mathrm{i} + q$ 满足 $\operatorname{Im} q \geq 0$。这里 $D = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x$ ，而 M_φ表示关于 φ的乘法，即

$$M_\varphi f = \varphi f.$$

换言之，

$$L_1 f = -(1+\mathrm{i})f'' + (\mathrm{i}+q)f.$$

对于希尔伯特空间上的紧算子 T，我们考虑序列 $\{s_j(T)\}_{j\geq 0}$ 和 $\{\lambda_j(T)\}_{j\geq 0}$，它们分别是奇异值序列和 T 的特征值序列（按代数重数计数），并将它们排列为

$$s_{j+1} \leq s_j \quad \text{and} \quad |\lambda_{j+1}| \leq |\lambda_j|, \quad j \geq 0.$$

如果 T 有有限个特征值，我们就在其特征值的有限序列后补上无限多个零项。

我们将使用以下事实（见 [BS2], § 3.10, 定理 2）：
设 A 和 B 是希尔伯特空间上的紧算子。则

$$\lambda_j(AB) = \lambda_j(BA), \quad j \geq 0.$$

引理 4.1。 设 T_1 和 T_2 是希尔伯特空间上的紧自伴算子。则

$$s_j(T_1T_2) = s_j(T_2T_1), \quad j \geq 0.$$

证明。 显然,

$$\lambda_j\left((T_1T_2)^*(T_1T_2)\right) = \lambda_j\left(T_2T_1^2T_2\right) = \lambda_j\left(T_1^2T_2^2\right)$$

同理,

$$\lambda_j\left((T_1T_2)(T_1T_2)^*\right) = \lambda_j\left(T_1T_2^2T_1\right) = \lambda_j\left(T_1^2T_2^2\right)$$

因此，$s_j(T_1T_2)^2 = \lambda_j((T_1T_2)^*(T_1T_2)) = s_j(T_2T_1)^2$。 ■

我们需要以下结果。

定理 4.2. 设 q 是 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 上的非负函数，且设 R 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的连续正定函数。假设

$$\int_{\mathbb{R}} q(x)R(x,x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

那么，由下式定义的 $L^2(\mathbb{R})$ 上的积分算子 K

$$(Kf)(s) = \int_{\mathbb{R}} q(s)^{1/2}R(s,t)q(t)^{1/2}f(t)\,\mathrm{d}t$$

是迹类非负算子，并且

$$\|K\|_{\boldsymbol{S}_1} = \operatorname{trace} K = \int_{\mathbb{R}} q(x)R(x,x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

注意，当函数 q 连续时，这一结果是众所周知的，参见例如 [GK，第 3.10] 节。我们给出定理 4.2 的两种不同证明。

定理 4.2 的第一个证明。首先，只需假设 R 和q 均为紧支撑。事实上，设 w 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 w，使得

$$0 \leq w(t) \leq 1 \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{supp} w = [-2,2] \qquad \text{and} \qquad w(t) = 1 \quad \text{for} \quad t \in [-1,1].$$

我们可以定义算子 K_n, $n \geq 1$ 为

$$(K_nf)(s) = \int_{\mathbb{R}} q(s)^{1/2}R_n(s,t)q(t)^{1/2}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中

$$R_n(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} w\Big(\frac{s}{n}\Big) R(s,t) w\Big(\frac{t}{n}\Big).$$

显然， R_n 是一个具有紧支撑的正定函数。

根据定理的结论对紧支撑的R 和 q成立这一假设，我们可以得出 $K_n \in \boldsymbol{S}_1$ 和

$$\|K_n\|_{\boldsymbol{S}_1} = \operatorname{trace} K_n = \int_{\mathbb{R}} q(x) R_n(x,x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

容易看出，序列 $\{K_n\}_{n\geq 1}$ 在弱算子拓扑下收敛，且 $\text{w-}\lim_{n\to\infty} K_n = K$。此外，显然，对于 $f \in L^2(\mathbb{R})$和 $n \geq 1$，有 $(K_n f,\ f) \leq (K f,\ f)$。由此可得

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{trace} K_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 1} (K_n f_j, f_j) = \sum_{j\geq 1} (K f_j, f_j) = \operatorname{trace} K,$$

其中， $\{f_j\}_{j\geq 1}$ 是 $L^2(R)$中的一组标准正交基。

因此，我们假设 R 和 q 都具有紧支撑。由此可知，算子 K 属于希尔伯特–施密特类 $\boldsymbol{S}_2$。下面证明 $K \in \boldsymbol{S}_1$。

考虑 $\mathbb{R}$上的一个无穷次光滑函数 v ，使得

$$v(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{supp} v = [-1,1], \qquad \text{and} \qquad \int_{\mathbb{R}} v(t)\mathrm{d}t = 1.$$

令 $V_n(t) = nv(nt)$， $t \in \mathbb{R}$。考虑定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 Φ_n：

$$\Phi_n(s,t) = \int_{\mathbb{R}} V_n(u) q^{1/2}(s-u) R(s-u, t-u) q^{1/2}(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

容易看出， Φ_n 是紧支撑无穷次光滑函数，并且对于每个 n， Φ_n 都是正定的。

现在考虑定义在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的积分算子 T_n：

$$(T_n f)(s) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 Φ_n 是紧支撑无穷次光滑函数，因此对于每个 $n \geq 1$，都有 $T_n \in \boldsymbol{S}_1$。由 [B] 可得:

$$\operatorname{trace} T_n = \|T_n\|_{\boldsymbol{S}_1} = \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(s,s)\,\mathrm{d}s.$$

容易验证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(s,s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} q(s) R(s,s)\,\mathrm{d}x.$$

显然还有:

$$\lim_{n\to\infty} \|K - T_n\|_{\boldsymbol{S}_2} = 0.$$

这很容易推出 $K \in \boldsymbol{S}_1$。

一旦我们知道 $K \in \boldsymbol{S}_1$，便可轻易得出

$$\lim_{n\to\infty} \|K - T_n\|_{\boldsymbol{S}_1} = 0. \tag{4.2}$$

事实上，这是下面引理的一个推论。

引理 4.3. 设 R 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的迹类算子，并且

$$(Rf)(s) = \int_{\mathbb{R}} k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

对于函数 k，其中 $L^2(\mathbb{R}^2)$。设 R_n、 $n \geq 1$ 为由下式定义的算子

$$(R_n f)(s) = \int_{\mathbb{R}} k_n(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中

$$k_n(s,t) = \int_{\mathbb{R}} V_n(u)k(s-u,t-u)\,\mathrm{d}u.$$

那么 $R_n \in \boldsymbol{S}_1$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n - R\|_{\boldsymbol{S}_1} = 0.$$

我们先补完定理 4.2 的证明。由于 Φ_n 是一个具有紧支撑的光滑函数，众所周知（参见 [B]），

$$\operatorname{trace} T_n = \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(s,s)\,\mathrm{d}s.$$

为完成证明，我们注意到，由 (4.2) 可得

$$\operatorname{trace} K = \lim_{n\to\infty} \operatorname{trace} T_n. \quad \blacksquare$$

引理 4.3 的证明。 显然，只需证明秩一算子的情形R，此时结论是显然的。 $\blacksquare$

现在我们来给出定理 4.2 的第二个证明。

首先，我们补充 GK] 中的定理 3.5.1。设 $\{A_n\}_1^\infty$是希尔伯特空间上属于 $\boldsymbol{S}_p$、$1 \leq p < \infty$ 类的一列算子，它们在范数下收敛于有界线性算子 A，并且

$$\sup_n \|A_n\|_{\boldsymbol{S}_p} < \infty. \tag{4.3}$$

众所周知，在这种情况下， A 必属于 $\boldsymbol{S}_p$，且其 $\boldsymbol{S}_p$ 范数小于或等于 (4.3) 中的上确界。下面的引理表明，若在此基础上进一步假设模 A_n 构成的序列 $\{|A_n|\}_1^\infty$单调，则可以得到更强的结论。

引理 4.4。 假设除上述条件外，序列 $\{|A_n|\}_1^\infty$还是单调的。那么

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|_{\boldsymbol{S}_p} = 0. \tag{4.4}$$

此外，若算子 A_n 是非负的，则

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n\|_{\boldsymbol{S}_p} = \|A\|_{\boldsymbol{S}_p} \tag{4.5}$$

证明。 不妨假设该序列 $\{|A_n|\}$ 单调递增。那么，对每个 $j \in \mathbb{N}$，当 $n \to \infty$ 时，$s_j(A_n) \uparrow s_j(A)$。因此，应用单调收敛定理，我们得到 (4.5)。

现在将 A_n 替换为 $A - A_n$，并注意到所得序列也是单调的，便得到 (4.4)。 ■

定理 4.2 的第二个证明。只需假设函数 q 的支集包含在紧区间 $[a,b]$ 内。选取单调序列 $\varphi_n(\cdot) \in C[a,b]$，使其从下方在 $L^1[a,b]$ 中逼近 q：

$$\varphi_n(\cdot) \in C[a,b], \quad \varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t) \le q(t) \quad and \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - q\|_{L^1} = 0 \tag{4.6}$$

通过如下定义算子 K_n、$n \ge 1$:

$$(K_n f)(s) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s)^{1/2} R(s,t) \varphi_n(t)^{1/2} f(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

显然,

$$\|K_n - K\|_{\boldsymbol{S}_2}^2 = \int_a^b \int_a^b |(\varphi_n(s)\varphi_n(t))^{1/2} - (q(s)q(t))^{1/2}|^2 \cdot |R(s,t)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{4.8}$$

此外，由 (4.7) 给出的积分算子 K_n 是具有连续核的非负算子，且 $\int_a^b \varphi_n(t) R(t,\ t) \mathrm{d}\ t < \infty$，因此它是迹类的，$K_n \in \boldsymbol{S}_1$，并且

$$\|K_n\|_{\boldsymbol{S}_1} = \operatorname{trace} K_n = \int_a^b \varphi_n(t) R(t,t) \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

（见 [GK，第 3 章。10]）。进而，由 (4.9) 和 (4.6) 可得

$$\sup_n \|K_n\|_{\boldsymbol{S}_1} = \sup_n \int_a^b \varphi_n(t) R(t,t) \mathrm{d}t = \int_a^b q(t) R(t,t) \mathrm{d}t < \infty. \tag{4.10}$$

将此估计与关系式 (4.8) 结合，并应用 [GK 定理 3.5.1]，可得包含关系 $K \in \boldsymbol{S}_1$ 以及以下估计

$$\|K\|_{\boldsymbol{S}_1} \le \sup_n \|K_n\|_{\boldsymbol{S}_1} \left(= \int_a^b q(t) R(t,t) \mathrm{d}t \right).$$

因此，条件 (4.3) 对 $p = 1$ 成立；由 (4.8) 可知 $\lim_{n\to\infty} \|K_n - K\| = 0$。因此，我们可以将引理 4.4 应用于序列 $\{K_n\}_1^\infty$，结合 (4.9)–(4.10) 可得

$$\|K\|_{\boldsymbol{S}_1} = \lim_{n\to\infty} \|K_n\|_{\boldsymbol{S}_1} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{trace} K_n = \int_a^b q(t) R(t,t) \mathrm{d}t = \operatorname{trace} K. \quad ■$$

现在回到 (4.1) 中的 Schr¨odinger 算子 L_0 和 L_1。

定理 4.5。 设 $q \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 且 像 $q \ge 0$。则极大耗散算子对 (L_0, L_1) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中有一个实值谱移位函数 $\boldsymbol{\xi}$，满足(3.7)。

证明。我们将证明分为几个步骤。

(i) 首先，我们注意到，根据索博列夫嵌入定理，$W^{2,2}(\mathbb{R})$ 连续嵌入到由 $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ 表示的 $\mathbb{R}$ 上有界连续函数空间中，该空间赋有上确界范数。此外，对每个 $\varepsilon > 0$，存在常数 $b(\varepsilon) > 0$，使得下列估计成立：

$$\|f\|_{C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})} \leq \varepsilon \|f\|_{W^{2,2}} + b(\varepsilon)\|f\|_{L^2} = \varepsilon \|D^2 f\|_{L^2} + b(\varepsilon)\|f\|_{L^2}, \quad f \in W^{2,2}(\mathbb{R}). \tag{4.11}$$

因此，假设 $q \in L^2(\mathbb{R})$ 蕴含 $\mathsf{a}_{D^2}(M_q) = 0$，即

$$\|qf\|_{L^2} \leq \|q\|_{L^2}\|f\|_{C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})} \leq \varepsilon_0 \|L_0 f\|_{L^2} + b(\varepsilon_0)\|f\|_{L^2}, \quad f \in \mathsf{dom}(L_0) = W^{2,2}(\mathbb{R}), \tag{4.12}$$

其中 $\varepsilon_0 = \varepsilon \|q\|_{L^2}$。此不等式意味着，（耗散的）乘法算子 M_q 被 L_0 控制，其 L_0-界等于 0，即 $\mathsf{a}_{L_0}(M_q) = 0$。因此，加藤-雷利希定理适用，并保证算子 L_1 在 $\mathsf{dom}(L_0)$ 上闭，且

$$\mathrm{dom}(L_1) = \mathrm{dom}(L_1^*) = \mathrm{dom}(L_0) = W^{2,2}(\mathbb{R}). \tag{4.13}$$

反过来，这个关系意味着算子 $K \overset{\mathrm{def}}{=} (L_0 + \mathrm{i}I)(L_1^* - \mathrm{i}I)^{-1}$ 是有界的。

(ii) 下文用记号 $\mathsf{dom}(\mathfrak{t})$ 表示二次型 $\mathfrak{t}$ 的定义域。在这一步，我们考虑二次型 $\mathfrak{t}_{|q|}$，

$$\mathfrak{t}_{|q|}[f] = \left\| \sqrt{|q|} f \right\|_{L^2}^2, \quad f \in \mathrm{dom}(\mathfrak{t}_{|q|}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \sqrt{|q|} f \in L^2(\mathbb{R}) \}$$

以及二次型 $\mathfrak{t}_{D^2}$，

$$\mathfrak{t}_{D^2}[f] = \|Df\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad \mathrm{dom}(\mathfrak{t}_{D^2}) = W^{1,2}(\mathbb{R}).$$

下面证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $c(\varepsilon) > 0$，使得以下估计成立：

$$\mathfrak{t}_{|q|}[f] \leq \varepsilon \mathfrak{t}_{D^2}[f] + c(\varepsilon)\|f\|_{L^2}^2, \qquad f \in \mathrm{dom}(\mathfrak{t}_{D^2}) = W^{1,2}(\mathbb{R}). \tag{4.14}$$

现在，我们需要用另一个索博列夫嵌入定理来代替估计 (4.11)：对于每个$\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $c(\varepsilon) > 0$，使得以下估计成立：

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})}^2 \leq \varepsilon \|Df\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + c(\varepsilon)\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \qquad f \in W^{1,2}(\mathbb{R}). \tag{4.15}$$

利用假设 $q \in L^1(\mathbb{R})$，应用估计 (4.15)，并令 $C_q = \|q\|_{L^1(\mathbb{R})}$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_{|q|}[f] = \|qf^2\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|q\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C_q \left(\varepsilon \|Df\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + c(\varepsilon)\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \quad f \in W^{1,2}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

该估计表明，$\mathsf{dom}(\mathfrak{t}_{|q|}) \supset \mathsf{dom}(\mathfrak{t}_{D^2}) = W^{1,2}(\mathbb{R})$，并证明了估计式 (4.14)。

根据 KLMN定理（[RS，定理 X.17]），形式 $\mathfrak{t}_{D^2} + \mathfrak{t}_{|q|}$ 是下半有界的，并且在定义域 $\mathsf{dom}(\mathfrak{t}_{D^2} + \mathfrak{t}_{|q|}) = \mathsf{dom}(\mathfrak{t}_{D^2}) = W^{1,2}(\mathbb{R})$ 上闭合。此外，与形式 $\mathfrak{t}_{D^2} + \mathfrak{t}_{|q|}$ 相关联的算子为 $D^2 + |q|I$，$\mathsf{dom}(D^2 + |q|I) = W^{2,2}(\mathbb{R})$。

因此，两个算子 $M_{\sqrt{|q|}}(L_0 + \mathrm{i}I)^{-1/2}$ 和 $M_{\sqrt{|q|}}(L_1 + \mathrm{i}I)^{-1/2}$ 都是有界的。

(iii) 显然（且这是众所周知的），空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中自伴算子 D^2 的预解式 $(D^2-zI)^{-1}$ 具有如下积分表示

$$(D^2-zI)^{-1}f=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;z)f(t)\mathrm{d}t,\quad f\in L^2(\mathbb{R}),\tag{4.16}$$

其中，$G(x,t;z)$ 是哈密顿量 D^2 的格林函数，

$$G(x,t;z)=-\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{z}}\begin{cases}e^{\mathrm{i}(x-t)\sqrt{z}}, & \text{if f } t\le x,\\ e^{-\mathrm{i}(x-t)\sqrt{z}}, & \text{if } t\ge x.\end{cases}\tag{4.17}$$

函数 $G(x,t;\ z)$ 是哈密顿量 D^2 的格林函数。

我们来证明 $M_q(D^2-zI)^{-1}\in\boldsymbol{S}_1$。为此，我们证明由下式定义的算子 R

$$\begin{aligned}Rf&=|q|^{1/2}(D^2+I)^{-1}(|q|^{1/2}f)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|^{1/2}G(x,t;-1)|q(t)|^{1/2}f(t)\mathrm{d}t,\quad f\in L^2(\mathbb{R}),\end{aligned}\tag{4.18}$$

属于 $\boldsymbol{S}_1$。首先，我们注意到，对每个 $t>0$，算子 $(D^2+tI)^{-1}$（有界）是非负的，因为 D^2 是非负的。因此，算子 R 也是非负的。

接下来，由 (4.17) 可得

$$G(x,t;-1)=\frac{1}{2}\begin{cases}e^{-(x-t)}, & \text{if } t\le x,\\ e^{(x-t)}, & \text{if } t\ge x.\end{cases}\tag{4.19}$$

因此，$G(x,x;-1)=\frac{1}{2}$。于是，记 k_R 为由 (4.18) 定义的积分算子 R 的核，并牢记假设 $q\in L^1(\mathbb{R})$，我们便可轻易得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}k_R(x,x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|^{1/2}G(x,x;-1)|q(x)|^{1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.\tag{4.20}$$

由于算子 R 是非负的，由定理 4.2，不等式 (4.20) 蕴含 $R=M_{|q|^{1/2}}(D^2+I)^{-1}M_{|q|^{1/2}}$ 属于 $\boldsymbol{S}_1$，这正是所需的结论。

类似地，由 (4.19) 结合假设 $q\in L^1(\mathbb{R})$，可得算子 $M_{|q|^{1/2}}(D^2+I)^{-1}$ 属于希尔伯特-施密特类 $\boldsymbol{S}_2$。

(iv) 接下来，由于像 $q\ge 0$，我们可以选取 q 的一个平方根分支，使得 $\mathrm{Re}\sqrt{q}(x)>0$。因此，

$$R_0\overset{\mathrm{def}}{=}M_{q^{1/2}}(L_0+\mathrm{i}I)^{-1}=M_{\varkappa|q|^{1/2}}(L_0+iI)^{-1}\in\boldsymbol{S}_2,$$

其中 $\varkappa(x)=q^{1/2}(x)/|q^{1/2}(x)|$，$|\varkappa(x)|=1$。

接下来，我们进行因式分解

$$(L_1+\mathrm{i}I)^{-1}-(L_0+\mathrm{i}I)^{-1}=-\left(M_{q^{1/2}}(L_1^*-\mathrm{i}I)^{-1}\right)^*\left(M_{q^{1/2}}(L_0+\mathrm{i}I)^{-1}\right),\tag{4.21}$$

且两个因子都为有界算子。

注意到算子 $K = \big((L_0 + \mathrm{i}I)(L_1^* - \mathrm{i}I)^{-1}\big)$ 有界（步骤 (i)），我们得到

$$R_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} M_{q^{1/2}}(L_1^* - \mathrm{i}I)^{-1} = (M_{q^{1/2}}(L_0 + \mathrm{i}I)^{-1})\left((L_0 + \mathrm{i}I)(L_1^* - \mathrm{i}I)^{-1}\right)$$
$$= (M_{q^{1/2}}(L_0 + \mathrm{i}I)^{-1})K \in \boldsymbol{S}_2.$$

结合两个包含关系 $R_j \in \boldsymbol{S}_2$, $j = 0,\ 1$ 以及恒等式 (4.21)，我们得到

$$(L_1 + \mathrm{i}I)^{-1} - (L_0 + \mathrm{i}I)^{-1} = R_1^* R_0 \in \boldsymbol{S}_1. \tag{4.22}$$

因此，定理 3.1 的条件 (3.1) 得到验证。

(v) 接下来，由 (4.1) 可得

$$\operatorname{Im} L_0 = D^2 + I \geq I \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Im} L_1 = D^2 + I + \operatorname{Im} q \geq I$$

并且根据 (4.13)，$\operatorname{dom} \operatorname{Im}\ L_1 = \operatorname{dom} \operatorname{Im} L_0$；又由于两个算子 $\operatorname{Im}\ L_0$、$\operatorname{Im} L_1$ 均为正，这意味着 $\operatorname{dom}(\operatorname{Im} L_1)^{1/2} = \operatorname{dom}(\operatorname{Im} L_0)^{1/2}$（例如参见 [RS], 定理 X.18 和 [Sch], 例 10.8.7）。进而，这一等式保证存在一个有界算子K_1，其有界逆算子为 K_1^{-1}，并满足条件 $(\operatorname{Im} L_1)^{-1/2} = K_1(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}$。

另一方面，由 (4.1) 可得 $L_1 - L_0 = M_q$。将这一等式与前一个恒等式代入 (3.6)，可将其化为下式

$$(\operatorname{Im} L_1)^{-1/2} M_q (\operatorname{Im} L_0)^{-1/2} = K_1 (\operatorname{Im} L_0)^{-1/2} M_q (\operatorname{Im} L_0)^{-1/2} \in \boldsymbol{S}_1. \tag{4.23}$$

我们需要验证这一条件。由于 K_1 可逆，条件 (4.23) 等价于

$$\left(M_{|q|^{1/2}}(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}\right)^* \left(M_{|q|^{1/2}}(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}\right)$$
$$= \operatorname{clos}\left((\operatorname{Im} L_0)^{-1/2} M_{|q|^{1/2}}\right)\left(M_{|q|^{1/2}}(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}\right) \in \boldsymbol{S}_1,$$

其中我们用记号 $\operatorname{clos} A$ 表示可闭算子 A 的闭包。反过来，这一条件等价于条件

$$R = \left(M_{|q|^{1/2}}(\operatorname{Im} L_0)^{-1/2}\right) \operatorname{clos}\left((\operatorname{Im} L_0)^{-1/2} M_{|q|^{1/2}}\right) \in \boldsymbol{S}_1 \tag{4.24}$$

whic这直接由步骤 (iii) 中已确立的成员关系 $R \in \boldsymbol{S}_1$ 得出。 ■

References

[AG1] D. Alpay 和 I. Gohberg, *A trace formula for canonical differential expressions*, J. of Functional Anal. **197** (2003), 489–525. [AG2] D. Alpay和 I.Gohberg, *Pairs of selfadjoint operators and their invariants*, Algebra and Analysis, **16:1** (2004), 1–61. [AN] V.M. Adamian 和 H. Neidhardt, *On the summability of the spectral shift function for pair of contractions and dissipative operators* **24** 1990 187 205 , J. Operator Th. ( ), –。 [AP] A.B. Aleksandrov 和 V.V. Peller, *Operator Lipschitz functions*, Russian Mathematical Surveys **71:4** (2016), 605–702. [AP2] A.B. Aleksandrov 和 V.V. Peller, *Krein's trace formula for unitary operators and operator Lipschitz functions* **50 3** 2016 167 175 , Funct. Anal and Appl., :( ), –。

[B] M.Sh. Birman, *A simple embedding theorem for kernels of trace-class integral operators in $L^2(\mathbb{R}^m)$*。（俄语），Algebra i Analiz 27:2 (2015), 211–217；英文译本：St. Petersburg Math. J. 27:2 (2016), 327–331. [BS1] M.S. Birman 和 M.Z. Solomyak, *Remarks on the spectral shift function*, Zapiski Nauchn. Semin. LOMI 27 (1972), 33–46（俄语）。英文译本：J. Soviet Math. 3 (1975), 408–419. [BS2] M.Sh. Birman and M.Z. Solomyak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., 多德雷赫特, 1987. [BP] M.Sh. Birman 和 A. B. Pushnitski, 《谱移位函数：奇妙而多面的研究》。谨以此文纪念 Mark Grigorievich Krein（1907–1989）。Integral Equations Operator Theory 30 (1998), 191–199. [BY] M.Sh. Birman D. R. Yafaev *The spectral shift function. The papers of M. G. Krein and their further development* **4 5** 1992 1 44 和 ,（俄语）Algebra i Analiz : ( ), –。英文译本：St. Petersburg Math. J. 4:5 (1993), 833–870. [CS] A. Chattopadhyay 和 K.B. Sinha, *Trace formula for contractions and its representation in $\mathbb{D}$*, J. Operator Theory 88 (2022), 275–288. [F] Yu. B. Farforovskaya, *An example of a Lipschitzian function of selfadjoint operators that yields a nonnuclear increase under a nuclear perturbation* 。Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 30 (1972), 146–153（俄语）。[GK] I.C. Gokhberg 和 M.G. Krein, 《希尔伯特空间中线性非自伴算子理论导论》, Nauka, 莫斯科, 1965；英文译本, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, 罗得岛州, 1969. [Ka] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 柏林, 1966. [Kr1] M.G. Krein, *On a trace formula in perturbation theory*, Mat. Sbornik 33 (1953), 597–626.（俄语）。[Kr2] M.G. Krein, *On perturbation determinants and a trace formula for unitary and self-adjoint operators* **144 2** 1962 268 271 , Dokl. Akad. Nauk SSSR : ( ), –（俄语）。[Kr3] M. G. Kreĭn *First* , 《自伴算子扰动理论的一些新研究》。载于 , *Math. Summer School* 103 187 1964 *Part I (Russian)*, 第 – 页。Izdat. “Naukova Dumka”, 基辅, 。[Kr4] M.G. Krein, *Perturbation determinants and a trace formula for some classes of pairs of operators*, J. Operator Th., 17 (1987), 129–187. [La] H. Langer, *Eine Erweiterung der Spurformel der Störungstheorie*, Math. Nachr. 30 (1965), 123–135. [Li] I.M. Lifshitz, *On a problem in perturbation theory connected with quantum statistics*, Uspekhi Mat. Nauk 7 (1952), 171–180（俄语）。[MN] M. Malamud 和 H. Neidhardt, *Perturbation determinants for singular perturbations*, Russian J. of Math. Phys., 21:1 (2014), 55–98. [MN2] M. Malamud 和 H. Neidhardt, *Trace formulas for additive and non-additive perturbations*, Adv. Math. 274 (2015), 736–832. [MNP1] M.M. Malamud, H. Neidhardt 和 V.V. Peller, *Analytic operator Lipschitz functions in the disk and a trace formula for functions of contractions* （俄语），Funktsional. Anal. i Prilozhen. 51:3 (2017), 33–55. 英文译本：Funct. Anal. Appl. 51:3 (2017), 185–203. [MNP2] M.M. Malamud, H. Neidhardt 和 V.V. Peller, *Absolute continuity of spectral shift*, J. Funct. Anal. 276 (2019), 1575–1621. [MNP3] M.M. Malamud, H. Neidhardt 和 V.V. Peller, *Real-valued spectral shift functions for contractions and dissipative operators* （俄语）。英文译本：Dokl. Math. 110:2 (2024), 399–403. [Pe1] V.V. Peller, *Hankel operators in the theory of perturbations of unitary and self-adjoint operators*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 19:2 (1985), 37–51（俄语）。英文译本：Funct. Anal. Appl. 19 (1985), 111–123.

[Pe2] V.V. Peller, *Hankel operators in the perturbation theory of of unbounded self-adjoint operators*.《分析与偏微分方程》，第529–544页，《纯粹数学与应用数学讲义》第122卷，Dekker，纽约，1990年。[Pe3] V.V. Peller, *The Lifshits–Krein trace formula and operator Lipschitz functions*，《美国数学会会刊》144（2016），5207–5215。[RS] M. Reed 和 B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness* 1979，学术出版社，纽约、旧金山、伦敦，。[R1] A. V. Rybkin, *The spectral shift function for a dissipative and a selfadjoint operator and trace formulas for resonances* **125 167 3** 1984 420 430 （）：（），–。[R2] A.V. Rybkin, *A trace formula for a contractive and a unitary operator*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 21:4 (1987), 85–87. [R3] A.V. Rybkin, *The discrete and the singular spectrum in the trace formula for a contractive and a unitary operator* **23 3** 1989 84 85 ，Funktsional. Anal. i Prilozhen., : ( ), –。[R4] A.V. Rybkin, *The spectral shift function the characteristic function of a contraction and a generalized integral* **185 10** 1994 91 144 （），–。[SNF] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, Akad´emiai Kiad´o，布达佩斯，1970年。[Sch] K. Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint on Hilbert space*，施普林格出版社，多德雷赫特，海德堡，2012年。[Ya] D. R. Yafaev。*Mathematical scattering theory* 105 *Translations of Mathematical Monographs* 1992 普罗维登斯，罗得岛，。

M.M. Malamud
圣彼得堡国立大学
大学滨河路，7/9
199034 俄罗斯圣彼得堡
电子邮箱：malamud3m@gmail.com

V.V. Peller
圣彼得堡国立大学
大学滨河路，7/9
199034 俄罗斯圣彼得堡

俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部 Fontanka 27号，
191023 俄罗斯圣彼得堡 电子邮箱：
peller@math.msu.edu