arXiv:2603.25432v1 [math.CT] 26 Mar 2026

介绍像素化及其应用

J. DAISIE ROCK

摘要。受寻求一种新型近似的愿望启发，我们定义了一种称为像素化的局部化。我们介绍像素化如何体现于表示论以及位点与层的研究中。给定一个集合、该集合中的一组“路径”以及路径上的一个等价关系，可以据此构造路径范畴。屏是集合的一个划分，它与这些路径及等价关系相容。对于交换环，我们还将路径范畴在其模上进行富化（即相对于该环将范畴线性化=），并对由路径生成的理想取商（该理想可能为零）。像素化是相对于某个屏对路径范畴或其富化商进行局部化。所得局部化具有实用性质，可作为原范畴的近似。作为应用，我们利用像素化为局部化环谱的扎里斯基拓扑提供一种新视角，提出与环化空间及模层平行的理论，并构造 A 型A高阶 Auslander 代数的范畴化推广。

目录

引言 1
1. 路径与屏幕 2. 路径范畴 3. 表示 4. 位点与路径化位点 5. 高阶 Auslander 范畴 参考文献 5 14 28 34 44 55

引言

背景与动机。研究具有无限多个对象的范畴的表示，正日益受到关注。也就是说，研究函子范畴 $C \to \mathcal{K}$，其中 C 是一个具有无限多个对象的小范畴，而 $\mathcal{K}$是某个性质广为人知的阿贝尔范畴。通常，研究从以下情形开始： C 是线（类型 A，但不一定是全序）或˜圆（类型 A，但不一定是循环序）。

通常，将 C 替换为某个加性范畴 $\mathcal{A}$，使得 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{K}$ 都具有 $\Bbbk$-模上的富化，其中 $\Bbbk$是某个交换环；同时，函子也替换为具有 $\Bbbk$-模上富化结构的加性函子。在表示论的术语中，我们称 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{K}$以及函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{K}$ 是 $\Bbbk$-线性的。

在拓扑数据分析中，持久模通常是从某个小范畴到有限维 $\Bbbk$-向量空间范畴的函子，其中

日期：2026年3月26日。2020年 数学主题分类。 主要分类：18E35、18A25、18F20。次要分类：18G15、16G20、16G99。关键词和短语。 像素化、近似、局部化、表示理论、函子范畴、环谱、环化空间、模层、高阶 Auslander 代数、高阶同调代数、箭图表示。

域 $\Bbbk$。在这种情况下，持久模可以唯一地分解为不可分解直和项（在同构意义下），且每一项都有一个局部自同态环 [GR97，BCB20]。近期，研究者开始将 A 类型的无限持久模分解到其他类型的环上，例如主理想整环 [LHP25]。人们还可以考虑多参数持久模，它们可被解释为表示 $\mathbb{R}^n$。在这里，完整的分解定理/结构定理并不可行，但研究者通过不变量，在以其他方式理解持久模方面取得了进展 [ABH24]。

一种类似于持久模的结构，表现为连续量子群的福克空间表示˜，其类型为 A 和 A [SS21]。有限索引的持久模也可以视为箭图表示。箭图表示的一种无限推广见于 [BvR13]。进一步的推广、部分结构定理及分类见于 [PRY24]。在所有这些情形中，所关注的范畴 C 都具有路径的概念；这些路径不仅是态射，在某种意义上也具有拓扑或几何性质。

要更好地理解这些情形中的表示，一种方法是考虑近 [似。在 24] PRY [中，一种技术被用于将表示化简为较小且易于理解的部分。该技术将表示分解为噪声和无噪声部分。可以通过确定表示中允许何种噪声，将其视为一种近似。该技术的先驱方法见于 [HR24]，而该技术正是本文像素化方法的先驱。 [BBH22]中则对多参数持久模使用了一种同调类型的近似。

本文探讨通过局部化实现近似。虽然应用与表示论密切相关（第 4.2 节中关于位点和环谱的一些结果除外），但本文的主要技术和结果本质上主要属于范畴论范畴。从范畴论的角度看，将局部化视为近似在理念上很直观：根据某些参数（包括态射）将对象归为一组，这便是对原范畴的一种近似。我们也可以通过考察相应环谱之间的关系，将环的局部化视为近似。我们考察开集与包含映射构成的范畴，看看二者是否通过某种范畴局部化过程相关联。

我们对近似的处理受到一种现实过程的启发：数码摄影。我们拍摄一张由（感觉上）无限多个微小原子构成的事物的照片，得到的却是一张只有有限数量像素的照片。在数码照片发展的初期，它们显然只是现实世界所见事物的（粗糙）近似。到了2026年，我们能够制作出像素数量绰绰有余的数码照片，从而准确近似我们所见的事物。然而，即使在最初，只需几个像素，我们就能判断咖啡壶是否装满。[1]

组织与贡献。 本文概述了论文内容，并重点介绍作者认为的主要结果：定理 A、B、C和D。不过，鉴于表示论的使用者兴趣极为多样，读者或许会认为其他结果才是“亮点”。

路径范畴与像素化。 在第 1 节中，我们定义三元组 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$，其中 $\mathbb{X}$是一个集合， Γ 的作用类似于 $\mathbb{X}$中的路径集合，而 $\sim$ 是 Γ上的一个等价关系（定义 1.1 和 1.2）。全文中，我们使用 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{R}^n$作为贯穿全文的例子，从例 1.5开始。受我们处理近似的方法启发，我们

[1]第一台数码相机的分辨率为 128x128 像素，用来查看剑桥大学休息室里的咖啡壶。客户端软件由 Quentin Stafford-Fraser 编写，服务器软件由 Paul Jardetzky 编写。

在集合 $\mathbb{X}$上定义一种特殊的划分，称为 屏幕，它与Γ 和 $\sim$ 相容（定义 1.12）。屏幕的元素称为 像素。我们证明，三元组 $\mathscr{P}$ 上的屏幕集合 $(\mathbb{X},\ \Gamma/\sim)$ 至少有一个极大元（命题 1.16），并且说明三元组和屏幕对积的运算具有良好的性质（命题 1.10和 1.25）。

在第 2 节中，我们研究路径范畴（定义 2.1）。路径范畴 C 由三元组（$\mathbb{X}$, $\Gamma/\sim$）构造而成。对象是 $\mathbb{X}$ 中的点，态射则是 Γ 中路径关于关系 $\sim$的等价类 $[\gamma]$。范畴 $\boldsymbol{PCat}$ 是 $\boldsymbol{Cat}$ （小范畴的范畴）的子范畴，其对象为路径范畴，态射为路径范畴之间的函子。对于交换环 $\Bbbk$，我们还定义了一个 $\Bbbk$-线性版本 $\mathcal{C}$。$\mathcal{C}$ 中的路径理想 $\mathcal{I}$ 是一个关于路径具有良好性质的理想（定义 2.8）。商 $\mathcal{C}/\mathcal{I}$记作 $\mathcal{A}$，是 $\Bbbk$-线性情形下的研究对象。

我们证明，给定一个屏 $\mathfrak{P}$ 上的 $(\mathbb{X},\ \Gamma/\sim)$，会在 C 中诱导出一类 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 态射，它们允许分式演算（命题 2.17）。局部化$C^{\mathfrak{P}}=C[\Sigma_{\mathfrak{P}}^{-1}]$ 称为 像素化 （定义 2.20）。我们指出，像素化取决于三元组的选择，并提出问题：路径范畴的局部化何时是相对于某个三元组和屏的像素化（注 2.23 和问题 2.24）。

在 $\mathcal{C}$ 中，我们将 $\mathcal{I}$ 扩展为与$\mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$ 相容的理想 $\mathfrak{P}$，并进一步取商$\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}=\mathcal{C}/\mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$。注意， $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 也是 $\mathcal{A}$的一个商。在这种情况下，我们还得到 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 中一个诱导的态射类 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，它允许进行分式演算（命题2.19）。我们也称局部化 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}=\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}[\Sigma_{\mathfrak{P}}^{-1}]$ 为像素化。 □

给定（$\mathbb{X},\Gamma/\sim$）的一个屏 $\mathfrak{P}$，我们构造范畴 $Q(C,\mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$，分别与 $C^{\mathfrak{P}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$等价（定理 2.37）。$Q(C,\mathfrak{P})$和$\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$各自都是对应的骨架，并由箭图构造而成。

我们主要证明，在非-$\Bbbk$-线性情形下，像素化会产生一个新的路径范畴。

定理 A （定理 2.43）。设 C 为由（$\mathbb{X}$, $\Gamma/\sim$）构造的路径范畴，并设 $\mathfrak{P}$ 为（$\mathbb{X}$, $\Gamma/\sim$）的一个屏。则 $Q(C,\ \mathfrak{P})$ 同构于一个路径范畴，因此 $C^{\mathfrak{P}}$ 等价于一个路径范畴。 □

我们引入有限细化（定义 2.44）。若 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}'$ 是屏幕，且$\mathfrak{P}'$细化 $\mathfrak{P}$，则由于像素化是一种局部化，我们得到诱导函子 $C^{\mathfrak{P}'}\to C^{\mathfrak{P}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}'}\to\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。由此分别得到诱导函子 $Q(C,\mathfrak{P}')\to Q(C,\mathfrak{P})$ 和$\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P}')\to\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$。若 $\mathfrak{P}'$ 是 $\mathfrak{P}$的有限细化，则我们还有一个函子 $\mathrm{Init}:\ Q(C,\mathfrak{P})\to Q(C,\mathfrak{P}')$（命题 2.45）。

表示。在第3节中，我们研究取值于 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{K}$中的路径范畴表示。取值于 $\mathcal{K}$ 中的 $\mathcal{A}$ 表示是一个函子 $M:\ \mathcal{A}\to\mathcal{K}$ （定义 3.1）。这类表示的范畴记作 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$。这里我们讨论 $\Bbbk$-线性版本，但几乎所有结论也适用于 C的表示。若表示 M 具有相容屏幕 $\mathfrak{P}$，则称其为像素化表示，并称屏幕 $\mathfrak{P}$将 M 像素化（定义 3.4）。我们证明，每个像素化表示 M 都来自某个$\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$的表示，其中 $\mathfrak{P}$ 将 M 像素化（定理 3.7）。

令 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{P}$ 为 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$ 的一组屏幕，使得对于任意有限集$\{\mathfrak{P}_i\}_{i=1}^n\subset\mathscr{L}$，都存在一个细化每个 $\mathfrak{P}_i$ 的 $\mathfrak{P}\in\mathscr{L}$。范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 的全子范畴，且满足：若 M 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 中的一个表示，则存在一个屏幕 $\mathfrak{P}\in\mathscr{L}$，使得 $\mathfrak{P}$ 对 M 进行像素化。

定理 *B*（定理 *3.10* 和推论 *3.14*）。范畴 $Rep^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 是 $Rep_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 的宽子范畴。也就是说，$Rep^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 是阿贝尔范畴，且嵌入 $Rep^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}) \to Rep_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 是正合的。此外，$Rep_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 上的任意正合结构 $\mathbb{E}$ 都限制为 $Rep^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 上的正合结构。

位点与层。在第 4 节中，我们研究像素化如何与位点和层相互作用。我们证明，若路径范畴 C 是一个位点，那么 $Q(C,\mathfrak{P})$ 也是一个位点，并且诱导的函子 $C \to Q(C,\mathfrak{P})$ 是连续的（定理 4.8）。我们还证明，分配格可以解释为路径范畴。当 C 是较大格 L的子格时，我们为每个 $Y \in L$ 定义一个屏 $\mathfrak{P}_Y$（定义 4.9），并证明$C^{\mathfrak{P}_Y}$ 同构于 C 的一个子格（定理 4.12）。该定理可以如下理解：我们将 $\mathrm{Top}(X)$ 记作一个范畴，其对象是 X 的开集，态射是这些开集的包含映射。

定理 C (推论4.13)。 按具体程度递增排列：

(1) 设 X 是一个拓扑空间， Y 是其带有子空间拓扑的子集。那么，*Top(Y)* 与 Q*(Top(X)* $\mathfrak{P}_Y$*)* 有典范同构。*(2)* 设 R 是一个交换环， $\mathfrak{p}$ 是 R中的一个素理想。设 $Y(\mathfrak{p}) = \{q \in Spec(R) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$。那么，*Top(Spec(*$R_{\mathfrak{p}}$*))* 与 Q *(Top(Spec(R))*$^{\mathfrak{P}_Y(\mathfrak{p})}$ *有典范同构。也就是说，我们可以将 Top(Spec(*$R_{\mathfrak{p}}$*))* 视为 *Top(Spec(R))* 的像素化。

我们还介绍了环化位点 $(X,\mathcal{O}_X)$ 与 $\mathcal{O}_X$-模的平行理论。我们将路径化位点 $(E,\mathcal{O}_E)$ 定义为带有路径范畴层 $\mathcal{O}_E$的位点 E 。作为“标准”例子，我们证明，若 $\mathscr{P}$ 包含一个作为位点的子范畴 $\mathscr{P}$ （定义4.15），则在 $\mathscr{P}$ 上存在一个层 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$ ，它将屏幕 $\mathfrak{P}$ 映射到$Q(C,\mathfrak{P})$，而态射则是第2节中的 Init 函子。

与一个 $\mathcal{O}_X$-模平行的对象是一个 $\mathcal{O}_E$-表示（定义4.20）。对一个 $\mathcal{O}_X$-模的类似要求，经过公理化后，既能适用于我们设定中的表示（函子），又不会遇到基础问题。我们给出一个 $\mathcal{O}_E$-表示的“经典”例子（例4.21），以及一个$\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$-表示的例子，其中 $\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的屏幕集合（例4.23）。

高阶 *Auslander* 范畴。在第5 节中，我们介绍像素化在高阶同调代数中的一个应用。具体而言，我们考察高阶 Auslander 范畴，假设 $\Bbbk$ 是一个域，并且 $\mathcal{K} = \Bbbk$-vec是有限维 $\Bbbk$-向量空间构成的范畴。我们借鉴 [OT12], 中的一些观点，给出这一理论的连续版本。我们定义类型为 A的高阶 Auslander 范畴，记作 $\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}}$ ，其中 $n \geq 1$ 可为任意对象（定义5.10）。

在此情形下，我们考虑有限呈示模，它们与第 3.2 节中定义的特定 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}(n)}(\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ 相一致，并带有指定的 $\mathscr{A}(n) \subset \mathscr{P}$。范畴 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ 的对象是取值于有限维$\Bbbk$-向量空间的函子，称为逐点有限维；而 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}(n)}(\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ 是 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ 的子范畴。对于每个 $n \geq 1$，我们定义 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}(n)}(\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ 的一个子范畴 $\mathcal{M}^{(n)}$，并证明 $\mathrm{add}\ \mathcal{M}^{(n)}$ 在 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}(n)}(\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ 中是 $(n-1)$-簇倾斜的（命题 5.20）。

由于我们是在连续统中工作，因此必须对 $\mathcal{M}^{(n)}$ 取商，记作$\mathcal{M}^{(n)}$ (定义5.21）。于是得到以下结果。

定理 D (定理 5.22)。 设 $n \geq 1$ 属于 $\mathbb{N}$。那么 $\mathcal{M}^{(n)\,op} \cong \mathcal{A}^{(n+1)}_{\mathbb{R}}$ 。

约定。 我们用 $\Bbbk$ 表示含幺交换结合环，并用$\Bbbk$-模表示 $\Bbbk$-模范畴。对于范畴论学者：当我们说“$\Bbbk$-线性”时，指的是“以 $\Bbbk$-模为富集范畴”，其中 $\Bbbk$是我们的交换环。当

我们说“一个 $\Bbbk$-线性函子”时，指的是“一个加性 $\Bbbk$-线性函子”。当 $\Bbbk$ 是域时，范畴 $\Bbbk$-Vec和 $\Bbbk$-vec分别是所有 $\Bbbk$-向量空间构成的范畴和有限维 $\Bbbk$-向量空间构成的范畴。最后，作者认为 $0 \in \mathbb{N}$。

未来方向。 像素化有许多可行的发展方向。首先需要考虑的是多参数持久模。在 [BBH22、BBH23、ABH24、BDL25], 的研究中，人们正致力于理解持久模的不变量，因为一般而言，不可能得到完整的结构定理。像素化过程以及第 3 节中的结果，与同调近似以及利用这类近似来理解不变量直接相关。不过，要恰当地确立这种联系，还需要进行证明和仔细的计算。莫比乌斯同调的情形也很有意思（见 [PS26]）。值得探究的是，第 3 节和第 4 节的结果能否在这一特定背景下结合起来；如果可以，又该如何结合。

此外，路径化位点的研究才刚刚起步。$\mathcal{O}_E$-表示范畴是阿贝尔范畴吗？如果不是，原因何在？可以对定义作何修改，使 $\mathcal{O}_E$-表示范畴成为阿贝尔范畴？假设 $\mathcal{O}_E$-表示范畴是阿贝尔范畴，那么在路径化位点的框架中，与（拟）凝聚层相对应的构造是什么？要讲清楚这一理论， E 或 $\mathcal{O}_E$ 中的路径范畴需要满足哪些条件？从这一视角出发，我们能从代数几何领域了解到什么？

最后，本文中路径范畴的定义不允许出现“平行路径”，即像相同但被视为彼此独立的路径。例如，本文的路径范畴定义不允许出现 Kronicker 箭图中的箭头：$1 \rightrightarrows 2$。应该可以修改或扩充本文给出的构造以允许这类平行路径，但本文目前已经有55 页之长。

致谢。作者谨向 Karin M. Jacobsen 致谢，感谢她早期就高阶 Auslander 代数展开的启发性讨论。作者还要感谢 Eric J. Hanson、Charles Paquette 和 Emine Yıldırım；他们此前与作者的合作影响了本文所采用的一些视角。

经费支持。作者获得 FWO 项目 1298325N 的资助。本项目始于作者获得根特大学 BOF 项目 01P12621 资助期间。作者还获得了 FWO 项目 G0F5921N（奥德修斯）和 G023721N 的部分资助，以及鲁汶大学项目 iBOF/23/064 的资助。

1. 路径与屏幕

本节将介绍本文中要用到的两个主要结构。在第1.1 节中，我们将介绍一个集合 $\mathbb{X}$及其一族“路径” $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{X}$，以及路径上的一个等价关系 $\sim$。在第1.2节中，我们将介绍一种特殊的划分，称为屏。在本文余下部分，我们将广泛运用这些三元组和屏的性质。

1.1. **路径**。我们首先定义路径的相容集合 Γ （定义1.1）以及路径上的一个有用等价关系 $\sim$（定义1.2）。

设 $\mathbb{X}$ 为一个非空集合。尽管 $\mathbb{X}$ 不一定来自拓扑空间，我们仍将函数 $[0,1] \to \mathbb{X}$ 称为路径。我们以与拓扑情形中类似的方式复合路径。给定 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{X}$ 和 $\gamma'\colon [0,1] \to \mathbb{X}$，使得

$\gamma(1) = \gamma'(0)$，我们构造一条新的路径 $\gamma \cdot \gamma' \colon [0,1] \to \mathbb{X}$，定义如下：

$$\gamma \cdot \gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2(t-\frac{1}{2})) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

定义 1.1 (Γ)。设 $\mathbb{X}$ 是一个非空集合，并设 Γ 是 $\mathbb{X}$中满足以下条件的路径子集。

(1) 对复合封闭：若 γ，$\gamma' \in \Gamma$ 且 $\gamma(1) = \gamma'(0)$，则 $\gamma \cdot \gamma' \in \Gamma$。(2) 对子路径封闭：对于每个 $\gamma \in \Gamma$ 以及每个（弱）保序映射 $\phi \colon [0,1] \to [0,1]$，只要 ϕ 将区间映为区间，路径 $\gamma\phi$就属于 Γ，其中 $\gamma\phi$ 是函数复合。(3) 对常值路径封闭：对于每个 $x \in \mathbb{X}$，在 x 处的常值路径属于Γ。也就是说，对于每个 $x \in \mathbb{X}$，都存在一个 $\gamma \in \Gamma$，使得对于所有 $t \in [0,1]$，都有 $\gamma(t) = x$。

请注意，我们明确不对 Γ 作任何假设，定义中列出的条件除外。特别是，我们不假设任何有限性、离散性、基数、偏序、循环序等。

构造 $\mathbb{X}$ 和 Γ 最自然的例子，是取 $\mathbb{X}$ 为一个拓扑空间，并取 Γ 为所有映入 $\mathbb{X}$ 的路径。不过，这样做极其繁琐。更方便的例子是取一个带有某种流的流形 $\mathbb{X}$，并取沿着该流前进的路径 Γ。

一个有趣的例子是取 $\mathbb{X}$ 为一个关系为 $\leq$ 的偏序集，并要求对每个 $\gamma \in \Gamma$，当且仅当 $t \leq s$ 属于 $[0,1]$时，$\gamma(t) \leq \gamma(s)$。

也可以考虑来自 [BvR13、PRY24]的线串箭图。此时，在大多数情况下，线串箭图中的路径是 Γ中路径的像。

定义 1.2 (∼)。给定一个非空集合 $\mathbb{X}$以及一个满足定义 Γ 1.1的，我们在 ∼上定义一个等价关系 Γ，使其满足以下要求。

(1) 常值路径只与自身等价：若 $\gamma \sim \gamma'$ 且 γ 为常值，则 γ' 也为常值。(2)等价类在重新参数化下封闭：若 $\gamma \in \Gamma$ 且 $\phi \colon [0,1] \to [0,1]$ 是一个将区间映到区间、将 0 映到 0 且将 1 映到 1 的弱保序映射，则 $\gamma \sim \gamma\phi$。(3) 等价类可复合：给定 γ，γ'，ρ，$\rho' \in \Gamma$，若 $\rho \cdot \gamma \cdot \rho'$ 且 $\rho \cdot \gamma' \cdot \rho'$ 属于 Γ，则 $\gamma \sim \gamma' \in \Gamma$ 当且仅当 $\rho \cdot \gamma \cdot \rho' \sim \rho \cdot \gamma' \cdot \rho'$。

显然，如果 $\gamma \sim \gamma'$, $\rho_1 \sim \rho_1'$, $\rho_2 \sim \rho_2'$, $\rho_1(1) = \rho_1'(1) = \gamma(0) = \gamma'(0)$，且 $\rho_2(0) = \rho_2'(0) = \gamma(1) = \gamma'(1)$，那么根据上面的定义 1.2(3)，$\rho_1 \cdot \gamma \cdot \rho_2 \sim \rho_1' \cdot \gamma' \cdot \rho_2'$。首先将 ρ_1 改为 ρ_1'，然后将 ρ_2 改为 ρ_2'，最后将 γ 改为 γ'。给定 $\mathbb{X}$、Γ和 ∼，我们将这个三元组写作 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$。

注 1.3. 在拓扑情形下，我们的等价关系 $\sim$ 通常比路径的同伦等价更细。若 Γ 包含一条路径 γ，满足 $\gamma(0) = \gamma(1)$，且存在某个 $a \in [0,1]$使得 $\gamma(a) \neq \gamma(0)$，其中 γ 与一条常值路径同伦等价，那么关系 ∼就不可能是路径的同伦等价。

记号 1.4 （∼-等价类）。给定 $\gamma \in \Gamma$，所有满足 $\gamma \sim \gamma'$ 的 $\gamma' \in \Gamma$ 的集合记作 $[\gamma]$。也就是说，$[\gamma]$ 是 γ 的 ∼-等价类。

下面的例子是贯穿全文的例子的开端。

例 1.5（贯穿全文的例子）。设 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$，并令 Γ 为所有连续函数 $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}$，其中 $s \leq t$ 蕴含 $\gamma(s) \leq \gamma(t)$。对于“连续”一词，我们认为 $[0,1]$ 和 $\mathbb{R}$ 具有通常拓扑。令 $\gamma \sim \gamma'$，若 $\gamma(0) = \gamma'(0)$。那么很容易验证，$(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 满足定义 1.1 和 1.2。

记号 1.6 ($\mathbb{R}$)。 沿用记号，若我们将 $\mathbb{R}$ 视为一个三元组($\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$)，那么指的是例 ($\mathbb{R}$, $\Gamma/\sim$) 中的三元组 1.5。

我们的三元组（$\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$）以一种自然的方式构成一个范畴。

定义 1.7 （**X**）。 我们将范畴 **X** 定义为对象为满足定义 （$\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$） 1.1 和 1.2 的三元组，态射定义如下。

设 （$\mathbb{X}_1$，$\Gamma_1/\sim_1$） 和 （$\mathbb{X}_2$，$\Gamma_2/\sim_2$） 满足定义 1.1 和 1.2，并设 f： $\mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ 是一个集合函数。我们称 f： （$\mathbb{X}_1$，$\Gamma_1/\sim_1$） $\to$ （$\mathbb{X}_2$，$\Gamma_2/\sim_2$） 是**X** 中的一个态射，当且仅当满足以下条件。

(1) 如果 $\gamma \in \Gamma_1$，那么 $f \circ \gamma \in \Gamma_2$。(2) 如果 γ，$\gamma' \in \Gamma_1$ 和 $\gamma \sim_1 \gamma'$，那么 $f \circ \gamma \sim_2 f \circ \gamma'$。

命题 1.8. 定义 **1.7** 中的 X 是一个范畴。

证明。 假设 $f: (\mathbb{X}_1, \Gamma_1/\sim_1) \to (\mathbb{X}_2, \Gamma_2/\sim_2)$ 和 $g: (\mathbb{X}_2, \Gamma_2/\sim_2) \to (\mathbb{X}_3, \Gamma_3/\sim_3)$ 是态射。我们看到，如果 $\gamma \in \Gamma_1$，那么 $f \circ \gamma \in \Gamma_2$，因此 $g \circ (f \circ \gamma) \in \Gamma_3$。此外，若 $\gamma \sim_1 \gamma'$，对于 $\gamma, \gamma' \in \Gamma_1$，则我们知道 $f \circ \gamma \sim_2 f \circ \gamma'$，因此 $g \circ (f \circ \gamma) \sim_3 g \circ (f \circ \gamma')$。由此， $g \circ f$ 也是一个态射。

显然，任意 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 上的恒等映射都是一个态射。而且，由于集合之间的函数复合满足结合律，我们看到态射的复合也满足结合律。最后，回想一下，每个 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 都是由集合和关系构成的集合。因此，存在一个三元组范畴 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$，它满足定义 1.1 和 1.2，其态射正是我们刚刚描述的那些。 □

X中的终对象是与($\{*\}$，$\{\gamma\}/\sim$)同一同构类中的对象，其中 γ 是 $*$处的常值路径。该等价关系是平凡的。现在我们来描述**X**中的积。

定义1.9 （三元组的积）。 设 $\{(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\sim_i)\}_{i\in I}$ 是**X**中的一个集合大小的三元组族。我们按如下方式定义**X** 中的一个新三元组($\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$)。

- 定义$\mathbb{X} = \prod_{i\in I} \mathbb{X}_i$。
- 我们称函数 γ： $[0,1] \to \mathbb{X}$ 属于 Γ，如果对每个 $i \in I$都有 $\pi_i \circ \gamma \in \Gamma_i$。
- 对于一对 γ，$\gamma' \in \Gamma$，如果对每个 $i \in I$都有 $\pi_i \circ \gamma \sim_i \pi_i \circ \gamma'$，我们就称 $\gamma \sim \gamma'$。

我们也将($\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$)写作$\prod_{i\in I}(\mathbb{X}_i$，$\Gamma_i/\sim_i)$。

下面的命题说明，我们在 **X** 中拥有所有积。

命题 1.10。 设 $\{(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\sim_i)\}_{i\in I}$ 是 **X** 中一个集合大小的三元组族。那么 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim) = \prod_{i\in I}(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\sim_i)$ 是 **X** 中的积。

证明。 首先，我们证明 $\prod_{i\in I}(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\sim_i)$ 是 **X** 中的一个三元组，然后证明它确实是 **X**中的积。显然，只需验证 Γ满足定义 1.1，因此我们重点证明定义 1.2 成立。

定义 *1.2(1)*。设 γ，$\gamma' \in \Gamma$，$\gamma \sim \gamma'$，并且 γ 是常值。那么，对每个$1 \le i \le n$，我们都有 $\pi_i\gamma \sim_i \pi_i\gamma'$，且每个 $\pi_i\gamma$ 都是常值。因此，对每个 $i \in I$， $\pi_i\gamma'$ 都是常值，所以 γ' 也为常值。

定义 *1.2(2)*。设 $\gamma \in \Gamma$ 且设 ϕ： $[0,1] \to [0,1]$ 是一个弱保序映射，将区间映射为区间，并将 0 映射为 0、将 1 映射为 1。对于每个 $i \in I$，我们有 $\pi_i\gamma\phi \sim_i \pi_i\gamma$。于是有 $\gamma\phi \sim \gamma$。

定义 1.2(3)。设 γ，γ'，ρ，$\rho' \in \Gamma$ 使得 $\rho\cdot\gamma\cdot\rho'$ 且 $\rho\cdot\gamma'\cdot\rho'$ 也属于Γ。于是有

$$\begin{aligned}\gamma\sim\gamma' &\Leftrightarrow \pi_i\gamma\sim_i\pi_i\gamma',\quad \forall i\in I\\ &\Leftrightarrow \pi_i\rho\cdot\pi_i\gamma\cdot\pi_i\rho'\sim_i\pi_i\rho\cdot\pi_i\gamma'\cdot\pi_i\rho',\quad \forall i\in I\\ &\Leftrightarrow \pi_i(\rho\cdot\gamma\cdot\rho')\sim_i\pi_i(\rho\cdot\gamma'\cdot\rho'),\quad \forall i\in I\\ &\Leftrightarrow \rho\cdot\gamma\cdot\rho'\sim\rho\cdot\gamma'\cdot\rho'.\end{aligned}$$

现在我们证明，$(\mathbb{X},\Gamma/\sim)=\prod_{i\in I}(\mathbb{X}_i,\Gamma_i/\sim_i)$ 是 X 中的积。注意，根据构造，每个 π_i 都是一个态射 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)\to(\mathbb{X}_i,\Gamma_i/\sim_i)$。设 $(\mathbb{Y},\Delta/\approx)$ 是 X 中的一个三元组，并且对每个 $i\in I$，设 $f_i\colon(\mathbb{Y},\Delta/\approx)\to(\mathbb{X}_i,\Gamma_i/\sim_i)$ 是一个态射。定义 $f\colon\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$，令 $y\mapsto(f_1(y)\ldots,f_n(y))$。我们立即看到，作为集合间的函数，对每个 $i\in I$，$\pi_i\circ f=f_i$。还需证明 f 是 X 中的一个态射。

设 $\delta\in\Delta$。则 $f(\delta)=(f_1(\delta)\ldots,f_n(\delta))$。我们知道，对 $i\in I$，每个 $f_i(\delta)\in\Gamma_i$。因此，根据定义，$f(\delta)\in\Gamma$。假设 $\delta\approx\delta'$。那么，对每个 $i\in I$，$f_i\circ\delta\sim_i f_i\circ\delta'$。因此，根据定义，$f\circ\delta\sim f\circ\delta'$。所以 f 是一个态射，因此 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$ 是 $\mathbf{X}$ 中的积。□

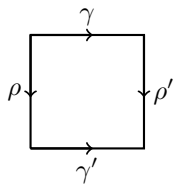
例1.11（贯穿全文的例子）。设 $n\in\mathbb{N}_{>1}$ 并设 $(\mathbb{X}_i,\ \Gamma_i/\sim_i)=\mathbb{R}$（来自例 1.5），对每个 $1\le i\le n$。我们常将积简记为 $\mathbb{R}^n$ 积$\prod_{i=1}^n\mathbb{R}=\prod_{i=1}^n(\mathbb{X}_i,\ \Gamma_i/\sim_i)$，位于 $\mathbf{X}$中。

1.2. **屏**。本节考察 $\mathbb{X}$ 满足某些条件的划分，称为屏（定义 1.12），并证明一些稍后会用到的基本性质。

我们用 $\mathfrak{P}$ 表示划分，并用 X、Y、Z..... 表示划分中的元素。也就是说，$\mathrm{X}\in\mathfrak{P}$ 和 $\mathrm{X}\subseteq\mathbb{X}$。

定义 1.12（屏）。给定 $\mathbf{X}$ 中的一个三元组（$\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$），$\mathbb{X}$ 的一个划分 $\mathfrak{P}$ 称为屏，如果满足以下条件。

(1) $\mathfrak{P}$ 的元素是 $\sim$-薄的：取满足 $\mathrm{im}(\gamma)\subset\mathrm{X}\in\mathfrak{P}$,$\gamma(0)=\gamma'(0)$，$\gamma(1)=\gamma'$(1) 的 $\gamma,\gamma'\in\Gamma$。那么 $\gamma\sim\gamma'$ 当且仅当 $\mathrm{im}(\gamma')\subset\mathrm{X}$。(2) $\mathfrak{P}$ 的元素是 Γ-连通的：对任意 $x,y\in$，$\mathrm{X}\in\mathfrak{P}$ 中存在一个有限游走$\gamma_0\cdot\gamma_1^{-1}\cdot\gamma_2\cdots\gamma_{2n-1}^{-1}\cdot\gamma_{2n}$，满足 $\gamma_0(0)=x$，$\gamma_{2n}(1)=y$，$\forall i(\gamma_i\in\Gamma)$，且$\forall i(\mathrm{im}(\gamma_i)\subset\mathrm{X})$，其中 γ^{-1} 表示反向遍历该路径，而任意 γ_i都可以是常值路径。(3) $\mathfrak{P}$ 满足 Ore 条件：考虑 $\mathbb{X}$ 中的路径方块：



如果 $\rho,\gamma\in\Gamma$，且 $\mathrm{im}(\rho)\subset\mathrm{X}\in\mathfrak{P}$，那么存在 $\rho',\gamma'\in\Gamma$，使得 $\mathrm{im}(\rho')\subset\mathrm{Y}\in\mathfrak{P}$，并且 $\gamma\cdot\rho'\sim\rho\cdot\gamma'$。类似地，如果 $\rho',\gamma'\in\Gamma$，且 $\mathrm{im}(\rho')\subset\mathrm{Y}\in\mathfrak{P}$，那么存在 $\rho,\gamma\in\Gamma$，使得 $\mathrm{im}(\rho)\subset\mathrm{X}\in\mathfrak{P}$，并且 $\rho'\cdot\gamma\sim\gamma'\cdot\rho$。

(4) $\mathfrak{P}$ 是离散的：对于任意路径 $\gamma\in\Gamma$，都存在 $[0,1]$的一个有限划分 $\{I_i\}_{i=1}^n$，以及由 $\mathfrak{P}$ 中像素构成的相应有限列表 $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$，满足以下条件。每个 I_i 都是一个子区间；若 $t\in I_i$，则 $\gamma(t)\in\mathrm{X}_i$。我们允许仅当 $|j-i|>1$时 $\mathrm{X}_i=\mathrm{X}j$。

(5) $\mathfrak{P}$ 保持等价关系：设 γ、$\gamma' \in \Gamma$ 具有相同的划分$\{I_i\}_{i=1}^n = \{I_i'\}_{i=1}^n$，且根据 (4)，其列表分别为 $(X_1, \dots, X_n) = (X_1', \dots, X_n')$。还假设 $\gamma(0) = \gamma'(0)$，$\gamma(1) = \gamma'(1)$，并且若 $t \in I_i = I_i'$，则$\gamma(t)$ $\gamma'(t) \in X_i = X_i'$。那么 $\gamma \sim \gamma'$。

若 $\mathfrak{P}$ 是一个屏，我们称其元素为 像素。

例 1.13 (贯穿全文的例子)。 设 $\mathbb{R}$ 是例 1.5 中的三元组，并设$\mathfrak{P} = \{[i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$。那么 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个屏。

事实上，稍加考察定义 1.12即可发现，对于 $\mathfrak{P}$的任意一个屏 $\mathbb{R}$，每个像素 $X \in \mathfrak{P}$ 都是一个区间。离散性要求意味着，$\mathbb{R}$ 的屏是 $\mathbb{R}$（作为集合）的那些划分，其中对于任意有界区间 $I \subset \mathbb{R}$，只有有限多个像素 $X \in \mathfrak{P}$ 满足 $I \cap X \neq \emptyset$。

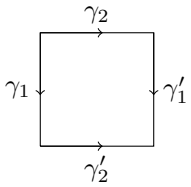
屏的“一维”版本，例如例 1.13中的屏，源自对线串箭图的研究，可见于 [PRY24，定义 2。6]。

本节余下部分中，我们固定一个三元组 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$，其中 $\mathbf{X}$。

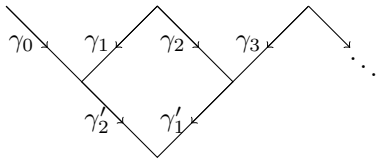
下面的引理将定义 1.12(2) 化为一个实用的简化形式，本文将始终使用这一形式。

引理 1.14。 设 $\mathfrak{P}$ 是 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 的一个屏，并设 $X \in \mathfrak{P}$。对于任意 $x, y \in X$，存在一条由两条路径组成的游走，从 x 到 y，且位于 X 中。

证明。根据定义 1.12(2)，设 $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_{2n-1}^{-1} \cdot \gamma_{2n}$ 是有限游走，其中 $\gamma_0(0) = x$，$\gamma_{2n}(1) = y$，且对于每个 $0 \leq i \leq 2n$，$\mathrm{im}(\gamma_i) \subset X$。考虑 γ_1 和 γ_2。我们知道 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$，因此可以使用定义 1.12(3) 得到两条新的路径 γ_1' 和 γ_2'，其中 $\mathrm{im}(\gamma_1') \subset X$。由此得到如下的 $\mathbb{X}$ 示意图：



并且，我们知道 $\gamma_2 \cdot \gamma_1' \sim \gamma_1 \cdot \gamma_2'$。因此，$\mathrm{im}(\gamma_2 \cdot \gamma_1') \subset X$。根据定义 1.12(1)，我们必有 $\mathrm{im}(\gamma_1 \cdot \gamma_2') \subset X$。现在，我们在 $\mathbb{X}$ 中有如下路径：



如果我们将 $\gamma_0 \cdot (\gamma_1)^{-1} \cdot \gamma_2 \cdot (\gamma - 3)^{-1}$ 替换为 $(\gamma_0 \cdot \gamma_2') \cdot (\gamma_3 \cdot \gamma_1')^{-1}$，游走便缩短了两条路径。我们可以重复这一过程，得到一条从 x到 y的游走 $\gamma_0''(\gamma_1')^{-1}$。同样，我们可以构造一条从 x 到 y的游走 $\gamma_0''(\gamma_1'')^{-1}\gamma_2''$，使得 γ_0''是一条常值路径，实际上这是一条由两条路径组成的游走。□

定义1.15 ($\mathscr{P}$)。 用 $\mathscr{P}$ 表示 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 上所有屏的偏序集。如果 $\mathfrak{P}$ 细化 $\mathfrak{P}'$，我们称 $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{P}'$。

命题 1.16。 如果 $\mathscr{P}$ 非空，那么它至少有一个极大元。

证明。我们将使用库拉托夫斯基–佐恩引理（通常称为佐恩引理）。

设 $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}$ 为一条链。定义态射 $\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$，只要 $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{P}'$ 属于 $\mathscr{T}$，就令 $X \mapsto X'$，当且仅当 $X \subset X'$。在集合范畴中，设 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 为 $\mathscr{T}$的余极限，其中我们

将元素 $X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 与 $\bigcup X$ 视为同一元素。沿用记号，我们令 $X_{x \in \mathfrak{P} \in \mathscr{T},\, x \mapsto x}$ 等于这个大并集。

首先，我们证明 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 是一个划分。设 $x \in \mathbb{X}$。对于每个 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$，都存在唯一的 $X \in \mathfrak{P}$，使得 $x \in X$。于是，存在某个 $X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$，使得 $X \subseteq X$，因此 $x \in X$。假设 $x \in X \cap Y$，其中 $X, Y \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$。那么，对于任意 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$，都存在 $X, Y \in \mathfrak{P}$，使得 $x \in X$、$x \in Y$、$X \subseteq X$ 且 $Y \subseteq Y$。于是 $x \in X \cap Y$，因此 $X = Y$，这意味着 $X = Y$。因此，$\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一个划分。

现在我们将证明 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 是一个屏。我们从定义 1.12(4) 开始。设 $\gamma \in \Gamma$，并设 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$。我们知道，$[0,1]$ 存在一个有限划分 $\{I_i\}_{i=1}^n$，以及由 $\mathfrak{P}$ 中的像素组成的列表 X_1、……、X_n（可以有重复），使得在每个 I_i 上，$\mathrm{im}(\gamma|_{I_i})$ 都包含于像素 X_i 中。对于每个 $1 \leq i \leq n$，令 X_i 为 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 中包含 X_i 的像素。于是我们立即得到，$\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 也是离散的。

技巧： 我们将再次使用以下技巧。现在证明，若 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$，则存在 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$，使得 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X \in \mathfrak{P}$，其中 $X \subseteq X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$。令 $X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$，并设 $\gamma \in \Gamma$ 是一条满足 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X$ 的路径。令 $\mathfrak{P}'' \in \mathscr{T}$，注意到由于 $\mathfrak{P}''$ 是离散的，我们有上一段中给出的像素有限列表 X'_1、……、$X'_{n''}$，以及相应的划分 $\{I'_i\}_{i=1}^n$，它将 $[0,1]$ 划分为若干部分。由于对每个 $1 \leq i \leq n$ 都有 $X'_i \subseteq X$，因此存在某个 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$，使得 $\bigcup_{i=1}^n X_i \subseteq X \in \mathfrak{P}'$。于是 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X \in \mathfrak{P}$，且 $X \subseteq X$。

现在我们证明定义 1.12(1)。设 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ 和 $X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$，使得 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X$，$\gamma(0) = \gamma'(0)$，且 $\gamma(1) = \gamma'(1)$。根据我们的技巧，存在一个划分 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$ 和像素 $X \in \mathfrak{P}$，使得 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X$。于是，由于 $\mathfrak{P}$ 是一个屏，$\gamma \sim \gamma'$ 当且仅当 $\mathrm{im}(\gamma') \subset X$。因此，如果 $\gamma \sim \gamma'$，那么 $\mathrm{im}(\gamma') \subset X$。若 $\mathrm{im}(\gamma') \subset X$，则根据我们的技巧，存在某个 $X' \in \mathfrak{P}' \in \mathscr{T}$，使得 $\mathrm{im}(\gamma') \subset X'$。或者 $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{P}'$，或者 $\mathfrak{P}' \leq \mathfrak{P}$。令 $\mathfrak{P}''$ 为两者中较大的那个；若 $\mathfrak{P}$ 较大，则令 X'' 为与 $X \in \mathfrak{P}$ 对应的像素；若 $\mathfrak{P}'$ 较大，则令 X'' 为与 $X' \in \mathfrak{P}'$ 对应的像素。于是 $\mathrm{im}(\gamma) \cup \mathrm{im}(\gamma') \subset X''$，并且由于 $\mathfrak{P}''$ 是一个屏，我们知道 $\gamma \sim \gamma'$。

现在我们证明定义 1.12(3)。设 $\rho, \gamma \in \Gamma$，使得 $\rho(0) = \gamma(0)$，且 $\mathrm{im}(\rho) \subset X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$。我们只证明这一种情形，另一种类似。于是，利用我们的技巧，存在某个 $X \in \mathfrak{P} \in \mathscr{T}$，使得 $\mathrm{im}(\rho) \subset X$。接着，由于 $\mathfrak{P}$ 是一个屏，存在路径 γ', ρ'，其中 $\gamma \cdot \rho' \sim \rho \cdot \gamma'$ 且 $\mathrm{im}(\rho') \subset Y \in \mathfrak{P}$。于是存在某个 $Y \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$，使得 $Y \subseteq Y$。

现在我们证明定义 1.12(2)。设 $x, y \in X \in \mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$。设 $\mathfrak{P}' \in \mathscr{T}$。则 $x \in X'$ 且 $y \in Y'$，其中 X'、$Y' \in \mathfrak{P}'$。由于 $X' \cup Y' \subset X$，存在某个 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$，使得 $X \cup Y' \subseteq X \in \mathfrak{P}$。于是 $x, y \in X$，因此在 $X \subseteq X$ 中存在一条从 x 到 y 的有限游走。

最后，我们证明定义 1.12(5)。设 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$。假设存在 $[0,1]$ 的一个划分 $\{I_i\}_{i=1}^n$，其中每个 I_i 都是一个区间，并且若 $t \in I_i$，则 $\gamma(t)\, \gamma'(t) \in X_i$。取 $\mathfrak{P} \in \mathscr{T}$。对于每个 $1 \leq i \leq n$，我们都有 I_i 的一个划分 $\{J_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$，使得每个 J_{ij} 都是一个区间，并且 $\gamma(t) \in X_{ij}$，若 $t \in J_{ij}$。对于 γ'，我们也有类似的划分 $\{J'_{ij}\}_{j=1}^{m'_i}$。

对于每个 $1 \leq i \leq n$，我们有 $(\bigcup_{j=1}^{m_i} X_{ij}) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'_i} X'_{ij}) \subset X_i$。因此，存在某个 $\mathfrak{P}_i \in \mathscr{T}$，满足 X_i，使得对于每个 $1 \leq j \leq m_i$ 和 $1 \leq j' \leq m'_i$，都有 $X_{ij} \subset X_i$ 且 $X'_{ij'} \subset X_i$。由于 $\mathscr{T}$ 是一条链，$\mathfrak{P}_a$ 中有一个是 $\{\mathfrak{P}_i\}_{i=1}^n$ 中的极大元。因此，若 $t \in I_i$，则 $\gamma(t)\, \gamma'(t) \in X_i \subset X_i$。由于 $\mathfrak{P}_a$ 是一个屏，我们知道 $\gamma \sim \gamma'$，满足定义 1.12(5)。证明至此完成。我们现在已经证明 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$ 是一个屏。□

在本文中，对于我们所考虑的 $\mathbf{X}$ 中的任意三元组 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$，我们均假设 $\mathscr{P} \neq \emptyset$。

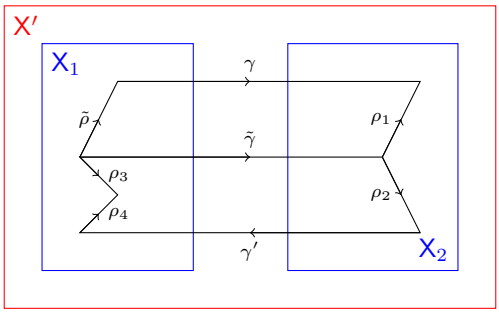


图1.1. 引理的证明示意图1.18。

注1.17。 定义1.12(1) 意味着，如果 $\gamma(0) = \gamma(1)$ 且 γ 不是常值路径，那么存在像素 $X \neq Y \in \mathfrak{P}$ 使得 $\gamma(a) \in X$ 且 $\gamma(b) \in Y$，对于某个$a, b \in [0,1]$。

以下技术引理有助于证明引理1.19。

引理 *1.18.* 设 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}'$ 是 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 的屏，且 $\mathfrak{P}$ 细化 $\mathfrak{P}'$。假设 $X_1, X_2 \in \mathfrak{P}$、$X' \in \mathfrak{P}'$，且 $X_1 \cup X_2 \subset X'$。设 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $\gamma(0) \in X1$、$\gamma(1) \in X_2$，且 $im(\gamma) \subset X'$。那么不存在满足 $\gamma'(0) \in X2$、$\gamma'(1) \in X_1$，且 $im(\gamma') \subset X'$ 的 $\gamma' \in \Gamma$。

证明。 反设这样的 γ' 存在。建议读者参考图 1.1，以了解证明思路。

由引理 1.14 可得路径 ρ_1, ρ_2，满足 $\rho_1(0) = \rho_2(0)$，$\mathrm{im}(\rho_1) \cup \mathrm{im}(\rho_2) \subset X_2$，$\rho_1(1) = \gamma(1)$，且 $\rho_2(1) = \gamma'(0)$。由于我们有 $\gamma(0) \in X1$，$\gamma(1) \in X_2$，，并且 $\mathrm{im}(\rho_1) \subset X_2$，，因此存在某个 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\rho}$，满足 $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\rho}(0)$，$\tilde{\rho}(1) = \gamma(0)$，且 $\tilde{\gamma}(1) = \rho_1(0)$，使得 $\tilde{\rho} \cdot \gamma = \tilde{\gamma} \cdot \rho_1$ 且 $\mathrm{im}(\tilde{\rho}) \subset X_1$（定义 1.12(3)）。由于 $\tilde{\gamma} \cdot \rho_1 \sim \tilde{\rho} \cdot \gamma$，由定义 1.12(1) 可知 $\mathrm{im}(\tilde{\gamma}) \subset X'$。再次使用引理 1.14，可得路径$\rho_3, \rho_4$，满足 $\rho_3(1) = \rho_4(1)$，$\rho_3(0) = \tilde{\gamma}(0)$，$\rho_4(0) = \gamma'(0)$，且 $\mathrm{im}(\rho_3) \cup \mathrm{im}(\rho_4) \subset X_1$。

令 $\gamma'' = \tilde{\gamma} \cdot \rho_2 \cdot \gamma' \cdot \rho_4$。现在我们有 $\mathrm{im}(\gamma'') \subset X'$、$\mathrm{im}(\rho_3) \subset X'$、$\gamma''(0) = \rho_3(0)$ 以及 $\gamma''(1) = \rho_3(1)$。因此，根据定义 1.12(1)，我们有 $\gamma'' \sim \rho_3$。但是，由于 $\mathrm{im}(\rho_3) \subset X_1$，，根据定义 1.12(1)，我们也必有 $\mathrm{im}(\gamma'') \subset X_1$。然而，$\gamma'(0) \in X_2$，这就产生了矛盾。证明完毕。□

现在，引理 1.19在多个地方都很有用，尤其是在命题 2.45的证明中。

引理 1.19。 设 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}'$ 是$(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 的屏幕，且 $\mathfrak{P}$ 细化 $\mathfrak{P}'$。设$X' \in \mathfrak{P}'$，并假设仅存在有限多个像素 $\{X_i\}_{i=1}^n$，使得每个$X_i \subset X'$。那么存在一个初始X_j，其含义是：对于任意 $x_i \in X_i$，都存在一个$x_j \in X_j$ 和一条路径 $\gamma \in \Gamma$，满足 $\gamma(0) = x_j$ 以及 $\gamma(1) = x_i$。

证明。 我们从 $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{P}$ 开始，系统地移除像素 X_i，如果存在像素 X_j，有一条路径 $\gamma \in \Gamma$满足 $\gamma(0) \in X_j$ 且 $\gamma(1) \in X_i$。根据引理 X'的子集中的初始像素必定是最后剩下的像素，依据引理 1.18。

首先考虑 X_1 和 X_2。如果存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$，满足 $\gamma(0) \in X_i$、$\gamma(1) \in X_{3-i}$，且 $\mathrm{im}(\gamma) \subset X'$，那么我们保留 X_i 并移除 X_{3-i}。根据引理 1.18，我们知道不存在从 X_{3-i} 到 X_i的路径。现在我们得到一个包含 $\mathfrak{P}$ 个像素的子集。

反之，若不存在这样的 γ，令 $x_1 \in X_1$ 和 $x_2 \in X_2$。由于 $\mathfrak{P}'$ 是一个屏，因此存在某个 $x_i \in X_i \subset X'$ 以及路径 $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma$，满足 $\rho_1(0) = \rho_2(0) = x_i$，并且

$\mathrm{im}(\rho_1) \cup \mathrm{im}(\rho_2) \subset X'$。接着，我们移除 X_1 和 X_2。现在我们得到一个包含 $n-2$ 个像素的 $\mathfrak{P}$ 子集。

在这两种情况下，我们现在都有更少的像素，并且至多重复该过程 $n-1$ 次。最后剩下的像素就是所需的初始像素。□

对于屏 $\mathfrak{P}$，我们在路径上有如下等价关系。

定义 1.20 ($\mathfrak{P}$-等价路径)。我们称两条路径 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ 为 $\mathfrak{P}$-等价，如果存在 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \Gamma$，其中 $\mathrm{im}(\rho_1) \cup \mathrm{im}(\rho_2) \subset X \in \mathfrak{P}$，$\mathrm{im}(\rho_3) \cup \mathrm{im}(\rho_4) \subset Y \in \mathfrak{P}$，并且 $\rho_1 \cdot \gamma \cdot \rho_3 \sim \rho_2 \cdot \gamma' \cdot \rho_4$。注意，如果 $\gamma \sim \gamma'$（特别是如果 $\gamma = \gamma'$），那么 γ 与 γ'是 $\mathfrak{P}$-等价的，只需令 ρ_i 对每个 i都取恒等态射。

利用引理 1.14，很容易证明 $\mathfrak{P}$-等价确实是一种等价关系。

有时我们会将集合 $\mathbb{X}$ 的一个划分 $\mathfrak{P}$ 视为集合范畴中的诱导满射$\mathbb{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{P}$。例如，这种观点有助于定义以下运算。

定义 1.21。（划分的交与并）设 $\mathbb{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{P}$ 和 $\mathbb{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{P}'$ 是集合 $\mathbb{X}$的划分。

我们将这些划分的交定义为

$$\mathfrak{P} \sqcap \mathfrak{P}' := \{X \cap X' \mid X \in \mathfrak{P}, X' \in \mathfrak{P}'\}.$$

我们将这些划分的并定义为以下图表中的推出（在集合范畴中）：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \twoheadrightarrow & \mathfrak{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{P}' & \twoheadrightarrow & \mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{P}'. \end{array}$$

以下命题可由基础集合论直接推出。

命题 1.22. 运算 $\sqcap$ 和 $\sqcup$使集合 $\mathbb{X}$的划分构成一个格。

注 1.23. 一般而言，$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}' \in \mathscr{P}$并不意味着 $\mathfrak{P} \sqcap \mathfrak{P}' \in \mathscr{P}$或 $\mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{P}' \in \mathscr{P}$成立。这必须具体情况具体分析。

然而，如果 $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}' \in \mathscr{P}$ 意味着 $\mathfrak{P} \sqcap \mathfrak{P}', \mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{P}' \in \mathscr{P}$成立，那么 $\mathscr{P}$ 是一个格，并且中存在唯一极大元（根据命题 1.16）。

定义 1.24.（屏的乘积）设 $\{(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\!\sim_i)\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbf{X}$中的一个有限三元组集。对于每个 $1 \le i \le n$，令 $\mathfrak{P}_i$ 为 $(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\!\sim_i)$的一个屏。屏的乘积屏的乘积 $\mathfrak{P} := \prod_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$ 定义为

$$\left\{ \prod_{i=1}^n X_i \,\middle|\, X_i \in \mathfrak{P}_i \right\}.$$

命题 1.25. 设 $\{(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\!\sim_i)\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbf{X}$ 中由三元组组成的有限集，并且对每个 $1 \le i \le n$，$\mathfrak{P}_i$ 是 $(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\!\sim_i)$ 的一个屏。

(1) $\mathfrak{P} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$ 是 $(\mathbb{X}, \Gamma/\!\sim) = \prod_{i=1}^n (\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\!\sim_i)$ 的一个屏。(2) 如果 $\mathfrak{Q}$ 是 $(\mathbb{X}, \Gamma/\!\sim)$ 的一个屏，那么 $\mathfrak{Q} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{Q}_i$，其中每个 $\mathfrak{Q}_i = \{\pi_i X \mid X \in \mathfrak{Q}\}$ 都是 $(\mathbb{X}_i, \Gamma_i/\!\sim_i)$ 的一个屏，其中 $1 \le i \le n$。

证明。我们证明命题中的陈述 (1)。对于定义 1.12 中的每一项，我们可以反转所给出的论证来证明命题中的陈述 (2)。因此，我们略去陈述 (2) 的证明。

由此立即可得，$\mathfrak{P}$ 是 $\mathbb{X}$的划分。现在我们证明 $\mathfrak{P}$ 满足定义 1.12。

定义 *1.12(1)*. 设 $\gamma,\ \gamma' \in \Gamma$ 使得 $\gamma(0) = \gamma'(0),\ \gamma(1) = \gamma'(1)$，且$\mathrm{im}(\gamma) \subset \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，其中 $\mathsf{X} = \prod_{i=1}^n \mathsf{X}_i$ 且每个 $\mathsf{X}_i \in \mathfrak{P}_i$。则有

$$\begin{aligned}\gamma \sim \gamma' &\Leftrightarrow \pi_i\gamma \sim_i \pi_i\gamma',\quad 1 \le i \le n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{im}(\pi_i\gamma') \subset \mathsf{X}_i,\quad 1 \le i \le n\\ &\Leftrightarrow \pi_i(\mathrm{im}\gamma') \subset \mathsf{X}_i,\quad 1 \le i \le n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{im}(\gamma') \subset \mathsf{X}.\end{aligned}$$

定义 1.12(2). 设 $x, y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 且 $y = (y_1, \dots, y_n)$。那么，对每个 $1 \le i \le n$，我们有 $x_i, y_i \in \mathsf{X}_i$。由引理 1.14，存在一条游走 $(\rho_i)^{-1}\gamma_i$，其中 $\rho_i(1) = x_i,\ \gamma_i(1) = y_i,\ \rho_i(0) = \gamma_i(0)$，且 $\mathrm{im}(\rho_i) \cup \mathrm{im}(\gamma_i) \subset \mathsf{X}_i$。定义 $\rho, \gamma\colon [0,1] \rightrightarrows \mathbb{X}$ 为唯一满足 $\pi_i\rho = \rho_i$ 且 $\pi_i\gamma = \gamma_i$ 的函数，其中$1 \le i \le n$。那么 $\rho^{-1}\gamma$ 是一条从 x 到 y 的 X 中有限游走。

定义 1.12(3)。我们证明从 ρ 和 γ 开始的命题，因为对偶命题的证明类似。设 $\rho, \gamma \in \Gamma$ 满足 $\rho(0) = \gamma(0)$，且 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathsf{X}$。对于每个 $1 \le i \le n$，我们有 $\pi_i\rho(0) = \pi_i\gamma(0)$，且 $\mathrm{im}(\pi_i\rho) \subset \mathsf{X}_i$。于是，存在 $\rho_i', \gamma_i' \in \Gamma_i$ 使得 $\pi_i\gamma \cdot \rho_i' \sim_i \pi_i\rho \cdot \gamma_i'$，且 $\mathrm{im}(\rho_i') \subset \mathsf{Y}_i$，其中某个 $\mathsf{Y}_i \in \mathfrak{P}_i$。令 $\rho', \gamma'\colon [0,1] \rightrightarrows \mathbb{X}$ 为满足 $\pi_i\rho' = \rho_i'$ 和 $\pi_i\gamma' = \gamma_i'$ 的唯一函数。那么，$\gamma \cdot \rho' \sim \rho \cdot \gamma'$ 且 $\mathrm{im}(\rho') \subset \mathsf{Y} = \prod_{i=1}^n \mathsf{Y}_i$。

定义 1.12(4)。设 $\gamma \in \Gamma$。对于每个 $1 \le i \le n$，存在 $\mathfrak{I}_i = \{I_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ 的划分，其中每个 I_{ij} 都是一个区间，且 $\mathrm{im}(\pi_i\gamma)|_{I_{ij}}$ 包含于 $\mathsf{X}_{ij} \in \mathfrak{P}_i$。由于我们有有限个划分$\{I_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$，可以使用命题 1.22，得到 $\mathfrak{I} = \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{I}_i$。由于每个 $\mathfrak{I}_i$ 都是有限的，且我们有一个有限集，$\mathfrak{I}$ 也是一个有限划分。设 $\bigcap_i^n I_{ij}$ 非空，其中 $1 \le j \le m_i$ 对每个 $1 \le i \le n$ 都成立。于是，对每个 I_{ij}，$\mathrm{im}(\pi_i\gamma) \subset \mathsf{X}_{ij}$。因此，$\mathrm{im}(\gamma) \subset \prod_{i=1}^n \mathsf{X}_{ij}$ 在 $\bigcap_i^n I_{ij}$ 上成立。

定义 1.12(5). 设 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$，并假设存在 $[0,1]$ 的一个划分 $\{I_j\}_{j=1}^m$，使得每个 I_j 都是一个区间，且若 $t \in I_j$，则 $\gamma(t)\ \gamma'(t) \in \mathsf{X}_j = \prod_{i=1}^n \mathsf{X}_{ij}$。那么，对每个 $1 \le i \le n$ 以及每个 $1 \le j \le m$，若 $t \in I_j$，则 $\pi_i\gamma(t)\ \pi_i\gamma'(t) \in \mathsf{X}_{ij}$。因此，由于每个 $\mathfrak{P}_i$ 都是一个屏，$\pi_i\gamma \sim_i \pi_i\gamma'$。根据定义，我们有 $\gamma \sim \gamma'$。□

请注意，在上述证明的末尾，我们需要 $\{(\mathbb{X}_i,\ \Gamma_i/\sim_i)\}_{i=1}^n$ 是有限集。对于那些对不要求离散性的屏感兴趣的人，可以去掉有限性要求，转而使用 $\{(\mathbb{X}_\alpha, \Gamma_\alpha/\sim_\alpha)\}_\alpha$ 和 $\{\mathfrak{P}_\alpha\}$，其中指标集为某个 $\{\alpha\}$。不过，在本文中，我们采用有限性要求。

例 1.26 （贯穿全文的例子）。设 $\mathbb{R}^n$ 为例 1.11中的三元组。那么，$\mathbb{R}^n$ 的任意一个屏都是 $\mathbb{R}$ 的屏的乘积，如例 1.13 所示。具体而言，若 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个屏，那么每个像素 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 都是区间 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$的乘积。

虽然我们将 $\mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{P}'$ 定义为集合范畴中的一个推出，但还有一种适用于计算的替代构造。

定义 1.27 （连接复形）。设 $\mathfrak{P}$和 $\mathfrak{P}'$ 是集合 $\mathbb{X}$的划分。现在我们来构造一个 CW 复形 $\mathbb{Y}$。令 $\mathbb{Y}_0 = \mathfrak{P} \amalg \mathfrak{P}'$（这里取集合范畴中的不交并）。对每个满足 $\mathsf{X} \cap \mathsf{X}' \neq \emptyset$的 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 和 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}'$，我们在 $\mathbb{Y}_1$中添加一个从 X 到 X' 的 1-胞腔。$\mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{P}'$ 的**连接复形** 是 CW 复形 $\mathbb{Y}$，其 0-胞腔为 $\mathbb{Y}_0$，1-胞腔为 $\mathbb{Y}_1$。

注 1.28。对于每个 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，至少存在一个 $\mathsf{X}' \in \mathfrak{P}'$，使得 $\mathsf{X} \cap \mathsf{X}' \neq \emptyset$，反之亦然。

可以从任意有限集 $\{\mathfrak{P}_i\}_{i=1}^n$ 的屏幕构造一个并复形：令 $\mathbb{Y}_0$ 为 $\coprod_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$，并为像素 X_i 与 X_j 的每个两两交集添加一个 1-胞腔。

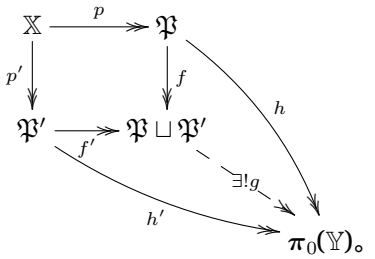
将拓扑空间 $\mathbb{X}$ 的第 0 个同伦群记作 $\pi_0(\mathbb{X})$；它等价于 $\mathbb{X}$ 的连通分支集合。

显然，以下命题可以推广到有限连接复形。

命题 1.29. 设 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}'$ 是集合 $\mathbb{X}$ 的划分，且 $\mathbb{Y}$是 $\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$的连接复形。那么 $\pi_0(\mathbb{Y})$ 与 $\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$中的元素构成双射。

证明。 设 $p\colon \mathbb{X}\twoheadrightarrow\mathfrak{P}$ 和 $p'\colon \mathbb{X}\twoheadrightarrow\mathfrak{P}'$ 分别是由 $x\mapsto \mathrm{X}\ni x$ 和$x\mapsto \mathrm{X}'\ni x$给出的满射。由于 $\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$ 是一个推出，设 $f\colon \mathfrak{P}\to\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$和 $f'\colon \mathfrak{P}'\to\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$是诱导映射。

注意，我们有一个满射 $h\colon \mathfrak{P}\twoheadrightarrow\pi_0(\mathbb{Y})$，它将 X 映到包含点 $\mathrm{X}\in\mathbb{Y}_0$ 的 $\mathbb{Y}$ 的连通分支；类似地，我们有 $h'\colon \mathfrak{P}'\twoheadrightarrow\pi_0(\mathbb{Y})$（由注 1.28 立即可得）。设 $x\in\mathbb{X}$、$\mathrm{X}\in\mathfrak{P}$和 $\mathrm{X}'\in\mathfrak{P}'$ 满足$x\in\mathrm{X}\cap\mathrm{X}'$。那么在 $\mathbb{Y}_1$ 中存在一个从 X 到 X'的 1-胞腔。因此，$hp=h'p'$，于是由于 $\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$ 是一个余极限，存在唯一映射 $g\colon \mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'\to\pi_0(\mathbb{Y})$，使得$h=gf$ 和 $h'=gf'$:



函数 g 必须是满射，因为 h 和 h' 都是满射。

设 $\mathrm{X}\sqcup\mathrm{X}'$ 和 $\mathrm{Y}\sqcup\mathrm{Y}'$ 是 $\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$ 的元素，并假设 $g(\mathrm{X}\sqcup\mathrm{X}')=g(\mathrm{Y}\sqcup\mathrm{Y}')$。那么，由于 $h=gf$，存在一条连续路径 $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{Y}$，使得 $\gamma(0)=\mathrm{X}$ 且 $\gamma(1)=\mathrm{Y}$。由于 $\mathbb{Y}$ 是一个 CW 复形，γ 可能只经过有限个 1-胞腔。令 $t_0=0$，并令 $s_1\in[0,1]$，使得 $\gamma|_{[t_0,s_1]}$ 经过一条从 $\mathrm{X}_0=\mathrm{X}$ 到某个 X_1' 的 1- 胞腔。令 $t_1\in[0,1]$，使得 $\gamma|_{[s_1,t_1]}$ 经过一条从 X_1' 到 X_1 的 1-胞腔。如此归纳下去，直到到达 $\gamma|_{[s_n,t_1=1]}$ 经过一条从 X_n' 到 $\mathrm{X}_n=\mathrm{Y}$ 的 1-胞腔。

现在，对于每个 $1\le i\le n$，我们有 $f(\mathrm{X}_{i-1})=f'(\mathrm{X}_i)=f(\mathrm{X}_i)$。特别地，$f(\mathrm{X})=f'(\mathrm{Y})$，因此 $\mathrm{X}\sqcup\mathrm{X}'=\mathrm{Y}\sqcup\mathrm{Y}'$。因此，$g$是内射的，因而也是双射的。□

注意，如果 X，X' 是属于 $\mathbb{Y}$ 的同一个连通分支的 0-胞腔，那么 X，X' 就是同一个像素 $\mathrm{X}''\in\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{P}'$ 的子集。

2. 路径范畴

本节将 X 中的三元组 $(\mathbb{X},\Gamma/\!\sim)$ 与路径范畴 C 及其关于交换环 $\Bbbk$ 的 $\Bbbk$-线性版本 $\mathcal{C}$ 联系起来（定义 2.1）。对于 $\Bbbk$-线性版本，我们还允许一个由 $(\mathbb{X},\Gamma/\!\sim)$ 中的路径生成的理想 $\mathcal{I}$（定义 2.8），并考虑 $\mathcal{A}=\mathcal{I}/\mathcal{C}$。我们使用第 1.2 节中的屏幕来构造 C 和 $\mathcal{A}$ 的特殊局部化，称为像素化，这是本文标题所指的构造。在证明像素化与箭图范畴的商有关之后（定理 2.37），我们还将证明它们的一些其他有用性质。

固定一个交换环 $\Bbbk$，本节后续内容均以此为准：2。

2.1. **分式演算与像素化。** 本节将定义路径范畴（定义2.1），并展示如何从一个屏得到分式演算（命题 2.19 和 2.19）。相对于这种特殊分式演算的局部化，就是本文标题所说的像素化。

定义 2.1（路径范畴）。 路径范畴 C（$\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$）是一个范畴，其对象为 $\mathbb{X}$，态射由下式给出

$$\mathrm{Hom}_C(x,y)=\{[\gamma]\in\Gamma\mid\gamma(0)=x,\gamma(1)=y\}.$$

$\Bbbk$-线性路径范畴 $\mathcal{C}$（$\mathbb{X}$，$\Gamma/\sim$）是这样一个范畴：其对象为$\mathbb{X}\coprod\{0\}$，态射由下式给出：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)=\begin{cases}\Bbbk\langle\{[\gamma]\in\Gamma\mid\gamma(0)=x,\gamma(1)=y\}\rangle & x,y\in\mathbb{X}\\ 0 & x=0\text{ or }y=0.\end{cases}$$

也就是说，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 是 $\Bbbk$ 对 C 的线性化，并带有一个零对象。

例 2.2（贯穿全文的例子）。 令 $\mathbb{R}$如例 1.5所述。我们将 $C=\mathbb{R}$视为一个路径范畴，其中对象为实数，并且

$$\mathrm{Hom}_C(x,y)=\begin{cases}\{*\} & x\le y\\ \emptyset & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这也是一个 A 型连续拟箭图的例子，如 [IRT23]中所述。

对于 $\Bbbk$-线性版本 $\mathcal{C}$，对象相同。Hom-模由下式给出：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)=\begin{cases}\Bbbk & x\le y\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

当 $\Bbbk$ 是一个域时，$\mathcal{C}$ 是谱范畴，当且仅当对于所有有序对 $(x,y)\in\mathbb{X}^2$，都有 $|\mathrm{Hom}_C(x,y)|<\infty$。这引出了以下猜想，而该猜想不属于本文的研究范围。

猜想 2.3。 对于每个谱范畴 $\mathcal{C}$，都存在一组选择 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$，使得 $\mathcal{C}$ 是 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$ 的 $\Bbbk$-线性路径范畴。

命题 2.4。 给定 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$，定义 $C,\mathcal{C}$*2.1* 中的 确实是范畴。

证明。我们对 C 证明该结果，因为 $\mathcal{C}$ 是带有零对象的 C 的 $\Bbbk$-线性化。根据定义 1.1(3)，我们知道，对于每个 $x\in\mathbb{X}$，在 $\mathcal{C}$ 中，位于 x 处的常值路径的等价类是 x 上的恒等态射。利用定义 1.1(1) 和定义 1.2(3)，我们有：如果 $\gamma\cdot\gamma'=\gamma''$，那么 $[\gamma']\circ[\gamma]=[\gamma\cdot\gamma']$。根据定义 1.1(2) 和 1.2(2,3)，我们知道复合满足结合律。□

当然，我们会关注路径范畴范畴以及它们之间的函子。

定义 2.5 (***PCat***)。 我们将 ***PCat*** 定义为小范畴范畴的子范畴，其对象是定义 2.1 中的路径范畴，态射则是它们之间的函子。

也可以将 ***PCat*** 视为一个 2-范畴，但本文不需要这样做。

命题 2.6. 存在一个函子 $\mathbf{X}\to\boldsymbol{PCat}$，它将三元组 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$ 映射到其路径范畴 C，并且存在一个从 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}((\mathbb{X}_1,\Gamma_1/\sim_1),(\mathbb{X}_2,\Gamma_2/\sim_2))$到 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{PCat}}(C_1,C_2)$的单射。

证明。 定义 2.1 和命题 2.4 表明，该函子在对象上良定义。

我们由一个态射 $f:(\mathbb{X}_1,\Gamma_1/\sim_1)\to(\mathbb{X}_2,\Gamma_2/\sim_2)$ 构造一个函子 $F:\ C_1\to C_2$。设 $f:(\mathbb{X}_1,\Gamma_1/\sim_1)\to(\mathbb{X}_2,\Gamma_2/\sim_2)$ 是一个态射。对于 C_1 中的一个对象x，定义 $F(x)=f(x)$。对于 C_1 中的一个态射 $[\gamma]:\ x\to y$，取一个代表元γ，并定义 $F([\gamma])=[f\circ\gamma]$。由于 $\gamma\sim_1\gamma'$ 蕴含 $f\circ\gamma\sim_2 f\circ\gamma'$，我们看到我们的

代表元的选择无关紧要。最后，由于 $[\gamma'] \circ [\gamma] = [\gamma \cdot \gamma']$，我们看到 F 尊重复合，因此是一个函子。

假设 f， $f' \colon (\mathbb{X}_1, \ \Gamma_1/\sim_1) \to (\mathbb{X}_2, \ \Gamma_2/\sim_2)$ 是 $\mathbf{X}$ 中的态射，且满足 $f \neq f'$。那么，要么存在某个 $x \in \mathbb{X}_1$ 使得 $f_1(x) \neq f_2(x)$，要么存在某个 γ使得 $f \circ \gamma \neq f' \circ \gamma$。在第二种情况下，存在某个 $x \in \mathbb{X}_1$ 使得$f \circ \gamma(x) \neq f' \circ \gamma(x)$。那么，根据上述构造，$F(x) \neq F'(x)$，因此我们得到了不同的函子，证明完毕。□

态射上的单射是紧的。命题2.45中的函子并非来自$\mathbf{X}$中三元组的态射。也可以由两个不同的三元组生成路径范畴（参见注 2.23）。

注记 2.7. 注意命题 2.6 中的函子将积映为积。

定义 2.8 (路径基理想)。 若一个理想 $\mathcal{I}$ 属于 $\mathcal{C}$ ，且 $\mathcal{I}$ 由形如 $\bigoplus_{i=1}^{m} \lambda_i[\gamma_i]$的元素生成，其中每个 $\gamma_i \in \Gamma$ ，且每个 $\lambda_i \in \Bbbk$都不是零因子，则称其为路径基 理想。我们也明确允许零理想。

记号 2.9 ($\mathcal{A}$)。 对于路径基理想 $\mathcal{I}$，我们用 $\mathcal{A}$ 表示商范畴$\mathcal{C}/\mathcal{I}$。

例 2.10 (贯穿全文的例子)。 设 $\mathbb{R}$ 如例 1.5中所述。理想 $\mathcal{I}$由 f 生成： $x \to y$ 其中 $f \neq 0$ 且 $y - x \geq 2$ 是一个路径基理想。

固定一个三元组$(\mathbb{X}, \ \Gamma/\sim)$，属于$\mathbf{X}$。

定义 2.11 (预死)。 给定屏 $\mathfrak{P}$ 、$(\mathbb{X}, \ \Gamma/\sim)$以及 $\mathcal{C}$中的路径基理想$\mathcal{I}$ ，若像素 $\mathbf{X} \in \mathfrak{P}$ 存在一条路径 $\rho \in \Gamma$ ，满足 $\mathbf{im}(\rho) \subset \mathbf{X}$ 且 $[\rho] = 0$ 属于 $\mathcal{A}$，则称其为预死 。

定义 2.12 （$\mathfrak{P}$-等价态射）。 设 $\mathfrak{P}$ 是（$\mathbb{X}, \Gamma/\sim$）的一个屏。若 $[\gamma]$ 和 $[\gamma']$ 是 $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ 中的两个态射，且 γ 和 γ' 是$\mathfrak{P}$-等价的，则称它们是 $\mathfrak{P}$-等价的 。

设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个路径基理想， $\mathfrak{P}$ 是（$\mathbb{X}, \Gamma/\sim$）的一个屏。若 $\lambda[\gamma]$ 和 $\lambda'[\gamma']$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ 中的两个非零态射，且 γ 和 γ' 是$\mathfrak{P}$-等价的，并且 $\lambda = \lambda'$，则称它们是 $\mathfrak{P}$-等价的 。若 $m = n$ ，且在适当置换后，当$i = j$时， $[\gamma_i]$ 与 $\mathfrak{P}$等价于 $[\gamma'_j]$ ，则称直和 $\bigoplus_{i=1}^{m} \lambda_i[\gamma_i]$ 和 $\bigoplus_{j=1}^{n} \lambda'_j[\gamma'_j]$ 是$\mathfrak{P}$-等价的。

定义 2.13 （$\mathfrak{P}$-完备理想）。 给定（$\mathbb{X}, \Gamma/\sim$）的一个屏 $\mathfrak{P}$ ，若对于 $\mathfrak{P}$-等价对 f, g，当且仅当 $g \in \mathcal{I}$时，有 $f \in \mathcal{I}$ ，则称 $\mathcal{C}$ 中的理想$\mathcal{I}$ 是 $\mathfrak{P}$-完备的 。

理想 $\mathcal{I}$ 的 $\mathfrak{P}$-完备化 是该理想

$$\overline{\mathcal{I}}^{\mathfrak{P}} := \langle \{ f \mid \exists g \in \mathcal{I} \text{ that is } \mathfrak{P}\text{-equivalent to } f \} \rangle .$$

特别地， $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$。

注意，如果 $\mathcal{I} = 0$ ，那么 $\mathcal{I}^{\mathfrak{P}} = 0$。

记号 2.14。 令 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}} := \mathcal{C}/\mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$。

注意，通过考察 $\mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$在 $\mathcal{A}$ 中的像并对其取商可知， $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的一个商范畴。

给定（$\mathbb{X}, \Gamma/\sim$）的一个屏 $\mathfrak{P}$ ，我们希望构造C 中的一个态射类 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ ，使其诱导出左右分式演算。沿用记号，给定 $\mathcal{C}$中的路径基理想 $\mathcal{I}$ ，我们也考虑 $\mathcal{A}$中的一个态射类 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 。

首先，我们回顾一下分式演算。

定义 2.15 （分式演算）。范畴中的一类态射 Σ若满足以下 5 个条件 $\mathcal{D}$，则称其允许分式演算。

(1) 类 Σ 包含所有恒等态射，且对复合运算封闭。(2) 给定态射 $\sigma : x \to x'$ 和 $f : x \to y$，且满足 $\sigma \in \Sigma$，则存在一个对象 y' 属于 $\mathcal{D}$，以及态射 $\sigma' : y \to y'$ 和 $f' : x' \to y'$，满足 $\sigma' \in \Sigma$，使得 $f'\sigma = \sigma' f$。(3) 给定态射 $\sigma : w \to x$ 属于 Σ，以及两个态射 $f, g : x \rightrightarrows y$，满足 $f\sigma = g\sigma$，则存在 $\sigma' : y \to z$ 属于 Σ，使得 $\sigma' f = \sigma' g$。(4) 给定态射 $\sigma : y' \to y$ 和 $f : x \to y$，且满足 $\sigma \in \Sigma$，则存在一个对象 x' 属于 $\mathcal{D}$，以及态射 $\sigma' : x' \to x$ 和 $f' : x' \to y'$，满足 $\sigma' \in \Sigma$，使得 $\sigma f' = f\sigma'$。(5) 给定态射 $\sigma : y \to z$ 属于 Σ，以及两个态射 $f, g : x \rightrightarrows y$，满足 $\sigma f = \sigma g$，则存在 $\sigma' : w \to x$ 属于 Σ，使得 $f\sigma' = g\sigma'$。

通常，左分式演算要求满足条件（1）、（2）和（3），而右分式演算要求满足条件（1）、（4）和（5），不过左与右的术语尚未标准化。

定义 2.16 ($\Sigma_{\mathfrak{P}}$)。设 $\mathfrak{P}$ 是$(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$的一个屏。

当且仅当存在某个 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，使得 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathsf{X}$ 时，我们称态射 $[\rho]$ 在 C 中属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$。当态射 f 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中满足以下任一条件时，我们称其属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$。

- $f = [\rho] \neq 0$，其中存在某个 $\rho \in \Gamma$，使得 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathsf{X}$，其中 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。
- $f = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$，其中 $x, y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，$\mathsf{X}$ 为预死。

首先，我们证明 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 在 C 中满足分式演算。

命题 2.17. $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 在 C 中构成分式演算。

证明。根据 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$的定义，我们看到每个恒等态射都属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$。此外，如果 $[\rho]$，$[\rho'] \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$ 使得 $\rho \cdot \rho' \in \Gamma$，那么必有$\mathrm{im}(\rho) \cup \mathrm{im}(\rho') \subset \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。因此，我们得到定义2.15(1)。

由于定义2.15(2、3)与定义2.15(4、5)互为对偶，我们只证明前两条。

假设有 $[\rho] : x \to x'$ 属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$，以及 $[\gamma] : x \to y$ 是 C中的一个态射。根据定义1.12(3)，我们知道存在 ρ'，$\gamma' \in \Gamma$ 使得 $\rho' \cdot \gamma \sim \gamma \cdot \rho'$ 且$\mathrm{im}(\rho') \subset \mathsf{Y} \in \mathfrak{P}$。于是有 $[\gamma] \circ [\rho'] = [\rho] \circ [\gamma']$ 属于 C，且 $[\rho'] \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$。这满足定义2.15(2)。

现在假设我们有 $[\rho] : x \to y$ 属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 且 $[\gamma], [\gamma'] : y \rightrightarrows z$ 属于 C，满足 $[\gamma] \circ [\rho] = [\gamma'] \circ [\rho]$。那么 $\rho \cdot \gamma \sim \rho \cdot \gamma'$。根据定义 1.2(3)，我们知道 $\gamma \sim \gamma'$，因此$[\gamma] = [\gamma']$。于是，取 $[\rho'] = \mathbf{1}_z$，便有 $[\rho'] \circ [\gamma] = [\rho'] \circ [\gamma']$，其中 $[\rho'] \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$。这满足定义 2.15(3)。□

为了证明 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中诱导分式演算，我们需要下面这个引理。

引理 2.18. 设 $[\gamma] : x \to y$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的一个态射。若$\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 是预死的，且$x \in \mathsf{X}$，则 $[\gamma] = 0$。对偶地，若$\mathsf{Y} \in \mathfrak{P}$ 是预死的，且 $y \in \mathsf{Y}$，则 $[\gamma] = 0$。

证明。我们只证明 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 为预死且 $x \in \mathsf{X}$ 的情形，因为另一个命题的证明类似。

由于 X 是预死的，存在某个 $\omega \in \Gamma$，使得 $\mathrm{im}(\omega) \subset \mathsf{X}$ 且 $[\omega] = 0$ 属于 $\mathcal{A}$。那么$[\omega] = \overline{0}$ 也属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。

我们构造图2.1中的路径图。首先，我们使用引理 1.14 以及其证明后关于 x 和 $\omega(1)$的注释，得到 δ_2、δ_3、δ_4 和 δ_5。然后，从 ω 和 δ_2开始，我们使用定义1.12(3) 得到 δ_0 和 δ_1。显然

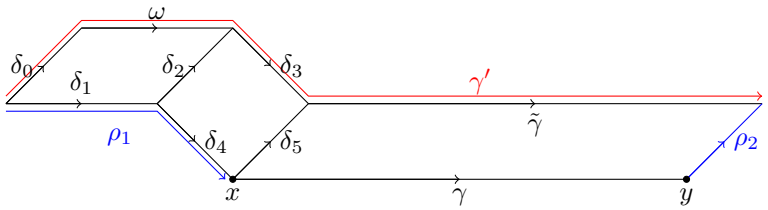


图 2.1。引理 2.18的证明：展示 γ 与 $\mathfrak{P}$等价于某个 γ'，其中 $[\gamma']=0$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。

可以证明，任意由 ω 和/或 δ构成的良定义路径复合，其像都包含在 X中。最后，从 δ_5 和 γ开始，我们使用定义 1.12(3) 得到$\tilde{\gamma}$ 和 ρ_2 （蓝色）。

注意 $\mathrm{im}(\rho_2) \subset \mathsf{Y} \ni z$。定义 $\gamma' := \delta_0 \cdot \omega \cdot \delta_3 \cdot \tilde{\gamma}$（红色）和 $\rho_1 := \delta_1 \cdot \delta_4$（蓝色）。根据构造，$\gamma' \sim \rho_1 \cdot \gamma \cdot \rho_2$，因此 γ' 等价于 $\mathfrak{P}$，其中 γ（定义 1.20），这意味着 $[\gamma']$ 等价于 $\mathfrak{P}$，其中 $[\gamma]$（定义 2.12）。此外，由于 $[\omega]=0$ 属于$\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，我们必有 $[\gamma']=0$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，因此 $[\gamma'] \in \mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$。于是必有 $[\gamma] \in \mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$（定义 2.13）。因此，我们必有 $[\gamma]=0$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。□

命题 2.19. $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 中的类 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 存在分式演算。

证明。 首先检查定义 2.15(1)。注意到，根据定义 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$， $\Sigma_{\mathfrak{P}}$中的每个恒等态射都属于 2.16。对于 $\rho,\ \rho' \in \Gamma$，若 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，$\mathrm{im}(\rho') \subset \mathsf{Y} \in \mathfrak{P}$，且 $\rho \cdot \rho'$ 有定义，则 $\mathsf{X}=\mathsf{Y}$。显然，$\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 对复合封闭。

接下来证明定义 2.15(2)。由于这些陈述及其证明互为对偶，这也足以证明定义 2.15(4)。设 $\sigma\colon x \to x'$ 和 $f\colon x \to y$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中满足 $\sigma \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$ 的态射。注意 $f = \bigoplus_{i=1}^{m} \lambda_i [\gamma_i]$。若 f 为 0，则可选取$\sigma' = \mathbf{1}_y$ 和 $f'=0$ （其目标为 y）。若 X 或 Y 是预死的，则根据引理 2.18，对每个 $1 \le i \le m$ 都有$[\gamma_i]=0$。因此， $f=0$，我们再次选取 $\sigma' = \mathbf{1}_y$、 $f'=0$。

现在假设 σ 和 f 均非零。特别地，X 和 Y 都不是预死的。根据定义 2.16，我们知道 $\sigma=[\rho]$，对于 $\rho \in \Gamma$ 和 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。不失一般性，我们假设对于某个 $\lambda \in \Bbbk$ 和 $\gamma \in \Gamma$， $f = \lambda[\gamma]$。（这是因为，对于 f的每个直和项 f_i，我们都可以找到相应的 f_i' 来补成交换方块，并对每个 f_i' 使用相同的 ρ'。因此，我们取 f' 为各个 f_i' 的直和，从而得到所需的交换方块。）然后，根据定义 1.12(3)，存在从 y 到 y' 的路径 $\rho' \in \Gamma$，满足 $\mathrm{im}(\rho') \subset \mathsf{Y} \in \mathfrak{P}$，以及从 x' 到 y'的路径 $\gamma' \in \Gamma$，使得 $\gamma \cdot \rho' \sim \rho \cdot \gamma'$。于是，$[\rho'] \circ [\gamma] = [\gamma'] \circ [\rho]$ （即使它们都为 0）。因此，乘以适当的标量即可得出公理成立。

现在我们证明定义 2.15(3)。同样，我们不写对偶命题——定义 2.15(5)——的证明。假设有 $\sigma\colon x \to y$ and $\bar{f},\bar{g}\colon y \rightrightarrows z$ in $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$such that $\sigma \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$ and $\bar{f}\sigma = \bar{g}\sigma$ in $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。如果 $\mathsf{X} \ni x$ or $\mathsf{Y} \ni y$ 是预死的，那么根据引理 2.18，我们可知 $f=\bar{g}=0$。于是我们可以选取 $\sigma' = \mathbf{1}_z$， 证毕。

现在假设 $\sigma \neq 0$ and f 或 $\bar{g}$ 中至少有一个非零。特别地，X 和 Y 都不是预死的，并且 $\sigma=[\omega]$ with $\mathrm{im}(\omega) \subset \mathsf{X}$。由于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的 Hom 模是 $\mathcal{C}$中 Hom 模的加法商，令 $f,\ g\colon y \rightrightarrows z$ be morphisms in $\mathcal{C}$ such that the quotient maps f to f and g to $\bar{g}$。因此 $f-g \mapsto f-\bar{g}$。

由于 $\bar{f}\sigma - \bar{g}\sigma = 0$，我们有 $(f\sigma - g\sigma) \in \mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$。由于 $f\sigma - g\sigma = (f-g)\sigma = (f-g)[\omega]$与 $f-g$是 $\mathfrak{P}$-等价的，因此我们有 $f-g \in \mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$，所以 $\bar{f}=\bar{g}$属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。接着令 σ' 到为恒等态射，因此 $\sigma' f = \sigma' \bar{g}$。证明至此完成。□

定义 2.20（像素化）。令 $\mathfrak{P}$ 为 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 的一个屏。

C 相对于 $\mathfrak{P}$ 的像素化是局部化 $C[\Sigma_{\mathfrak{P}}^{-1}]$，记作 $C^{\mathfrak{P}}$。$\mathcal{A}$ 相对于 $\mathfrak{P}$ 的像素化是局部化 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}[\Sigma_{\mathfrak{P}}^{-1}]$，记作 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。 □

记号 2.21 $(p,\ \pi)$。我们将典范局部化函子记为 $p: C \to C^{\mathfrak{P}}$。

我们将典范复合函子记为 $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，它可分解为先取商再进行局部化 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。 □

注意，$\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$的对象仍与 $\mathcal{C}$ 和 C相同，不过现在其中一些对象可能彼此同构，或与 0 同构。

例 2.22 (贯穿全文的例子)。设 $\mathbb{R}$ 如例 1.5 中所示，且 $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}$ 如例 1.26中所示。设 C 为 $\mathbb{R}$ 的路径范畴，如例 2.2 中所示。那么，在 $C^{\mathfrak{P}}$中，$x \cong y$ 当且仅当 $i \le x,\ y < i+1$ 对某个 $i \in \mathbb{Z}$成立。

令 $\mathcal{C}$ 也如例 2.2 中所述，并令 $\mathcal{I}$ 如例 2.10中所述。按照记号 $\mathcal{A} = \mathcal{C}/\mathcal{I}$，令其如 2.9中所述。由 $C^{\mathfrak{P}}$，可得 $x \cong y$在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$当且仅当 $i \le x$时，$y < i+1$对某个 $i \in \mathbb{Z}$成立。对于态射，$f:\ x \to y$ 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中非零，当且仅当存在$i \in \mathbb{Z}$ 使得下列两种情形之一成立：(i) $i \le x,\ y < i+1$ 或 (ii) $i \le x < i+1 \le y < i+2$。

注记 2.23。请注意，两个不同的三元组可能具有相同的路径范畴 $(\mathbb{X},\ \Gamma/\sim)$ 和 $(\mathbb{X}',\ \Gamma'/\sim')$。路径结构的差异会改变屏幕，进而改变像素化。关于 $\mathbb{R}$ 的一个例子见例 4.11。

这部分解释了为什么命题 Hom-集合上的单射 2.6 不是双射。在一个 Hom-集合 $\boldsymbol{PCat}$ 中的态射可能来自X中不同的 **Hom**-集合。

问题 2.24. 根据注 2.23，如何判断路径范畴 C 的任意一个经由分式演算得到的局部化，是否相对于某个三元组 $(\mathbb{X}', \Gamma'/\sim')$ 和屏 $\mathfrak{P}'$构成像素化?

定义 2.25（平凡态射）。我们称态射 f 在 $C^{\mathfrak{P}}$ 中是平凡的，当且仅当 $f = [\rho]^{-1}[\rho]$，其中 $[\rho],\ [\rho'] \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$。

我们称非零态射 f在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中是平凡的，当且仅当 $f = \sigma^{-1}\sigma'$，其中 $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$。

引理 2.26. (1) 如果 $x, y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，那么 $x \cong y$ 在 $C^{\mathfrak{P}}$中，并且存在平凡态射 $x \to y$ 和 $y \to x$，它们属于 C。

(2) 若 $x, y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，则 $x \cong y$属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。此外，若X 不是预死的，则存在平凡同构 $x \to y$和 $y \to x$，它们属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。 □

证明。我们只证明 (2)，因为 (1) 的证明与 (2) 第一部分的证明基本相同。假设 X 不是预死的，且令 $x, y \in \mathsf{X}$。于是，根据引理 1.14，存在一个游走 $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$，满足 $\gamma'(0) = x, \gamma(0) = y$，且 $\mathrm{im}(\gamma') \cup \mathrm{im}(\gamma) \subset \mathsf{X}$。令 $\sigma = [\gamma]$ 和$\sigma' = [\gamma']$。那么 $\sigma, \sigma' \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$，并且 $\sigma^{-1}\sigma': x \to y$是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的一个同构。这就是所需的同构。反转 x和 y 的卷序，即可得到另一个同构。若 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 是预死的，则对所有 $x, y \in \mathsf{X}$，都有 $x \cong 0 \cong y$，因为根据定义 2.16，我们将预死亡像素中对象之间的零态射也纳入其中。□

定义 2.27（伪箭头）。我们称态射 $[\rho]^{-1}[\gamma]$ 在 $C^{\mathfrak{P}}$ 中是一个伪箭头，当且仅当 $\mathrm{im}(\gamma)$ 恰好与两个像素 X、Y 相交 $\mathfrak{P}$，并计入重数。也就是说，存在一个 $[0,1]$ 关于 γ的划分，如定义 1.12（4）所示，且恰有两个元素。

我们称态射 $\sigma^{-1}f \neq 0$ in $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 为伪箭头，如果 $f = \lambda[\gamma]$ 且 $\mathrm{im}(\gamma)$ 与 $\mathfrak{P}$ 中恰好两个像素 X，Y 相交（按重数计）。特别地，$\sigma \neq 0$

在 $\bar{\mathcal{A}}^{\mathfrak{P}}$，$f = [\gamma] \neq 0$ 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，并且存在一个 $[0,1]$ 对于 γ，如定义1.12(4) 中所述，且恰有两个元素。

注意，根据引理 2.18，若 $\sigma^{-1} f$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的伪箭头，那么像素 X、Y一定不是预死的。

引理 2.28。(1) $C^{\mathfrak{P}}$ 中的每个态射要么是平凡态射，要么是伪箭头的有限复合。(2) $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的每个非零态射都是若干态射的有限和，其中每个态射要么是平凡态射的倍数，要么是有限个伪箭头的复合。

证明。我们先证明 (2)。设 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中有一个非零态射 $f = \bigoplus_{i=1}^{m} \sigma_i^{-1} f_i$。每个 $\sigma_i^{-1} f_i$ 都可以看作一个 floor $x \xrightarrow{f_i} y_i' \xleftarrow{\sigma_i} y$。由于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 是关于分式演算的局部化，因此存在一个 y''、态射 $\sigma : y \to y''$以及态射$m\sigma_i' : y_i' \to y''$，使得 $f = \bigoplus_{i=1}^{n_i} \sigma^{-1}(\sigma_i' f_i)$。选取某个 i 并考虑 $\sigma^{-1}(\sigma_i' f)$。我们知道 $f_i = \bigoplus_{j=1}^{m} \lambda_{ij}[\gamma_{ij}]$，因此 $\sigma_i' f_i$ 等于 $\bigoplus_{j=1}^{n_i} \sigma_i' \lambda_{ij}[\gamma_{ij}]$。由于我们的局部化-是关于分式演算的，因此有 $\sigma^{-1}(\sigma_i f_i) = \bigoplus_{j=1}^{m} \sigma^{-1}\sigma_i' \lambda_{ij}[\gamma_{ij}]$。于是 $f = \bigoplus_{i=1}^{n_i} \bigoplus_{j=1}^{m} \sigma^{-1}\sigma_i' \lambda_{ij}[\gamma_{ij}]$。还需证明每个 $\sigma^{-1}\sigma_i' \lambda_{ij}[\gamma_{ij}]$ 都是有限个伪箭头的复合或平凡态射。

现在我们可以完成 (2) 的证明，并在此过程中证明 (1)。我们简化记号，考虑 $f = \sigma^{-1}\lambda[\gamma]$。如果 f 是平凡的，或是某个平凡态射的标量倍，我们就已完成。否则，假设并非如此。我们将证明 f 是伪箭头的复合。由于我们已假设 f 并非平凡，$\mathrm{im}(\gamma)$ 必须与 $\mathfrak{P}$ 的至少两个像素相交。由于 $\mathfrak{P}$ 是一个屏，因此存在 $[0,1]$ 的一个划分 $\{I_i\}_{i=0}^{n}$，使得每个 I_i 都是一个区间，且 $\mathrm{im}(\gamma|_{I_i}) \subset \mathsf{X}_i \in \mathfrak{P}$ （定义 1.12(4)）。不失一般性，我们假设对于 $1 \leq i \leq n$，$\mathsf{X}_{i-1} \neq \mathsf{X}_i$。

对于每个 $0 < i < n$，选取某个 $a_i \in I_i$。令 $a_0 = \gamma(0)$ 和 $a_n = \gamma(1)$。对于$1 \leq i \leq n$，令 $\gamma_i = \gamma\phi_i$，其中 $\phi_i : [0,1] \to [0,1]$ 由 $\phi_i(t) = (a_i - a_{i-1})t + a_i$ 给出。于是我们有

$$\sigma^{-1}\lambda[\gamma] = \sigma^{-1}\lambda[\gamma_n] \circ \left(\bigcirc_{i=n-1}^{1} (\mathbf{1}_{\gamma_i(1)})^{-1}[\gamma_i] \right).$$

所有 $(\mathbf{1}_{\gamma_i(1)})^{-1}[\gamma_i]$ 以及 $\sigma^{-1}\lambda[\gamma_n]$ 都是伪箭头。这就完成了证明。

□

注 2.29. 利用引理 2.28，对于任意非零态射 $f : x \to y$在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中，我们对 f:有如下描述

$$f = \bigoplus_{i=0}^{m} f_i, \qquad f_i = \begin{cases} \lambda_i \bigcirc_{j=n_i}^{1} f_{ij} & 1 \leq i \leq m \\ \lambda_0 \sigma^{-1}\sigma' & i = 0 \text{ and } x \cong y \\ 0 & i = 0,\ x \in \mathsf{X},\ y \in \mathsf{Y},\ \text{and } \mathsf{X} \neq \mathsf{Y}, \end{cases}$$

其中每个 f_{ij} 都是伪箭头，而 $\sigma^{-1}\sigma'$ 是平凡的。为了描述 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的所有态射，我们允许使用 $m = 0$ 和/或 $\lambda_0 = 0$。

定义 2.30 （死像素）。设 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。如果存在 $x \in \mathsf{X}$，使得 $x \cong 0$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，则称 X 为死。 □

注 2.31（预死像素是死像素）。如果 $\mathfrak{P}$ 是一个屏，则每个预死 X $\in \mathfrak{P}$也都是死像素。此外，如果 $y \cong x$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 且 $x \in$ X，其中 X是死像素，那么 Y $\ni y$ 也同样是死像素。

2.2. 来自箭图的范畴。现在我们说明，像素化与由箭图得到的范畴的商有关。

我们在**X**中保留固定三元组$(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$。我们还固定 $\mathbb{X}$ 的一个屏 $\mathfrak{P}$，以及 $\mathcal{C}$中的一个路径基理想 $\mathcal{I}$。

定义 2.32（样本）。$\mathfrak{P}$ 的一个样本是一个对$(S, \{\gamma_x \cdot \rho_x^{-1}\}_{x\in\mathbb{X}})$，其中对于每个X $\in \mathfrak{P}$，$|S\cap$X$| = 1$；每个 γ_x、$\rho_x \in \Gamma$，且im$(\gamma_x) \cup$ im$(\rho_x) \subset$ X $\ni x$。我们用 s_{X}表示每个 $S \cap$X中的唯一元素。此外，我们有 $\gamma_x(0)$、$\gamma_x(1) = \rho_x(1)$，以及$\rho_x(0) = s_{\mathsf{X}}$，其中 $x \in$ X $\in \mathfrak{P}$。根据引理 1.14，每个 $\gamma_x \cdot \rho_x^{-1}$都存在。

- 在 $C^{\mathfrak{P}}$中，我们用 φ_x 表示态射 $[\rho]^{-1} \circ [\gamma] : x \to s_{\mathsf{X}}$。
- 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中，如果 X 不是预死对象，我们用 φ_x 表示态射 $[\rho]^{-1} \circ [\gamma] : x \to s_{\mathsf{X}}$。否则，我们用 φ_x 表示从 x 出发的零态射 $x \to s$。

注意，φ_x在等价意义下是唯一的。

还要注意，以 S 为对象的 $C^{\mathfrak{P}}$ 的全子范畴是一个骨架。以 S 的非零元素为对象的 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 的全子范畴也构成一个骨架。

根据定义 1.12(5)，我们看到，任意两个伪箭头 $f, f' :$ X $\to$ Y 中 $C^{\mathfrak{P}}$ 必须等价。对于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的伪箭头，类似的结论也成立。 □

定义 2.33 ($Q(C, \mathfrak{P})$ $Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$)。现在我们定义两个箭图。

- 我们基于 $C^{\mathfrak{P}}$ 定义一个箭图 $Q(C, \mathfrak{P})$。设 $Q_0(C, \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$，并令 Arr$_{C^{\mathfrak{P}}}$(X, Y)为伪箭头 $s_{\mathsf{X}} \to s_{\mathsf{Y}}$ 的集合，其中包含 1 个或 0 个元素。我们设

$$Q_1(C, \mathfrak{P}) = \bigcup_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})\in\mathfrak{P}^2} \mathrm{Arr}_{C^{\mathfrak{P}}}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}).$$

  箭头 $\alpha \in$ Arr$_{C^{\mathfrak{P}}}$(X, Y) 的源是 X，目标是 Y。
- 我们基于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 定义一个箭图 $Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$。设 $Q_0(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \setminus \mathrm{dead}(\mathfrak{P})$，其中 dead$(\mathfrak{P})$ 是 $\mathfrak{P}$ 中死像素的集合。对于每个 X，Y $\in Q_0(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$，令 Arr$_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}$(X, Y)为 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中从 x 到 y 的伪箭头在非零标量乘法下的等价类。于是 Arr$_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}$(X, Y) 包含 1 个或 0 个元素。对于任意 $x \in$X 和 $y \in$ Y，I2f Hom$_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}(x, y) = 0$，因此 Arr(X, Y) $= \emptyset$。于是，令

$$Q_1(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) := \bigcup_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})\in(Q_0(\mathcal{A},\mathfrak{P}))^2} \mathrm{Arr}_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}).$$

  对于任意 $\alpha \in$ Arr$_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}$(X, Y)，$\alpha$ 的源是 X，α 的目标是 Y。

注 2.34。请注意，根据定义 2.27，$Q(C, \mathfrak{P})$ 或$Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 不可能有环，但仍然可能有二环。

我们可以立即将 $Q(C, \mathfrak{P})$ 视为一个范畴，其对象为 $Q_0(C, \mathfrak{P})$，态射为 $Q(C, \mathfrak{P})$ 中的路径。然而，对于 $Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$，我们想要考虑 $\Bbbk$-线性化。

定义 2.35（$\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$）。令 $Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 如定义 2.33 所述。我们将$\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 定义为 $\Bbbk$- 线性范畴，其 Q 为 $\mathcal{A}$（$\mathfrak{P}$）。也就是说，$\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 的对象

是 $Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 的顶点。对于态射，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}(X, Y)$ 是自由的 $\Bbbk$-模，其基为从 X 到 Y 的路径。也就是说，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}(X, Y) = \Bbbk\langle\{\text{paths from } X \text{ to } Y \text{ in } Q(\mathcal{A}, \mathfrak{P})\}\rangle.$$

我们还在 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中加入一个零对象。

请注意，一般而言，$Q(C, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中的关系，分别与 $C^{\mathfrak{P}}$ 或 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的关系不同。例如，若伪箭头的复合 $(\sigma')^{-1}[\gamma'] \circ \sigma^{-1}[\gamma] = 0$ 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中成立，那么在 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中对应的箭头复合不会复合为 0。可能有两个态射 $[\rho]^{-1}[\gamma]$ 和 $[\rho']^{-1}[\gamma']$ 在 $C^{\mathfrak{P}}$ 中被认作相同，但对应的箭头复合在 $Q(C, \mathfrak{P})$ 中未必相同。对于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中态射的和，也有类似的结论。

因此，我们定义 $Q(C, \mathfrak{P})$ 的商范畴 $Q(C, \mathfrak{P})$，以及 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 的商范畴 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$，以便在本节的主定理中使用。为此，我们定义一个函子 $\Psi\colon Q(C, \mathfrak{P}) \to C^{\mathfrak{P}}$，以及一个 $\Bbbk$-线性函子 $\Phi\colon \mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。

由于 $C^{\mathfrak{P}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中对象的（非零）同构类分别与 $Q(C, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中的对象一一对应，因此我们需要在 $C^{\mathfrak{P}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的每个同构类里选出一个特定对象。

在本节余下部分，我们固定 $\mathfrak{P}$ 的一个样本 $(S, \{\gamma_x \cdot \rho_x^{-1}\}_{x\in\mathbb{X}})$。

为了在对象上定义 Ψ 和 Φ，令 $\Psi(X) := s_X$，且 $\Phi(X) := s_X$。

设 $X \xrightarrow{\alpha} Y$ 是 $Q(C, \mathfrak{P})$ 中的一个箭头。根据构造，存在一个对应的伪箭头 $[\rho]^{-1}[\gamma]$，属于 $\mathrm{Hom}_{C^{\mathfrak{P}}}(s_X, s_Y)$。定义 $\Psi(\alpha) = [\rho]^{-1}[\gamma]$。

对于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中的每个箭头 $X \xrightarrow{\alpha} Y$，都存在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}(s_X, s_Y)$ 中对应的一个 $\Bbbk\langle[\rho]^{-1}[\gamma]\rangle$，其中 $[\rho]^{-1}[\gamma]$ 是一个伪箭头。定义 $\Phi(\lambda\alpha) := \lambda[\rho]^{-1}[\gamma]$。

我们知道 Ψ 和 Φ 在对象上是良定义的。由于 $Q(C, \mathfrak{P})$ 中每个非恒等态射都是箭头的复合，我们利用这种复合将 Ψ 扩展为定义在整个 $Q(C, \mathfrak{P})$ 上的函子。由于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中每个态射都是箭头复合的直和（也可能包含恒等态射），我们可以将 Φ 按 $\Bbbk$-线性扩展到 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中的所有态射，从而得到一个函子。

定义 2.36 ($Q(C, \mathfrak{P})$ $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$)**.** 现在我们定义商 $Q(C, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$。

- 令 $Q(C, \mathfrak{P})$ 为一个范畴，其对象是 $Q_0(C, \mathfrak{P})$，其态射由 $\mathrm{Hom}_{Q(C,\mathfrak{P})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{Q(C,\mathfrak{P})}(X, Y)/\{\Psi(f) = \Psi(g)\}$. 给出
- 令 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中按如下方式定义的理想：令 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) := \mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})/\mathcal{J}$ 且 $(/\mathcal{J})\colon \mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) \Rightarrow \{\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) \text{ 为商函子}\}$.

注意，$(/\mathcal{J})$ 是 $\Bbbk$-线性的。

本质上，$Q(C, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 分别等价于 $C^{\mathfrak{P}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中 $Q(C, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 的像。下面的定理指出，这些像实际上分别等价于各自的目标范畴。

定理 2.37。固定一个三元组 $(\mathbb{X},\Gamma/\sim)$、$\mathbb{X}$ 的一个屏 $\mathfrak{P}$ 以及一个路径基理想 $\mathcal{I}$ 在 $\mathcal{C}$ 中。于是有以下结论。

(1) 像素化 $C^{\mathfrak{P}}$ 等价于 $Q(C,\mathfrak{P})$。(2) 像素化 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 等价于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$。

在证明定理 2.37的两部分之前，我们回到贯穿全文的例子，以帮助形成直观认识。

例 2.38 (贯穿全文的例子)。设 $\mathbb{R}$ 如例 1.5 中所述，其中 $C^{\mathfrak{P}}$ 和$\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 如例2.22 中所述。在 C的情形下，范畴 $C^{\mathfrak{P}}$ 等价于箭图的范畴化$A_{\mathbb{Z}}$:

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{-3}} -2 \xrightarrow{\alpha_{-2}} -1 \xrightarrow{\alpha_{-1}} 0 \xrightarrow{\alpha_0} 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots .$$

在 $\mathcal{A}$ 的情形下，范畴 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 等价于从同一个箭图 $A_{\mathbb{Z}}$ 出发，取其 $\Bbbk$-线性化，并添加关系 $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$ （对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立）。

定理 2.37(1) 和定理2.37(2) 的证明各不相同，因此分别处理。

定理 *2.37(1)* 的证明。我们将定义一个函子 $H\colon C^{\mathfrak{P}} \to Q(C,\mathfrak{P})$ 并证明它有一个拟逆。对于每个 $x \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，令 $H(x) = \mathsf{X} \in Q_0(C,\mathfrak{P})$。

设 $f = [\rho]^{-1} \circ [\gamma] : x \to y$ 是 $C^{\mathfrak{P}}$中的一个态射。若 f 是平凡的，则 $x \cong y$ 在$C^{\mathfrak{P}}$ 中，因此定义 $H(f) = \mathbf{1}_{\mathsf{X}}$，其中 $x,\ y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。若 f是一个伪箭头，则存在一个箭头 $\alpha\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$，位于 $Q(C,\ \mathfrak{P})$ 中，且对应于 f，其中 $x \in \mathsf{X}$、$y \in \mathsf{Y}$，且 $\mathsf{X},\ \mathsf{Y} \in \mathfrak{P}$。因此，定义 $H(f) = \alpha$。

由引理 2.28(1)，$C^{\mathfrak{P}}$ 中的每个非平凡态射都是箭头的有限复合。因此，如果 f既非平凡也不是伪箭头，$f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ 其中每个 f_i 都是伪箭头。于是，定义 $H(f) = H(f_n) \circ \cdots \circ H(f_1)$。我们知道，如果 $\Psi(\alpha_m \cdots \alpha_1) = \Psi(\beta_n \cdots \beta_1)$，则 $\alpha_m \cdots \alpha_1 = \beta_n \cdots \beta_1$ 属于 $Q(C,\mathfrak{P})$。这意味着 $C^{\mathfrak{P}}$ 中对应的伪箭头复合相同。因此，H 是一个函子。

现在，我们定义 $H^{-1}\colon Q(C,\mathfrak{P}) \to C^{\mathfrak{P}}$。令 $H^{-1}(\mathsf{X}) = s_{\mathsf{X}}$。对于每个箭头 $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$，定义 $H^{-1}(\alpha)$为 $C^{\mathfrak{P}}$中对应的伪箭头。然后，对于 $Q(C,\mathfrak{P})$中的任意路径 $\alpha_m \cdots \alpha_1$，定义 $H^{-1}(\alpha_m \cdots \alpha_1) = H^{-1}(\alpha_n) \circ \cdots \circ H^{-1}(\alpha_1)$。同样，根据 $Q(C,\mathfrak{P})$ 的构造，如果 $\alpha_m \cdots \alpha_1 = \beta_n \cdots \beta_1$ 属于 $Q(C,\mathfrak{P})$，那么 $C^{\mathfrak{P}}$ 中对应的伪箭头复合相同。因此，H^{-1} 也是一个函子。

由构造可知，HH^{-1} 是 $Q(C,\ \mathfrak{P})$上的恒等态射。我们看到，对于任意 $x \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，$H^{-1}H$在 Hom 集合上是双射，且 $H^{-1}H(x) = s_{\mathsf{X}} \cong x$。□

为了证明定理 2 中的 (2.37)，我们将定义 $\Bbbk$-线性函子 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P}) \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}} \to \mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P})$，它们互为拟逆。这分别是定义2.39 和 2.41。

定义 2.39（$F\colon \mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P}) \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$）。给定 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，我们定义一个$\Bbbk$-线性函子 $F\colon \mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P}) \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$。对于$\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$的每个对象$\mathsf{X}$，$\mathsf{X} \in Q_0(\mathcal{A},\mathfrak{P})$，令$F(\mathsf{X}) := s_{\mathsf{X}}$。对于每个非零的 $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P}))$，存在一个 $\tilde{f} \in \mathrm{Mor}(\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P}))$，使得$(/\mathcal{J})\tilde{f} = f$。令 $F(f) := \Phi(\tilde{f})$。

引理 2.40。在 F定义 *2.39* 中是一个良定义的函子，且 $\Phi = F(/\mathcal{J})$。

证明。首先证明 F 是良定义的。设 f 是 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$中的一个非零态射，并假设 $(/\mathcal{J})\tilde{f} = f$、$(/\mathcal{J})\tilde{f}' = f$，且 $\tilde{f}' \neq \tilde{f}$。那么 $(/\mathcal{J})(\tilde{f} - \tilde{f}') = 0$，这

~ ~ ~ ~ ~意味着 $\Phi(f - f') = 0$，因此 $\Phi(f) = \Phi(f')$。因此，任意选择满足~$(/\mathcal{J})f = f$的 f，都会得到相同的 $F(f)$，这表明 F确实是良定义的，因此是一个函子。

现在我们证明 $\Phi = F(/\mathcal{J})$。显然， $F(/\mathcal{J})(\mathsf{X}) = F(\mathsf{X}) = s_{\mathsf{X}} = \Phi(\mathsf{X})$。现在考虑 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中任意一个态射 $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$。我们知道

$$f = \bigoplus_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\bigcirc_{j=n_i}^{1} \alpha_{ij} \right),$$

其中每个 α_{ij} 都是 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中的一个箭头；如果 $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$，还可能有一个额外的直和项 $\lambda_0 \mathbf{1}_{\mathsf{X}}$。

由于 Φ、 F 和 $(/\mathcal{J})$ 都是 $\Bbbk$-线性函子，只需证明对于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中任意箭头 α，都有 $\Phi(\alpha) = F(/\mathcal{J})(\alpha)$。注意，对每个箭头$\alpha$，都有 $\Phi(\alpha) \neq 0$，因为 $\mathrm{Arr}_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ 中存在元素，当且仅当 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中存在伪箭头$s_{\mathsf{X}} \to s_{\mathsf{Y}}$。于是，对于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中任意箭头 α，都有 $(/\mathcal{J})(\alpha) \neq 0$。根据定义 2.39，$F(/\mathcal{J})(\alpha)$ 的定义为 $\Phi(\alpha)$。证明至此。□

定义 2.41（$G : \mathcal{A}^{\mathfrak{P}} \to \mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$）。给定 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，我们定义一个函子 $G : \mathcal{A}^{\mathfrak{P}} \to \mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$。对于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的每个对象 $s_{\mathsf{X}} \ncong 0$，令 $G(s_{\mathsf{X}}) := \mathsf{X} \in Q_0(\mathcal{A}, \mathfrak{P}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P}))$。对于每个非零 $\mathsf{X} \in Q_0(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 和 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的对象 $x \in \mathsf{X}$，令 $G(x) := G(s_{\mathsf{X}})$，且 $G(\varphi_x) := \mathbf{1}_{\mathsf{X}}$。对于所有满足 $x \cong 0$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 的 $x \in \mathbb{X}$，定义 $G(x) := 0$。

令 $f : s_{\mathsf{X}} \to s_{\mathsf{Y}}$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的一个态射。若 $f = 0$ 则令 $G(f) := 0$。若 $f = \lambda \mathbf{1}_{s_{\mathsf{X}}}$，对于某个 $\lambda \in \Bbbk$，则令 $G(f) := \lambda \mathbf{1}_{\mathsf{X}}$。对于其他态射，我们可以根据引理 2.28 和注 2.29，不失一般性地假设 f 是一个伪箭头。即， $f = [\rho]^{-1} \lambda [\gamma]$。

于是，在 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 中有一个箭头 $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$，它对应于由 $\Bbbk\langle f \rangle$ 给出的 $\Bbbk$ 的副本，该副本属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}}(s_{\mathsf{X}}, s_{\mathsf{Y}})$。令 $G(f) := (/\mathcal{J})(\lambda\alpha)$。

对于任意态射 $f : x \to y$，我们再次假设 $f = 0$， f 是平凡的，或者 f 是一个伪箭头。第一种情况下， $G(f) = 0$。第二种情况下，$x \cong y \cong s_{\mathsf{X}}$ 对某个 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。根据定义 1.12(1) 以及我们对 φ 的定义，可知 $f = \varphi_y^{-1} \lambda \varphi_x$。然后令 $G(f) := \lambda \mathbf{1}_{\mathsf{X}}$。

假设 $f : x \to y$ 是一个伪箭头。我们知道，对于 $x \cong s_{\mathsf{X}}$， $y \cong s_{\mathsf{Y}}$，有 $\mathsf{X}, \mathsf{Y} \in \mathfrak{P}$。那么根据定义 1.12(3) 存在一个伪箭头 $\hat{f} : s_{\mathsf{X}} \to s_{\mathsf{Y}}$，使得$f = \varphi_y^{-1} \hat{f} \varphi_x$。令 $G(f) := G(\hat{f})$。

然后通过复合和 $\Bbbk$-线性扩展 G 的定义。

引理 2.42。 定义 G中的 *2.41*是一个良定义的函子。

证明。 根据定义2.41 可直接得出， G 在对象上良定义。由引理 2.28可知，任意态射 $f \neq 0$ 在 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中都是伪箭头复合的有限直和，其中一个直和项可能是平凡态射。我们将证明G在平凡态射和伪箭头上良定义，然后证明它保持直和与复合。

若 f 是样本 S中元素之间的态射，我们知道 G 根据定义是良定义的。因此，我们考虑 $f : x \to y$ 分两种情况：要么 f 是平凡态射，要么f 是伪箭头。若 f 是平凡态射，则 G的定义没有歧义，因为 $\mathfrak{P}$的像素是 $\sim$-薄的（定义 1.12(1)）。因此，我们考虑 f 为一个伪箭头。

我们利用如下事实：存在一个 $\hat{} f$ 使得 $f = \varphi_y^{-1} \hat{f} \varphi_x$ (定义 2.41）。假设还存在某个 $\hat{} f'$ 使得 $f = \varphi_y^{-1} \hat{f}' \varphi_x$ 也成立。那么，由于 φ_y^{-1}和 φ_x 都是同构，我们有 $\hat{} f' = \varphi_y f \varphi_x^{-1} = \hat{} f$。因此， $\hat{} f$是唯一的，所以 G确实是良定义的。

设 $f\colon x \to y$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的一个态射。利用 f 的描述（如注 2.29所述），我们可以将 f 视为 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P})$ 中的一个态射，其定义如下：

$$\tilde{f} = \bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{f}_i, \qquad \tilde{f}_i = \begin{cases} \lambda_i \bigcirc_{j=n_i}^{1} \alpha_{ij} & 1 \le i \le m \\ \lambda_0 \mathbf{1}_{\mathsf{X}} & i = 0 \text{ and } \mathsf{X} = \mathsf{Y} \\ 0 & i = 0 \text{ and } \mathsf{X} \neq \mathsf{Y}, \end{cases}$$

其中，每个 α_{ij} 都是 $Q(\mathcal{A},\mathfrak{P})$ 中的一个箭头。如果 f we˜ ˜有另一种描述，我们也有一个态射 f'，它属于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$，且可能不同于 f。

然而，如果两者 $\tilde{f}$ 和 ˜ f' 是 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$ 中由描述˜ ˜ ˜所 f定义的态射，如注 2.29所述，那么 $\Phi(f) = \Phi(f')$。因此，$(/\mathcal{J})f' = (/\mathcal{J})f = G(f)$。此 $\Bbbk$- 线性也就显而易见，证明至此完成。□

现在我们可以证明定理 2.37(2)。

定理 *2.37(2)* 的证明。 我们将证明 F和 G 分别来自定义2.39和2.41 ，分别互为拟逆。根据定义可得$FG(s_{\mathsf{X}}) = s_{\mathsf{X}}$且 $GF(\mathsf{X}) = \mathsf{X}$。对于 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中的任意非零对象 x，存在某个 s_{X} 使得 $x \cong s_{\mathsf{X}}$，因此 $FG(x) = s_{\mathsf{X}} \cong x$。接下来只需证明 F和G 都是全忠实的。

˜设 f是 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P})$中的一个态射，满足 $F(f) = 0$。设 f是- -$\mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P})$中的任意态射，满足$(/\mathcal{J})f = f$。由于 $\Phi = F(/\mathcal{J})$且 $F(f) = 0$，我们知道 $\Phi(f) = 0$。˜ ˜但是 $f \in \mathcal{J}$，因此$(/\mathcal{J})(f) = 0 = f$。于是， F是忠实的。

现在设 $f\colon s_{\mathsf{X}} \to s_{\mathsf{Y}}$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的一个非零态射。根据引理 2.28，我们知道f是有限多个直和项的直和，每一项都是箭头的有限复合，但至多有一项是平凡的。若 $\mathsf{X} \neq \mathsf{Y}$，则 f 中没有平凡项。若 $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$，则 f 的平凡项必为¯恒等态射的标量倍，即 $\lambda_0 \mathbf{1}_{s_{\mathsf{X}}}$，其中 $\lambda_0 \in \Bbbk$ 为某个标量。若 f 含有恒等态射的标量倍作为直和项，则令 $f_0 \in \mathrm{End}_{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}(\mathsf{X})$ 为 $\lambda_0 \mathbf{1}_{\mathsf{X}}$；否则令 $f_0 = 0$ 属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$。

将 f 的非平凡直和项从 1 编号到 m。设 f_i 是 f 的一个非平凡直和项。再次根据引理 2.28， $f_i = \lambda_i f_{in_i} f_{i(n_i-1)} \cdots f_{i2} f_{i1}$，其中每个 f_{ij} 都是一个伪箭头。不失一般性，我们将所有标量收集到 λ_i 的左侧，使得每个 $f_{ij} = [\rho_{ij}]^{-1} \circ [\gamma_{ij}]$。每个 f_{ij} 对应于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$ 中的某个 α_{ij}。因此，对每个 $1 \le i \le m$，令

$$\bar{f}_i = \lambda_i (/\mathcal{J}) \left(\alpha_{i,n_i} \circ \alpha_{i,(n_i-1)} \circ \cdots \circ \alpha_{i,2} \circ \alpha_{i,1} \right) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}(\mathsf{X},\mathsf{Y}).$$

接下来令 $\bar{f} = \bigoplus_{i=0}^{m} \bar{f}_i$。根据构造， $F(\bar{f}) = f$，因此 F是满的，因而是全忠实的。

设 $g\colon x \to y$ 是 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ 中的一个态射，使得 $G(g) = 0$。按照引理 2.42 的证明，构造一个态射$\tilde{g}$，它属于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$。于是 $G(g) = (/\mathcal{J})(\tilde{g})$。若 $(/\mathcal{J})(\tilde{g}) = 0$，则根据构造有 $g = 0$。因此，G 是忠实的。

˜设 $f\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ 是 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$中的一个态射。则存在 f，它属于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$，使得 ˜ ˜$(/\mathcal{J})(f) = f$。根据定义 2.41， $GF(f) = f$。因此， G是满的。

我们已经证明， F和 G都是全忠实的， $GF(\mathsf{X}) = \mathsf{X}$，且 $FG(x) = s_{\mathsf{X}} \cong x$。因此， F和 G 互为拟逆。□

定理 2.37 允许我们直接使用 $C^{\mathfrak{P}}$ 或 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$的骨架。回忆一下 $\mathcal{Q}(C,\ \mathfrak{P})$ 来自定义 2.36。

定理 2.43。 范畴 $Q(C,\mathfrak{P})$ 同构于 $\boldsymbol{PCat}$ 中的一个范畴。

证明。 我们将从 $Q(C,\mathfrak{P})$ 构造一个三元组 $(\mathbb{X}', \Gamma'/\sim)$，并证明其路径范畴与 $Q(C,\mathfrak{P})$ 同构。回想一下， $Q(C,\mathfrak{P})$ 是一个小范畴；在

特别是，$\mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$ 是一个集合。根据定义 2.33，每个非恒等态射 $f \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$ 都是箭头的复合 $\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1$，其中 α_i 是一个从 X_{i-1} 到 X_i 的箭头。注意，对于 f，这样的复合可能不止一种。然而，不可能通过复合箭头得到恒等映射。

令 $\mathbb{X}' = Q_0 = \mathfrak{P}$，并对每个非恒等 $f \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$ 定义：

$$\Gamma'_f := \left\{ \gamma : [0,1] \to \mathbb{X}' \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \bigcirc_{i=n}^{1} \alpha_i = f \\ (s \le t \in [0,1]) \Leftrightarrow (\gamma(s) = \mathsf{X}_i,\ \gamma(t) = \mathsf{X}_j,\ \text{and } i \le j) \end{array} \right\}.$$

对于每个 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，我们定义 $\Gamma'_{\mathbf{1}_\mathsf{X}}$，使其只包含 X 处的常值路径。现在定义

$$\Gamma' := \bigcup_{f \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))} \Gamma'_f.$$

现在证明 Γ' 满足定义 1.1。根据构造，定义 1.1(3) 已满足。令 $f, f' \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$，令 $\gamma \in \Gamma'_f$，并令 $\gamma' \in \Gamma'_{f'}$。那么，根据构造，$\gamma \cdot \gamma' \in \Gamma'_{f' \circ f}$。这满足定义 1.1(1)。根据定义 2.33，我们知道，对于每个 $f \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$，都有 $f = \alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1$，其中每个 α_i 都是从 X_{i-1} 到 X_i 的箭头。因此，Γ' 立即对子路径封闭（定义 1.1(2)）。

我们称 $\gamma \sim' \gamma'$ 当且仅当 $\gamma, \gamma' \in \Gamma'_f$，对于某个 $f \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$。现在我们检验定义 1.2。若 $\gamma \in \Gamma'_{\mathbf{1}_\mathsf{X}}$，对于某个 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，则 γ 必定是以 X 为基点的常值路径，因此满足定义 1.2(1)。根据我们对每个 Γ'_f 的构造可知，等价类确实在重新参数化下封闭（定义 1.2(2)）。

接下来令 $\gamma, \gamma', \rho, \rho' \in \Gamma'$，使得 $\rho \cdot \gamma \cdot \rho'$ 和 $\rho \cdot \gamma' \cdot \rho'$ 属于 Γ'。令 $g, g' \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$，使得 $\rho \in \Gamma'_g$ 和 $\rho' \in \Gamma'_{g'}$。假设 $\gamma \sim' \gamma'$。那么 $\gamma, \gamma' \in \Gamma'_f$，对于某个 $f \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$。因此，$\rho \cdot \gamma \cdot \rho'$ 和 $\rho \cdot \gamma' \cdot \rho'$ 都属于 $\Gamma'_{g' \circ f \circ g}$。

现在假设 $\rho \cdot \gamma \cdot \rho' \sim' \rho \cdot \gamma' \cdot \rho'$。令 $f, f' \in \mathrm{Mor}(Q(C,\mathfrak{P}))$，使得 $\gamma \in \Gamma'_f$ and $\gamma' \in \Gamma'_{f'}$。我们看到 $H^{-1}(g' \circ f \circ g)$ 是某个 $[\sigma]^{-1}[\delta]$，而 $H^{-1}(g' \circ f' \circ g)$ 是某个 $[\sigma']^{-1}[\delta']$。不失一般性，我们可以假设 $[\sigma] = [\sigma']$，因为 $[\delta]$ and $[\delta']$ 在与 $H^{-1}(g')$ 相关的部分上重合。根据假设，$\widetilde{[\sigma]^{-1}[\delta]} = \widetilde{[\sigma]^{-1}[\delta']}$，所以 $[\delta] = [\delta']$。我们知道 $\delta = \tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma} \cdot \rho'$ and $\delta' = \tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma}' \cdot \tilde{\rho}'$，对于 $\tilde{\rho}, \rho', \tilde{\gamma}, \gamma' \in \Gamma$，使得 $\delta \sim \delta'$。具体来说：$Hp(\tilde{\gamma}) = f$，$Hp(\tilde{\gamma}') = f'$，$Hp(\tilde{\rho}) = g$，以及 $Hp(\tilde{\rho}') = g'$。由于 $(\mathbb{X}, \Gamma/\!\sim)$ 的 $\sim$ 满足定义 1.2(3)，我们有 $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$。因此，$g = g'$ 满足定义 1.2(3)。所以，$Q(C,\mathfrak{P})$ 与 $(\mathbb{X}, \Gamma'/\!\sim')$ 的路径范畴同构。□

定义 2.44（有限细化）。设 $\mathfrak{P}$，$\mathfrak{P}' \in \mathscr{P}$，且 $\mathfrak{P}$ 细化 $\mathfrak{P}'$。我们称 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{P}'$ 的有限细化，如果对每个 $\mathsf{X}' \in \mathfrak{P}'$，至多只有有限个 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 满足 $\mathsf{X} \subset \mathsf{X}'$。

命题 2.45。设 $\mathfrak{P}, \mathfrak{P} \in \mathscr{P}$，且 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{P}'$ 的有限细化。那么存在一个函子 $\mathrm{Init} : Q(C,\mathfrak{P}') \to Q(C,\mathfrak{P})$。

证明。由引理 1.19，对每个 $\mathsf{X}' \in \mathfrak{P}'$，都存在一个初始的 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，使得 $\mathsf{X} \subset \mathsf{X}'$。在对象上，定义 $\mathrm{Init}(\mathsf{X}')$ 为这个初始的 X。

设 f 是 $Q(C,\mathfrak{P}')$ 中的一个态射。那么存在某个态射 $[\rho]^{-1}[\gamma]$，属于 $C^{\mathfrak{P}'}$，使得 $H'([\rho]^{-1}[\gamma]) = f$。读者可以参照图 2.2 阅读证明的下一部分。取 $x' \in \mathsf{X}$。由引理 1.14，存在 $x \in \mathsf{X}$ 以及 $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma$，使得 $\rho_1(0) = \rho_2(0) = x$，$\rho_1(1) = \gamma(0)$，$\rho_2(0) = x'$，并且 $\mathrm{im}(\rho_1) \cup \mathrm{im}(\rho_2) \subset \mathsf{X}$。由于 X 是 X' 中的初始对象，我们也知道 $x \in \mathsf{X}$。

设 $\mathsf{Y}' \ni \gamma(1)$ 且 $y' \in \mathsf{Y} = \mathrm{Init}(\mathsf{Y}')$。再次由引理 1.14，存在 $y \in \mathsf{Y}$ 和 $\rho_3, \rho_4 \in \Gamma$，使得 $\rho_3(0) = \rho_4(0) = y$，$\rho_3(1) = \rho(0)$，$\rho_4(1) = y'$，且 $\mathrm{im}(\rho_3) \cup \mathrm{im}(\rho_4) \subset \mathsf{Y}$。又由于 Y 是 Y' 中的初始对象，我们也知道 $y \in \mathsf{Y}$。

令 $\gamma' = \rho_1 \cdot \gamma$ 和 $\rho' = \rho_3 \cdot \rho$。注意到 $\mathrm{im}(\rho_3 \cdot \rho) \subset \mathsf{Y}'$。因此我们有 $\gamma'(0) \in \mathsf{X}', \gamma'(1) \in \mathsf{Y}'$，$\rho'(1) = \gamma'(1)$，且 $\mathrm{im}(\rho') \subset \mathsf{Y}'$。根据定义 1.12(3)，存在 $\tilde{\rho}, \tilde{\gamma} \in \Gamma$

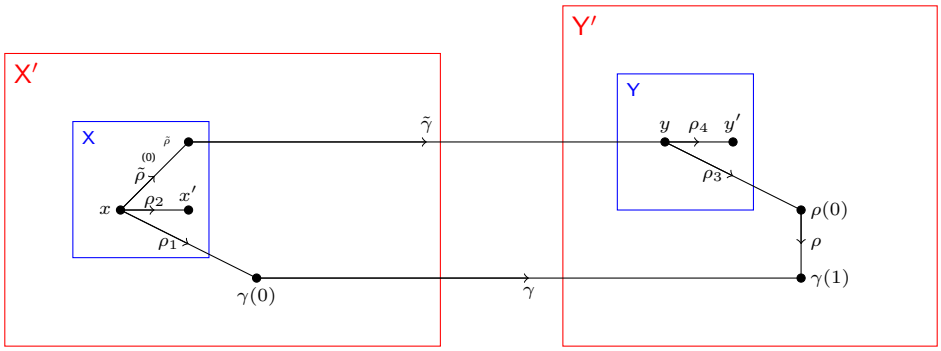


图 2.2。 命题证明中使用的第一个示意图2.45。红色方框表示 $\mathfrak{P}'$ 中的像素。蓝色方框表示 $\mathfrak{P}$中的像素。标签是命题证明中使用的像素名称2.45。点带有标签，路径的标签位于指示其方向的箭头附近。

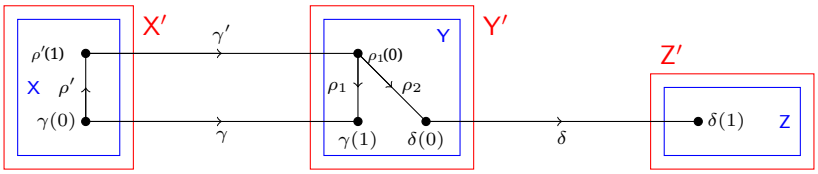


图 2.3。 命题证明中使用的第二个示意图 2.45。红色方框表示 $\mathfrak{P}'$ 中的像素，蓝色方框表示 $\mathfrak{P}$中的像素。标签是命题证明中使用的标签2.45。点带有标签，路径的标签位于指示其方向的箭头附近。

使得 $\mathrm{im}(\tilde{\rho}) \subset \mathrm{X}'$, $\tilde{\rho}(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\tilde{\rho}(1) = x$, $\tilde{\gamma}(1) = y$, 且 $\tilde{\rho}\cdot\gamma \sim \tilde{\gamma}\cdot\rho$。由于 X 在 X′ 中是初始的，我们知道 $\tilde{\rho}(0) = \tilde{\gamma}(0) \in \mathrm{X}$。因此，

$$H'([\tilde{\gamma}]) = H'([\tilde{\gamma}\cdot\rho']) = H'([\tilde{\rho}\cdot\gamma']) = H'([\gamma']) = H'([\rho']^{-1}[\gamma']) = H'([\rho]^{-1}[\gamma]).$$

由于 $[\tilde{\gamma}]$ 也是 C 中的一个态射，因此我们有 $H'([\tilde{\gamma}]) = H'p'([\tilde{\gamma}])$。现在我们有一条位于 C 中的路径 $\tilde{\gamma}$，满足 $\tilde{\gamma}(0) \in \mathrm{X}$ an The d $\tilde{\gamma}(1) \in \mathrm{Y}$。定义 $\mathrm{Init}(f)$ 为 $Hp([\tilde{\gamma}])$。

假设 $\tilde{\gamma}' \in \Gamma$ 满足 $H'p'([\tilde{\gamma}']) = f$、 $\tilde{\gamma}'(0) \in \mathrm{X}$ 且 $\tilde{\gamma}'(1) \in \mathrm{Y}$。根据引理 1.14，我们有 ρ_1、ρ_2、ρ_3、$\rho_4 \in \Gamma$ 满足以下条件。我们有 $\rho_1(0) = \rho_2(0)$、 $\rho_1(1) = \tilde{\gamma}(0)$、 $\rho_2(1) = \tilde{\gamma}'(0)$，且 $\mathrm{im}(\rho_1) \cup \mathrm{im}(\rho_2) \subset \mathrm{X}$。我们还有 $\rho_3(1) = \rho_4(1)$、 $\rho_3(0) = \tilde{\gamma}(1)$、 $\rho_4(0) = \tilde{\gamma}'(1)$，且 $\mathrm{im}(\rho_3) \cup \mathrm{im}(\rho_4) \subset \mathrm{Y}$。于是 $H'p'([\rho_1\cdot\tilde{\gamma}\cdot\rho_3]) = H'p'([\rho_2\cdot\tilde{\gamma}'\cdot\rho_4])$。在重新参数化意义下，根据定义 1.12(5)，我们有 $\rho_1\cdot\tilde{\gamma}\cdot\rho_3 \sim \rho_2\cdot\tilde{\gamma}'\cdot\rho_4$。因此， $Hp[\tilde{\gamma}'] = Hp[\tilde{\gamma}]$，所以 Init 在态射上良定义。

假设 f和 g是 $Q(C,\mathfrak{P}')$ 中的态射，且 $g\circ f$有定义。读者可以参考图 2.3 来理解证明的下一部分。设 $[\gamma]$ 和 $[\delta]$分别是 C 中的态射，满足 $Hp([\gamma]) = \mathrm{Init}(f)$ 且 $Hp([\delta]) = \mathrm{Init}(g)$。令 $\mathrm{X} \ni \gamma(0)$、$\mathrm{Y} \ni \gamma(1)$ $\delta(0)$，以及 $\mathrm{Z} \ni \delta(1)$，其中 X、Y、Z $\in \mathfrak{P}$。那么，在 $Q(C,\mathfrak{P})$ 中， $Hp([\delta]\circ[\gamma])$有定义。

再次由引理 1.14，存在 $\rho_1,\rho_2 \in \Gamma$，使得 $\rho_1(0) = \rho_2(0)$， $\rho_1(1) = \gamma(1)$，$\rho_2(1) = \delta(0)$，且 $\mathrm{im}(\rho_1) \cup \mathrm{im}(\rho_2) \subset \mathrm{Y}$。由定义 1.12(3)，存在 $\rho',\gamma' \in \Gamma$，使得 $\rho'(0) = \gamma'(0)$， $\rho'(1) = \gamma(0)$， $\gamma'(1) = \rho_1(0)$，$\mathrm{im}(\rho') \subset \mathrm{X}$，且 $\rho'\cdot\gamma \sim \gamma'\cdot\rho_1$。

于是 $Hp([\gamma'\cdot\rho_1]) = Hp([\rho'\cdot\gamma]) = Hp([\gamma])$，因此 $\mathrm{Init}(f) = Hp([\gamma'\cdot\rho_1])$。因此，$Hp([\gamma'\cdot\rho_1\cdot\delta]) = Hp([\delta]\circ[\gamma])$，此外，$H'p'([\gamma'\cdot\rho_1\cdot\delta]) = H'p'([\delta]\circ[\gamma])$。所以，$\mathrm{Init}(g)\circ\mathrm{Init}(f) = \mathrm{Init}(g\circ f)$，因此 Init 是一个函子。□

可以构造一个与引理1.19 对偶的引理，改为选取一个终端像素，并定义函子 $\mathrm{Term}: Q(C,\mathfrak{P}') \to Q(C,\mathfrak{P})$。然而，在本文中，初始像素对我们更有用，尤其是在第 4.3 节。

备注2.46。注意，若 $f\neq f'\in \mathrm{Hom}_{Q(C,\mathfrak{P}')}(X',Y')$，那么运用命题 2.45 证明中的技巧可知，任意满足 $H'p'(\gamma) = f$ 且 $H'p'(\gamma') = f'$ 的对 γ,γ'，必有 $\gamma\not\sim\gamma'$，尤其是 $Hp(\gamma)\neq Hp(\gamma')$。也就是说，Init 在 Hom 空间上是内射的。

3. 表示

本节专门讨论 $\mathcal{A}$ (记号 2.9)。在第 3.1 节中，我们回顾范畴表示的定义，并证明一些关于屏幕与表示如何相互作用的结果。若存在一个以特定方式与表示相容的屏幕，我们就称该表示为像素化表示（定义 3.4）。在第3.2 节中，我们讨论像素化表示的阿贝尔范畴，以及这些范畴上的正合结构。

对于第3节的全部内容，我们固定如下对象。

- 一个三元组 $(\mathbb{X},\Gamma/\!\sim)$ 属于 $\mathbf{X}$ (定义 1.1,1.2和 1.7)以及
- 一个路径基理想 $\mathcal{I}$ 属于 $\mathcal{C}$。（定义 2.1 和 2.8）。

我们还假设 $\mathscr{P}$ 非空（即存在一个屏 $\mathfrak{P}$ 属于 $(\mathbb{X},\Gamma/\!\sim)$，定义1.12）。回忆 $\mathcal{A}$ (记号 2.14), $\mathcal{I}^{\mathfrak{P}}$ (定义 2.13), $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ (记号 2.14), 以及 $\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ (定义 2.16 和命题 2.19）。□

回忆一下，$\Bbbk$ 是一个交换环。本节固定一个 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{K}$。读者可以选取 $\mathcal{K}=\Bbbk$-模来辅助直观理解。

3.1. 表示与屏幕。

定义 3.1（表示）。设 D 为一个范畴，$\mathcal{D}$ 为一个 $\Bbbk$-线性范畴。M 到 D 且取值于 $\mathcal{K}$ 的一个表示 是一个函子 $M: D\to\mathcal{K}$。$\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{K}$ 且取值于 $\Bbbk$的一个表示 是一个 $M:\mathcal{D}\to\mathcal{K}$的 $\Bbbk$-线性函子。

在这两种情况下，如果 M 因子分解通过 $\mathcal{K}$中的有限长度对象，则表示 M 是逐点有限长度 （pwf）。同样在这两种情况下，M的支撑记作 $\mathrm{supp}\ M$，是 D或 $\mathcal{D}$中满足以下条件的对象类：$x\in\mathrm{supp}\ M$当且仅当$M(x)\neq 0$。

若 $\Bbbk$ 是一个域且 $\mathcal{K}=\Bbbk$-模，那么有限长度 $\Bbbk$-模是有限维向量空间。在文献中，这种情况下的 pwf 表示称为 逐点有限维。例如，参见 [BCB20 24]。

记号 3.2。我们将 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})$（分别地，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(D)$）记作 $\mathcal{D}$（分别地，D）的表示范畴，其取值于 $\mathcal{K}$。我们将 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})$（分别地，$\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}_{\mathcal{K}}(D)$）记作 $\mathrm{Rep}(\mathcal{D})$（分别地，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(D)$）的全子范畴，其对象是因子分解通过 $\mathcal{K}$中有限长度对象的函子。

回顾函子 $H: C^{\mathfrak{P}}\to Q(C,\mathfrak{P})$ 和 $H^{-1}: Q(C,\mathfrak{P})\to C^{\mathfrak{P}}$ (定理 2.37(1) 的证明)。另请回顾函子 $F: Q(\mathcal{A},\mathfrak{P})\to\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$，以及 $G: \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}\to Q(\mathcal{A},\mathfrak{P})$（分别见定义 2.39 和 2.41）。

注 3.3. 由于 F 和 G 是范畴的等价关系，所诱导的函子

$$
\begin{aligned}
(H^{-1})^*:\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\boxed{C}^{\mathfrak{P}}\right)&\to\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\overline{Q(C,\mathfrak{P})}\right) && (H^{-1})^*(M)=M\circ H^{-1}\\
H^*:\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\overline{Q(C,\mathfrak{P})}\right)&\to\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\boxed{C}^{\mathfrak{P}}\right) && H(M)=M\circ H\\
F^*:\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\boxed{\mathcal{A}}^{\mathfrak{P}}\right)&\to\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\overline{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}\right) && F(M)=M\circ F\\
G^*:\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\overline{\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})}\right)&\to\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}\left(\boxed{\mathcal{A}}^{\mathfrak{P}}\right) && G(M)=M\circ G
\end{aligned}
$$

也是范畴之间的等价关系。特别地，它们是正合的。

如果范畴 Rep$\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 幂等完备且有足够的紧对象，那么它具有 Krull–Remak–Schmidt–Azumaya 性质 [Bra25，定理 4.1]。由于 $\mathcal{A}$是小的，若 $\Bbbk$ 是一个域且 $\mathcal{K}=\Bbbk$-Vec，那么根据 [BCB20，定理 1.1]，$\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A})$ 具有 Krull–Remak–Schmidt–Azumaya 性质。Rep$\mathcal{K}(C)$ 和 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{pwf}}(C)$ 也分别满足相同的结论。

由于对每个 $\mathfrak{P}\in\mathscr{P}$，我们都有 $C^{\mathfrak{P}}$和 $\boxed{\mathcal{A}}^{\mathfrak{P}}$ 等价于路径范畴，因此我们希望研究那些能与屏幕“相处融洽”的表示。

定义 3.4 (像素化)。设 M 是 Rep$\mathcal{K}(\mathcal{A})$（分别是 Rep$\mathcal{K}(C)$）中的一个表示，且 $\mathfrak{P}\in\mathscr{P}$。若对所有$\sigma\in\Sigma_{\mathfrak{P}}$，$\mathfrak{P}$ 使.....像素化 M，即 $M(\sigma)$ 是一个同构（分别地，对所有 $[\rho]\in\Sigma_{\mathfrak{P}}$，$M([\rho])$ 是一个同构），则称之为如此。若存在这样的 $\mathfrak{P}$，则称 M 是像素化的，或由.....像素化 $\mathfrak{P}$。

我们记 像素化的 $(\mathbb{X},\Gamma/\!\sim)$ 的屏为 $\mathscr{P}_M$ 化 M。

集合 $\mathscr{P}_M$ 继承自 $\mathscr{P}$ （定义 1.15）。

注 3.5. 关于将表示 M 像素化的划分，我们给出两点说明。

- 设 M 是 Rep$\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中的一个表示。若 x,y 位于 $\mathfrak{P}\in\mathscr{P}_M$ 的一个死像素中，则 $M(0:x\to y)$ 是一个同构。因此，对于所有死像素 $\mathsf{X}\in\mathfrak{P}$ 以及所有 $x\in\mathsf{X}$，均有 $M(x)=0$。
- 设 M 是 Rep$\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 或 Rep$\mathcal{K}(C)$ 中的一个表示。注意，若$\mathfrak{P},\mathfrak{P}'\in\mathscr{P}$, $\mathfrak{P}'$像素化 M，且 $\mathfrak{P}$细化 $\mathfrak{P}'$，则 $\mathfrak{P}$像素化 M。因此，$\mathscr{P}_M$ 在细化下封闭。

命题 3.6。设 M 在 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中或在 $\mathrm{Rep}\mathcal{K}(C)$中是像素化的。则存在一个屏 $\mathfrak{P}_M\in\mathscr{P}_M$，使得 $\mathfrak{P}_M$ 是 $\mathscr{P}_M$中的极大元。

证明。我们证明 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 这一情形，因为两种情形的证明几乎相同。再次使用 Kuratowski–Zorn 引理，如同在命题 1.16的证明中所做的那样。设 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{P}_M$中的一条链。按照命题 1.16的证明计算 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$。我们需要证明 $\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$像素化 M。

设 $\sigma\in\Sigma_{\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}}$在 $\mathcal{A}$中非零。则对于某个 $[\gamma]\in$，有 $\sigma=\lambda[\gamma]$ Mor$(\mathcal{C})$。于是存在某个 $\mathsf{X}\in\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}$，使得 im$(\gamma)\subseteq\mathsf{X}$。根据命题 1.16（第 10 页）证明中的技巧，存在某个 $\mathsf{X}\in\mathfrak{P}\in\mathscr{T}$，使得 im$(\gamma)\subset\mathsf{X}$。由此可见 $\sigma=\lambda[\gamma]\in\Sigma_{\mathfrak{P}}$。因此，由于 $\mathfrak{P}$ 像素化 M，我们有 $M(\sigma)$ 是一个同构。因此，$\mathfrak{P}_{\mathscr{T}}\in\mathscr{P}_M$，于是根据 Kuratowski–Zorn 引理，$\mathscr{P}_M$有一个极大元。□

回顾函子 $\pi:\ \mathcal{A}\to\boxed{\mathcal{A}}^{\mathfrak{P}}$(记号 2.21) 和 $G:\ \boxed{\mathcal{A}}^{\mathfrak{P}}\to\mathcal{Q}(\boxed{\mathcal{A}},\mathfrak{P})$(定义 2.41)。

定理 3.7. 给定一个在Rep$\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 或Rep$\mathcal{K}(C)$ 中的像素化表示 M 和$\mathfrak{P}\in\mathscr{P}_M$，则存在一个表示 M，使得 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$满足 $\pi^*(G^*(M))\cong M$。

证明. 与命题 3.6中一样，我们只证明 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$的情况，因为另一个证明类似。

设 M 在 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 中是像素化的，并设 $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}_M$。令 $(S, \{\gamma_x \cdot \rho_x^{-1}\}_{x\in\mathbb{X}})$ 为 $\mathfrak{P}$ 的一个样本（定义 2.32）。对每个 $x \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$，将 φ_x 写作 $[\rho_x]^{-1}[\gamma_x]$。回忆一下，我们有等价 $G\colon \mathcal{A}^{\mathfrak{P}} \to \mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$（定理 2.37），它诱导出等价 $G^*\colon \mathsf{Rep}(\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})) \to \mathsf{Rep}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$。 □

我们直接构造 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathfrak{P})$ 的表示 $\overline{M}$，然后证明 $\overline{M} \cong \pi^*(G^*(M))$。对于 $Q(\mathcal{A},\mathfrak{P})$ 的每个顶点 X，令 $\overline{M}(\mathsf{X}) := M(s_{\mathsf{X}})$。

给定 s_{X} 和 s_{Y}，我们有从 s_{X} 到 s_{Y} 的伪箭头集合 $\mathsf{Arr}(s_{\mathsf{X}}, s_{\mathsf{Y}})$，模去数乘后，该集合含有 1 个或 0 个元素。如果 $\mathsf{Arr}(s_{\mathsf{X}}, s_{\mathsf{Y}})$ 非空，则 $\alpha \in \mathsf{Arr}(s_{\mathsf{X}}, s_{\mathsf{Y}})$。选取一个代表元 $\sigma_\alpha^{-1}[\gamma_\alpha] : s_{\mathsf{X}} \to s_{\mathsf{Y}}$，并令 $y_\alpha = \gamma_\alpha(1)$。那么，$\sigma_\alpha^{-1}[\gamma_\alpha]$ 等价于 $\varphi_{y_\alpha}^{-1}[\gamma_\alpha]$，我们可以将其写作 $([\rho_{y_\alpha}]^{-1}[\gamma_{y_\alpha}])^{-1}[\gamma_\alpha]$。回忆一下，$M([\rho_{y_\alpha}])$ 和 $M([\gamma_{y_\alpha}])$ 是同构，因为 $\mathfrak{P}$ 将 M 像素化。然后，定义

$$\overline{M}(\alpha) := (M([\gamma_{y_\alpha}]))^{-1} \circ M([\rho_{y_\alpha}]) \circ M([\gamma_\alpha]).$$

由于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P})$ 中的每个态射都是幂等元与箭头复合的有限和，因此这定义了一个表示 M，其定义在 $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\ \mathfrak{P})$上。对于伪箭头 $[\gamma]$，在$\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$中，根据定义 2.41，
□

$$G^*(\overline{M})([\gamma]) = M([\gamma_y])^{-1} \circ M([\rho_y]) \circ M([\gamma]) \circ M([\rho_x])^{-1} \circ M([\gamma_x]).$$

设 $M := \pi^*(G^*(M))$. 根据构造，对所有 $x \in \mathbb{X}$，$M(x) \cong M(x)$。我们定义一个同构 $f : M \to M$，如下所示。对于每个 $s_{\mathsf{X}} \in S$，$M(s_{\mathsf{X}}) = M(s_{\mathsf{X}})$。因此，令 $f(s_{\mathsf{X}})$ 为恒等态射。

现在，令 $x \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$。在 $\mathcal{K}$ 中，我们有如下由同构构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{M}(s_{\mathsf{X}}) & = & \widehat{M}(x') & = & \widehat{M}(x) \\
\| & & & & \downarrow{\scriptstyle M(\rho_x)^{-1}\circ M(\gamma_x)} \\
M(s_{\mathsf{X}}) & \xrightarrow[M(\gamma_x)]{} & M(x') & \xrightarrow[M(\rho_x)^{-1}]{} & M(x).
\end{array}$$

因此，定义 $f(x) := M(\rho_x)^{-1} \circ M(\gamma_x)$。

为了证明 f 是表示的态射，我们需要证明，对于 $\mathcal{A}$中的任意态射 $g\colon x \to y$，都有 $f(y)M(g) = M(g)f(x)$。由于 $\mathcal{A}$ 中的每个态射都是形如 $\lambda[\gamma]$的元素之和，其中一个 $[\gamma]$ 可以是常值路径，因此只需将注意力限制在 $[\gamma]$上，证明 f 是表示的态射即可。

令 $[\gamma] : x \to y$ 是 $\mathcal{A}$中的一个态射。若 $[0,1]$ 根据定义 1.12(4划分所得的像素为一个或两个，那么我们知道

$$\begin{aligned}
f(y) \circ \widehat{M}([\gamma]) &= f(y) \circ \big(M([\gamma_y])^{-1} \circ M([\rho_y])\big) \circ M([\gamma]) \circ \big(M([\rho_x])^{-1} \circ M([\gamma_x])\big) \\
&= f(y) \circ f(y)^{-1} \circ M[\gamma] \circ f(x) \\
&= M[\gamma] \circ f(x).
\end{aligned}$$

现在假设 $[0,1]$ 在定义 1.12(4) 中的划分包含多于 2 个像素。那么，$[\gamma] = [\gamma_n] \circ \cdots \circ [\gamma_1]$，其中每个 $[\gamma_i]$ 都有一个 $[0,1]$ 的划分，该划分来自定义 1.12(4)，且恰有两个像素。对于每个 $1 \le i \le n$，令 $x_{i-1} = \gamma_i(0)$和 $x_{i+1} = \gamma_i(1)$。注意到 $x_0 = x$ 和 $x_n = y$。于是得到如下图表

其中每个方块根据上一段中的论证都可交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{M}(x=x_0) & \xrightarrow{\widehat{M}([\gamma_1])} & \widehat{M}(x_1) & \xrightarrow{\widehat{M}([\gamma_2])} & \cdots & \xrightarrow{\widehat{M}([\gamma_n])} & \widehat{M}(x_n=y) \\
\downarrow{\scriptstyle f(x=x_0)} & & \downarrow{\scriptstyle f(x_1)} & & & & \downarrow{\scriptstyle f(x_n=y)} \\
M(x=x_0) & \xrightarrow[M([\gamma_1])]{} & M(x_1) & \xrightarrow[M([\gamma_2])]{} & \cdots & \xrightarrow[M([\gamma_n])]{} & M(x_n=y).
\end{array}$$

于是整个图表交换，因此 f 确实是表示的态射。于是， f 是一个同构，并且 $\pi^*(G^*(M)) \cong M$ 正如所要求的那样。□

根据定理 3.7，我们希望研究所有能够借助该定理的表示。

从[PRY24] 得到的线程箭图的准无噪表示的阿贝尔范畴，就是本文意义下的所有像素化表示所构成的范畴。然而，作者目前尚不清楚“所有”像素化表示所构成的范畴在完全一般的情形下是否为阿贝尔范畴。作者对此持否定猜测。尽管如此，我们仍然可以着手理解像素化表示的阿贝尔范畴。

回顾一下，如果 $\cdots \to A_{-1} \to A_0 \to A_1 \to \cdots$ 在 $\mathsf{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$ 中是正合的，那么对于每个 $x \in \mathbb{X}$， $\cdots \to A_{-1}(x) \to A_0(x) \to A_1(x) \to \cdots$ 在 $\mathcal{K}$ 中是正合的。这是因为， $\mathcal{A}$ 的表示只是 $\Bbbk$-线性 函子。对于 $\mathsf{Rep}_\kappa(C)$，类似的陈述同样成立，因为我们可以将每个函子 $C \to \mathcal{K}$ 视为唯一的 $\Bbbk$-线性函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{K}$，反之亦然。

引理 3.8. 设 A、 B 和 M 是 $\mathrm{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$ 中的表示，且设 $\mathfrak{P}$ 是一个同时对 A 和 B进行像素化的屏。若 *(1)*、*(2)* 或 *(3)* 成立，则 $\mathfrak{P}$ 对 M进行像素化：

(1) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \to 0$ 在 $\mathrm{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$中正合，（
2) $0 \to M \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ 在 $\mathrm{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$中正合，或
(3) $0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} B \to 0$ 在 $\mathrm{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$中正合。

如果所有表示都属于$\mathrm{Rep}_\kappa(C)$，同样的结论也成立。

证明。 我们只证明（1）和（3），因为（1）和（2）的证明类似。此外，$\mathrm{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$和$\mathrm{Rep}_\kappa(C)$的情形的证明几乎相同，因此我们证明 $\mathrm{Rep}_\kappa(\mathcal{A})$的情形。

首先证明（1）。设 $x, y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 满足 $\sigma : x \to y$ 属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$。由于 f 和g 是表示之间的映射，且该序列正合，因此有如下交换图，

$$\begin{array}{ccccccc}
A(x) & \xrightarrow{f_x} & B(x) & \xrightarrow{g_x} & M(x) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle A(\sigma)} & & \downarrow{\scriptstyle B(\sigma)} & & \downarrow{\scriptstyle M(\sigma)} & & \downarrow \\
A(y) & \xrightarrow[f_y]{} & B(y) & \xrightarrow[g_y]{} & M(y) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中各行都是正合的。由于 $\mathfrak{P}$ 对 A 和 B 进行像素化，我们知道 $A(\sigma)$ 和 $B(\sigma)$ 是同构。于是 $A(x) \cong A(y)$，且 $B(x) \cong B(y)$，因此 $M(x) \cong M(y)$。接着，根据四引理，$M(\sigma)$ 是单态射。但 $M(\sigma) \circ g_x = g_y \circ B(\sigma)$ 是满态射，所以 $M(\sigma)$ 必定是满态射。由于 $\mathcal{K}$ 是阿贝尔的，这意味着 $M(\sigma)$ 是同构。因此， $\mathfrak{P}$ 对 M 进行像素化。

现在我们证明 (3)。再次设 x，$y \in \mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 其中 $\sigma\colon x \to y$ 属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$。再次，f 和 g是表示的映射，因此我们有 $\mathcal{K}$中的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A(x) & \xrightarrow{f_x} & M(x) & \xrightarrow{g_x} & B(x) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A(\sigma)} & & \downarrow{\scriptstyle M(\sigma)} & & \downarrow{\scriptstyle B(\sigma)} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A(y) & \xrightarrow[f_y]{} & M(y) & \xrightarrow[g_y]{} & B(y) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中各行都是正合的。由于 $\mathfrak{P}$将 A和 B 像素化，我们知道 $A(\sigma)$ 和 $B(\sigma)$ 都是同构。于是，根据五引理，$M(\sigma)$ 是同构。因此，$\mathfrak{P}$ 将 M像素化。□

回顾函子 $p\colon C \to C^{\mathfrak{P}}$ 和 $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{P}}$ (记号 2.21)。根据引理 3.8，关于 $p^*\colon \mathrm{Rep}\kappa(C^{\mathfrak{P}}) \to \mathrm{Rep}\kappa(C)$以及 $\pi^*\,\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}) \to \mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A})$，我们有如下结论。

命题 *3.9.* 对任意 $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}$，函子 $p^*\colon \mathit{Rep}\kappa(C^{\mathfrak{P}}) \to \mathit{Rep}\kappa(C)$ 和 $\pi^*\colon \mathit{Rep}\kappa(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}) \to \mathit{Rep}\kappa(\mathcal{A})$ 是正合嵌入，并且它们分别限制为正合嵌入 $\mathit{rep}^{pwf}_{\mathcal{K}}(C^{\mathfrak{P}}) \to \mathit{rep}^{pwf}_{\mathcal{K}}(C)$ 和 $\mathit{rep}^{pwf}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}) \to \mathit{rep}^{pwf}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$。

证明。与之前一样，我们只证明带有 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A})$ 的情形，因为另一种情形的证明类似。

回顾一下，函子 π^* 在对象上的定义是：取一个表示 $M\colon \mathcal{A}^{\mathfrak{P}} \to \Bbbk$-Mod，并与 π 前复合，从而得到 $M \circ \pi\colon \mathcal{A} \to \Bbbk$-Mod。设 $0 \to A \to \bar{B} \to \bar{C} \to 0$ 在 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$ 中正合，并设 $A = \pi^*\bar{A}$、$B = \pi^*\bar{B}$ 和 $C = \pi^*\bar{C}$。

考虑 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 中的序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$。任取$x \in \mathbb{X}$，并取 $\mathsf{X} \in \mathfrak{P}$ 使得 $x \in \mathsf{X}$。于是我们在 $\mathcal{K}$ 中得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A(s_{\mathsf{X}}) & \longrightarrow & B(s_{\mathsf{X}}) & \longrightarrow & C(s_{\mathsf{X}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & A(x) & \longrightarrow & B(x) & \longrightarrow & C(x) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中顶行正合。因此，底行也正合。

因此，由于 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 在每个 $x \in \mathbb{X}$ 处都正合，我们知道 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 在 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A})$ 中正合。因此，π^* 正合。

注意，若 $\bar{A} \ncong \bar{A}'$ 属于 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$，则存在某个 s_{X}，使得 $\bar{A}(s_{\mathsf{X}}) \ncong \bar{A}'(s_{\mathsf{X}})$。于是 $\pi^*A(s_{\mathsf{X}}) \ncong \pi^*A'(s_{\mathsf{X}})$。因此，$\pi^*$ 是一个嵌入。

由于 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A})$ 上的通常正合结构限制到 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$，正合嵌入 π^* 也如此。□

3.2. **阿贝尔子范畴与正合结构**。

选取 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A})$ 或 $\mathrm{Rep}\kappa(C)$ 中的一些表示 A 和 B。注意，若$\mathfrak{P}_A$ 和 $\mathfrak{P}_B$ 分别是将 A 和 B像素化的屏幕，那么任何同时细化 $\mathfrak{P}_A$ 和 $\mathfrak{P}_B$ 的屏幕 $\mathfrak{P}$，都会将 A 和 B都像素化。因此，我们希望考察 $\mathrm{Rep}\kappa(\mathcal{A})$ 的某个子范畴，其中对于任意有限集的屏幕，只要每个屏幕都将该子范畴中的某个表示像素化，就存在一个细化它们全部的屏幕。请注意，我们并不一定假设这个屏幕集合在 $\sqcap$（定义 1.21）下封闭。

回想一下，我们假设 $\mathscr{P} \neq \emptyset$。定义子集 $\mathbf{S} \subset \mathbf{2}^{\mathscr{P}}$，其中 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$ 当且仅当，对于任意有限集 $\{\mathfrak{P}_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{L}$，都存在一个 $\mathfrak{P} \in \mathscr{L}$，它细化每个

$\mathfrak{P}_i$。（由于 $\mathscr{P}$ 非空，$\mathbf{S}$ 也非空。）通过一个利用 Kuratowski–Zorn 引理的常规论证可知，$\mathbf{S}$ 至少有一个极大元。

给定 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，我们分别用 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 和 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 和 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A})$ 的全子范畴，其中的对象是满足 $\mathscr{P}_M \cap \mathscr{L} \neq \emptyset$ 的表示 M。

于是我们得到以下定理，它描述了像素化表示的一些阿贝尔范畴。

定理 *3.10.* 对每个 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，范畴 $\mathit{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C)$、$\mathit{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C)$、$\mathit{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 和 $\mathit{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 都是阿贝尔范畴。它们分别嵌入 $\mathit{Rep}_{\mathcal{K}}(C)$、$\mathit{rep}^{pwf}(C)$、$\mathit{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 和 $\mathit{rep}^{pwf}(\mathcal{A})$ 的嵌入都是正合的。

证明。和之前一样，我们证明 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 和 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 的情形，因为 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C)$ 和 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C)$ 的情形类似。

首先，令 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$。设 A 和 B 是 $\mathrm{Rep}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 中的对象。于是存在 $\mathscr{L}$ 中的屏幕$\mathfrak{P}_A$ 和 $\mathfrak{P}_B$，分别将 A 和 B像素化。由于 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，存在一个$\mathfrak{P} \in \mathscr{L}$，它细化了 $\mathfrak{P}_A$ 和 $\mathfrak{P}_B$。因此，$\mathfrak{P}$ 同时将 A 和 B像素化。

我们已经证明，对于 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 中任意两个对象，都存在一个屏 $\mathscr{L}$，使其将二者像素化。因此，我们可以应用引理 3.8。具体而言，引理 3.8(1) 告诉我们，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 对余核封闭。引理 3.8(2) 告诉我们，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 对核封闭。最后，引理 3.8(3) 告诉我们，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 对扩张封闭。

因此，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 是阿贝尔的。将注意力限制在 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A})$ 中的表示上，$\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 结合有限长度模的性质与引理 3.8，可知它也是阿贝尔的。

嵌入的正合性遵循命题 3.9 中给出的相同论证。□

如果对于某个屏 $\mathfrak{P}$，$\mathscr{L} = \{\mathfrak{P}\}$，那么 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C) \simeq p^*(\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(C))$，且 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \simeq \pi^*(\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}}))$。

注记 3.11. 由于定理 3.10 中的嵌入都是正合的，我们可以进行如下操作。以 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 中一个像素化的 M in 和一个将 M 像素化的 a $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}$ 为例。那么 M 来自 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P}))$ 中的某个 Min （定理 3.7）。如果 M 同构于直和 $\bigoplus_\alpha M_\alpha$，那么 M 同构于直和$\bigoplus_\alpha M_\alpha$，其中每个 M_α 都来自 M_α。这意味着，如果我们理解了 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathfrak{P})$ 的表示分解，那么我们就理解了 $\pi^*(\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})) \subset \mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 中表示的分解。这种视角和技巧应用于 [HR24, PRY24]。

只有当 $\mathbf{S}$ 有唯一极大元时，我们才有像素化（pwf）表示的“范畴”。例如，当 $\mathscr{P}$ 在 $\sqcup$ (定义 1.21) 下封闭时，就会出现这种情况。此时，$\mathbf{S}$ 的极大元是 $\mathscr{P}$。如果 $\mathbf{S}$有多个极大元，则必须作出一些选择。

回忆一下，对于 $\mathcal{D}$ 一个阿贝尔范畴，我们有加性函子 $\mathrm{Ext}^1 : \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathrm{Ab}$，它将一对 (A, B) 映射到形如$0 \to B \to E \to A \to 0$的扩张群。因此，我们可以将任意加性子函子 $\mathbb{E} \subset \mathrm{Ext}^1$视为 $\mathcal{D}$上的一个正合结构。

由于 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 的阿贝尔子范畴，且其嵌入是正合的，因此对于每个 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，我们都可以将 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 上的任意正合结构 $\mathbb{E} \subset \mathrm{Ext}^1$ 限制到 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。

记号 3.12 ($\mathbb{E}|_{\mathscr{L}}$). 设 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，并设 $\mathbb{E}$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(C)$、$\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{pwf}}(C)$、$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 或 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A})$ 上的正合结构。我们将 $\mathbb{E}$ 在 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C)$、$\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(C)$、$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 或 $\mathrm{rep}_{\mathcal{K}}^{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 上的限制分别记为 $\mathbb{E}|_{\mathscr{L}}$。

注 3.13. 设 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，并设 $\mathbb{E}$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 上的正合结构。

- 那么，我们在 $\mathrm{Rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 上有正合结构 $\mathbb{E}|_{\mathscr{L}}$。取 $\mathfrak{P} \in \mathscr{L}$。于是，$\pi^*$ 可经由 $\mathrm{Rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ 因子分解为一个正合嵌入。注意到对于 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$ 中的每个 M，$\mathfrak{P}$ 都会像素化 $\pi^*(M)$，即可看出这一点。关于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{pwf}\,\mathcal{K}}(\mathcal{A})$、$\mathrm{Rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(C)$ 和 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}\,\mathcal{K}}(C)$ 上的 $\mathbb{E}|_{\mathscr{L}}$，也有类似结论。
- 此外，注意到对于每个 $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}$，都有 $\{\mathfrak{P}\} \in \mathbf{S}$。若 $\mathscr{L} = \{\mathfrak{P}\}$，则 $\mathbb{E}|_{\{\mathfrak{P}\}}$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$、$\mathrm{rep}_{\mathrm{pwf}\,\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$、$\mathrm{Rep}_{\mathcal{K}}(C^{\mathfrak{P}})$ 或 $\mathrm{rep}_{\mathrm{pwf}\,\mathcal{K}}(C^{\mathfrak{P}})$ 上的正合结构。□

推论 3.14. 设 $\mathscr{L} \in S$，且设 $\mathfrak{P} \in \mathscr{L}$。那么，$\mathit{Rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$、$\mathit{rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$、$\mathit{Rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(C)$ 或 $\mathit{rep}^{\mathscr{L}}_{\mathcal{K}}(C)$ 上的任意正合结构 $\mathbb{E}$，分别限制为 $\mathit{Rep}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$、$\mathit{rep}^{pwf}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^{\mathfrak{P}})$、$\mathit{Rep}_{\mathcal{K}}(C^{\mathfrak{P}})$ 或 $\mathit{rep}^{pwf}_{\mathcal{K}}(C^{\mathfrak{P}})$ 上的正合结构。□

证明。结合命题3.9 与注 3.13。□

4. 位点与路径位点

本节证明（小）位点与像素化如何相互作用的相关结果。在第 4.1 节中，我们考虑如定义 2.1 所述，同时也是路径范畴的一般小位点。我们证明，任何带积的屏幕集合 $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$ 本身都是一个位点。我们还证明，当 $C \to Q(C, \mathfrak{P})$ 是位点时，规范商函子 C 既是连续的也是余连续的，这意味着 $Q(C, \mathfrak{P})$ 的层可以提升为 C 的层，而 C 的层则可以向下推送为 $Q(C, \mathfrak{P})$ 的层（定理 4.8）。

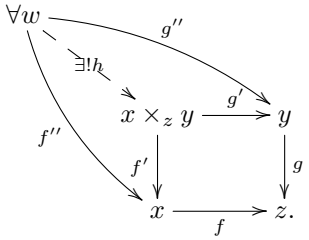
在第 4.2 节中，我们转而关注分配格，并证明分配格既是位点也是路径范畴。特别地，我们考虑一个分配格 C，它是一个更大分配格的子格 L。对于每个 $\mathfrak{P}_Y$，我们给出一种通用类型的屏幕 $Y \in L$（定义 4.9），并证明 $Q(C, \mathfrak{P}_Y)$ 等价于格 $C_Y = \{U \wedge Y \mid U \in C\}$（定理 4.12）。在推论 4.13 中，我们将该定理置于拓扑空间的背景下，更具体地说，$\mathrm{Spec}(R)$ 对应交换环 R。

在第 4.3 节中，我们以路径位点 $(D, \mathcal{O}_D)$（定义 4.14）和 $\mathcal{O}_D$-表示（定义 4.20）的形式，讲述一个与环化空间及其模平行的故事。特别地，我们给出路径位点的“标准”例子。设 C 为一个路径范畴。我们取 $\mathscr{P}$ 的一个特定子范畴 $\mathscr{P}$，它具有相同的对象，并定义一个路径位点层 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$，将一个屏 $\mathfrak{P}$ 映到一个与 $Q(C, \mathfrak{P})$ 同构的路径范畴（定义 4.17）。本节最后给出一个 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$-表示的例子（例 4.23）。

4.1. 一般结果。

我们先回顾一些基本定义和已知事实，然后回顾（小）位点的定义（定义 4.2）。

回想一下，图表 $x \xrightarrow{f} z \xleftarrow{g} y$ 在范畴 $\mathcal{D}$ 中的拉回 或纤维积 是一个对象 $x \times_z y$，配有态射 $f' \colon x \times_z y \to y$ 和 $g' \colon x \times_z y \to x$，使得 $gf' = fg'$。此外，对于任意 w 以及满足 $gf'' = fg''$ 的态射 $f'' \colon w \to y$ 和 $g'' \colon w \to x$，存在唯一的 $h \colon w' \to x \times_z y$，使得 $f'' = f'h$ 和 $g'' = g'h$：



我们不加证明地陈述以下著名引理。

引理 4.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个小范畴，且 Σ 是 $\mathcal{D}$ 中允许进行左右分式演算的态射类。那么规范商函子$\mathcal{D} \to \mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ 保有限极限和有限余极限。

现在我们将该引理置于我们的语境中。回顾三元组$(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ (定义 1.1 和 1.2)、屏幕 $\mathfrak{P}$ (定义 1.12) 以及路径范畴 C(定义 2.1)。也回顾一下 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ (定义 2.16) 和 $p: C \to C^{\mathfrak{P}}$ (记号 2.21)。

设 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 是这样的一个三元组，并设 C 为其路径范畴。设 $\mathfrak{P}$ 是一个屏幕，其所属范畴为$(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$。由于 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ (定义 2.16) 允许进行（左右）分式演算（命题 2.17），商映射 $p: C \to C^{\mathfrak{P}}$ 保所有有限极限和余极限。特别地，如果下方左侧的图表是 C中的一个拉回图，那么下方右侧的图表就是 $C^{\mathfrak{P}}$中的一个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} x \times_z y & \xrightarrow{f'} & y \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ x & \xrightarrow[f]{} & z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p(x \times_z y) & \xrightarrow{p(f')} & p(y) \\ {\scriptstyle p(g')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p(g)} \\ p(x) & \xrightarrow[p(f)]{} & p(z)。 \end{array}$$

也就是说，给定 $C^{\mathfrak{P}}$ 中的图表 $p(x) \overset{p}{\underset{(f)}{\to}} p(z) \overset{p}{\underset{(g)}{\leftarrow}} p(y)$，对象 $p(x \times_z y)$ 与 $p(x)^{\times_{p(z)}} p(y)$ 是规范同构的。

覆盖是 C 中一组具有相同目标的态射 $\{f_i : x_i \to x\}_{i \in I}$。带有所选目标 x 的空集合也被视为覆盖。小范畴 C 的覆盖Cov(C) 是一组覆盖。

定义 4.2（位点）。小范畴 C 是（小）位点，如果存在一个覆盖 Cov(C)，满足以下条件。

(1) 如果 $f: x \to y$ 是同构，则 $\{f: x \to y\} \in$ 属于 Cov(C)。(2) 如果 $\{f_i : x_i \to x\}_{i \in I} \in$ 属于 Cov(C)，并且对每个 $i \in I$，都有 $\{g_{ij} : y_{ij} \to x_i\}_{j \in J_i} \in$ 属于 Cov(C)，则 $\{f_i g_{ij} : y_{ij} \to x\}_{i \in I,\ j \in J_i} \in$ 属于 Cov(C)。(3) 如果 $\{f_i : x_i \to x\}_{i \in I} \in$ 属于 Cov(C)，且 $g: y \to x$ 是 C 中的一个态射，那么对每个 $i \in I$，拉回 $x_i \times_x y$ 都存在，并且 $\{x_i \times_x y \to y\}_{i \in I} \in$ 属于 Cov(C)，其中映射 $x_i \times_x y \to y$ 是通过取拉回诱导的映射。

从现在起，我们省略“small”一词，因为所有位点都是小的。

设 P 是一个偏序集。将 P 视为一个范畴，其对象为 P，Hom 集合定义如下：

$$\mathrm{Hom}_P(x, y) = \begin{cases} \{*\} & x \le y \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果 Hom$_P$(x, y) 非空，我们将唯一的态射记作 $x \to y$。

覆盖 Cov(P) 定义如下。

- 每个 $x \in P$ 的空覆盖都属于 Cov(P)。
- 每个集合 $\{x_i \to x\}_{i \in I}$ 都属于 Cov(P)。

如果读者对此不熟悉，我们给出以下结果。

命题 4.3. 如果偏序集 P 有有限积，那么 P 是一个位点，其覆盖Cov(P) 如上所定义。

证明。由于 P有有限积，对于所有 x，$y \in P$，都存在唯一的 $x \times y \in P$，使得 $x \times y \le x$ 且 $x \times y \le y$；并且如果 $z \le x$ 且 $z \le y$，那么 $z \le x \times y$。

在 P中，唯一的同构是恒等态射。根据定义，$\{x \to x\}$属于 Cov(P)。因此，定义 4.2(1) 得到满足。

假设 $\{x_i \to x\}_{i\in I}$ 是 $\mathrm{Cov}(P)$ 中的一个覆盖，且对每个 $i \in I$，存在一个覆盖 $\{y_{ij} \to x_i\}_{j\in J_i}$ 属于 $\mathrm{Cov}(P)$。我们知道，对于每个 $y_{ij} \le x$ 以及 $i \in I$， $j \in J_i$。因此，$\{y_{ij} \to x\}_{i\in I,\ j\in J_i}$ 也是 $\mathrm{Cov}(P)$ 中的一个覆盖，因此定义 4.2(2) 得到满足。

最后，假设 $\{x_i \to x\}_{i\in I}$ 是 $\mathsf{Cov}(P)$ 中的一个覆盖，且 $y \to x$ 是 P 中的一个态射。对于每个 $i \in I$，根据假设，我们有积 $y \times x_i$。由于 P 中的 Hom 集合要么是单元素集合，要么为空，我们看到 $y \times x_i$ 也是拉回 $y' \times_x x_i$。此外，对于每个 $i \in I$，我们有 $y \times x_i \le y$。因此， $\{y \times x_i \to y\}_{i\in I}$ 也属于 $\mathsf{Cov}(P)$，从而满足定义 4.2(3)。因此，带有覆盖 $\mathsf{Cov}(P)$ 的 P 是一个位点。□

特别地，如果子集 $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$ 是一个具有有限积的偏序集，那么命题4.3 适用。

在定义 4.4 和命题 4.5中，我们分别将记号 p 和 H中的函子，以及定理2.37 的证明中第2.37（1）页23处的函子进行推广。特别是，我们考虑复合 Hp。

首先，介绍一下我们的设定。设 C 是一个带有覆盖 $\mathsf{Cov}(C)$ 的位点，且 C 中唯一的同构态射是恒等映射。设 Σ 是 C 中的一类态射，使得 Σ 导出左右分式演算，并设 $p : C \to C[\Sigma^{-1}]$ 是典范局部化函子。此外，假设 $\mathcal{S}$ 是 $C[\Sigma^{-1}]$ 的骨架，并且存在一个商函子 $H : C[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{S}$，使得典范包含 $H^{-1} : \mathcal{S} \to C[\Sigma^{-1}]$ 是一个左拟逆和右逆。也就是说， HH^{-1} 是 $\mathcal{S}$ 上的恒等映射，而 $H^{-1}H$ 是 $C[\Sigma^{-1}]$ 上的自等价。

定义 4.4。 在上述设定下，我们将覆盖 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$ 定义为集合$\{Hp(f_i) : Hp(x_i) \to Hp(x)\}$，其中对每个覆盖 $\{f_i : x_i \to x\} \in \mathsf{Cov}(C)$ 均如此，包括空覆盖。

作者未能在文献中找到以下命题的证明。

命题 4.5. 设 C 连同 $\mathrm{Cov}(C)$、 Σ 以及 $\mathcal{S}$ 连同$\mathrm{Cov}(\mathcal{S})$ 如上文的设定所述。那么， $\mathcal{S}$ 是一个位点，其覆盖为 $\mathrm{Cov}(\mathcal{S})$。

证明。 首先检验定义 4.2(1)。由于 $\mathcal{S}$是一个骨架， $\mathcal{S}$中唯一的同构是恒等态射。又由于 $Hp(1_x) = 1_{Hp(x)}$，我们有 $\{1_x : x \to x\}$属于 $\mathrm{Cov}(\mathcal{S})$ ，对每个对象 x 属于 $\mathcal{S}$均成立。因此，定义 4.2(1) 得到满足。

接下来检验定义 4.2(2)。假设有覆盖 $\{Hp(f_i) : Hp(x_i) \to Hp(x)\}_{i\in I}$ ，且它属于 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$。并且，对每个 $i \in I$，假设有 $\{Hp(g_{ij}) : Hp(y_{ij}) \to Hp(x_i)\}_{j\in J_i}$ ，且它属于 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$。由于 C 是一个位点，我们知道存在 $\{f_i g_{ij} : y_{ij} \to x\}_{i\in I, j\in J_i}$，且它属于 $\mathsf{Cov}(C)$。根据定义，$\{Hp(f_i g_{ij}) : Hp(y_{ij}) \to Hp(x)\}_{i\in I, j\in J_i}$ 属于 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$。因此，定义 4.2(2) 得到满足。

最后，我们检查定义 4.2(3)。设 $\{Hp(f_i) : Hp(x_i) \to Hp(x)\}_{i\in I}$ 是 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$ 中的一个元素，并设 $g : y \to Hp(x)$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个态射。那么存在一个 $\tilde{g} : y \to x$ in$C[\Sigma^{-1}]$ ，使得 $H(\tilde{g}) = g$，其中 $\tilde{g} = \sigma^{-1}\tilde{g}$ 对某个 C 中的态射 $\tilde{g}$ 成立。设 $\tilde{y}$ 是 $\tilde{g}$的源，它同时也是 C 的一个对象。于是，由于 $\sigma \in \Sigma$，我们知道 $H(\sigma^{-1}) = 1_{Hp(x)}$。因此， $Hp(\tilde{y}) = y$ ，且 $Hp(\tilde{g}) = g$。

由于 C 是一个位点，并且根据引理 4.1，左侧的拉回图 C 在右侧成为 $\mathcal{S}$ 中的拉回图，对每个 $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc} x_i \times_x \tilde{y} & \xrightarrow{f_i'} & \tilde{y} \\ {\scriptstyle g_i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{g}} \\ x_i & \xrightarrow[f_i]{} & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hp(x_i \times_x \tilde{y}) & \xrightarrow{Hp(f_i')} & Hp(\tilde{y}) = y \\ {\scriptstyle Hp(g_i')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g=Hp(\tilde{g})} \\ Hp(x_i) & \xrightarrow[Hp(f_i)]{} & Hp(x), \end{array}$$

其中 $Hp(x_i \times_x \tilde{y})$ 与 $Hp(x_i)^{\times_{Hp(x)} y}$ 是典范同构的。此外，我们知道 $\{f_i' \colon x_i \times_x y \to y\}_{i\in I} \in \mathsf{Cov}(C)$，因为 C 是一个位点。因此，在 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$ 中有 $\{Hp(f_i') \colon Hp(x_i) \times_{Hp(x)} y \to y\}_{i\in I}$。所以，定义 4.2(3) 得以满足，因此 $\mathcal{S}$ 是一个位点，其覆盖为 $\mathsf{Cov}(\mathcal{S})$。□

定义 4.6（连续函子）。设 C 和 D 为位点，$F \colon C \to D$ 为函子。若对每个 $\{f_i \colon x_i \to x\} \in \mathsf{Cov}(C)$，以下条件均成立，则称 F 为连续的。

(1) 集合 $\{F(f_i) \colon F(x_i) \to F(x)\}$ 属于 $\mathsf{Cov}(D)$。(2) 对任意态射 $g \colon y \to x$，典范态射 $F(y \times_x x_i) \to F(y) \times_{F(x)} F(x_i)$ 是一个同构。

命题 4.7。在命题 4.5中的设定下，商函子 $Hp \colon C \to \mathcal{S}$ 是连续的。

证明。定义4.6(1) 由定义 4.4 得出。定义 4.6(2) 由定义4.1 得出。□

现在，我们将命题4.5 和 4.7 纳入我们的语境。

定理 *4.8.* 设 C 是来自 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 的路径范畴，同时也是一个覆盖为 $Cov(C)$ 的位点。设 $\mathfrak{P}$ 是 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 的一个屏，并按照命题 4.5 为 $Q(C, \mathfrak{P})$ 赋予覆盖 $Cov(Q(C, \mathfrak{P}))$。那么，$Q(C, \mathfrak{P})$ 上的任意层都可提升为 C 上的层。

证明。在命题 4.5 和 4.7的设定中，$\mathcal{S}$ 上的任意层都可提升为 C 上的层，而 C 上的任意层都可以向下推为 $\mathcal{S}$上的层。我们知道，如果位点之间的函子 $F : C \to D$ 是连续的，那么 D 上的任意层都可提升为 C上的层（例如，参见 [Sta26, 00WU]）。

为说明结论：态射类 Σ 对于一个屏 $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 而言是 $\mathfrak{P}$。位点$\mathcal{S}$ 的骨架 $C[\Sigma_{\mathfrak{P}}^{-1}] = C^{\mathfrak{P}}$ 是 $Q(C, \mathfrak{P})$。函子 p 和 H 同名，分别见记号2.21以及定理2.37(1) 的证明，第23页。□

4.2. **分配格**。现在我们将 C 视为一个分配格以及一个范畴，其中 $\mathrm{Hom}_C(U, V)$ 在 $U \leq V$ 时有唯一元素，否则为空。由于 C 作为范畴具有有限积（作为格则有并），我们可以重用命题4.3的证明来说明 C 确实是一个位点

例如，在经典情形下，我们可以考虑 $\mathsf{Top}(X)$，其中 X是一个拓扑空间。有限并和有限积对应有限交；交和余积对应并集。

我们如下定义 Γ（定义 1.1）。用 $s(f)$ 表示态射f的源，用 $t(f)$ 表示态射 f的目标。对于任意 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们考虑 $[0, 1]$, 的一个有限划分 $\{I_0, \ldots, I_n\}$，其中每个 I_i都是一个子区间，并且满足：若 $s \in I_i$、$t \in I_j$和 $i < j$，则 $s < t$。对于任意这样的划分以及由态射组成的有限复合$f_n \circ \cdots \circ f_1$，定义 $\gamma \colon [0, 1] \to \mathsf{Ob}(C)$ 为

$$\gamma(t) = \begin{cases} s(f_1) & t \in I_0 \\ t(f_i) & t \in I_i, 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

令 Γ 为所有可能的 γ 以这种方式构造而成的集合。很容易验证，我们的 Γ 满足定义 1.1 (1，2，3)。

现在，我们定义 $\gamma \sim \gamma'$ 当且仅当 $\gamma(0) = \gamma'(0)$ 且 $\gamma(1) = \gamma'(1)$。于是，$\sim$满足定义 1.2(1)。根据构造，$\sim$也满足定义 1.2(2，3)。

从现在起，我们假设 C 是某个分配格 L 的子格 L。在 $\mathsf{Top}(X)$ 这个例子中，C 是 X 的开子集，并且 $L = \mathbf{2}^X$ 按包含关系排序。

定义 4.9 ($\mathfrak{P}_Y$)。令 $Y \in L$。定义

$$\mathfrak{P}_Y := (\{A_Z := \{U \in C \mid U \wedge Y = Z\}\}_{Z \leq Y \in L}) \setminus \{\emptyset\}.$$

由此立即可得，$\mathfrak{P}_Y$ 划分 C。

命题 4.10. 划分 $\mathfrak{P}_Y$ 是（C，$\Gamma/\sim$）的一个屏。

证明。我们从定义 1.12(1) 开始。设 γ、$\gamma' \in \Gamma$ 满足 $\gamma(i) = \gamma'(i)$，其中$i \in \{0,1\}$。假设对于某个 $Z \leq Y$属于 L，有 $\mathrm{im}(\gamma) \subset A_Z$。那么，$\gamma(1) \wedge Y = \gamma(0) \wedge Y = Z$。因此，对于所有 $t \in [0,1]$，都必须有 $\gamma(t) \wedge Y = Z$。但对于 γ'，同样也必须如此。因此，每个非空的 A_Z 都是 $\sim$-薄的。

现在我们证明定义 1.12(2)。由于 C 和 L 都是分配的，对任意 U，$V \in A_Z$，我们有 $U \vee V$和 $U \wedge V$都属于 A_Z。因此，在 C中存在以下交换方块：

$$\begin{array}{ccc} U \wedge V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & U \vee V. \end{array}$$

因此，每个 A_Z 都是 Γ-连通的。

接下来，我们证明定义 1.12(3)。设 γ和 ρ是Γ中的路径，满足$\gamma(0) = \rho(0)$且 $\mathrm{im}(\rho) \subset A_Z$，其中 $Z \leq Y$。设 $U = \gamma(0) = \rho(0)$、$U' = \rho(1)$、$V = \gamma(1)$，并且$W = V \wedge Y$。注意，由于 $U \leq V$，我们有 $Z = U \wedge Y \leq V \wedge Y = W$和 $Z \vee W = W$。令 $V' = U' \vee V$。由于 C和 L是分配的，我们有$(U' \vee V) \wedge Y = (U' \wedge Y) \vee (V \wedge Y) = Z \vee W = W$。因此，我们得到了所需的交换方块。

设 γ 和 ρ 是 Γ中的路径，满足 $\gamma(1) = \rho(1)$且 $\mathrm{im}(\rho) \subset A_Z$，其中$Z \leq Y$。设 $U = \gamma(1) = \rho(1)$、$U' = \rho(0$, $V = \gamma(0)$，并且 $W = V \wedge Y$。现在$V \leq U$，因此我们有 $W \leq Z$和 $W \wedge Z = W$。令 $V' = U' \wedge V$。于是$(U' \wedge V) \wedge Y = (U' \wedge Y) \wedge (V \wedge Y) = Z \wedge W = W$。因此，我们得到了所需的交换方块。

由于对所有 $\gamma \in \Gamma$，我们都有 $|\mathrm{im}(\gamma)| < \infty$，因此定义 1.12(4) 自动满足。最后，我们知道，若 $\gamma(0) = \gamma'(0)$ 且 $\gamma(1) = \gamma'(1)$，对于γ，$\gamma' \in \Gamma$，则 $\gamma \sim \gamma'$。因此，定义 1.12(5) 也满足。证明完毕。□

例 4.11。这里给出一个注 2.23 的明确例子。将 $\mathbb{R}$ 视为一个（稍显平凡的）格。那么，从这一视角对路径范畴 C 进行构造，会得到一组不同的屏幕。这里，我们把 $\mathbb{R}$ 上的序取反，将其视为一个格，从而路径范畴中的态射相对于 $\mathbb{R}$ 的标准序仍然是“向上”移动。

现在，我们给出一个明确例子：从格的视角看，$\mathbb{R}$ 中的一个屏幕并非 $\mathbb{R}$ 的屏幕，如例 1.5 所示。令 $L = C = \mathbb{R}$ 为格，并考虑元素 $Y = 0 \in \mathbb{R}$。那么，对于任意 $Z \in \mathbb{R}$，我们有集合 A_Z 如下给出

$$A_Z = \begin{cases} \emptyset & Z < 0 = Y \\ (-\infty, 0] & Z = 0 = Y \\ \{Z\} & Z > 0 = Y, \end{cases}$$

在我们的情形中，案例语句的顺序是 $\mathbb{R}$中的标准序。$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_Y$ 中的像素与集合 $\mathbb{R}_{\geq 0}$一一对应，其中0 来自像素$(\infty,\ 0]$。格解释中的任意路径 $0 \to 1$ 都只经过有限多个像素。然而，在 $\mathbb{R}$ 的结构中 $\mathbb{R}$，例1.5中的任意一条从0 到1 的路径都会经过无限多个像素，因此 $\mathfrak{P}_0$ 从这种视角来看并不是一个屏。

如果 L 包含一个元素 Y，使得对所有 $U \in \mathrm{Ob}(C)$ 都有 $Y \leq U$，那么 $\mathfrak{P}_Y$ 恰好有一个像素。如果 L 包含一个元素 Y，使得对所有 $U \in \mathrm{Ob}(C)$ 都有 $U \leq Y$，那么 $\mathfrak{P}_Y$ 的像素是单元素集合，且分别精确包含 $\mathrm{Ob}(C)$ 的元素。

在 Top(X) 这个例子中，$\mathfrak{P}_\emptyset$ 恰好有一个像素，而 $\mathfrak{P}_X$ 对 X 的每个开子集都有一个像素。

一般而言，如果 $Y \leq Y'$在 L中，那么 $\mathfrak{P}_{Y'}$细化 $\mathfrak{P}_Y$。给定 Y，$Y' \in L$，我们看到 $\mathfrak{P}_{Y\vee Y'}$是 $\mathfrak{P}_Y$与$\mathfrak{P}_{Y'}$在 $\{\mathfrak{P} \in \mathscr{P} \mid \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_Y, Y \in L\} \subset \mathscr{P}$中的积。因此，由命题 4.3可知，$\{\mathfrak{P} \in \mathscr{P} \mid \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_Y, Y \in L\}$ 是一个位点。

回忆一下，如果 C 是 L 的子格，那么 C 的交和并与 L中的交和并一致。

定理 4.12。设 C 和 L 是分配格，且 C 是L的子格。对于 $Y \in L$，用 $C_Y \subset L$ 表示分配格 $\{U \wedge Y \mid U \in C\}$。那么$Q(C, \mathfrak{P}_Y)$ 作为范畴与 C_Y规范同构。

证明。注意，条件 $A_Z = \emptyset$ 等价于 $Z \notin C_Y$。也就是说，不存在满足 $Z = U \wedge Y$的 $U \in C$。因此，我们有一个集合的典范双射$Q(C, \mathfrak{P}_Y) \xrightarrow{\cong} C_Y$，由 $A_U \mapsto U$给出。

设 $U \leq V$属于 C_Y。那么存在 U'，$V' \in C$，使得 $U = U' \wedge Y$且 $V = V' \wedge Y$。此外，$U' \leq V'$。于是有一个态射 $f\colon U' \to V'$属于 C，因此有一个态射 $1^{-1}f\colon U' \to V'$ 属于 $C^{\mathfrak{P}}$，进而有一个态射 $A_U \to A_V$属于$Q(C, \mathfrak{P}_Y)$。

假设存在一个态射 $A_U \to A_V$属于 $Q(C, \mathfrak{P}_Y)$。那么有一个态射$\sigma^{-1}f\colon U' \to V'$，其中 $U' \in A_U$且 $V' \in A_V$。令 V''为 f的目标。于是有一个态射 $f\colon U' \to V''$属于 C，因此 $U' \leq V''$属于 C。我们知道 $U' \wedge Y = U$。由于 $\sigma \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$，我们有 $V'' \in A_V$，因此 $V'' \wedge Y = V$。于是 $U \leq V$，从而存在一个态射 $U \to V$属于 C_Y。

我们已经证明，C_Y 中存在态射 $U \to V$ 当且仅当 $Q(C, \mathfrak{P}_Y)$ 中存在态射 $A_U \to A_V$。现在我们将证明，至多存在一个态射 $A_U \to A_V$。设 $\sigma_1^{-1}f_1, \sigma_2^{-1}f_2\colon U \rightrightarrows V$ 是 $C^{\mathfrak{P}}$ 中的态射。设V_1 和 V_2 分别是 f_1 和 f_2 在 C 中的目标，并设 $V' = V \wedge Y$。于是$V_1 \wedge Y = V_2 \wedge Y = V'$，因此 $(V_1 \vee V_2) \wedge Y = V'$。故 $V_1 \vee V_2 \in A_{V'}$ 且$V \leq V_1 \vee V_2$。我们还有 $U \leq V_1 \vee V_2$。设 $\sigma'\colon V \to V_1 \vee V_2$ 和 $f'\colon U \to V_1 \vee V_2$ 是各自 Hom 集合中存在的唯一映射。这给出一个态射 $(\sigma')^{-1}f'\colon U \to V$，它等价于 $\sigma_1^{-1}f_1$ 和 $\sigma_2^{-1}f_2$。因此，在 $Q(C, \mathfrak{P}_Y)$ 中，任意一对 A_U 和 A_V 之间至多存在一个态射。

现在，我们在集合 $Q(C, \mathfrak{P}_Y)$ 与 C_Y 之间得到了一个双射，并且已经证明，对于所有 U，$V \in C_Y$，$\mathrm{Hom}_{Q(C,\mathfrak{P}_Y)}(A_U, A_V) \cong \mathrm{Hom}_{C_Y}(U, V)$。因此，这两个范畴典范地同构。由于唯一的选择是集合 $Q(C, \mathfrak{P}_Y) \to C_Y$ 的典范映射，我们看出该同构本身也是典范的。□

为了让下面的推论更容易表述，对于交换环 R，我们用 TS(R) 表示 Top(Spec(R))。

推论 4.13（定理 4.12的推论）。按具体程度递增排列：

(1) 设 X 是一个拓扑空间，Y 是 X 的一个子集。那么，*Top(Y)*（其中 Y 具有子空间拓扑）典范地同构于 *Q(Top(X) $\mathfrak{P}_Y$)*。*(2)* 设 R 是一个交换环，$S \subset R$ 是一个乘法集，并且 *$Y(S) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$*。那么，*TS($S^{-1}R$)* 典范地同构于 *$Q$(TS($R$)$\mathfrak{P}_{Y(S)}$)*。*(3)* 设 R 是一个交换环，$\mathfrak{p}$ 是 R 中的一个素理想，并且 $S = R \setminus \mathfrak{p}$。令 *$Y(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in Spec(R) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$*。那么，*TS($R_{\mathfrak{p}}$)* 典范地同构于 *$Q$(TS($R$)$\mathfrak{P}_{Y(\mathfrak{p})}$)*。

证明。第 1 项直接由定理4.12得出。第 2 项由第 1 项以及诱导映射 $\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ 是一个同胚这一事实得出。第 3 项直接由第 2 项得出。□

4.3. 路径位点与表示层。 本节的目标是给出一个关于环层及其模的平行叙述的"标准"例子。

回顾一下 $\boldsymbol{PCat}$，即路径范畴的范畴；并回顾一下，它是 $\boldsymbol{Cat}$（小范畴的范畴）的全子范畴。还要回顾一下，我们所有的位点都是小范畴。

定义4.14 （路径化位点）。设 E 是一个位点，且 $\mathcal{O}_E\colon E^{op}\to \boldsymbol{PCat}$ 是一个路径范畴层。那么我们称$(D,\mathcal{O}_E)$为一个路径化位点。

环化空间的标准例子（X，$\mathcal{O}_X$）是指 X 为一个概形，且 $\mathcal{O}_X$为其结构层。我们建议，路径化位点的标准例子可由路径范畴 C 及其像素化构成，前提是 $\mathscr{P}$ 对有限 $\sqcap$运算封闭（定义1.21）。

假设 $\mathscr{P}$ 总是具有在有限多个屏幕上进行 $\sqcap$ 的运算。注意，对所有 $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1\in\mathscr{P}$，都有$\bigsqcap_{i=1}^1\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P}_1$。回顾一下，$\mathbb{X}$ 的划分集合构成一个分配格。因此，对于任意 $\mathfrak{Q}\in\mathscr{P}$，如果运算 $\sqcup$ 在某个有限集 $\{\mathfrak{P}_i\}_{i=1}^n\subset\mathscr{P}$上存在，那么 $\bigsqcap_{i=1}^n(\mathfrak{Q}\sqcap\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{Q}\sqcap(\bigsqcap_{i=1}^n\mathfrak{P}_i)\in\mathscr{P}$。

定义4.15 $(\mathscr{P})$。令 $\overline{\mathscr{P}}$ 为 $\overline{\mathscr{P}}$的子范畴，它具有相同的对象，且其态射 $\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}'$ 仅在有限细化（定义 2.44）时存在。令$\mathrm{Cov}(\mathscr{P})$ 包含每个 $\mathfrak{P}_i$ 的空覆盖，并且当每个 $\mathfrak{P}_i$ 都是$\bigsqcap_{i=1}^n\mathfrak{P}_i$的有限细化时，$\{\mathfrak{P}_i\to\bigsqcap_{i=1}^n\mathfrak{P}\}_{i=1}^n$

命题4.16。范畴 $\mathscr{P}$ 配备覆盖 $\mathrm{Cov}(\mathscr{P})$ 是一个位点。

证明。我们逐项检查定义 4.2中的条件。

定义 *4.2(1)*。$\mathscr{P}$ 中的同构只有恒等映射，而 $\mathscr{P}$显然是自身的有限细化。

定义 *4.2(2)*。若 $\mathfrak{P}_{ij}$ 是 $\mathfrak{P}_i=\bigsqcap_{j=1}^{n_i}\mathfrak{P}_{ij}$的有限细化，对于每个$1\le i\le n$ 和 $1\le j\le n_i$，则 $\mathfrak{P}_{ij}$ 也是 $\sqcup_{i=1}^n\mathfrak{P}_i$的有限细化。

定义 *4.2(3)*。若 $\mathfrak{Q}$ 是$\bigsqcap_{i=1}^n\mathfrak{P}_i$的有限细化，则每个 $\mathfrak{Q}\sqcap\mathfrak{P}_i$都是 $\mathfrak{Q}$的有限细化。由于 $\mathbb{X}$ 的划分构成一个格，因此我们知道$\bigsqcap_{i=1}^n(\mathfrak{Q}\sqcap\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{Q}\sqcap(\bigsqcap_{i=1}^n P_i)=\mathfrak{Q}$。□

注意，如果 $\mathfrak{P}_i$ 和 $\mathfrak{P}_j$ 都是 $\mathfrak{P}$ 的有限细化，那么 $\mathfrak{P}_i\sqcap\mathfrak{P}_j$ 是 $\mathfrak{P},\mathfrak{P}_i$和 $\mathfrak{P}_j$的有限细化。

回顾 Init 函子（命题 2.45），它利用引理1.19从细化屏幕中选取一个初始子像素。对于屏 $\mathfrak{P}$，记 $C_{\mathfrak{P}}$ 为命题 2.43 中构造的路径范畴，它与 $Q(C,\mathfrak{P})$同构。

定义 4.17 $(\mathcal{O}_{\mathscr{P}})$。我们定义 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}\colon\mathscr{P}^{op}\to\boldsymbol{PCat}$。对于每个 $\mathfrak{P}\in\mathscr{P}$，令$\mathcal{O}_{\mathscr{P}}(\mathfrak{P})=C_{\mathfrak{P}}$。对于每个有限细化 $\mathfrak{P}\le\mathfrak{P}'$，令 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}(\mathfrak{P}'\to\mathfrak{P})$ 为函子 $\mathrm{Init}:C_{\mathfrak{P}'}\to C_{\mathfrak{P}}$，它来自 $\mathrm{Init}:Q(C,\mathfrak{P}')\to Q(C,\mathfrak{P})$。

很容易证明，两个 Init 函子的复合本身也是一个 Init 函子，因此 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$ 是一个函子（预层）。

设 $\mathfrak{P}=\bigsqcap_{i=1}^n\mathfrak{P}_i$，使得每个 $\mathfrak{P}_i$ 都是 $\mathfrak{P}$的有限细化。令 $\mathrm{Init}_i:C_{\mathfrak{P}}\to C_{\mathfrak{P}_i}$ 为每个 $1\le i\le n$对应的 Init 函子。对于每个 $1\le j,\ k,\ \le n$，令 Init^{jk0}：$C_{\mathfrak{P}_j}\to C_{\mathfrak{P}_j\sqcap\mathfrak{P}_k}$ 和 Init^{jk1}：$C_{\mathfrak{P}_k}\to C_{\mathfrak{P}_j\sqcap\mathfrak{P}_k}$ 分别为相应的 Init 函子。

定义 pr_0 为函子 $\prod_{i=1}^n C_{\mathfrak{P}_i}\to\prod_{j=1}^n\prod_{k=1}^n C_{\mathfrak{P}_j\sqcap\mathfrak{P}_k}$，其中，对于每个 $1\le i\le n$，函子 $C_{\mathfrak{P}_i}\to\prod_{k=1}^n C_{\mathfrak{P}_i\sqcap\mathfrak{P}_k}$ 是 $\prod_{k=1}^n\mathrm{Init}^{ik0}$。定义 pr_1 为函子，其中，对于每个 $1\le i\le n$，函子 $C_{\mathfrak{P}_i}\to\prod_{j=1}^n C_{\mathfrak{P}_j\sqcap\mathfrak{P}_i}$ 是 $\prod_{j=1}^n\mathrm{Init}^{ji1}$。

回忆一下 $\bigsqcap_{i=1}^n\mathfrak{P}_i$ 的连接复形（定义 1.27）。

定理 4.18。上文定义的函子 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$ 使 $(\mathscr{P}, \mathcal{O}_{\mathscr{P}})$ 成为一个路径化位点。也就是说，若 $\{\mathfrak{P}_i\} \subset \mathscr{P}$ 满足 $\mathfrak{P} = \bigsqcup_{i=1}^n \mathfrak{P}_i \in \mathscr{P}$，且 $\mathfrak{P}_i$ 是 $\mathfrak{P}$ 的有限细化，对于 $1 \le i \le n$，则下图是在 $\boldsymbol{PCat}$ 中的等化子图：

$$C_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\prod_{i=1}^n \mathrm{Init}_i} \prod_{i=1}^n C_{\mathfrak{P}_i} \underset{pr_1}{\overset{pr_0}{\rightrightarrows}} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n C_{\mathfrak{P}_j \sqcap \mathfrak{P}_k}.$$

证明。如果 $pr_j(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n) = pr_k(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$，那么对每个 $1 \le j, k \le n$，都有 $\mathrm{Init}^{jk0}(\mathrm{X}_j) = \mathrm{Init}^{jk1}(\mathrm{X}_k)$。也就是说，$\mathrm{X}_j \cap \mathrm{Y}_k = \mathrm{Y}'_j \cap \mathrm{X}_k = \mathrm{X}_j \cap \mathrm{X}_k$。将 $\mathfrak{P}_j \sqcap \mathfrak{P}_k$ 视为 $\mathfrak{P}_j$ 和 $\mathfrak{P}_k$的有限细化，这意味着 $\mathrm{X}_j \cap \mathrm{X}_k$ 在 X_j 和 X_k中都是初始的。

由于 $\mathfrak{P}_i$ 只有有限多个，我们可以看出 $\bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$，因此存在某个 $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}$，使得 $\mathrm{X} \supset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{X}_i$。令 $z \in \mathrm{X}$，并假设 $z \notin \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}$。那么存在 $1 \le j \le n$，使得 $z \notin \mathrm{X}_j$。然而，对于某个 $1 \le k \le n$，有 $z \in Y_k \in \mathfrak{P}_k$。于是存在某个有限序列 $(\mathrm{X}_j = \mathrm{Y}_{i_0}, 0, \mathrm{Y}_{i_1}, 1, \dots, \mathrm{Y}_{i_m}, m = \mathrm{Y}_k)$，其中对每个 $0 \le \ell \le m$都有 $1 \le i_\ell \le n$，对每个 $0 \le \ell \le m$都有 $Y_{i_\ell, \ell} \in \mathfrak{P}_{i_\ell}$，且对于$1 \le \ell \le m$，有 $\mathrm{Y}_{i_{\ell-1}, \ell-1} \cap \mathrm{Y}_{i_\ell, \ell} \neq \emptyset$。此外，我们可以假设该序列在以下意义下是极小的：如果 $\mathrm{Y}_{i_\ell, \ell} \cap \mathrm{Y}_{i_{\ell'}, \ell'} \neq \emptyset$，那么 $\ell = \ell' \pm 1$。

设 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_{i_0}$。由于 $\mathrm{Y}_{i_1, 1} \neq \mathrm{X}_{i_1}$，且 $\mathrm{X}_{i_1} \cap \mathrm{X}_j$ 在 X_j 中是初始的，因此存在一条路径 $\gamma'_1 \in \Gamma$，满足 $\gamma'_1(0) \in \mathrm{X}_{i_1} \cap \mathrm{X}_j$ 且 $\gamma'_1(1) \in \mathrm{Y}_{i_1, 1} \cap \mathrm{X}_j$。根据引理 1.14，我们可以找到某个 x_1 以及 Γ 中两条始于 x_1 的路径，它们的像包含于 X_j 中，其中一条终止于 x_0，另一条终止于 $\gamma'_1(0)$。现在我们有一条从 x_1 到 $\gamma'_1(0) = \gamma_1(0) \in \mathrm{Y}_{i_1, 1} \cap \mathrm{X}_j$ 的路径 γ_1。由于 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ 在 X_j 中是初始的，我们知道 $x_1 \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ 也成立。

假设我们有一条路径 $\gamma_\ell \in \Gamma$，满足 $\gamma_\ell(0) = x_\ell \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$，且 $\gamma_\ell(1) \in \mathrm{Y}_{i_{\ell-1}, \ell-1} \cap \mathrm{Y}_{i_\ell, \ell}$。选取 $x \in \mathrm{Y}_{i_\ell, \ell} \cap \mathrm{Y}_{i_{\ell+1}, \ell+1}$。由引理 1.14，我们有 $\rho, \rho' \in \Gamma$，满足 $\mathrm{im}(\rho) \cup \mathrm{im}(\rho') \subset \mathrm{Y}_{i_\ell, \ell}$、$\rho(1) = \rho'(1) =: x'$、$\rho(0) = x$，且 $\rho'(0) = \gamma_\ell(1)$。于是有路径 $\gamma_\ell \cdot \rho'$ 和 ρ，满足 $\rho(1) = \gamma_\ell \cdot \rho'(1)$，且 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathrm{Y}_{i_\ell, \ell}$。根据定义 1.12(3)，存在路径 $\tilde{\rho}, \tilde{\gamma} \in \Gamma$，使得 $\tilde{\rho}(0) = \tilde{\gamma}(0)$、$\tilde{\rho}(1) = \gamma_\ell(0)$、$\tilde{\gamma}(1) = \rho(0)$，并且 $\tilde{\rho} \cdot \gamma_\ell \cdot \rho' \sim \tilde{\gamma} \cdot \rho$。

同样，由于 $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ 在 X_{i_ℓ} 中是初始的，因此我们有 $x_{\ell+1} = \tilde{\rho}(0) \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_{i_0}$。由于$x' \in \mathrm{Y}_{i_{\ell+1}, \ell+1}$，我们有一条从 $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ 到 $\mathrm{Y}_{i_{\ell+1}, \ell+1}$ 的路径 $\gamma_{\ell+1} = \tilde{\gamma} \cdot \rho$。根据归纳法，我们有一条从某个 $x_n \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_0$ 到 $\mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_{i_m, m}$ 的路径 γ_n。

现在我们再次使用引理 1.14 来构造路径 $\rho, \rho' \in \Gamma$，使得 $\mathrm{im}(\rho) \cup \mathrm{im}(\rho') \subset \mathrm{Y}_n, \rho(0) = z, \rho'(0) = \gamma_n(1)$，且 $\rho(1) = \rho'(1)$。根据定义 1.12(3)，我们有路径$\tilde{\rho}, \tilde{\gamma} \in \Gamma$，满足 $\tilde{\rho}(0) = \tilde{\gamma}(0)$、$\tilde{\rho}(1) = \gamma_n(1)$、$\tilde{\gamma}(1) = \rho(0) = z$，以及 $\tilde{\rho} \cdot \gamma_n \cdot \rho' \sim \tilde{\gamma} \cdot \rho$。

对于每个 $1 \le i \le n$，令 $\mathrm{X}'_i \in \mathfrak{P}_i$ 为包含 z 的像素。我们知道 $\mathrm{X}'_j \neq \mathrm{X}_j$。现在有一条路径 $\tilde{\gamma} \in \Gamma$，满足 $\tilde{\gamma}(0) \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$，且 $\tilde{\gamma}(1) = z \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}'_i$。因此，根据引理 1.18，不存在满足 $\gamma(0) \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}'_i$ 且 $\gamma(1) \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ 的路径 $\gamma \in \Gamma$。因此，$\bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ 是 X 中相对于 $\mathfrak{P}_1 \sqcap \cdots \sqcap \mathfrak{P}_n$ 的初始对象，所以每个 X_i 都是 X 中相对于 $\mathfrak{P}_i$ 的初始对象。因此，如果 $pr_0(\mathrm{X}_i)_i = pr_1(\mathrm{X}_i)_i$，那么存在 $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}$，使得 $\prod_{i=1}^n \mathrm{Init}_i(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}_i)_i$。根据构造，Init 在对象上是内射的，因此我们看到该 X 是唯一的。

假设 $(f_i)_i : (\mathrm{X}_i)_i \to (\mathrm{Y}_i)_i$ 是 $\prod_{i=1}^n C_{\mathfrak{P}_i}$ 中的一个态射，满足 $pr_0((f_i)_i) = pr_1((f_i)_i)$。因此，对于 $1 \le j, k \le n$，$C_{\mathfrak{P}_j \sqcap \mathfrak{P}_k}$ 中有 $\mathrm{Init}^{jk0}(f_j) = \mathrm{Init}^{jk1}(f_k)$。记 $\mathrm{Init}_{i\mathfrak{Q}}$ 为 Init函子 $C_{\mathfrak{P}_i} \to C_{\mathfrak{Q}}$，其中 $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \sqcap \cdots \sqcap \mathfrak{P}_n$。于是，对于 $1 \le j, k \le n$，有$f = \mathrm{Init}_{j\mathfrak{Q}}(f_j) = \mathrm{Init}_{k\mathfrak{Q}}(f_k)$。因此，存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$，使得 $H_{\mathfrak{Q}} p_{\mathfrak{Q}}([\gamma]) = f$。现在我们有 $H_i p_i([\gamma]) = f_i$，并且对于 $1 \le i \le n$，$Hp([\gamma]) = \mathrm{Init}_i(f_i)$。由于 Init 在 Hom 集上单射（备注2.46），这个 f 必定唯一。

因此，$C_{\mathfrak{P}}$ 在 $\prod_{i=1}^n C_{\mathfrak{P}_i}$ 中的像恰好是pr_0 与 pr_1 一致的子范畴。□

例4.19 (贯穿全文的例子)。设 C 为 $\mathbb{R}$ 来自例 1.5。

考虑 $\mathfrak{P} = \{[i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 来自例 1.13 并设

$$\mathfrak{Q} = \{[i, i+1/2], (i+1/2, i+2) \mid i \in \mathbb{Z} \text{ even}\}.$$

建议读者验证 $\mathfrak{Q}$ 也是一个屏（定义1.12）。那么

$$\mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{Q} = \{[i, i+2) \mid i \in \mathbb{Z} \text{ even}\}$$
$$\mathfrak{P} \sqcap \mathfrak{Q} = \{[i, i+1/2], (i+1/2, i+1), [i+1, i+2) \mid i \in \mathbb{Z} \text{ even}\}.$$

对于偶整数 i，像素 $[i, i+1/2] \in \mathfrak{P} \sqcap \mathfrak{Q}$ 在 $[i, i+1)$（针对$\mathfrak{P}$）和自身（针对 $\mathfrak{Q}$）中都是初始的。它在 $[i, i+2)$（针对 $\mathfrak{P} \sqcup \mathfrak{Q}$）中也初始。当 i 为偶数时，像素 $[i, i+1)$ 在 $[i, i+2)$ 中也初始。没有其他像素具有这种性质。建议读者验证这一点。

因此，当且仅当 $X_{\mathfrak{P}} = [i, i+1)$ 且 $X_{\mathfrak{Q}} = [i, i+2]$ 时，对于偶整数 i，$\mathrm{Init}_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}0}(X_{\mathfrak{P}}) = \mathrm{Init}_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}1}(X_{\mathfrak{Q}})$。此外，$\mathrm{Init}_{\mathfrak{P}}([i, i+2)) = [i, i+1)$，且 $\mathrm{Init}_{\mathfrak{Q}}([i, i+2)) = [i, i+1/2]$。由此得到下方的等化子图（省略映射名称）：

$$C_{\mathfrak{P}\sqcup\mathfrak{Q}} \longrightarrow C_{\mathfrak{P}} \times C_{\mathfrak{Q}} \rightrightarrows (C_{\mathfrak{P}} \times C_{\mathfrak{P}\sqcap\mathfrak{Q}}) \times (C_{\mathfrak{P}\sqcap\mathfrak{Q}} \times C_{\mathfrak{Q}}).$$

现在我们已经有了一个路径化位点的标准例子，可以考虑表示了。回想一下，所有路径范畴都是小范畴，因此对于每个路径范畴 C，$\mathrm{Ob}(C)$ 都是一个集合。

定义 4.20 ($\mathcal{O}_E$-表示)。设 $(E, \mathcal{O}_E)$ 是一个路径化位点。一个取值于 $\mathcal{K}$ 的 $\mathcal{O}_E$-表示 M 是一个层 $M : E^{op} \to \mathcal{K}$ 和一组函子$\{{}_eM : \mathcal{O}_E(e) \to \mathcal{K}\}_{e \in \mathrm{Ob}(E)}$，满足以下条件。

(1) 对每个 $e \in \mathrm{Ob}(E)$，我们有

$$M(e) = \bigoplus_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_E(e))} {}_eM(x).$$

(2) 对每个态射 $f : e \to e'$ in E，以及每个 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_E(e))$，记 f_x 为复合

$$ {}_eM(x) \xrightarrow{\iota_x} M(e) \xrightarrow{M(f)} M(e') \xrightarrow{\pi_{\mathcal{O}_E(f)(x)}} {}_{e'}M(\mathcal{O}_E(f)(x)). $$
$$ {}_eM(x) \xrightarrow[f_x]{} {}_{e'}M(\mathcal{O}_E(f)(x)). $$

那么，对每个 $f : e \to e'$ in E 以及每个 $[\gamma] : x \to y$ in $\mathcal{O}_E(e)$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} {}_eM(x) & \xrightarrow{{}_eM([\gamma])} & {}_eM(y) \\ {\scriptstyle f_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_y} \\ {}_{e'}M(\mathcal{O}_E(f)(x)) & \xrightarrow[{}_{e'}M(\mathcal{O}_E(f)([\gamma]))]{} & {}_{e'}M(\mathcal{O}_E(f)(y)). \end{array}$$

我们将这里的论述与环化位点的情形作比较。在定义 4.14中，我们有一个从位点 E 到 $\boldsymbol{PCat}$的层，这与取值于环范畴的层相对应。给定一个环化位点 $(X, \mathcal{O}_X)$，一个 $\mathcal{O}_X$-模是一个层 $F : X^{op} \to \boldsymbol{Ab}$，满足每个 $F(x)$ 都是一个 $\mathcal{O}_X(x)$-模。此外，对每个 $f : x \leftarrow y$，在 X中我们都有如下交换图： $\boldsymbol{Ab}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(x) \times F(x) & \longrightarrow & F(x) \\ {\scriptstyle \mathcal{O}_X(f)\times F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ \mathcal{O}_X(y) \times F(y) & \longrightarrow & F(y), \end{array}$$

其中，水平箭头表示环作用。定义 4.20(1) 相当于要求 $F(x)$ 是一个 $\mathcal{O}_X(x)$-模。定义 4.20(2) 相当于要求环作用与层相容。

我们先给出一个简单的[2] $\mathcal{O}_E$-表示的例子。

例 4.21 （“经典”例子）。设 E 为 Top($\{1,2\}$)，其中 $\{1,2\}$ 具有离散拓扑。设 $\mathcal{O}_E(\emptyset) = *$，其中 $*$ 是只有一个对象且仅有恒等态射的路径范畴。设 $\mathcal{O}_E(\{1\}) = \mathcal{O}_E(\{2\}) = C$，其中路径范畴 C 与 $*$ 不同。设 $\mathcal{O}_E(\{1,2\}) = C \times C$。由于 $*$ 在 $\boldsymbol{PCat}$ 和 $cats$ 中都是终对象，函子 $C \to *$ 和 $C \times C \to *$ 的选取是唯一的。令 $\mathcal{O}_E(\{1,2\} \to \{1\})$ 为在第一坐标上的投影 $C \times C \to C$，类似地，令 $\mathcal{O}_E(\{1,2\} \to \{2\})$ 为在第二坐标上的投影。于是 $\mathcal{O}_E$ 是一个路径范畴层。

令 ${}_{\emptyset}M$ 为零表示。取 C的一个表示 ${}_{\{1\}}M = {}_{\{2\}}M$。令 ${}_{\{1,2\}}M(x_1, x_2) = {}_{\{1\}}M(x_1) \oplus {}_{\{2\}}M(x_2)$，态射也类似。

令 $M\colon E \to \mathcal{K}$为一个函子，其中对每个 $X \subset \{1,2\}$，$M(X) = {}_XM$。对于$X = *$，对所有 $Y \subset \{1,2\}$，都有 $M(Y \leftarrow X) = 0$。唯一可能的非零态射是 $M(\{1,2\} \leftarrow \{1\})$ 和 $M(\{1,2\} \leftarrow \{2\})$。定义

$$M(\{1,2\} \leftarrow \{1\}) = \pi_1 : M(\{1,2\}) \to M(\{1\})$$
$$M(\{1,2\} \leftarrow \{2\}) = \pi_2 : M(\{1,2\}) \to M(\{2\}).$$

因此，M 是一个函子，事实上也是一个层。留给读者作为练习来验证 M 确实是一个 $\mathcal{O}_E$-表示。[3]

我们对例4.23采用如下定义。

定义 4.22. 设 C 是一个路径范畴，x 是 C中的一个对象，K 是 $\mathcal{K}$中的一个对象。K 处的表示集中于 x 是函子 $M : C \to \mathcal{K}$，其中$M(x) = K$，且对于 C中的所有对象 $y \neq x$，$M(y) = 0$。对于态射，任意 C中的态射 $[\gamma] \neq \mathbf{1}_x$，都有 $M([\gamma]) = 0$。如所需，$M(\mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_K$。

在文献中，当 $\mathcal{K} = \Bbbk$-Vec 和 $K = \Bbbk$，其中 $\Bbbk$是某个域时，称 $\Bbbk$ 处、集中于 x 的表示为处的简单表示。

例4.23 (贯穿全文的例子)。注意，对于 $\mathbb{R}^n$ 如例 1.11中所示，集合 $\mathscr{P}$ 有唯一极大元 $\{\mathbb{R}^n\}$。设 $\mathfrak{Q} = \{\mathbb{R}^n\}$ 并设 $\mathsf{Z} = \mathbb{R}^n$。以下构造适用于任意三元组 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$ 属于 $\mathbf{X}$ 且满足 $\mathscr{P}$ 有唯一极大元且 $\mathscr{P}$ 存在。

设 $F : \overline{\mathscr{P}}^{op} \to \mathcal{K}$ 是一个层。对于每个满足 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{Q}$ 的有限细化的 $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}$，令 $M(\mathfrak{P}) = F(\mathfrak{P})$，并令 ${}_{\mathfrak{P}}M$为集中在 Init(Z) $\in \mathfrak{P}$ 处、位于 $F(\mathfrak{P})$ 的表示。如果 $\mathfrak{P} \in \mathscr{P}$ 不是 $\mathfrak{Q}$ 的有限细化，则令$M(\mathfrak{P}) = 0$，并令 ${}_{\mathfrak{P}}M$ 为零表示。如果 $\mathfrak{P}'$ 是 $\mathfrak{P}$ 的有限细化，且$\mathfrak{P}$是 $\mathfrak{Q}$的有限细化，则定义 $M(\mathfrak{P} \leftarrow \mathfrak{P}') = F(\mathfrak{P} \leftarrow \mathfrak{P}')$。将所有其他$M(\mathfrak{P} \leftarrow \mathfrak{P}')$ 设为 $= 0$。显然，M 是一个函子。

现在我们证明 M 是一个层。假设 $\{\mathfrak{P}_i \to \mathfrak{P}\}$ 属于 Cov($\mathscr{P}$)（定义4.15）。那么，对于 $1 \leq i \leq n$，每个 $\mathfrak{P}_i$都是 $\mathfrak{Q}$ 的有限细化，当且仅当 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{Q}$的有限细化。此外，这意味着每个 $\mathfrak{P}_i \sqcap \mathfrak{P}_j$ 也是 $\mathfrak{Q}$ 的有限细化，当且仅当 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{Q}$的有限细化。如果 $\mathfrak{P}$ 是一个有限细化

[2]无论如何，这已经算是最简单的层了。[3]提示：这本质上是一个模的常值层。

$\mathfrak{Q}$的细化，则有如下结果，其中顶行是一个等化子图：

$$\begin{array}{ccccc} F(\mathfrak{P}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} F(\mathfrak{P}_i) & \overset{pr_0}{\underset{pr_1}{\rightrightarrows}} & \bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{n} F(\mathfrak{P}_j \sqcap \mathfrak{P}_k) \\ \| & & \| & & \| \\ M(\mathfrak{P}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} M(\mathfrak{P}_i) & \overset{pr_0}{\underset{pr_1}{\rightrightarrows}} & \bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{n} M(\mathfrak{P}_j \sqcap \mathfrak{P}_k)。 \end{array}$$

因此，底行也是一个等化子图。如果 $\mathfrak{P}$不是 $\mathfrak{Q}$的有限细化，那么上图的底行全为 0，因此也构成一个等化子图。由此， M 是一个层。

最后，我们证明 M 是一个 $\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$-表示。根据构造， M 和$\{_{\mathfrak{P}}M\}_{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}}$ 满足定义 4.20(1)。设 $\mathfrak{P}'$ 是 $\mathfrak{P}$的一个有限细化。如果 $\mathfrak{P}$ 不是 $\mathfrak{Q}$的有限细化，那么定义 4.20(2) 便成立，因为这将是一个全为 0 的方形。现在假设 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{Q}$的有限细化。除非 $[\gamma] = \mathbf{1}_{\mathrm{Init(Z)}}$，否则所有 $_{\mathfrak{P}}M([\gamma]) = 0$。类似地，除非 $[\gamma] = \mathbf{1}_{\mathrm{Init(Z)}}$，否则 $_{\mathfrak{P}'}M([\gamma]) = 0$。此外，如果 X $\in \mathfrak{P}$ 不是 Init(Z)，那么令 X $=$Init(X) 于 $\mathfrak{P}'$中，并注意到 $_{\mathfrak{P}}M$(X) $= 0 = {}_{\mathfrak{P}'}M$(X)。因此，我们只需验证 $M(\mathfrak{P} \leftarrow \mathfrak{P}') = f_{\mathrm{Init(Z)}}$。根据构造，这也成立，所以 M 是一个$\mathcal{O}_{\mathscr{P}}$-表示。

5. 高阶 Auslander 范畴

在本节中，固定 $\Bbbk$ 为域，并令 $\mathcal{K}$ 为 $\Bbbk$-模 $=\Bbbk$-向量空间。因此，我们省略 Rep$^{\mathcal{K}}$ 和 rep$^{\mathrm{pwf}}_{\mathcal{K}}$ 中的 $\mathcal{K}$，分别简写为 Rep 和 rep$^{\mathrm{pwf}}$。回顾我们的三元组 $(\mathbb{X}, \Gamma/\sim)$（定义 1.1 和 1.2），以及 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 可视为三元组（例 1.5 和 1.11）。后一种情形中，我们使用三元组的积（定义1.9），它确实是三元组范畴中的积（命题 1.10）。我们还将用到这样一个事实： $\mathbb{R}^n$ 上的任意屏都是 $\mathbb{R}$ 上的屏的乘积，反之亦然（命题 1.25）。

在本节中，我们将应用第 2 节和第 3 节，构造高阶 Auslander 代数的连续版本，我们称之为高阶 Auslander 范畴。

设 $n \geq 1$ 为整数，并令 $\mathbb{R}^n$ 如例 1.11所示。我们在 $\mathcal{C}^{(n)}$中构造一个基于路径的 $\mathcal{I}^{(n)}$，其中 $\mathcal{C}^{(n)}$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 出发的 $\Bbbk$-线性路径范畴，将其视为三元组的积（定义 1.9 和命题 1.10）。我们的构造基于 [OT12、JKPK19]中的构造。我们强调，尽管两篇论文中采用的模型实质上相同，但它最初出现于 [OT12]，之后在 [JKPK19]中作了修改。

非零态射 $f\colon \bar{x} \to \bar{y}$ 属于 $\mathcal{I}^{(n)}$ 当且仅当以下条件中至少有一个成立。

(1) $x_1 \leq 0$ 或 $y_1 \leq 0$, (2) $x_n \geq 1$ 或 $y_n \geq 1$, 或 (3) 对于 $1 \leq i < n$, $x_i \geq x_{i+1}$ 或 $y_i \geq y_{i+1}$。

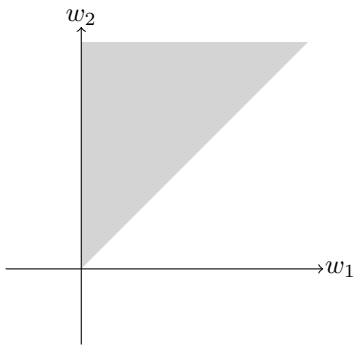
等价地，我们可以说，非零 $f\colon \bar{x} \to \bar{y}$ 属于当且仅当不 $\mathcal{I}^{(n)}$ 属于 $0 < x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n < 1$（参见命题5.3）。

回顾路径基理想的定义（定义2.8）。以下结论可由构造直接得出。

命题5.1。理想 $\mathcal{I}^{(n)}$ 是路径基理想。

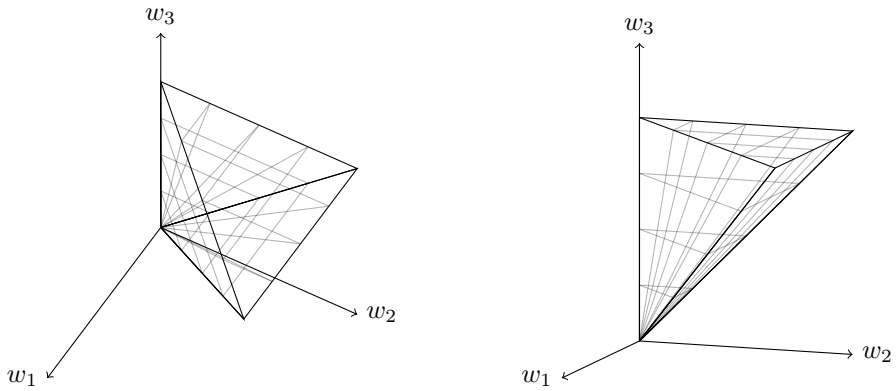
记号5.2。 我们用 $\mathcal{A}^{(n)}_{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathcal{C}^{(n)}/\mathcal{I}^{(n)}$ 商。

当 $n = 2$ 时， $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ 中非零对象的集合是下方的阴影区域，不包括其边界：



其中的态射 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ 向上和/或向右移动：沿 w_1 正方向和/或 w_2 正方向移动。

当 $n = 3$时， $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(3)}$ 中的非零对象集合是下方多边形的内部（不包括其各面）。由于本文是二维的，且只有静态图像，我们从两个不同视角展示：



此处，态射至少沿以下方向之一移动： w_1 正方向、 w_2正方向和/或 w_3 正方向。

设 $\bar{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个点，设 $1 \leq i \leq n$ 是一个整数，并设 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。我们将$g_{\bar{x}i\delta}$ 定义为 $\mathbb{R}^n$ 中的路径，具体如下：

$$g_{\bar{x}i\delta}(t) = (x_1, x_2 \ldots, x_{i-1},\, x_i + t\delta,\, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

因此， $\mathbb{R}^n$ 中的任意路径 $[\gamma]$ 都是由 $g_{\bar{x}i\delta}$有限复合而成，沿第一个坐标方向前进，然后沿第二个坐标方向前进，依此类推。

命题5.3。 设 $\bar{x}, \bar{y}$ 是 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中的对象。那么$\mathrm{Hom}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ 当且仅当 $0 < x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n < 1$。

证明。 $(\Leftarrow)$。假设命题陈述中的不等式成立。那么，显然， $\bar{x} \ncong 0$ 和$\bar{y} \ncong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 。此外，根据构造，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{x}, \bar{y}) \cong \Bbbk$。我们需要证明，非零态射 $[\gamma]$ ： $\bar{x} \to \bar{y}$ 在 $\mathcal{C}$ 中不经由某个 $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ 因子分解，使得$\bar{z} \cong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 。

设 $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ ，使得非零的 $[\gamma]$: $\bar{x} \to \bar{y}$ 在 $\mathcal{C}$ 中可经由 $\bar{z}$ 因子分解。于是我们可以将 $[\gamma]$ 重写为 $[\gamma_1 \cdot \gamma_2] = [\gamma_2] \circ [\gamma_1]$。由于 $[\gamma_1] \neq 0$，我们知道对每个$1 \leq k \leq n$ 都有 $x_k \leq z_k$。由于 $[\gamma_2] \neq 0$，我们知道对每个 $1 \leq k \leq n$ 都有 $z_k \leq y_k$ 。这就迫使 $0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < 1$ 成立，因此 $\bar{z} \ncong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$。所以， $[\gamma]$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中不为 $\mathbf{0}$。

（⇒）。现在假设 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$。那么必有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x},\bar{y}) \cong \Bbbk$。设 $[\gamma]:\bar{x}\to\bar{y}$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中非零。我们立即知道，对每个 $1\le k\le n$ 都有 $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$、$0<y_1<y_2<\ldots<y_n<1$ 和 $x_k\le y_k$。

反证法，假设存在某个 $1\le j<n$，使得 $x_{j+1}\le y_j$。对于每个 $1\le k\le n$，令 $\delta_k = y_k - x_k$。那么 $[\gamma]$ 有一个如下形式的代表元

$$g_{\bar{x}j\delta_j}\cdot g_{(\bar{x}+\delta_j e_j)1\delta_1}\cdots g_{(\bar{x}+\delta_1 e_1+\cdots+\delta_{n-1}e_{n-1})n\delta_n}.$$

然而，$[g_{\bar{x}j\delta_j}]$ 的目标是 $(x_1,\ \ldots x_{j-1},\ y_j,\ x_{j+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)$。由于 $x_{j+1}\le y_j$，$[g_{\bar{x}j\delta_j}]$ 的目标在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中为 $\mathbf{0}$。这与 $[\gamma]$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中非零矛盾。因此，命题陈述中的不等式成立。□

我们称 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中的对象序列 $\{\bar{x}_{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是射影的，如果满足以下条件。

(1) 我们有 $\lim_{i\to\infty}\bar{x}_{(i)} =: \bar{x}$ 是 $\mathcal{C}^{(n)}$ 中的一个对象，使得 $0=x_1<x_2<\ldots<x_n<1$，其中极限是在带有通常度量的 $\mathbb{R}^n$ 中计算的。

(2) 对所有 $i\ge 1$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i+1)},\ \bar{x}_{(i)}) \cong \Bbbk$。

定义 5.4 ($P_{\bar{x}}$)。对于每个满足 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_n<1$ 的对象 $\bar{x}\in\mathcal{C}^{(n)}$，我们如下定义 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 的一个表示 $P_{\bar{x}}$。[4]

首先，若 $\bar{x}\neq 0\in\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$，则 $P_{\bar{x}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x},\ -)$。若 $x_1=0$，我们将 $P_{\bar{x}}$ 在对象上的取值定义为

$$P_{\bar{x}}(\bar{y}) = \begin{cases} \Bbbk & \exists \text{ projective } \{\bar{x}_{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \text{ such that } \lim_{i\to\infty}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)},\bar{y}) \cong \Bbbk \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 Hom 的极限是通过对每个 $i\ge 1$，选取 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i+1)},\ \bar{x}_{(i)})$ 中与 $1\in\Bbbk$ 对应的元素来取的。

若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{y},\ y') \cong \Bbbk$、$P_{\bar{x}}(\bar{y})\neq 0$ 且 $P_{\bar{x}}(\bar{y}')\neq 0$，我们定义 $P_{\bar{x}}([\gamma]) := \mathbf{1}_{\Bbbk}$。否则，对于任意 f，我们称 $\bar{y}\to\bar{y}'\in\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中的 $P_{\bar{x}}(f)=0$。

注意，每个 $P_{\bar{x}}$ 都是不可分解的，即使 $x_1=0$。

尽管几乎可以立即看出 $P_{\bar{x}}$ 是一个函子，即使 $x_1=0$，但向读者解释一些直观理由，说明为什么将 $P_{\bar{x}}$ 纳入 Hom 函子是合理的，或许会有所帮助。

假设 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{y},y') \cong \Bbbk$, $P_{\bar{x}}(\bar{y})\neq 0$，且 $P_{\bar{x}}(\bar{y}')\neq 0$。那么存在 $N,N'\in\mathbb{N}$，使得若 $i>\max N,N'$，则有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)},\bar{y}) \cong \Bbbk$，$\bar{y}'$ 也类似。对于唯一的类 $[\gamma]:\bar{y}\to\bar{y}'$，当 $i>\max N,N'$ 时，我们有下图，其中每个节点都与 $\Bbbk$ 在 $\Bbbk$-vec 中同构，且每条箭头都是同构：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)},\bar{y}) & \xrightarrow{-\circ(\bar{x}_{(i+1)}\to\bar{x}_{(i)})} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i+1)},\bar{y}) \\ \downarrow{\scriptstyle [\gamma]\circ-} & & \downarrow{\scriptstyle [\gamma]\circ-} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)},\bar{y}') & \xrightarrow[-\circ(\bar{x}_{(i+1)}\to\bar{x}_{(i)})]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i+1)},\bar{y}'). \end{array}$$

因此，诱导映射

$$\left(\lim_{i\to\infty}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)},\bar{y})\right) \xrightarrow{[\gamma]\circ-} \left(\lim_{i\to\infty}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)},\bar{y}')\right)$$

[4]注意范畴之间的差异!

是一个同构。不过，在定义 $P_{\bar{x}}(\bar{y})$ 时，只要极限与 $\Bbbk$ 同构，我们就可以任选一个序列。因此，直接定义 $P_{\bar{x}}(\bar{y}) = \Bbbk$并在上述情境中定义 $P_{\bar{x}}([\gamma]) = \mathbf{1}_{\Bbbk}$ 是合理的。

命题 5.5. 这些 $P_{\bar{x}}$ 定义 5.4 中的函子在$\mathrm{rep}^{pwf}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$中是射影的。

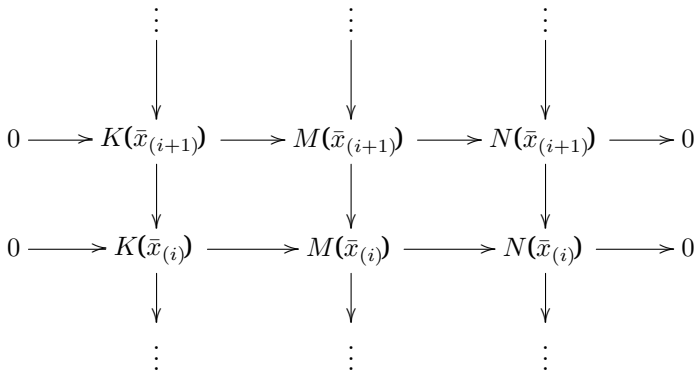
证明。 </style}若 属于 ， 则由 *Hom(*， –) 是 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的投射对象这一事实可知结论成立。因此，我们假设 $x_1 = 0$。

考虑 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的图表 $P_{\bar{x}} \xrightarrow{g} N \xleftarrow{f} M$。我们将构造一个提升$h$：$P_{\bar{x}} \to M$，使得 $g = fh$。

由于当 $g = 0$ 时结论显然成立，我们假设 $g \neq 0$。于是 $f \neq$0，因此令 $K =$为 ker(*f*)。选取某个 $\bar{z}$，使得 $g_{\bar{z}}$： $P_{\bar{x}}(\bar{z}) \to N(\bar{z})$ 非零。于是 $P_{\bar{x}}(\bar{z}) \neq 0$，因此存在一个射影序列 $\{\bar{x}_{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{i\to\infty}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)}, \bar{z}) \cong \Bbbk$。不失一般性，我们可以假设当 i 充分大时，有 $x_k = x_{(i),\,k}$，对 $1 < k \leq n$ 成立。

令 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $i > N$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)}, \bar{z}) \cong \Bbbk$ 且 $x_k = x_{(i),k}$ 对 $1 < k \leq n$成立。移除 $\{\bar{x}_{(i)}\}$ 中满足 $i \leq N$ 的元素，并按 $i \mapsto i - N$ 对剩余序列重新编号。因此，当 $1 < k \leq n$ 时，对所有指标 i，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)}, \bar{z}) \cong \Bbbk$ 且 $x_k = x_{(i),k}$。

现在我们有一组短正合列



在 $\Bbbk$-Vec 中，设

$$K(\bar{x}) = \varprojlim K(\bar{x}_{(i)}) \qquad M(\bar{x}) = \varprojlim M(\bar{x}_{(i)}) \qquad N(\bar{x}) = \varprojlim N(\bar{x}_{(i)}).$$

由于 K 是逐点有限维的，逆系统 $\{K(\bar{x}_{(i)})\}$ 满足 Mittag-Leffler 条件，因此 $0 \to K(\bar{x}) \to M(\bar{x}) \to N(\bar{x}) \to 0$ 是正合的。特别地， $M(\bar{x})$ 满射到 $N(\bar{x})$；将此满态射记为 $f_{\bar{x}}$。

我们还有逆系统 $\{P_{\bar{x}}(\bar{x}_{(i)})\}$，并将其极限记为 $P_{\bar{x}}(\bar{x})$。由于对每个 i，都有 $g_{\bar{x}_{(i)}}$： $P_{\bar{x}}(\bar{x}_{(i)}) \to N(\bar{x}_{(i)})$，因此在极限之间诱导出一个映射： $g_{\bar{x}}$： $P_{\bar{x}}(\bar{x}) \to N(\bar{x})$。由于对每个 i， $P_{\bar{x}}(\bar{x}_{(i)}) = \Bbbk$，我们知道$P_{\bar{x}}(\bar{x}) = \Bbbk$。

现在，令 $n = g_{\bar{x}}$(1)，并选择 $m \in M(\bar{x})$，使得 $f_{\bar{x}}(m) = n$。对于每个i，令 $m_i \in M(\bar{x}_{(i)})$ 为 m在极限映射 $M(\bar{x}) \to M(\bar{x}_{(i)})$ 下的像。现在，对于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中满足 $g_{\bar{y}} \neq 0$ 的任意 $\bar{y}$，我们知道存在某个 $\bar{x}_{(i)}$，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)}, \bar{y}) \cong \Bbbk$。于是我们知道 $N(\bar{x}_{(i)} \to \bar{y}) \circ f_{\bar{x}_{(i)}}(m_i) = f_{\bar{y}} \circ M(\bar{x}_{(i)} \to \bar{y})(m_i)$。因此，定义 $m_{\bar{y}} = M(\bar{x}_{(i)} \to \bar{y})(m_i)$。一般来说，对于某个满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)}, \bar{y}) \neq 0$ 的 $\bar{x}_{(i)}$，定义 $m_{\bar{y}} = M(\bar{x}_{(i)} \to y)(m_i)$；只要这样的 $\bar{x}_{(i)}$ 存在即可，否则定义 $m_{\bar{y}} = 0$。注意，如果 $P_{\bar{x}}(\bar{y}) = 0$，那么我们必有 $m_{\bar{y}} = 0$

同样。很容易验证， $h : P_{\bar{x}} \to M$ 已确定

$$h_{\bar{y}} = \begin{cases} \lambda \mapsto \lambda m_{\bar{y}} & P_{\bar{x}}(\bar{y}) \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

是一个满足 $g = fh$ 的态射，从而完成证明。 □

根据命题 5.5 作为依据，我们得到以下定义。

定义 5.6。设 $\bar{x}$ 是 $\mathcal{C}^{(n)}$ 中的一个对象。若 $\bar{x} \neq 0$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中，或者 $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$，则称 $\bar{x}$ 为投射源。

对于一个合适的屏 $\mathfrak{P}$，我们希望将 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ $\mathfrak{P}$ 与来自 A 型高阶 Auslander 代数的范畴联系起来$\mathbf{A}_m^{(n)}$。为此，我们将按如下方式构造一个合适的 $\mathfrak{P}$。设 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，令 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{m+n-2})$ 为一个由实数组成的有限列表，满足 $0 < a_1 < a_2, \ldots, < a_{m+n-2} < 1$，并令

$$\mathfrak{P} = \{(-\infty, 0], (0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_{m+n-2}, 1), [1, +\infty)\}$$

回忆一下 $m \geq 2$ 和 $n \geq 1$，因此 $m + n - 2 \geq 1$ 和 $\mathfrak{P}$ 在 $(0, 1)$ 中至少包含 2 个单元。

我们定义 $\mathfrak{P}_{\bar{a}} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{P}$，它是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个屏（命题 1.25）。我们令 $I = \{-1, 0, 1, \ldots, m+n-1, m+n\}$，$a_{-1} = -\infty$，$a_0 = 0$，$a_{m+n-1} = 1$，以及 $a_{m+n} = +\infty$。

令 $\mathsf{X}_{-1} = (-\infty, 0]$, $\mathsf{X}_0 = (0, a_1)$, and $\mathsf{X}_i = [a_i, a_{i+1})$ if $0 < i \leq m+n-1$.

对于$\bar{\imath} = (i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n) \in I^n$，我们定义 $\mathsf{X}_{\bar{\imath}} = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{X}_{i_j}$。

引理 5.7. 设 $\bar{\imath} \in I^n$。像素 $\mathsf{X}_{\bar{\imath}} \in \mathfrak{P}_{\bar{a}}$ 不是死像素，当且仅当

$$0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} < i_n < m + n - 1.$$

证明。 $(\Rightarrow)$。我们假设 $i_1 > 0$，因为当 $i_1 = 0$ 时，证明几乎相同。令$\bar{x} \in \mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 并假设该不等式成立。于是我们有

$$0 < a_{i_1} \leq x_1 < a_{i_1+1} \leq a_{i_2} \leq x_2 < \cdots < a_{i_{n-1}+1} \leq a_{i_n} \leq x_n < a_{i_n+1} \leq 1.$$

只考察 x_k，我们得到 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$。根据定义，这意味着 $\bar{x} \ncong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$。因此，每个 $[\gamma] : \bar{x} \to \bar{y}$ 满足 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中非零，当且仅当它在 $\mathcal{C}$中非零。因此，$\mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 不是死像素。

$(\Leftarrow)$。假设该不等式不成立。那么，要么（i）存在某个 $1 \leq j < k \leq n$使得 $i_j \geq i_k$，要么（ii）存在某个 $1 \leq k \leq n$ 使得 $i_k < 0$ 或 $i_k \geq m+n-1$。

假设 (i)。因此存在某个 $\bar{x} \in \mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 使得 $x_j \geq x_k$。根据定义，这意味着 $\bar{x} \cong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$，因此$\mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 是一个死像素，因为 $\bar{x} \cong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ $\mathfrak{P}$。

假设（ii）成立。那么存在某个 $\bar{x} \in \mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 使得 $x_k = 0$ 或 $x_k \geq 1$，分别成立。在这两种情况下，根据定义，$\bar{x} \cong 0$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$。因此，$\mathsf{X}_{\bar{\imath}}$ 再次是死像素。证明完毕。□

当 $n = 1$时，我们还为序列 $\bar{a} = ()$ 定义 $\mathfrak{P}_{()} = \{(-\infty, 0], (0, 1) [1, +\infty)\}$。

选取一个射影的源 $\bar{x}$。

- 如果 $x_1 = 0$ 且 $n = 1$，则令 $\bar{a}_{\bar{x}} = ()$。
- 如果 $x_1 = 0$ 且 $n > 1$，则令 $\bar{a}_{\bar{x}} = (x_2, \ldots, x_n)$。
- 如果 $x_1 > 0$，则令 $\bar{a}_{\bar{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$。

我们像之前一样定义 $\mathfrak{P}_{\bar{x}}$ 为 $\mathfrak{P}_{\bar{a}_{\bar{x}}}$。我们定义 $\mathfrak{P}_{\bar{x}}$中的一个特定像素：

$$\mathsf{X}_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathsf{X}_{(0,1,\ldots,n-1)} & x_1 = 0 \\ \mathsf{X}_{(1,2,\ldots,n)} & x_1 > 0. \end{cases}$$

回忆一下，当 $\mathfrak{P}$ 中的所有态射都被 M 映为同构时，屏$\Sigma_{\mathfrak{P}}$ 会将表示 M 像素化（定义3.4）。

命题 5.8. 设 $\bar{x}_{(1)}, \ldots, \bar{x}_{(m)}$ 是一组有限的投射源，满足 $1 \leq i \leq m$。对每个 $1 \leq i \leq m$，划分 $\mathfrak{P}_{\bar{x}_{(i)}}$ 将 $P_{\bar{x}_{(i)}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}_{(i)}, -)$ 像素化。此外，$\mathfrak{P}_{\bar{x}_{(i)}} \sqcap \cdots \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(n)}}$ 将每个 $P_{\bar{x}_{(i)}}$ 像素化。

证明。我们先只考虑一个 $\bar{x}$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 满足 $\bar{x} \ncong 0$ 的情形。当 $x_1 = 0$ 时，可将 $\bar{x}$ 替换为一个投射序列，并选取适当的 $\bar{x}_{(i)}$，从而调整以下证明。我们将证明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}, \bar{y}) \cong \Bbbk$ 当且仅当 $\bar{y} \in \mathsf{X}_{\bar{x}}$。根据命题 5.3，我们知道 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{x}, \bar{y}) \cong \Bbbk$ 当且仅当

$$0 < x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n < 1.$$

这恰好是 $\bar{y} \in \mathsf{X}_{\bar{x}}$ 的条件，因此 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中以 $\bar{x}$ 为源的每个非零态射 $[\gamma]$ 都属于 $\Sigma_{\mathfrak{P}_{\bar{x}}}$。因此，$\mathfrak{P}_{\bar{x}}$ 像素化了 $P_{\bar{x}}$。

现在考虑我们的集合 $\bar{x}_{(1)}, \ldots, \bar{x}_{(m)}$。由于 $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(1)}} \sqcap \cdots \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(m)}}$ 是每个 $\mathfrak{P}_{\bar{x}_{(i)}}$ 的（有限）细化，我们看到 $\mathfrak{P}$ 像素化了每个 $P_{\bar{x}_{(i)}}$。□

定义 5.9（有限 $\mathcal{P}$-表示）。设 $\mathcal{P} = \{P_{\bar{x}}\}$，其中 $\bar{x}$ 遍历所有投射源。若 $\mathsf{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的 M 在 $\mathsf{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中可由 $\mathcal{P}$ 中的投射对象有限表示，则称其为有限 $\mathcal{P}$-表示的。用 $\mathsf{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 表示 $\mathsf{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 的全子范畴，其对象为有限 $\mathcal{P}$-表示。

高阶 Auslander 代数最初由 Iyama 在 [Iya11] 中定义，而我们在此采用的组合方法则由 [OT12]提出。这一模型也见于 [JKPK19]。

定义 5.10（高阶 Auslander 代数/范畴）。设 $m \in \mathbb{N}_{>1}$ 和 $n \in \mathbb{N}_{>0}$。A_m 的 n 阶高阶 Auslander 代数是按照以下方式构造的箭图 $Q_m^{(n)}$ 的路径代数。$Q^{(n)}$ 的顶点用 n 元组 $\bar{\imath} = (i_1, \ldots\ldots, i_n)$ 标记，其中 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n \leq m$。当对除一个 $k = \ell$ 以外的所有 $k = \ell$ 都有 $\bar{\imath}_k = \bar{\jmath}_k$ 时，存在一条箭头 $\bar{\imath} \to \bar{\jmath}$，其中 $\bar{\jmath}_\ell = \bar{\imath}_\ell + 1$。

路径代数中有两个给定的关系，它们生成一个可容许理想 $I^{(n)}$。

(1) 任意两种箭头 $\bar{\imath} \to \bar{\jmath} \to k$ 的 $\bar{\imath} \to \bar{\jmath}' \to k$ 复合都相同。

(2) 从一个常值序列 $(i, i, \ldots, i)$ 到另一个常值序列 $(j, j, \ldots, j)$ 的任意路径都为 0。

n型的第 *th* 个高阶 *Auslander* 代数 A_m 是代数 $\Lambda = \Bbbk Q_m^{(n)} / I^{(n)}$。(1) 的直接推论是，$e_{\bar{\jmath}} \Lambda e_{\bar{\imath}}$ 要么与 $\Bbbk$ 同构，要么为 0。

由型为 n的第 *th* 个高阶 *Auslander* 代数 A_m 得到的范畴是由 $Q_m^{(n)}$ 模去 $I^{(n)}$ 所诱导的理想后构造的 $\Bbbk$- 线性化范畴。我们将其记为 $\boldsymbol{A}_m^{(n)}$。

命题 5.11。 </style}由类型为 的第 阶高阶 Auslander 代数得到的 -线性范畴同构于 $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}, \mathfrak{P}_{\bar{a}})$。

证明。记 $\mathcal{Q}$ 为范畴 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}, \mathfrak{P}_{\bar{a}})$。利用 [OT12、JKPK19],中的模型，我们得到一个双射 Φ，它将 $\mathcal{Q}$中的对象同构类映射到这些模型的箭图顶点。该双射定义如下：

$$\Phi : \mathsf{X}_{\bar{\imath}} \mapsto (i_1 + 1, i_2, i_3 - 1, i_4 - 2, \ldots, i_n - (n-2)).$$

检查可知，若 X 和 Y 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中都不是零对象，那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \cong e_{\Phi(\mathsf{Y})} \Lambda e_{\Phi(\mathsf{X})}$，其中 Λ 是 n 型 A_mAuslander 代数，定义见5.10。□

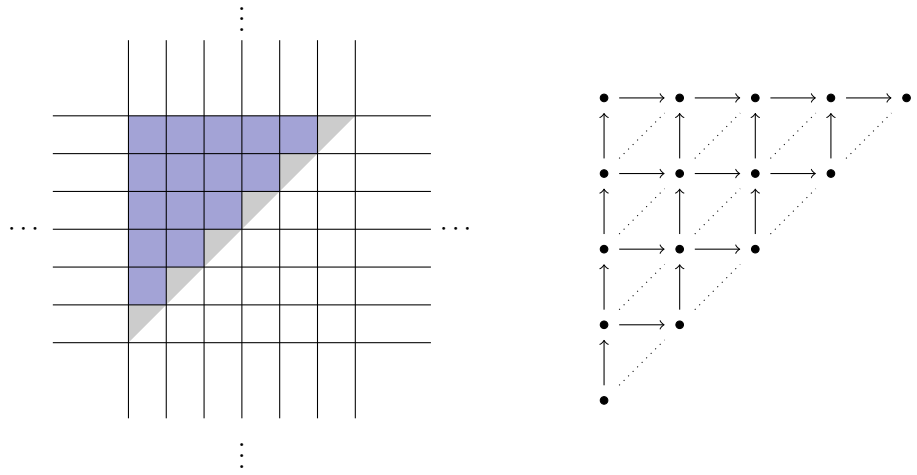
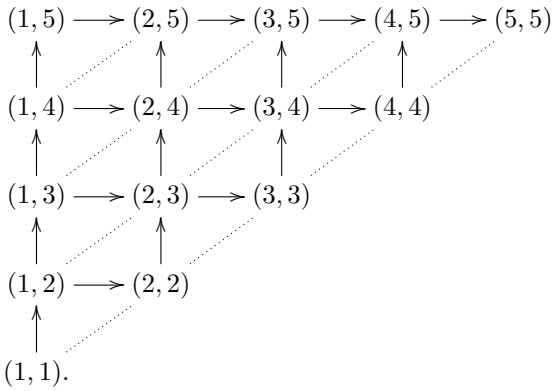


图5.1。左侧是一个屏的例子，它将投射不可分解对象的有限和像素化。设 $\bar{x}_{(1)} = (0, \frac{1}{6})$、$\bar{x}_{(2)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$、$\bar{x}_{(3)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$、$\bar{x}_{(4)} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 和 $\bar{x}_{(5)} = (\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$。图中左侧的是屏 $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(1)}} \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(2)}} \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(3)}} \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(4)}} \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(5)}}$。所有未完全着色的像素都是死像素。因此，只有蓝色像素不是死像素。这意味着 $\mathcal{A}^{(2)}_{\mathbb{R}}\mathfrak{P}$ 等价于右侧箭图的路径代数，并满足通常的网格关系（对角伪箭头确实存在，但多余）。

例5.12 ($A_5^{(2)}$)。类型为 A_5 的第二个高阶 Auslander 代数的箭图 $Q_5^{(2)}$ 为



范畴 $\boldsymbol{A}_5^{(2)}$ 的对象是 $Q_5^{(2)}$ 的顶点，并具有由 $I^{(2)}_{\mathfrak{P}_{\bar{a}}}$所诱导的关系。对于某些长度为 $\bar{a}$ 的 $(a_1, \ldots, a_{5+2-2})$，我们可以看到 $\mathcal{A}^{(2)}_{\mathbb{R}}$ 等价于 $\boldsymbol{A}_5^{(2)}$（命题 5.11）。图 5.1直观地展示了这一点。

回忆一下，$\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{2}^{\mathscr{P}}$ 的子集，满足：对于每个 $\mathscr{L} \in \mathbf{S}$，若 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathscr{L}$，则存在某个 $\mathfrak{P} \in \mathscr{L}$，使得 $\mathfrak{P}$ 细化 $\mathfrak{P}_1$ 和 $\mathfrak{P}_2$。

我们将特定的 $\mathscr{A}^{(n)} \subset \mathbf{S}$ 定义为 $\{\mathfrak{P}_{\bar{a}}\}$，其中每个 $\mathfrak{P}_{\bar{a}}$ 的定义与前文相同，具有 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{m+n-2})$，其中 $0 < a_1 < \ldots < a_k < 1$ 和 $k \geq n-1$（如果 $n = 1$，我们也将 $\mathfrak{P}_{()}$ 包含在 $\mathscr{A}^{(n)}$中）。对于任意 $\mathbf{X}_{\bar{\imath}} \in \mathfrak{P} \in \mathscr{A}^{(n)}$，如果 $\mathbf{X}_{\bar{\imath}}$ 包含

任意非零的 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 和 $i_1 > 0$对象，那么就存在某个初始 $s_{\mathsf{X}} \in \mathsf{X}$。也就是说，对于任意其他 $\bar{x} \in \mathsf{X}$，都存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$，使得 $\gamma(0) = s_{\mathsf{X}}$、$\gamma(1) = \bar{x}$，且 $\mathrm{im}(\gamma) \subset \mathsf{X}$。

集合 $\mathscr{P}$ 在 $\sqcap$（定义 1.21）下封闭。容易验证，$\mathscr{A}^{(n)}$ 在 $\sqcap$ 下也封闭：取一对 $\bar{a}$ 和 $\bar{a}'$，并按正确顺序组合这些序列即可。因此，根据定理 3.10，子范畴 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}^{(n)}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 在 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中是阿贝尔的，并且根据推论3.14，正合嵌入到 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中。

注 5.13。给定一个 $\mathfrak{P}_{\bar{a}} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$，其中 $\bar{a}$ 的长度为 $m+n-2$，我们看到，$\boldsymbol{A}_m^{(n)}$ 的每个不可分解射影表示都作为某个 $P_{\bar{x}}$嵌入到 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中。

反过来，每个 $P_{\bar{x}}$ 都是像素化的，因此存在某个 $\mathfrak{P}_{bara}$，它将 $P_{\bar{x}}$像素化，其中$\bar{a}$ 的长度仍为 $m+n-2$。因此，存在$\boldsymbol{A}_m^{(n)}$的某个不可分解射影表示，它提升为一个与 $P_{\bar{x}}$同构的表示。

命题 5.14. 我们有等式 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}) = \mathrm{rep}^{\mathscr{A}_{(n)}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$。此外，$\mathrm{rep}^{\mathscr{A}^{(n)}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的每个表示都来自某个 m 对应的、类型为 A_m 的 n 阶高阶 *Auslander* 代数的表示。

证明. 设 M 是一个有限 $\mathcal{P}$表示，并且 $\{P_{\bar{x}_{(i)}}\}_{i=1}^{m}$ 是 $\mathcal{P}$ 中出现在该表示中的不可分解投射对象。那么 $\mathfrak{P}_{\bar{x}_{(1)}} \sqcap \cdots \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{x}_{(n)}} = \mathfrak{P}_{\bar{a}}$，其中 $\bar{a}$。我们看到，$\mathfrak{P}_{\bar{a}}$ 对 M 的射影表示中的两项进行像素化。因此，由引理 3.8(1)，$\mathfrak{P}_{\bar{a}}$ 对 M 进行像素化，因此 M 属于 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}_{(n)}}(\mathcal{A}_{(n)\ \mathbb{R}})$。

设 M 是 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}^{(n)}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的一个表示，并设 $\mathfrak{P}_{\bar{a}} \in \mathscr{A}_{(n)}$，使得 $\mathfrak{P}_{\bar{a}}$ 对 M 进行像素化（定义 3.4），且 $\bar{a}$ 的长度为 $m+n-2 \geq n$。由命题 5.11 可知，来自类型为 A_m 的 n 阶高阶 Auslander 代数的 $\Bbbk$-线性范畴 $\boldsymbol{A}_m^{(n)}$ 同构于 $\mathcal{Q}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}, \mathfrak{P}_{\bar{a}})$。因此，由定理 3.7，存在 $\boldsymbol{A}_m^{(n)}$ 的某个表示 M，它可提升为与 M 同构的表示 $\widehat{M}$。容易验证，每个投射对象 $P_{\bar{x}}$ 都来自 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$ 中的一个不可分解投射对象，其中 $\bar{x}$ 的坐标取自 $\bar{a}$（但 x_1 可能为 0）。此外，$\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$ 中的每个不可分解投射对象都可提升为某个 $P_{\bar{x}}$。

根据命题 3.9，嵌入 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{Q}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}, \mathfrak{P}_{\bar{a}})) \to \mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 是正合的。因此，注意到注5.13，M 的投射分解提升为 M的投射分解。由于 $\overline{M}$ 是 pwf，我们知道 M 是有限维的，因此是有限生成的。因此，M 是有限生成的 $\mathcal{P}$-生成的，并且来自一个类型为 A_m的 Auslander 代数的表示。□

我们在 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中引入一种不可分解表示。对于每一对投射源 $\bar{x}$ 和 $c \in \mathbb{R}$，满足 $x_n < c \leq 1$，我们都有不可分解对象 $M_{\bar{x},\ c}$ 其支集由下式给出

$$\operatorname{supp} M_{\bar{x},c} = \begin{cases} \{\bar{w} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < w_1 < x_2 \leq w_2 < \cdots x_n \leq w_n < c \leq 1\} & x_1 = 0 \\ \{\bar{w} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 \leq w_1 < x_2 \leq w_2 < \cdots x_n \leq w_n < c \leq 1\} & x_1 > 0. \end{cases}$$

对于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中的任意非零态射 $[\gamma]$，我们有

$$M([\gamma]) = \begin{cases} \mathbf{1}_{\Bbbk} & \gamma(0), \gamma(1) \in \operatorname{supp} M \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果 $c = 1$，那么 $M_{\bar{x},\ c} = P_{\bar{x}}$。

命题 5.15。任意 $M_{\bar{x},\ c}$ 使得 $c < 1$ 是有限呈示的，并且具有长度恰为 n的投射分解。

证明。 投射分解如下：

$$P_{\bar{x}_{(n)}} \hookrightarrow P_{\bar{x}_{(n-1)}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{\bar{x}_{(2)}} \longrightarrow P_{\bar{x}_{(1)}} \longrightarrow P_{\bar{x}_{(0)}} \twoheadrightarrow M_{\bar{x},c},$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{x}_0 &= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} && = \bar{x},\\
\bar{x}_1 &= \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, c\} && \text{by replacing } x_n \text{ with } c,\\
\bar{x}_2 &= \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n, c\} && \text{by replacing } x_{n-1} \text{ with } x_n,\\
&\vdots &&\\
\bar{x}_{n-1} &= \{x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n, c\} && \text{by replacing } x_2 \text{ with } x_3, \text{ and}\\
\bar{x}_n &= \{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, c\} && \text{by replacing } x_1 \text{ with } x_2. \qquad \square
\end{aligned}$$

因此，每个 $M_{\bar{x},\,c}$都存在于 $\mathsf{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中。令 $\mathcal{M}^{(n)}$为 $\mathsf{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 的全子范畴，其对象同构于 $\{M_{\bar{x},c} \mid \bar{x}$ 是投射源 $x_n < c \leq 1\}$以及零对象中的某个对象。

引理 5.16. 设 $M_{\bar{x},\,c}$ 和 $M_{\bar{y},\,d}$ 是 $\mathcal{M}^{(n)}$中的非零对象。那么$\mathrm{Hom}_{\mathsf{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})}(M_{\bar{y},\,d}, M_{\bar{x},\,c}) \cong \Bbbk$ 当且仅当

$$x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n < c \leq d.$$

若上述条件不成立，则$\mathrm{Hom}_{\mathsf{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})}(M_{\bar{y},\,d}, M_{\bar{x},\,c}) = 0$。

证明。假设 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})}(M_{\bar{y},d}, M_{\bar{x},c}) \cong \Bbbk$，并设 $f : M_{\bar{y},d} \to M_{\bar{x},c}$ 是一个非零态射。那么 $\mathrm{supp} M_{\bar{x},c} \cap \mathrm{supp} M_{\bar{y},d} \neq \emptyset$。注意，若对某个 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中的非零 $\bar{w}$，有 $M_{\bar{x},c}(\bar{w}) = 0$，则对于所有满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{w}, \bar{z}) \neq 0$的 $\bar{z}$，$f_{\bar{z}} : M_{\bar{y},d}(\bar{z}) \to M_{\bar{x},c}(\bar{z})$ 都是零映射。特别地，若 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 中有 $\bar{y} \neq 0$，则$\bar{y} \in \mathrm{supp} M_{\bar{x},c}$。

在证明的其余部分，我们需要一个序列 $\{\bar{w}_{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^n$，使得 $\bar{w}_{(i)} \in \mathrm{supp} M_{\bar{y},\,d}$对每个 i，$\lim_{i\to\infty} \bar{w}_{(i)} = \bar{y}$，并且

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{w}_{(i+1)}, \bar{w}_{(i)}) \cong \Bbbk$$

对所有 i。与命题 5.5 的证明中的论证一样，我们可以假设存在某个 $W \in \mathbb{N}$，使得如果 $i > W$，则 $(w_k)_{(i)} = y_k$ 对 $1 < k \leq n$ 成立。与命题 5.5 的证明类似，对于每个 $\bar{w} \in \mathrm{supp} M_{\bar{y},\,d}$，都存在某个 $\bar{w}_{(i_w)}$，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}}(\bar{w}_{(i)}, \bar{w}) \cong \Bbbk$。

为导出矛盾，假设 $d < c$。那么存在某个元素 $\bar{w} = (w_1, \ldots..., w_{n-1}, c)$ 属于 $\mathrm{supp}\, M_{\bar{x},\,c}$，但不属于 $\mathrm{supp}\, M_{\bar{y},\,d}$。这意味着 $M_{\bar{x},\,c}(\bar{w}_{(i_w)}\, \bar{w}) \circ f_{\bar{w}_{(i_w)}} \neq 0$，但$f_{\bar{w}} \circ M_{\bar{y},\,d}(\bar{w}_{(i_w)}\, \bar{w}) = 0$。由于 f 是表示之间的映射，这就产生了矛盾。因此，引理中的条件成立。

现在假设引理中的条件不成立。由于该条件为假，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $i \geq N$，都有 $\bar{w}_{(i)} \notin$ 支集 $M_{\bar{x},\,c}$。不失一般性，$N \geq W$。那么，对于所有 $\bar{w} \in$ 支集 $M_{\bar{x},\,c} \cap$ 支集 $M_{\bar{y},\,d}$，要使条件 $f_{\bar{w}} \circ M_{\bar{y},\,d}(\bar{w}_{(i_w)}\, \bar{w}) = M_{\bar{x},\,c} \circ f_{\bar{w}_{(i_w)}}$ 成立，唯一的可能就是$f = 0$。无论如何，若支集$M_{\bar{x},\,c} \cap M_{\bar{y},\,d} = \emptyset$，则 f 必须为 0。证明至此完成。$\square$

以下关于 n-倾斜簇倾斜子范畴的定义出自 Iyama [Iya11]。

定义 5.17 (n-簇倾斜子范畴)。 设 $\mathcal{D}$ 是一个阿贝尔范畴。 $\mathcal{D}$ 的一个子范畴 $\mathcal{T}$称为 n-簇倾斜子范畴，如果 $\mathcal{T}$是函子有限的，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \mid \mathrm{Ext}^i(\mathcal{T}, M) = 0,\ 0 < i < n\} \\ &= \{M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \mid \mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{T}) = 0,\ 0 < i < n\}.\end{aligned}$$

我们想证明 $\mathrm{add}\mathcal{M}^{(n)}$是$(n-1)$-簇倾斜的。这意味着 $\mathcal{M}^{(n)}$还必须包含不可分解内射对象。

命题 5.18。 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的不可分解内射对象恰好是$M_{\bar{x},c}$ 中满足 $x_1 = 0$ 的对象，并且$\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的每个 M 都有一个内射余解。

证明。 首先，我们将证明余解的存在性。然后，我们将证明所需对象的内射性。

设 M是$\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}) = \mathrm{rep}^{\mathscr{A}}(\mathrm{n})(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$中的一个对象，设 $\mathfrak{P}_{\bar{a}}$是 $\mathscr{A}(n)$中将 M像素化的一个屏。不失一般性，我们假设 $\bar{a}$ 的长度为 $m+n-2 \geq n$。与命题 5.14 的证明一样，我们找到$\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m)$中的 M，使得 M 来自$\bar{M}$ （定理 3.7）。在$\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m)$中，我们取 M的内射余解。

现在我们证明， M 的余解中的每个内射不可分解对象都嵌入到 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中，并且是 $\mathcal{M}^{(n)}$ 中的一个对象。余解中的每个 $I_{\bar{i}}$ 的支撑

$$\{\bar{j} \in \{1, \ldots, m\}^n \mid j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_m, \forall 1 \leq k \leq m, j_k \leq i_k, \text{ and } e_{\bar{i}} \Lambda e_{\bar{j}} \neq 0\},$$

其中 Λ 是 n 阶、类型为 A_m的高阶 Auslander 代数。回想一下命题 5.11 的证明中的双射 Φ。我们看到

$$\Phi^{-1}(\bar{i}) = (i_1 - 1, i_2, i_3 + 1, i_4 + 2, \ldots, i_n + (n-2)).$$

令 $\bar{y} = (0,\ a_{i_1-1},\ a_{i_2},\ a_{i_3+1},\ \ldots,\ a_{i_{n-1}+(n-3)})$ 和 $d = a_{i_n+(n-2)}$。那么我们看到 $I_{\bar{i}}$嵌入到 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中，作为 $M_{\bar{y},\ d}$。

由于嵌入 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)}) \hookrightarrow \mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 是正合的，因此我们有一个如下形式的正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_i^{m_1} M_{\bar{x}_{(i,1)}, c_{i,1}} \longrightarrow \bigoplus_i^{m_2} M_{\bar{x}_{(i,2)}, c_{i,2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_i^{m_p} M_{\bar{x}_{(i,p)}, c_{i,p}},$$

其中每个 $(x_1)_{(i,j)} = 0$。

还要注意，如果 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中某个表示 I 是内射的，那么它来自某个 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$ 中若干个 $\bar{I}_{\bar{i}}$ 的直和。因此， I 是若干个 $M_{\bar{x},\ c}$ 的直和。

剩下要证明的是，当 $x_1 = 0$ 时，每个 $M_{\bar{x},c}$ 在 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中都是内射的。设 $M_{\bar{x},c} \xleftarrow{g} M \xhookrightarrow{f} N$ 是 $\mathrm{rep}^{\mathscr{A}}(\mathrm{n})(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}) = \mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的一个图表，其中 $x_1 = 0$。那么存在某个 $\mathfrak{P}_{\bar{a}}$ ，它将 $M_{\bar{x},c}$, M 和 N 分别像素化。根据定理 3.7 以及我们在上一段中的观察，这些分别来自 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$ 中的 $I_{\bar{i}}$,M 和 N，其中 $\bar{I}_{\bar{i}}$ 是 $\bar{i}$ 处的内射。在这个特定情形下，我们可以将态射 f 和 g“向下推”到 $\bar{f}\colon M \to N$ 和 $\bar{g}\colon M \to I_{\bar{i}}$，其中 f 仍然是单态射。由于 $I_{\bar{i}}$ 是内射的，因此存在 h: $N \to I_{\bar{i}}$ 使得 $hf = \bar{g}$。于是，下面的交换三角形（此时带有 $\bar{h}$）嵌入到 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中，成为一个带有 f、 g，且此时带有 h的交换三角形。证明至此完成。□

需要指出的是，虽然可以证明$M_{\bar{x},\ c}$（带有 $x_1 = 0$）在 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中也是内射的，但过程极其繁琐。

下述命题的证明是对偶计算，与命题 5.15的证明相对应。

命题 5.19。 每个 $M_{\bar{x},c}$ 在 $\mathcal{M}^{(n)}$ 中满足 $x_1 > 0$ 的对象，都有一个长度恰为 n的内射余解消。

命题 5.20. 子范畴 $\mathrm{add}\mathcal{M}^{(n)}$ *of* $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 是一个 $(n-1)$-簇倾斜子范畴。

证明。 根据命题 5.14 和 5.18，我们可知 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的每个对象都由 $\mathrm{add}\,\mathcal{M}^{(n)}$ 中的对象有限表示且有限余表示。因此，$\mathrm{add}\,\mathcal{M}^{(n)}$ 是函子有限的。此外，在上述命题的证明中，我们已经看到每个不可分解投射对象和内射对象都属于 $\mathcal{M}^{(n)}$。

令 $M_{\bar{x},c}$ 和 $M_{\bar{y},d}$ 为 $\mathcal{M}^{(n)}$ 中的表示，并令 N 为某个不属于 $\mathcal{M}^{(n)}$的不可分解表示。根据命题 5.14的证明，我们有 $\mathfrak{P}_{\bar{a}_1}$、$\mathfrak{P}_{\bar{a}_2}$和 $\mathfrak{P}_{\bar{a}_3}$，它们分别将 $M_{\bar{x},c}$、$M_{\bar{y},d}$和 N像素化。

由于 $\mathfrak{P}_{\bar{a}_1}$、$\mathfrak{P}_{\bar{a}_2}$和 $\mathfrak{P}_{\bar{a}_3}$ 都属于 $\mathscr{A}^{(n)}$，因此 $\mathfrak{P}_{\bar{a}} = \mathfrak{P}_{\bar{a}_1} \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{a}_2} \sqcap \mathfrak{P}_{\bar{a}_3}$ 也属于 $\mathscr{A}^{(n)}$，其中 $\bar{a}$ 是将 $\bar{a}_1$、$\bar{a}_2$和 $\bar{a}_3$ 合并后按升序排列并去除重复项所得的列表。为方便记号，令 $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\bar{a}}$。那么，存在某个 n 阶、类型为 A_m 的 Auslander 代数 Λ，使得 $\boldsymbol{A}_m^{(n)}$ 等价于 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$。此外，存在 M_1、M_2 和 N 这几个 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ 的 $\mathfrak{P}$ 表示，它们在 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 中的提升分别同构于 $M_{\bar{x},\,c}$、$M_{\bar{y},\,d}$ 和 N。

根据构造，M_1 和 M_2 属于 $(n-1)$-簇倾斜子范畴 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$（使用 [OT12、JKPK19] 中的模型）。接着，我们可以利用 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)}) \to \mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 是一个正合嵌入（注 3.13）这一事实，以及对于 $0 < i < n-1$，$\mathrm{Ext}^i(M_1, M_2) = 0$ 这一事实，得出对于 $0 < i < n-1$，$\mathrm{Ext}^i(M_{\bar{x},c}, M_{\bar{y},d}) = 0$。根据构造，$N$ 也不属于 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$ 的 $(n-1)$-簇倾斜子范畴。于是，存在某个 M_3，属于 $\mathrm{rep}^{\mathrm{pwf}}(\boldsymbol{A}_m^{(n)})$ 的 $(n-1)$-簇倾斜子范畴，使得对于某个 $0 < i < n-1$，$\mathrm{Ext}^i(M_3, N) \neq 0$ 或 $\mathrm{Ext}^i(N, M_3) \neq 0$。$M_3$ 提升为 $\mathcal{M}^{(n)}$ 中的一个对象 $M_{z,e}$，且要么 $\mathrm{Ext}^i(M_{z,e}, N) \neq 0$，要么 $\mathrm{Ext}^i(N, M_{z,e}) \neq 0$。无论哪种情况，对于 $0 < i < n-1$，N 都与 $\mathcal{M}^{(n)}$ 中的某个对象在次数 i 上存在一个扩张。因此，$\mathcal{M}^{(n)}$ 是 $\mathrm{rep}^{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n)})$ 的一个 $(n-1)$-簇倾斜子范畴。□

由于我们研究的是连续统的情形，因此需要对 $\mathcal{M}^{(n)}$ 做一个小小的修改。

定义 5.21 ($\mathcal{M}^{(n)}$)。我们将 $\mathcal{M}^{(n)}$ 定义为 $\mathcal{M}^{(n)}$ 的子范畴，其中省略了射影对象和内射对象。也就是说，$\mathcal{M}^{(n)}$ 中的对象是对象$M_{\bar{x},c}$，其中 $x_1 > 0$ 且 $c < 1$。

现在，我们给出 [Iya11 推论 1 中某个特例的类比结果。16], 通过与 [OT12 定理/构造 34] 以及 [JKPK19 定理 23]进行比较，更容易看出。

定理 5.22. 设 $n \geq 1$ 为一个整数。那么 $\mathcal{M}^{(n)\,op} \simeq \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n+1)}$。

证明。 设 $M_{\bar{x},c}$ 属于 $\mathcal{M}^{(n)\mathrm{op}}$。那么 $M_{\bar{x},c}$ 由下式确定：

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < c < 1.$$

若令 $x_{n+1} = c$，则$\mathcal{M}^{(n)\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n+1)}$ 的非零对象之间存在一个显然的双射。

设 $M_{\bar{x},\,c}$ 和$M_{\bar{y},\,d}$ 是 $\mathcal{M}^{(n)\mathrm{op}}$中的非零对象。由引理 5.16，并注意到我们处于对偶范畴中，可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^{(n)\mathrm{op}}}(M_{\bar{x},\,c}, M_{\bar{y},\,d}) \cong \Bbbk$ 当且仅当

$$0 < x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n < c \leq d < 1,$$

否则 Hom 空间为 0。令 $\bar{x}' = (x_1、\ldots\ldots、x_n、c)$ 和 $\bar{y}' = (y_1、\ldots\ldots、y_n、d)$。那么，所显示的条件与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n+1)}}(\bar{x}'、\bar{y}')$ 非零且同构于 $\Bbbk$ 的条件相同。因此，$\mathcal{M}^{(n)\mathrm{op}} \simeq \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{(n+1)}$。□

参考文献

[ABH24] Claire Amiot、Thomas Brüstle 和 Eric J. Hanson。由序嵌入定义的持久模不变量。arXiv:2402.*09190* [math.AT], 2024。[BBH22] Benjamin Blanchette、Thomas Brüstle 和 Eric J. Hanson。持久理论中的同调逼近。加拿大数学杂志，76：66–103，2022年。[BBH23] Benjamin Blanchette、Thomas Brüstle 和 Eric J. Hanson。持久模的正合结构。《代数表示与相关主题》，ICRA 2022论文集，第121–160页，2023年。[BCB20] Magnus Bakke Botnan 和 William Crawley-Boevey。持久模的分解。《美国数学会会刊》，148：4581–4596，2020年。[BDL25] Thomas Brüstle、Justin Desrochers 和 Samuel Leblanc。通过极小子偏序集定义广义秩。arXiv:2510.*10837* [math.RT], 2025。[Bra25] Simion Braez。幂等元完备范畴的 Krull–Remak–Schmidt–Azumaya定理。arXiv:2503.*21216* [math.CT], 2025。[BvR13] Carl Fredrik Berg 和 Adam-Christiaan van Roosmalen。线串箭图的表示。《伦敦数学会会刊》，108：253–290，2013年。[GR97] P. Gabriel 和 A. V. Roĭter。《有限维代数的表示》。施普林格，柏林、海德堡，1997年。[HR24] Eric J. Hanson 和 Job Daisie Rock。逐点有限维 $\mathbb{S}^1$ 持久模的分解。《代数及其应用杂志》，23(03)：2450054，2024年。[IRT23] Kiyoshi Igusa、Job Daisie Rock 和 Gordana Todorov。型为 A (I) 的连续箭图。基础。《巴勒莫数学学会会刊》第二辑，72 868，2023 833：–。[Iya11] Osamu Iyama。高阶 Auslander 代数的簇倾斜。《数学进展》，226(1)：1–61，2011年。[JKPK19] Gustavo Jasso、Julian Külshammer、Chrysostomos Psaroudakis 和 Sondre Kvamme。高阶 Nakayama代数 I：构造。《数学进展》，351：1139–1200，2019年。[LHP25] Jiajie Luo 和 Gregory Henselman-Petrusek。主理想整环上无限持久模的区间分解。arXiv:2511.*07614* [math.AT], 2025。[OT12] Steffen Oppermann 和 Hugh Thomas。高维簇组合学与表示论。加入欧洲数学会，14：1679–1737，2012年。[PRY24] Charles Paquette、Job Daisie Rock 和 Emine Yıldırım。广义线串箭图范畴。arXiv:2410.*14656* [math.RT], 2024。[PS26] Amit Patel 和 Primoz Skraba。莫比乌斯同调。《美国数学会汇刊》，2026。[SS21] Francesco Sala 和 Olivier Schiffmann。圆量子群的 Fock空间表示。《国际数学研究通知》，2021：170250–17070，2021年。[Sta26] Stacks 项目作者。Stacks 项目。https://stacks.math.columbia.edu，2026。

代数群，鲁汶大学数学系，比利时鲁汶。根特大学数学系 W16，比利时根特电子邮件地址：jobdaisie.rock@kuleuven.be