arXiv:2603.25438v1 [math.SP] 26 Mar 2026

一类物理学中值得关注的非自伴谱微分算子

Victor Laliena

萨拉戈萨大学应用数学系和大学数学与应用研究所（*IUMA*），西班牙萨拉戈萨

摘要

本文证明，某一类非自伴（且非正规）线性常微分算子，按照 Dunford 和 Bade 的意义，属于标量型谱算子。这类算子出现在物理问题中，例如自旋波被磁孤子散射的情形。

关键词：谱算子、谱测度、非自伴算子、谱奇异性

*2020*年 *MSC*：34L05 47B40 47B15 47B28

1. 引言

除了其内在的数学价值外，算子的谱分析还是物理和工程问题中的重要工具。许多理论结果都需要通过某种谱分析，才能得到最恰当的解释并与实验结果相印证。从这一角度看，涉及谱算子的理论问题 [4, 5]会大大简化。尽管已知一些非正规谱微分算子的类别（例如一些具有纯离散谱 [15, 10, 17], 的常微分算子、一些具有周期系数[13], 的常微分算子，或一些定义在$L^2(\mathbb{R}^n)$上的二阶椭圆微分算子类别，其中 $n \geq 3$ [14, 6]），但一般而言，要证明具体的算子是谱算子仍然很困难。困难的根源在于可能出现谱奇异性；这类现象在正规算子的情形下不会出现，但在其他情形下却很常见 [14]。

本文证明了一类此前未曾研究过的非正规常微分算子，在

Dunford 意义下属于标量型谱算子 [4, 5] （实际上，由于这些算子无界 [1]，应按 Bade 的意义理解）。这些算子例如出现在一维孤子对自旋波的散射理论中 [11], ，其定义由如下形式的微分表达式给出 $Lu = D_2 D_1 u$, 其中 u 是 $\mathbb{R}$ 上的一个函数，并且

$$D_i = -D^2 + q_i + h_i, \quad (i = 1, 2). \tag{1}$$

在上述表达式中， D 表示导数， $Du = u'$、 $h_2 > h_1 > 0$为常数， q_1 和 q_2 是定义在 $\mathbb{R}$上的实函数。我们要求，对于$i = 1$，2，

1. $q_i \in C^1(\mathbb{R})$, $q_i' \in AC(\mathbb{R})$, $q_i'' \in L^2(\mathbb{R})$,
2. $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^3)|q_i^{(k)}(x)|dx < \infty$, $0 \le k \le 2$,

其中， $AC(\mathbb{R})$是定义在 $\mathbb{R}$ 上的复函数集合，这些函数在任意紧区间上绝对连续；函数上的撇号和上标(k)分别表示该函数的导数和 k阶导数。

为避免符号过多，我们对微分表达式以及由这些微分表达式在适当定义域上定义的算子，使用相同的符号 D_1、 D_2、 L、 L^*（最后一个符号将在下文定义）。由于本文中每个微分表达式都对应一个唯一的算子，因此这方面不会产生歧义。根据上下文，应当可以清楚判断该符号表示的是算子，还是作用于某个适当函数的微分表达式。

在上述假设下， D_1 和 D_2 是$L^2(\mathbb{R})$中的自伴算子，定义域为 $H^2(\mathbb{R})$, 且其谱有下界。对于$i = 1$，2， D_i的本质谱为 $[h_i, \infty)$，点谱包含于$(-\infty, h_i]$。我们进一步要求 D_2 为正定算子且具有有界逆。也就是说，分别以$(\cdot, \cdot)$和 $\|\cdot\|$表示 $L^2(\mathbb{R})$中的内积和范数，则存在 $c_2 > 0$ ，使得对于任意 $u \in \mathrm{dom}(D_2)$，均有$(D_2 u, u) \ge c_2 \|u\|^2$ 。

可能有 $\ker(D_1) \ne \{0\}$ （在自旋波动力学的应用中通常会出现这种情况）。到 $\ker(D_1)$ 的正交投影记为 P_0，它是秩至多为二的有限秩算子。令 I_d 为恒等算子，并定义 $P_R = I_\mathrm{d} - P_0$。将 D_1 限制在子空间 $\mathrm{dom}(D_1) \cap \mathrm{ran}(P_R)$ 上，记为 D_{1R}；它是单射，且有有界逆 $D_{1R}^{-1} : \mathrm{ran}(D_1) \to \mathrm{ran}(P_R)$ 。算子 $D_1 + P_0$ 也是单射，且其有界逆为 $(D_1 + P_0)^{-1} = D_{1R}^{-1} P_R + P_0$。

由 D_1 和 D_2 构造线性算子 L: $\mathrm{dom}(L) \to L^2(\mathbb{R})$，定义如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(L) &= \big\{u \in \mathrm{dom}(D_1) \,\big|\, D_1 u \in \mathrm{dom}(D_2)\}, \\ Lu &= D_2 D_1 u, \quad u \in \mathrm{dom}(L). \end{aligned} \tag{2}$$

L 的定义域在 $L^2(\mathbb{R})$中稠密，因为它包含 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$，即由快速递减函数构成的施瓦茨空间。通过初等方法可证明， L^*（ L的伴随算子）由下式给出

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(L^*) &= \big\{u \in \mathrm{dom}(D_2) \,\big|\, D_2 u \in \mathrm{dom}(D_1)\}, \\ L^* u &= D_1 D_2 u, \quad u \in \mathrm{dom}(L^*). \end{aligned} \tag{3}$$

同样， $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{dom}(L^*)$。通过类似方法可证明 $L^{**} = L$，因此 L 和 L^* 是闭算子。除非$q_1 = q_2$，否则它们不是自伴算子，因为在$\mathrm{dom}(L) \cap \mathrm{dom}(L^*)$上，

$$L^* - L = 2(q_1' - q_2')D + q_1'' - q_2''. \tag{4}$$

我们注意到， L^* 是 L的相对有界扰动，其相对界为零。

我们指出两个将在证明某些结果时用到的事实。首先，若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，则 Lf 和 $L^* f$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$。其次，$\ker(L) = \ker(D_1)$，并且若 $f \in \ker(D_1)$，则 $f \in \mathrm{dom}(L^*)$，因为在这种情况下 $D_2 f = Bf$，其中B 是由 $h_2 - h_1 + q_2 - q_1$定义的乘法算子，进而 $Bf \in H^2(\mathbb{R})$。因此，$\mathrm{ran}(P_0) \subset \mathrm{dom}(L^*)$。

记号。 我们用撇号表示任意函数关于第一个变量的导数。函数关于第一个变量的 k 阶导数记作上标 (k)。对于复数 z，符号 $z^{1/2} = \sqrt{z}$ 表示 z 的平方根的主值分支。几乎处处（简称$a.a.$）和几乎处处（$a.e.$）均指相对于勒贝格测度而言。

我们分别用 $\rho(A)$、 $\sigma(A)$、 $\sigma_p(A)$、 $\sigma_r(A)$ 和 $\sigma_c(A)$ 表示算子 A的预解集、谱、点谱、剩余谱和连续谱。若 A 是自伴算子，则其本质谱记为 $\sigma_e(A)$。否则，Edmunds 和 Evans 的第9章 [7], 中定义的谱的五个子集（有时均称为本质谱）记为 $\sigma_{ek}(A)$、 $1 \le k \le 5$。对于 $z \in \rho(A)$， A 的预解算子定义为 $R_A(z) = (A - zI_{\mathrm{d}})^{-1}$。

我们用符号 I_{d} 表示任意恒等算子。根据上下文，恒等算子所作用的空间应当是明确的。为简化记法，我们引入符号 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$。如前所述，我们分别用 $(\cdot,\ \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{H}$ 中的内积和范数。

2. 主要结果概述

本文的主要结果很容易概括： L 存在恒等算子的谱分解（定理 21），而 L是依照 Dunford 和 Bade 意义定义的标量型谱算子（定理 22）。对于 L^*，同样的结论也成立。定理 21 和 22 由下文所述的三个关键结果推得。

1. L和 L^* 的谱性质与自伴算子 $\Lambda = D_2^{1/2} D_1 D_2^{1/2}$ 的谱性质有关。这一事实使我们能够证明 L 和 L^* 的谱位于实轴上，并得到一个同态 B_L，它将 $\mathbb{R}$ 的有界博雷尔集所成的布尔代数映射到包含于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$中的投影布尔代数；其中的元素约化 L （伴随投影约化 L^*）。当限制在 $\mathbb{R}$任意有界子集所包含的博雷尔集 b 上时，投影 $B_L(b)$ 一致有界，这意味着 L 和 L^* 没有谱奇异性。这些思路将在第 3 节和第 4 节中展开。根据这些结果，目前尚不清楚该同态是否有界，以及它能否扩展为一个同态，将 $\mathbb{R}$ 的博雷尔集所成的布尔代数映射到包含于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$中的投影布尔代数。

2. 与 L 相关的谱展开（即按 $Lu = \lambda u$的有界解，或“广义特征函数”展开，见第 6 节）可以通过对 L的预解算子进行全面分析而得出，这一分析利用了 L 是常微分算子这一事实。（Kemp [9]早年已对一类更一般的常微分算子完成了部分解析工作，其中包括 L 和 L^*，但要完成本文的工作，仍需进一步强化他的结果。）格林函数的分析在第 5 节进行，谱展开（定理 9）及其推论（推论10）则在第 6 节证明。

3. 谱展开在 $\mathcal{H}$ 与某个平方可积函数空间之间提供线性映射，在该空间中，“变换后的 L”以乘法方式作用。这些映射是连续的（定理 11），且它们在 $\mathcal{H}$ 的某些子空间上的限制是单射并具有连续逆映射（定理 18）；这些事实使我们得以证明 B_L 有界，并可将其扩张为

一个有界同态 E_L，它将 $\mathbb{R}$ 的博雷尔集的布尔代数映射到包含于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中的投影布尔代数。定理 21 和 22 可由这些结果推出。

3. L 和 L^*的谱

L 和 L^* 的谱性质与自伴算子 Λ的性质有关，Λ定义如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\Lambda) &= \mathrm{ran}\big({D_2}^{-1/2}(D_1+P_0)^{-1}{D_2}^{-1/2}\big), \\ \Lambda f &= D_2^{1/2}D_1D_2^{1/2}f, \quad f\in \mathrm{dom}(\Lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $D_2^{1/2}$ 是 D_2的正平方根。显然，$\mathrm{dom}(\Lambda)$在 $\mathcal{H}$中稠密。Λ 是自伴的，这可用初等方法证明。

算子 $D_2^{1/2}$ 关于 Λ相对有界，因为对任意$f\in\in\mathrm{dom}(\Lambda)$,

$$D_2^{1/2}f=(D_1+P_0)^{-1}D_2^{-1/2}\Lambda f+P_0D_2^{1/2}f, \tag{6}$$

且 ${P_0D}_2^{1/2}$是一个有界有限秩算子。同理可见，D_1 和 D_2 关于 L 和 L^*均相对有界。

定理 1. $\rho(L)=\rho(L^*)=\rho(\Lambda)$，且若 $z\in\rho(L)$ 则

$$R_L(z)=D_2^{1/2}R_\Lambda(z)D_2^{-1/2},\quad R_\Lambda(z)=D_2^{1/2}R_{L^*}(z)D_2^{-1/2}. \tag{7}$$

证明. 我们首先证明 $\rho(L)=\rho(L^*)$。若 $z\in\rho(L^*)$，则算子$L-zI_{\mathrm{d}}=D_2(L^*-zI_{\mathrm{d}})D_2{}^{-1}$ 是单射，且其值域稠密，而其逆映射$D_2R_{L^*}(z)D_2{}^{-1}$有界，因为 D_2 相对于L^*相对有界。因此，$z\in\rho(L)$，这意味着 $\rho(L^*)\subseteq\rho(L)$。

现在取 $z\in\rho(L)\setminus\{0\}$。考虑方程 $(L^*-zI_{\mathrm{d}})g=f$，其中$f\in\mathcal{H}$。作用于 P_0 后得到 $P_0g=-z^{-1}P_0f$。利用 $g=P_Rg+P_0g$ 并作用于 P_R，我们得到

$$(L^*-zI_{\mathrm{d}})P_Rg=P_Rf+\frac{1}{z}L^*P_0f. \tag{8}$$

上述方程是值域(P_R)中元素之间的关系，接着我们可以在等式两边作用 D_{1R}^{-1}，得到

$$(L-zI_{\mathrm{d}})D_{1R}^{-1}P_Rg=D_{1R}^{-1}\Big(P_Rf+\frac{1}{z}L^*P_0f\Big). \tag{9}$$

因此我们有

$$P_R g = D_1 R_L(z) D_{1R}^{-1}\Big(P_R f + \frac{1}{z} L^* P_0 f\Big). \tag{10}$$

于是，对每个$f \in \mathcal{H}$，方程$(L^* - zI_{\mathrm{d}})g = f$都有唯一解 $g \in \mathcal{H}$，显然其上界为 $\|g\| \le c\|f\|$，其中 c 与 f无关。因此，$z \in \rho(L^*)$，从而 $\rho(L) \setminus \{0\} \subseteq \rho(L^*)$。若 $0 \in \rho(L)$，则 $\ker(D_1) = \{0\}$，且 D_1 是一个具有有界逆的单射算子。因此，显然 L^* 是单射且具有有界逆，故$0 \in \rho(L^*)$。综上，我们已证明 $\rho(L) \subseteq \rho(L^*)$。因此，$\rho(L) = \rho(L^*)$。

现在证明 $\rho(\Lambda) \subseteq \rho(L)$且 $\rho(L^*) \subseteq \rho(\Lambda)$。对于 $z \in \rho(\Lambda)$，显然 $L - zI_{\mathrm{d}} = D_2^{1/2}(\Lambda - zI_{\mathrm{d}})D_2^{-1/2}$是一个值域稠密的单射算子。其逆映射有界，因为 $D_2^{1/2}$ 相对于Λ是相对有界的。因此，$z \in \rho(L)$，且 $R_L(z)$由方程（7）的第一式给出。类似地，对于 $z \in \rho(L^*)$，算子 $\Lambda - zI_{\mathrm{d}} = D_2^{1/2}(L^* - zI_{\mathrm{d}})D_2^{-1/2}$ 是单射且具有稠密值域。其逆映射有界，因为 $D_2^{1/2}$ 相对于 L^*是相对有界的，这意味着 $z \in \rho(\Lambda)$，且 $R_\Lambda(z)$由方程（7）的第二式给出。

□

注意到，方程 (7) 可以改写为以下有用的形式：

$$R_L(z) = (D_1 + P_0)^{-1} D_2^{-1/2}\Big(I_{\mathrm{d}} + zR_\Lambda(z)\Big) D_2^{-1/2} + P_0 D_2^{1/2} R_\Lambda(z) D_2^{-1/2}, \tag{11}$$

$$R_\Lambda(z) = D_2^{-1/2}(D_1 + P_0)^{-1}\Big(I_{\mathrm{d}} + zR_{L^*}(z)\Big) D_2^{-1/2} + P_0 D_2^{1/2} R_{L^*}(z) D_2^{-1/2}. \tag{12}$$

定理 1 意味着 $\sigma(L) = \sigma(L^*) = \sigma(\Lambda) \subset \mathbb{R}$。在下一个定理中，我们分析谱的各个组成部分。

记号。引入记号 $h_{\mathrm{a}} = (h_1 + h_2)/2, h_{\mathrm{p}} = h_1 h_2$, $h_m = -(h_2 - h_1)^2/4$ 以及开区间 $I = (h_{\mathrm{p}}, \infty)$ 会很方便。我们用 $\sigma_p'(L)$ 表示 $\sigma_p(L)$ 的聚点集。

定理*2*。 L、 L^*和 Λ 的谱逐项相同： $\sigma_p(L) = \sigma_p(L^*) = \sigma_p(\Lambda)$， $\sigma_r(L) = \sigma_r(L^*) = \sigma_r(\Lambda) = \emptyset$， $\sigma_c(L) = \sigma_c(L^*) = \sigma_c(\Lambda) = I$，以及 $\sigma_{ek}(L) = \sigma_{ek}(L^*) = \sigma_e(\Lambda) = I \cup \sigma_p'(L)$，其中$1 \le k \le 5$。点谱是一个可数有界无处稠密集，至多有两个聚点： $\sigma_p'(L) \subseteq \{h_{\mathrm{m}}, h_{\mathrm{p}}\}$。

证明。 为证明这三个算子的点谱相同，我们注意到，若 f 是 Λ 对应于特征值 λ的特征函数，那么 $D_2^{1/2}f$ 和 $D_2^{-1/2}f$ 分别是 L 和 L^*对应于特征值 λ 的特征函数；若 f 是 L 对应于特征值 λ的特征函数，那么 $D_2^{-1/2}f$ 和 $D_2{}^{-1}f$ 分别是 Λ 和 L^*对应于特征值 λ的特征函数；若 f 是 L^* 对应于特征值 λ的特征函数，那么 $D_2^{1/2}f$ 和 $D_2 f$ 分别是 Λ 和 L对应于特征值 λ的特征函数。由于 Λ是自伴的，且 $\mathcal{H}$ 可分， $\sigma_p(\Lambda)$是可数集。 $\sigma_p(\Lambda)$是无处稠密集，这是因为 L 的每个特征值都是第5节中定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数 W 的零点；该函数在 $\mathbb{C}$ 的上半平面内解析，并在实轴上连续。 W 的零点构成实轴上的一个有界子集，其聚点只能位于 $\{h_{\mathrm{m}}, h_{\mathrm{p}}\}$ （见第5节）。

现在显然，这三个算子的剩余谱均为空，且它们的连续谱相同。由于 L 的谱位于实轴上，五个集合 $\sigma_{ek}(L)$、 $1 \le k \le 5$ 相等，并且可由 $\sigma(L)$ 去掉有限重数的孤立特征值后得到（见 Edmunds 和 Evans《第9章》中的定理 1.6 的第（i）点 [7], ；显然，该结论不仅适用于希尔伯特空间中的自伴算子，也适用于谱仅包含其预解集的聚点的巴拿赫空间中的任意算子）。显然，这些陈述对 L^*也成立。因此，十个集合 $\sigma_{ek}(L)$、 $\sigma_{ek}(L^*)$、 $1 \le k \le 5$ 全都相等，并且与 $\sigma_e(\Lambda) = I \cup \sigma_p'(L)$相同。

□

4. 有界博雷尔集的谱投影

关于 L 的预解算子的公式（7）提示了一种为 L定义一族谱投影的方法，如下所示。设 $\mathcal{B}_b$ 为 $\mathbb{R}$的有界博雷尔集代数， $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$的博雷尔 σ-代数， $\mathcal{L}(\mathcal{H})$为 $\mathcal{H}$中有界线性算子构成的巴拿赫代数。设 $E_\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$为 Λ 的单位分解。由于当 $b \in \mathcal{B}_b$时， $\Lambda E_\Lambda(b)$是有界算子，我们可以定义映射 $B_L : \mathcal{B}_b \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使得

$$B_L(b) = D_2^{1/2} E_\Lambda(b) D_2^{-1/2} = D_2^{1/2} R_\Lambda(z)(\Lambda - zI_{\mathrm{d}}) E_\Lambda(b) D_2^{-1/2} \qquad (13)$$

对于 $b \in \mathcal{B}_b$ 和 $z \in \rho(L)$。上述表达式的第二个等式表明，对于每个有界博雷尔集 b， $B_L(b)$都是一个有界投影。显然

B_L 从 E_Λ 继承了谱投影的所有性质，除了一致有界性。也就是说， B_L 满足

$$B_L(b\cap d)=B_L(b)B_L(d), \tag{14}$$

$$B_L(b\cup d)=B_L(b)+B_L(d)-B_L(b\cap d), \tag{15}$$

对于 b， $d\in\mathcal{B}_b$。因此， B_L 的像是一个投影布尔代数，而 B_L 是从布尔代数 $\mathcal{B}_b$ 到其像上的同态。此外，若 $\{b_i, i\in\mathbb{N}\}$ 是一个两两不相交的有界博雷尔集族，且其并集为有界集，则

$$B_L\big(\cup_{i=1}^{\infty} b_i\big)f=\sum_{i=1}^{\infty} B_L(b_i)f,\quad f\in\mathcal{H}. \tag{16}$$

此关系意味着投影从上方和下方的连续性，也就是说，若 $\{b_i,\, i\in\mathbb{N}\}$ 是一个有界博雷尔集的递减序列，则

$$B_L\big(\cap_i b_i\big)f=\lim_{i\to\infty} B_L(b_i)f,\quad f\in\mathcal{H}, \tag{17}$$

并且，若 $\{b_i, i\in\mathbb{N}\}$ 是一个有界博雷尔集的递增序列，且其并集为有界集，则

$$B_L\big(\cup_i b_i\big)f=\lim_{i\to\infty} B_L(b_i)f,\quad f\in\mathcal{H}. \tag{18}$$

Stone公式的一个类似形式也可由 E_L推出：若 a， $b\in\mathbb{R}$，且$a<b$，则

$$\operatorname*{s-lim}_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b\Big(R_L(\lambda+\mathrm{i}\epsilon)-R_L(\lambda-\mathrm{i}\epsilon)\Big)\,d\lambda=\frac{1}{2}\Big(B_L\big([a,b]\big)+B_L\big((a,b)\big)\Big). \tag{19}$$

显然，投影约化 L，也就是说，对任意$b\in\mathcal{B}_b$,

$$B_L(b)R_L(z)f=R_L(z)B_L(b)f,\quad f\in\mathcal{H}, \tag{20}$$

并且，若 $f\in$属于 dom(L)，则 $B_L(b)f\in$属于 dom(L)，且

$$B_L(b)Lf=LB_L(b)f. \tag{21}$$

我们还有如下一个有用公式，它与方程 (11) 类似：

$$B_L(b)=(D_1+P_0)^{-1}D_2^{-1/2}\Lambda E_\Lambda(b)D_2^{-1/2}+P_0D_2^{1/2}E_\Lambda(b)D_2^{-1/2}. \tag{22}$$

由上述方程可知，$\mathrm{ran}\big(B_L(b)\big) \subset \mathrm{dom}(L)$，因为 $\mathrm{ran}\big(\Lambda E_\Lambda(b)\big) \subset \mathrm{dom}(\Lambda) \subset \mathrm{dom}(D_2^{1/2})$，且 $\mathrm{ran}(P_0) \subset \mathrm{dom}(L)$。

我们注意到以下性质，稍后在证明某些结果时将会用到：如果 b 是 $\mathbb{R}$的非空有界子集，那么与 b的博雷尔子集相关联的投影族是一致有界的，即存在一个常数 c，它可能依赖于 b，使得$\|B_L(e)\| \leq c$ 只要 e 是包含于 b中的博雷尔集。由方程 (22) 可知这一点，因为对于任意博雷尔集 $e \subseteq b$，都有 $\|\Lambda E_\Lambda(e)\| \leq \sup\{|z|, z \in b\}$ 。

显然， $\mathcal{B}_L$ 并不一定是有界同态，也就是说，不一定存在 $c > 0$ 使得对所有 $b \in \mathcal{B}_b$都有 $\|B_L(b)\| \leq c$ 。下文将证明， B_L 实际上是有界的，并且可以将其扩张为一个从 $\mathcal{B}$ 到包含于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$中的投影布尔代数的有界同态。为此，我们利用这样一个事实： L 和 L^* 是常微分算子，而它们的预解算子是积分算子，其核——格林函数——可以用标准解析方法加以研究。

5. L的格林函数

L 的格林函数由微分方程 $Lu = zu$的解构造而成，其中 $z \in \rho(L)$。因此，首先要分析这些方程的解。对于 $z \in \mathbb{C}$，四阶微分方程 $Lu = zu$ 等价于由四个一阶方程组成的系统

$$y' = (A + B)y, \tag{23}$$

其中 y： $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ 是一个向量值函数， A 是一个 4×4 常矩阵，而B ： $\mathbb{R} \to M_4(\mathbb{C})$是一个矩阵值函数。 A 和 B 的非零矩阵元仅有

$$\begin{gathered} A_{12} = A_{23} = A_{34} = 1, \quad A_{41} = z - h_{\mathrm{p}}, \quad A_{43} = -2h_{\mathrm{a}}, \\ B_{41} = q_2'' - (h_1 + q_1)(h_2 + q_2), \quad B_{42} = 2q_2', \quad B_{43} = h_1 + h_2 + q_1 + q_2. \end{gathered} \tag{24}$$

A 的特征多项式为 $p_{\mathrm{c}}(-\mathrm{i}\mu) - z$，其中

$$p_{\mathrm{c}}(\mu) = \mu^4 + 2h_{\mathrm{a}}\,\mu^2 + h_{\mathrm{p}}, \tag{25}$$

因此， A 的特征值为 $\mathrm{i}\mu_k$, $1 \leq k \leq 4$，其中 μ_k 是多项式 $p_{\mathrm{c}}(\mu) - z$的根。若 $z \notin \{h_{\mathrm{m}}, h_{\mathrm{p}}\}$，则这四个根都是单根。与特征值 $\mathrm{i}\mu_k$ 对应的 A 的特征向量为列向量 p_k

其第 j 行（$1 \le j \le 4$）中有 $(\mathrm{i}\mu_k)^{j-1}$。令 $\Pi(z)$ 为 4×4 矩阵，其第 k 列为 p_k，于是 $\Pi_{jk}(z) = (\mathrm{i}\mu_k)^{j-1}$。如果$A$ 的所有特征值互不相同，则 $\Pi(z)$ 是正则的。我们还引入 4×4 对角矩阵 $D(x,\ z)$，其矩阵元定义为 $D_{jk}(x,\ z) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)\delta_{jk}$，其中 $1 \le j,\ k \le 4$。请注意，根 μ_k 是 z 的函数。

e_i、$1 \le i \le n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基向量。对于 $v \in \mathbb{C}^n$ 中的向量以及 $M \in M_n(\mathbb{C})$ 中的矩阵，我们分别使用由 $|v| = \sum_i |e_i \cdot v|$ 和 $|M| = \sum_{ij} |M_{ij}|$ 给出的范数。分别用 $\mathbb{C}^+$ 和 $\mathbb{C}^-$ 表示 $\mathbb{C}$ 的开上半平面和开下半平面。下述定理为 $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 的情形提供了系统（23）的两个基本矩阵。

定理 3。存在两个矩阵值函数 Φ_+ 和 Φ_-，其定义域为$\mathbb{R}\times(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$，取值于 $M_4(\mathbb{C})$，它们表示为

$$\begin{aligned} \Phi_+(x,z) &= \Pi(z)\big(I_{\mathrm{d}} + \Theta_+(x,z)\big)D(x,z), \\ \Phi_-(x,z) &= \Pi(z)\big(I_{\mathrm{d}} + \Theta_-(x,z)\big)D(x,z), \end{aligned} \tag{26}$$

对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，它们具有以下性质：

1. 对固定的 z，$\Phi_+(\cdot,\ z)$ 和 $\Phi_-(\cdot,\ z)$ 是系统（23）的基本矩阵。*2.* 对固定的 x，$\Phi_+(x,\ \cdot)$ 和 $\Phi_-(x,\ \cdot)$ 是解析的。*3.* 对固定的 z，$|\Theta_+(x,\ z)|$ 和 $|\Theta_-(-x,\ z)|$ 当 $x \to \infty$ 时为 $o(1)$。*4.* 对固定的 $x \ge 0$，$|\Theta_+(x,\ z)|$ 和 $|\Theta_-(-x,\ z)|$ 对于 $|z| \to \infty$ 为 $O(|z|^{-1/4})$。*5.* 将 Φ_+ 和 Φ_- 限制在 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^\sigma$ 上，并令 $\sigma = \pm$，可以将其扩展为 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^\sigma$ 上的连续函数 $\Phi_+^{(\sigma)}$ 和 $\Phi_-^{(\sigma)}$。*6.* 对固定的 $\lambda \in \mathbb{R}$，函数 $\Phi_+^{(\sigma)}(\cdot,\ \lambda)$ 和 $\Phi_-^{(\sigma)}(\cdot,\ \lambda)$ 是系统（23）的解矩阵。*7.* 对固定的 $\lambda \in \mathbb{R}$，$|\Theta_+^{(\sigma)}(x,\ \lambda)|$ 和 $|\Theta_-^{(\sigma)}(-x,\ \lambda)|$ 当 $x \to \infty$ 时为 $o(1)$。*8.* 对固定的 $x \ge 0$，若 $\lambda \in \mathbb{R}$，$|\Theta_+^{(\sigma)}(x,\ \lambda)|$ 和 $|\Theta_-^{(\sigma)}(-x,\ \lambda)|$，则当 $\lambda \to \infty$ 时为 $O(\lambda^{-1/4})$。

证明。这里不给出该定理的证明。它只用到了标准论证方法，与定理 23 的论证方法类似，并且是对 Coddington 和 Levinson [3] 第 6 章定理 8.1 证明的改写。

□

特别值得关注的是 $Lu = \lambda u$ for $\lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \infty)$ 的解。在这种情况下，$p_{\mathrm{c}}(\mu) - \lambda$ 有四个根，其中两个为实根，两个为纯虚根，它们表示为

$\mu_1 = \mathrm{i}\theta$, $\mu_2 = \nu$, $\mu_3 = -\nu$, $\mu_4 = -\mathrm{i}\theta$，其中 $\theta > 0$ 和 $\nu \geq 0$ 是 $\lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \infty)$ 的函数，定义如下：

$$\theta(\lambda) = \Big(\sqrt{\lambda + h_{\mathrm{a}}^2 - h_{\mathrm{p}}} + h_{\mathrm{a}}\Big)^{1/2}, \quad \nu(\lambda) = \Big(\sqrt{\lambda + h_{\mathrm{a}}^2 - h_{\mathrm{p}}} - h_{\mathrm{a}}\Big)^{1/2}. \tag{27}$$

注意到，θ 和 ν 是非负递增函数，且 $\nu/\theta \leq 1$ 和$\theta \geq \theta_0 = \sqrt{2h_{\mathrm{a}}} > 0$。

我们需要求出 $Lu = \lambda u$ 的基本解组，使其满足定理 4 的估计式 (29)。为此，我们将区间 I 分成两个子区间：$(h_{\mathrm{p}},\ \lambda_s]$ 和 $(\lambda_s,\ \infty)$，其中 $\lambda_s > h_{\mathrm{p}}$ 充分大。

定理 4。设 $\lambda_s > h_{\mathrm{p}}$ 充分大。对于 $1 \leq k \leq 4$，存在函数 $\phi_k : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$ 和 $\chi_k : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$，使得：

1. 对固定的 $\lambda \in I$，$\{\phi_k(\cdot, \lambda)\ 1 \leq k \leq 4\}$ 和 $\{\chi_k(\cdot, \lambda)\ 1 \leq k \leq 4\}$ 是 $Lu = \lambda u$的基本解组。*2.* 对固定的 $x \in \mathbb{R}$，$\phi_k(x, \cdot)$和 $\chi_k(x, \cdot)$关于 $I \setminus \{\lambda_s\}$是解析的。*3.* 将这些函数分别限制在 $\mathbb{R} \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$ 和 $\mathbb{R} \times (\lambda_s, \infty)$上，所得函数均连续。*4.* 对每个 $x \in \mathbb{R}$，当 $\lambda \to \lambda_s^+$ 时，$\phi_k(x, \lambda)$和 $\chi_k(x, \lambda)$的极限存在，并给出 $Lu = \lambda_s u$的基本解组（如第 *1* 点所述）。*5.* 当 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in I$ 时，这些函数具有如下形式

$$\begin{aligned} \phi_k(x, \lambda) &= \exp(\mathrm{i}\mu_k x)\big(1 + r_k(x, \lambda)\big), \\ \chi_k(x, \lambda) &= \exp(\mathrm{i}\mu_k x)\big(1 + s_k(x, \lambda)\big), \end{aligned} \tag{28}$$

其中 r_k 和 s_k 满足界

$$\begin{aligned} |r_k(x, \lambda)| &\leq c\,\lambda^{-1/4}(1 + x)^{-1}, \quad x \geq 0, \\ |s_k(x, \lambda)| &\leq c\,\lambda^{-1/4}(1 - x)^{-1}, \quad x \leq 0, \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $c > 0$ 是一个常数。

证明。该定理的证明依赖于标准论证，与 Coddington 和 Levinson 第 3 章定理 8.1 中的论证类似 [3]。由于该定理是本文的关键所在，我们在附录 A 中给出证明。□

在本文余下部分中，函数 ϕ_k 和 χ_k, $1 \le k \le 4$，具有¯定理 4 的性质。存在一个函数 $C: I \to GL(4,\mathbb{C})$，有界且在 $I \setminus \{\lambda_s\}$ 中解析，使得

$$\chi_k(\cdot,\lambda) = \sum_{j=1}^{4} c_{jk}(\lambda)\,\phi_j(\cdot,\lambda), \quad 1 \le k \le 4, \quad \lambda \in \bar{I}, \tag{30}$$

其中 $c_{jk}(\lambda)$ 是矩阵元 $C(\lambda)$。对于 $\lambda \to \infty$，我们有估计$C(\lambda) = I_{\mathrm{d}} + O(1/\lambda^{1/4})$，这可由定理 4 的估计推出。

由于微分表达式 L^*u 与 Lu具有相同的结构，因此关于 $L^*u = \lambda u$的解也有类似于定理 4 的结论。也就是说，¯存在函数 ϕ_k^* 和 χ_k^*，$1 \le k \le 4$，其定义域为 $\mathbb{R} \times I$，使得对于¯的每个 $\lambda \in I$，$\{\phi_k^*(\cdot,\ \lambda)\ 1 \le k \le 4\}$ 和 $\{\chi_k^*(\cdot,\ \lambda)\ 1 \le k \le 4\}$ 都是 $L^*u = \lambda u$的基本解组。函数 ϕ_k^* 和 χ_k^* 分别具有定理 4 第 2—5 点中列出的 ϕ_k 和 χ_k的性质。定理 4 中与 r_k 和 s_k 相对应的函数，以及方程 (30) 中与 c_{jk} 相对应的函数，分别记为 r_k^*、s_k^*和 c_{jk}^*。

引理 5. 如果 $\lambda \in I$ 不是 L的特征值，那么 $Lu = \lambda u$ 的有界解所构成的线性空间维数为二，而 $L^*u = \lambda u$ 的有界解所构成的线性空间维数也为二。

证明。在本证明中，指标 l 和 k 取值为 $1 \le l \le 3$ 和 $2 \le k \le 4$。$Lu = \lambda u$ 的任意有界解都具有如下形式：$\phi = \sum_l \alpha_l \phi_l(\cdot,\ \lambda) = \sum_k \beta_k \chi_k(\cdot,\ \lambda)$，其中 α_l 和 β_k 是复数，但它们不一定相互独立，因为关系式 (30) 意味着 $\alpha_l = \sum_k c_{lk}\beta_k$ 和 $\sum_k c_{4k}\beta_k = 0$。除非 $c_{42} = c_{43} = c_{44} = 0$，对 β_k 取值的最后一个约束确定了由所有三元组 $(\beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$ 构成的线性空间中的一个二维线性子空间，因此 $Lu = \lambda u$ 的有界解所构成的线性空间维数为二。当 $c_{42} = c_{43} = c_{44} = 0$ 时，β_k 的取值不受约束，且 $Lu = \lambda u$ 的有界解所构成的线性空间维数为三。但此时 $\chi_4 = c_{41}\phi_1$，其中 $c_{41} \ne 0$，于是 χ_4 是 $Lu = \lambda u$的非平凡平方可积解，这意味着 λ 是 L的特征值，而这一可能性已被假设排除。关于$L^*u = \lambda u$ 的解的陈述，证明类似。

□

系统（23）的格林矩阵构造如下。对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，我们对 $p_{\mathrm{c}}(\mu) - z$ 的根排序，使得 $\mathrm{Im}\ \mu_1 \ge \mathrm{Im}\ \mu_2 > 0 > \mathrm{Im}\ \mu_3 \ge \mathrm{Im}\ \mu_4$。这一

排序决定了基本矩阵$\Phi_+(\cdot,\ z)$和 $\Phi_-(\cdot,\ z)$的列的顺序。对于 $x\in\mathbb{R}$ 和 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，我们定义矩阵

$$\Phi(x,z)=\Phi_+(x,z)P_+ + \Phi_-(x,z)P_-, \tag{31}$$

其中 $P_+=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 0,\ 0)$且 $P_-=I_\mathrm{d}-P_+$。对于所有 $x\in\mathbb{R}$，矩阵 $\Phi(x,\ z)$都是正则的，其行列式 $W(z)$与 x无关。对于 $x,\ \tau\in\mathbb{R}$和 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，系统（23）的格林矩阵为

$$K(x,\tau,z)=\begin{cases}\Phi_+(x,z)P_+\Phi^{-1}(\tau,z), & x\geq\tau,\\ -\Phi_-(x,z)P_-\Phi^{-1}(\tau,z), & x<\tau,\end{cases} \tag{32}$$

并且满足 $|K(x,\ \tau,\ z)|\leq k\exp(-\delta|x-\tau|)$，其中 $x,\ \tau\in\mathbb{R}$；其中 $k>0$ 和$\delta>0$ 依赖于 z，但不依赖于 x 或 τ[9]。L 的格林函数由系统（23）的格林矩阵得到，为 $G(x,\ \tau,\ z)=K_{14}(x,\ \tau,\ z)$。

Φ_+ 和 Φ_- 的性质（定理 3）意味着，在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$中定义的函数 W 是解析的，并且可从 $\mathbb{C}$的上、下开半平面连续延拓至实轴。这些连续延拓在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 W_+ 和 W_-，其定义为

$$W_\pm(\lambda)=\lim_{\epsilon\to0^+}W(\lambda\pm\mathrm{i}\epsilon),\quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{33}$$

Φ_+和 Φ_- 的性质还保证，当 $\lambda\in\mathbb{R}$ 时，极限

$$G_+(x,\tau,\lambda)=\lim_{\epsilon\to0^+}G(x,\tau,\lambda+\mathrm{i}\epsilon),\quad G_-(x,\tau,\lambda)=\lim_{\epsilon\to0^+}G(x,\tau,\lambda-\mathrm{i}\epsilon), \tag{34}$$

分别在 $W_+(\lambda)\neq0$ 和 $W_-(\lambda)\neq0$时存在。

令 N_+ 和 N_- 分别为 W_+ 和 W_-的零点集，并且$N=N_+\cup N_-$。由于当 $|z|\to\infty$时，$W(z)=1+o(1)$，N_+、N_-和 N是复数域中的有界闭无处稠密子集，并且包含于 L的谱中。对于 $n\in\mathbb{N}$，定义集合

$$M_n=\left\{\lambda\in I\,\middle|\,|W_+(\lambda)|>1/(2n),|W_-(\lambda)|>1/(2n)\right\}, \tag{35}$$

以及 $N_n=\sigma(L)\setminus M_n$，使得 $\sigma(L)=M_n\cup N_n$。注意，$\overline{M_n}$是开集且无界，而 N_n 是闭集且有界，并且 $M_n\subseteq M_{n+1}$ 和$N_{n+1}\subseteq N_n$。显然，$\cap_nN_n=N$。我们定义 $M=\cup_nM_n$，于是有$M\cap N=\emptyset$ 和 $M\cup N=\sigma(L)$。我们取足够大的 λ_s（定理 4），使得对所有 $n\in\mathbb{N}$，$[\lambda_s,\infty)\subseteq M_n$。

表达式 $G_+(x,\tau,\lambda) - G_-(x,\tau,\lambda)$，其中 x、 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in M$，定义了 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times M$ 上的一个连续函数，在每个子集 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times M_n$上有界，且$n \in \mathbb{N}$。对于固定的 τ和 λ，函数 $G_+(\cdot,\tau,\lambda) - G_-(\cdot,\tau,\lambda)$是 $Lu = \lambda u$的一个有界解；对于固定的 x和 λ，函数 $G_+(x,\cdot,\lambda)-G_-(x,\cdot,\lambda)$是 $L^*u = \lambda u$的一个有界解。因此，存在连续函数φ_j：$\mathbb{R}\times M \to \mathbb{C}$ 和 φ_j^*：$\mathbb{R}\times M \to \mathbb{C}$, $(j = 1, 2)$，它们在每个子集$\mathbb{R}\times M_n$ $(n \in \mathbb{N})$上有界，使得对于每个固定的 $\lambda \in M$， $\varphi_1(\cdot,\lambda)$和 $\varphi_2(\cdot,\lambda)$是 $Lu = \lambda u$的两个线性无关的有界解，而 $\varphi_1^*(\cdot,\lambda)$和$\varphi_2^*(\cdot,\lambda)$是 $L^*u = \lambda u$的两个有界解，并且

$$G_+(x,\tau,\lambda) - G_-(x,\tau,\lambda) = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(x,\lambda)\,\overline{\varphi_j^*(\tau,\lambda)}. \tag{36}$$

渐近分析表明 [9] 对于固定的 x 、 τ 和 $\lambda \to \infty$

$$G_+(x,\tau,\lambda) - G_-(x,\tau,\lambda) = \frac{2\mathrm{i}\cos\big(\nu(\lambda)(x-\tau)\big)}{p_{\mathrm{c}}'\big(\nu(\lambda)\big)}\Big(1 + o(1)\Big), \tag{37}$$

其中 $\nu(\lambda)$由方程 (27) 中的第二个方程给出。于是，我们可以选取函数 φ_j，使得对于 $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_j(x,\lambda)| \le \frac{c_n}{\lambda^{3/8}}, \quad |\varphi_j^*(x,\lambda)| \le \frac{c_n}{\lambda^{3/8}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in M_n, \tag{38}$$

其中序列 c_n 可能无界。

引理 6. 对于 $1 \le j \le 2$、 $1 \le l \le 3$和 $2 \le k \le 4$，存在函数α_{jl}、 β_{jk}、 α_{jl}^*、 β_{jk}^*，其定义域为 M，在 $M \setminus \{\lambda_s\}$上连续，并且在每个子集$M_n$上有界，且满足 $n \in \mathbb{N}$，使得对于每个$\overline{x} \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in M$，

$$\varphi_j\big(x,\lambda\big) = \sum_{l=1}^{3}\alpha_{jl}(\lambda)\phi_l\big(x,\lambda\big) = \sum_{k=2}^{4}\beta_{jk}(\lambda)\chi_k\big(x,\lambda\big), \tag{39}$$

$$\varphi_j^*\big(x,\lambda\big) = \sum_{l=1}^{3}\alpha_{jl}^*(\lambda)\phi_l^*\big(x,\lambda\big) = \sum_{k=2}^{4}\beta_{jk}^*(\lambda)\chi_k^*\big(x,\lambda\big). \tag{40}$$

此外，存在 $c > 0$，使得对于每个 $\lambda \ge \lambda_s$，

$$\lambda^{p_l}|\alpha_{jl}(\lambda)| \le c, \ \ \lambda^{p_k}|\beta_{jk}(\lambda)| \le c, \ \ \lambda^{p_l}|\alpha_{jl}^*(\lambda)| \le c, \ \ \lambda^{p_k}|\beta_{jk}^*(\lambda)| \le c, \tag{41}$$

其中 $p_i = 5/8$ 当 $i = 1$ 时，4；而 $p_i = 3/8$ 当 $i = 2$ 时，3。

证明。在此证明中，指标取值为 $1 \le j \le 2$、$1 \le l \le 3$ 和 $2 \le k \le 4$。对于 $\lambda \in M$，$\varphi_j(\cdot, \lambda)$ 是 $\phi_m(\cdot, \lambda)$ 的唯一线性组合，其中 $1 \le m \le 4$。对于每个 $\lambda \in M$，$\varphi_j(\cdot, \lambda)$ 的有界性意味着 $\phi_4(\cdot, \lambda)$ 的系数必须为零。此线性组合定义了函数 α_{jl}。函数 φ_j、ϕ_l 在每个子集 $\mathbb{R}^+ \times \overline{(M_n \setminus \{\lambda_s\})}$ 上连续且有界。根据附录 B 的引理4和引理25，函数 α_{jl} 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都在 $M_n \setminus \{\lambda_s\}$ 上连续。由于 $M_n \subset M_{n+1}$，φ_j 在 $\mathbb{R} \times M_n$ 上的限制连续且有界。根据引理4，ϕ_l 在 $\mathbb{R}^+ \times \big(M_n \cap [h_{\mathrm{p}}, h_s]\big)$ 上的限制连续且有界，而 ϕ_l 在 $\mathbb{R}^+ \times \big(M_n \cap (h_s, \infty)\big)$ 上的限制可延拓为 $\mathbb{R}^+ \times \big(M_n \cap [h_s, \overline{\infty})\big)$ 上的连续有界函数。于是，由引理 25 可知，函数 α_{jl} 在 M_n 的每个有界子集上都有界。为证明它们在 $\overline{M_n}$ 上有界，取足够大的 $\lambda \in M_n$，并考虑正数列 $\overline{x_m = 2\pi m/\nu(\lambda)}$、$y_m = x_m + \pi/\big(2\nu(\lambda)\big)$、$m \in \mathbb{N}$。由序列 $\varphi_j(x_m, \lambda)$ 和 $\varphi_j(y_m, \lambda)$ 的有界性，容易得到 α_{j2} 和 α_{j3} 在 M_n 上的限制是有界函数。接着，由 $\varphi_j(0, \lambda)$ 的有界性以及估计式（29），可知 α_{j1} 在 M_n 上也有界。证明 β_{jk}、α_{jl}^* 和 β_{jk}^* 的连续性与有界性的方法类似。

估计式 (38) 表明，对于 $\lambda \to \infty$，that $\alpha_{j2}(\lambda)$、$\alpha_{j3}(\lambda)$、$\beta_{j2}(\lambda)$ 和 $\beta_{j3}(\lambda)$ 都是 $O\big(1/\lambda^{3/8}\big)$。由关系式 $\alpha_{jl}(\lambda) = \sum_k c_{lk}(\lambda)\beta_{jk}(\lambda)$ 和 $\sum_k c_{4k}(\lambda)\beta_{jk}(\lambda) = 0$，以及渐近关系 $c_{im}(\lambda) = \delta_{im} + O(1/\lambda^{1/4}), 1 \le i, m \le 4$，可知 $\alpha_{j1}(\lambda)$ 和 $\beta_{j4}(\lambda)$ 均为 $O(1/\lambda^{5/8})$。考虑到 α_{jl} 和 β_{jk} 在每个集合 M_n 上的有界性，即可得到估计式 (41)。α_{jl}^* 和 β_{jk}^* 的估计可用类似方法证明。 □

6. 谱展开

对于 $z \in \rho(L)$，预解算子 $R_L(z)$ 是一个积分算子，其核为格林函数 $G(x, \tau, z)$。我们用以下标准方法得到格林函数的积分公式。设 λ_0 为一个实数，使得 (λ_0, ∞) 包含 L 的谱以及点 h_{m}；对于每个 $\epsilon > 0$，令 C_ϵ 为复平面上与 (λ_0, ∞) 的距离为 ϵ 的点所构成的曲线，并取顺时针方向。该曲线将复平面分成两个互不相交的子集，其中一个包含 L 的谱。固定 x 和 τ 后，函数 $G(x, \tau, \cdot)$ 在不包含 L 的谱的子集中解析。根据 $G(x, \tau, \xi)$ 在较大

$|\xi|$ 在不包含 L 的谱的子集中解析，结合柯西定理可得：对于足够小的 $z \notin (\lambda_0, \infty)$ 和 ϵ，

$$G(x,\tau,z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_\epsilon} \frac{G(x,\tau,\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{42}$$

我们将 C_ϵ 分成三部分，如下所示。取 $\eta > 0$。第一部分 S_ϵ是满足 $\mathrm{Re}\,\xi < \lambda_0$的点集 $\xi \in C_\epsilon$。第二部分由满足 $\lambda_0 \le \mathrm{Re}\,\xi \le h_\mathrm{p} + \eta$的点 $\xi \in C_\epsilon$ 组成，第三部分则由实部大于 $h_\mathrm{p} + \eta$的 C_ϵ 中的点构成。于是，我们有

$$\begin{aligned} G(x,\tau,z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_\epsilon} \frac{G(x,\tau,\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\lambda_0}^{h_\mathrm{p}+\eta} F_\epsilon(x,\tau,z,\lambda) d\lambda \\ + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{h_\mathrm{p}+\eta}^{\infty} F_\epsilon(x,\tau,z,\lambda) d\lambda, \end{aligned} \tag{43}$$

其中

$$F_\epsilon(x,\tau,z,\lambda) = \frac{G(x,\tau,\lambda + \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda + \mathrm{i}\epsilon - z} - \frac{G(x,\tau,\lambda - \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda - \mathrm{i}\epsilon - z}. \tag{44}$$

下面的引理用于证明定理 9 的一部分。

引理 7. 对于每个 a、$b \in \mathbb{R}$，满足 $a < b$，且 $z \in \rho(L) \setminus [a,b]$，我们有

$$\begin{aligned} &\operatorname*{s-lim}_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left(\frac{R_L(\lambda + \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda + \mathrm{i}\epsilon - z} - \frac{R_L(\lambda - \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda - \mathrm{i}\epsilon - z} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} R_L(z) \Big(B_L\big((a,b)\big) + B_L\big([a,b]\big) \Big). \end{aligned} \tag{45}$$

证明. 利用方程 (11)，我们可以将方程左端改写为当 $\epsilon \to 0^+$ 时的强极限 (45)

$$\begin{aligned} (D_1 + P_0)^{-1} D_2^{-1/2} \big(A_\epsilon(z) + z B_\epsilon(z) \big) D_2^{-1/2} + P_0 D_2^{1/2} B_\epsilon(z) D_2^{-1/2} + \\ h_\epsilon(z) (D_1 + P_0)^{-1} {D_2}^{-1}, \end{aligned} \tag{46}$$

其中

$$A_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \Big(R_\Lambda(\lambda + \mathrm{i}\epsilon) - R_\Lambda(\lambda - \mathrm{i}\epsilon) \Big) d\lambda, \tag{47}$$

$$B_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left(\frac{R_\Lambda(\lambda + \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda + \mathrm{i}\epsilon - z} - \frac{R_\Lambda(\lambda - \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda - \mathrm{i}\epsilon - z} \right) d\lambda, \tag{48}$$

$$h_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left(\frac{1}{\lambda + \mathrm{i}\epsilon - z} - \frac{1}{\lambda - \mathrm{i}\epsilon - z} \right) d\lambda. \tag{49}$$

显然， $h_\epsilon(z)$ 在 $\epsilon \to 0^+$ 时趋于零，因为 $z \notin [a,b]$。 $A_\epsilon(z)$ 的强极限由Stone公式 (19) 的类似形式给出。为求得 $B_\epsilon(z)$ 的表达式，我们利用自伴算子 Λ 的运算演算。在 $[a,b]\times\mathbb{R}$ 上，我们定义有界博雷尔函数 f_ϵ 如下:

$$f_\epsilon(\lambda,\xi)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left(\frac{1}{(\lambda+\mathrm{i}\epsilon-z)(\xi-\lambda-\mathrm{i}\epsilon)}-\frac{1}{(\lambda-\mathrm{i}\epsilon-z)(\xi-\lambda+\mathrm{i}\epsilon)}\right), \quad (50)$$

对于 $\lambda\in[a,b]$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$。由 f_ϵ，我们在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 g_ϵ：

$$g_\epsilon(\xi)=\int_a^b f_\epsilon(\lambda,\xi)\,d\lambda, \quad \xi\in\mathbb{R}. \quad (51)$$

于是，根据 Teschl [16] 的引理4.1， $B_\epsilon(z) = g_\epsilon(\Lambda)$。定义$g_\epsilon(\xi)$的积分可以用初等方法求出，很容易看出，当 $z\neq a,\ b$ 且 $\epsilon>0$ 充分小时， g_ϵ关于 ϵ 一致有界。对于$z\notin[a,b]$，我们得到

$$g(\xi)=\lim_{\epsilon\to0^+} g_\epsilon(\xi)=\frac{1}{2}\Big(\chi_{(a,b)}(\xi)+\chi_{[a,b]}(\xi)\Big)\frac{1}{\xi-z}, \quad \xi\in\mathbb{R}, \quad (52)$$

其中， χ_G 是集合 G的示性函数。关于 Λ 的运算演算（Teschl [16] 的引理4.2和定理 3.1）给出

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{\epsilon\to0^+} B_\epsilon(z)=\operatorname*{s\text{-}lim}_{\epsilon\to0^+} g_\epsilon(\Lambda)=g(\Lambda)=R_\Lambda(z)\frac{1}{2}\Big(E_\Lambda\big((a,b)\big)+E_\Lambda\big([a,b]\big)\Big). \quad (53)$$

于是，方程（46）的左端等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(D_1+P_0)^{-1}D_2^{-1/2}\big(I_{\mathrm{d}}+zR_\Lambda(z)\big)\Big(E_\Lambda\big((a,b)\big)+E_\Lambda\big([a,b]\big)\Big)D_2^{-1/2}+\\ +\frac{1}{2}P_0D_2^{1/2}R_\Lambda(z)\Big(E_\Lambda\big((a,b)\big)+E_\Lambda\big([a,b]\big)\Big)D_2^{-1/2},\end{aligned} \quad (54)$$

利用 $I_{\mathrm{d}}+zR_\Lambda(z) = \Lambda R_\Lambda(z)$、 Λ的定义以及对于 $f\in\in\mathrm{dom}(D_1)$，$(D_1+P_0)^{-1}D_1f = P_Rf$，可将其改写为

$$D_2^{1/2}R_\Lambda(z)\frac{1}{2}\Big(E_\Lambda\big((a,b)\big)+E_\Lambda\big([a,b]\big)\Big)D_2^{-1/2}. \quad (55)$$

引理的表述是通过在 $R_\Lambda(z)$ 与谱投影之间插入 $D_2^{-1/2}D_2^{1/2}$，由上述表达式得到的；这是允许的，因为 $E_\Lambda([a,b])$ 的值域包含于 $D_2^{1/2}$ 的定义域中。 □

对于 $f \in \mathcal{S}$，我们在 M 上定义函数 $T_j f$、$S_j f$、$j = 1$、2，如下：

$$T_j f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\overline{\varphi_j^*(\tau,\lambda)}\,d\tau, \quad S_j f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\overline{\varphi_j(\tau,\lambda)}\,d\tau, \tag{56}$$

对于 $\lambda \in M$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，函数 φ_j 和 φ_j^* 在 $\mathbb{R} \times M_n$ 上的限制都是连续且有界的，因此 $T_j f$ 和 $S_j f$ ($j = 1$，2) 在 M_n 上的限制是连续、有界、可积且平方可积的函数，因为对于 $\lambda \in M_n$，

$$\lambda\big|T_j f(\lambda)\big| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} Lf(x)\overline{\varphi_j^*(x,\lambda)}\,dx\right| \le \frac{c_n}{\lambda^{3/8}} \int_{\mathbb{R}} |Lf(x)|\,dx. \tag{57}$$

为推导上述不等式，我们使用分部积分；这是允许的，因为 $f \in \mathcal{S}$、估计式 (38)，以及当 $f \in \mathcal{S}$ 时 $Lf \in L^1(\mathbb{R})$ 这一事实。对于 $S_j f$，类似的性质可用同样的方法证明。

注释 8. φ_j 和 φ_j^* 在 $\mathbb{R} \times M_n$ 上的限制的界不一定关于 n 一致，因此 $T_j f$ 和 $S_j f$ 在 M 上可能无界（但它们是连续的）。因此，它们不一定属于 $L^2(M)$。

定理 9. 设 $n \in \mathbb{N}$。对于 $z \in \rho(L) \setminus (\lambda_0, \infty)$，对每个 $f \in \mathcal{S}$，并且对于 $x \in \mathbb{R}$，

$$R_L(z)f(x) = R_L(z)B_L(N_n)f(x) + \int_{M_n} \sum_{j=1}^{2} \frac{\varphi_j(x,\lambda)T_j f(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda, \tag{58}$$

$$R_{L^*}(z)f(x) = R_{L^*}(z)B_L^*(N_n)f(x) + \int_{M_n} \sum_{j=1}^{2} \frac{\varphi_j^*(x,\lambda)S_j f(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda. \tag{59}$$

证明。 我们证明关系式 (58)。关系式 (59) 的证明类似。取$f \in \mathcal{S}$，将方程 (43) 两边乘以 $f(\tau)$，并在 $\tau \in \mathbb{R}$ 上积分。因此得到 $R_L(z)f(x) = A_\epsilon f(x) + B_{\eta\epsilon} f(x) + C_{\eta\epsilon} f(x)$，其中该方程右端的每一项，都是方程 (43) 右端相应项对 $R_L(z)f(x)$ 的贡献。显然，$A_\epsilon f$ 在 $\epsilon \to 0^+$ 时趋于零，并且

$$B_{\eta\epsilon} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\lambda_0}^{h_{\mathrm{p}}+\eta} \left(\frac{R_L(\lambda + \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda + \mathrm{i}\epsilon - z} - \frac{R_L(\lambda - \mathrm{i}\epsilon)}{\lambda - \mathrm{i}\epsilon - z}\right) d\lambda\, f. \tag{60}$$

应用引理 7，可得当 $\epsilon \to 0^+$ 且 $\eta \to 0^+$ 时， $B_{\eta\epsilon} f$ 的极限为$R_L(z)$ $B_L\big([\lambda_0, h_{\mathrm{p}}]\big) f$。

为得到 $C_{\eta\epsilon} f$，我们定义 $M_{n\eta} = M_n \cap I_\eta$ 和 $N_{n\eta} = N_n \cap I_\eta$，其中 $I_\eta = (h_{\mathrm{p}} + \eta,\ \infty)$。注意，当 $\eta > \eta'$ 时， $M_{n\eta} \subseteq M_{n\eta'}$ 和 $N_{n\eta} \subseteq N_{n\eta'}$，且 $\cup_{\eta>0} M_{n\eta} = M_n$ 和 $\cup_{\eta>0} N_{n\eta} = N_n \cap I$。定义 $C_{\eta\epsilon} f$ 的 I_η 上的积分等于 $N_{n\eta}$ 上的积分与 $M_{n\eta}$ 上的积分之和，因此我们有 $C_{\eta\epsilon} f = D_{\eta\epsilon} f + E_{\eta\epsilon} f$，其中 $D_{\eta\epsilon} f$ 和 $E_{\eta\epsilon} f$ 分别是 $N_{n\eta}$ 和 $M_{n\eta}$ 上积分的贡献。

我们先研究 $D_{\eta\epsilon} f$，它由一个类似于方程 (60) 右端的表达式给出，只是积分区间为 $N_{n\eta}$，而非（λ_0， $h_{\mathrm{p}} + \eta$）。引入有界区间 $I_{s\eta} = (h_{\mathrm{p}} + \eta, \lambda_s)$。显然，$N_{n\eta} = N_n \cap I_{s\eta}$，因此 $N_{n\eta}$ 上的积分等于 $I_{s\eta}$ 上的积分减去 $I_{s\eta} \cap N_n^c$ 上的积分。由于 N_n^c 是开集，它等于至多可数个互不相交的开区间之并，即 I_k，其中 k 属于 $\mathbb{N}$ 的某个子集 K。因此， $I_{s\eta} \cap N_n^c = \cup_k (I_{s\eta} \cap I_k)$。于是， $D_{\eta\epsilon} f$ 可表示为 $I_{s\eta}$ 上的积分减去 $I_{s\eta} \cap I_k$ 上积分之和。对这些积分逐一应用引理 7，可得当 $\epsilon \to 0^+$ 趋于.....时， $D_{\eta\epsilon} f$ 的极限为

$$\frac{1}{2} R_L(z) \Big(B_L(I_{s\eta}) + B_L(\overline{I_{s\eta}}) - \sum_{k \in K} \Big(B_L\big(I_{s\eta} \cap I_k\big) + B_L\big(\overline{I_{s\eta} \cap I_k}\big) \Big) \Big) f. \quad (61)$$

显然， $\underline{\sigma_p}(L) \cap I$ 包含在 N_n的内部，因此对所有 $k \in K$，都有$\underline{\sigma_p}(L)$ $\cap I_k = \emptyset$。这意味着 $B_L\big(I_{s\eta} \cap I_k\big) = B_L(I_{s\eta} \cap I_k)$，进而由表达式 (61) 得到

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0^+} D_{\eta\epsilon} f &= \frac{1}{2} R_L(z) \Big(B_L(I_{s\eta} \cap N_n) + B_L(\overline{I_{s\eta}} \cap N_n) \Big) f \\ &= \frac{1}{2} R_L(z) \Big(B_L(I_{s\eta}) + B_L(\overline{I_{s\eta}}) \Big) B_L(N_n) f. \end{aligned} \quad (62)$$

上述表达式的极限 $\eta \to 0^+$ 等于 $R_L(z) B_L(I \cap N_n) f$。由于谱投影 $B_L(b)$支撑在 L的谱上，且 $\sigma(L) \cap [\lambda_0, h_{\mathrm{p}}] \subset N_n \cap [\lambda_0, h_{\mathrm{p}}]$，我们得到 $B_{\eta\epsilon} f + D_{\eta\epsilon} f$ 的 $\epsilon \to 0^+$和$\eta \to 0^+$ 极限等于 $R_L(z) B_L(N_n)$，这正是方程 (58) 右端的第一项。

现在仍需分析 $E_{\eta\epsilon} f$ 的贡献，其表达式为

$$E_{\eta\epsilon} f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \int_{M_{n\eta}} F_\epsilon(x, \tau, z, \lambda) f(\tau)\, d\lambda\, d\tau. \quad (63)$$

根据富比尼定理，右侧的累次积分等于在 $M_{n\eta}\times\mathbb{R}$ 上的一个积分，其被积函数 $F_\epsilon(x,\ \tau,\ z,\ \lambda)f(\tau)$ 被函数 $g(\lambda,\ z)|f(\tau)|$ 所界定；该函数与 ϵ 无关，且在 $M_{n\eta}\times\mathbb{R}$ 上可积。因此，可以将极限 $\epsilon\to 0^+$ 与积分互换，从而得到 $M_{n\eta}\times\mathbb{R}$ 上函数的积分

$$F(\lambda,\tau)=\lim_{\epsilon\to 0^+}F_\epsilon(x,\tau,z,\lambda)f(\tau)=\frac{\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(x,\lambda)\overline{\varphi_j^*(\tau,\lambda)}}{\lambda-z}f(\tau),\tag{64}$$

对于 $(\lambda,\ \tau)\in M_{n\eta}\times\mathbb{R}$。在上述表达式的第二个等式中，我们使用了方程 (36)。现在可以再次使用富比尼定理，先对变量 τ 积分。随后取极限 $\eta\to 0^+$，即可得到方程 (58)右端的第二项。

□

推论10。对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及每个 $f\in\mathcal{S}$，我们有两个谱展开：

$$f(x)=B_L(N_n)f(x)+\int_{M_n}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(x,\lambda)T_jf(\lambda)\,d\lambda,,\tag{65}$$

$$f(x)=B_L^*(N_n)f(x)+\int_{M_n}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^*(x,\lambda)S_jf(\lambda)\,d\lambda.\tag{66}$$

此外，对于 f、$g\in\mathcal{S}$，以下帕塞瓦尔等式的类似形式成立：

$$(f,g)=\big(B_L(N_n)f,g\big)+\int_{M_n}\sum_{j=1}^{2}T_jf(\lambda)\overline{S_jg(\lambda)}\,d\lambda,\tag{67}$$

$$(f,g)=\big(B_L^*(N_n)f,g\big)+\int_{M_n}\sum_{j=1}^{2}S_jf(\lambda)\overline{T_jg(\lambda)}\,d\lambda.\tag{68}$$

证明。将 $L-zI_{\mathrm{d}}$ 应用于方程 (58)，并将 L^*-zI_{d} 应用于方程 (59)。注意，对于$j=1,\ 2,\ T_jf,\ S_jf\in L^1(M_n)$，以及 φ_j、φ_j^*，由于它们关于第一变量直至三阶的导数都是 $\mathbb{R}\times M_n$ 上的有界函数，因此可以在积分号下求四次导数。分别将方程 (65) 和 (66) 乘以 $g(x)$，并对 $\mathbb{R}$ 上的 x 积分，即得等式 (67) 和 (68)；在第二项中交换积分次序显然是允许的。

□

7. 有界线性映射 U_n 和 V_n

引入希尔伯特空间 $\mathcal{J} = L^2(M) \oplus L^2(M)$，以及投影 P_j：$\mathcal{J} \to L^2(M)$，$j = 1, 2$，它们分别投影到 $\mathcal{J}$ 的两个分量上。f，$g \in \mathcal{J}$ 的内积定义为

$$\big(f, g\big)_{\mathcal{J}} = \int_M \sum_{j=1}^{2} P_j f(\lambda)\, \overline{P_j g(\lambda)}\; d\lambda, \tag{69}$$

$f \in \mathcal{J}$的范数定义为$\|f\|_{\mathcal{J}}^2 = (f,\ f)_{\mathcal{J}}$。

令 χ_b：$M \to \mathbb{R}$ 为集合 $b \subseteq M$的示性函数。对于任意博雷尔集 $b \subseteq \mathbb{R}$，我们在 $\mathcal{J}$中定义正交投影 $\hat{\chi}(b)$ 为 $P_j\hat{\chi}(b)f = \chi_{M\cap b}P_j f$，其中 $j = 1$、2 和 $f \in \mathcal{J}$。对于 $n \in \mathbb{N}$和 $b \in \mathcal{B}$，我们还在 $\mathcal{J}$中定义正交投影 $\hat{\chi}_n(b) = \hat{\chi}(M_n)\hat{\chi}(b)$。注意，当 $n \le m$ 时，$\hat{\chi}_n(b) \le \hat{\chi}_m(b)$，且 $\text{s-lim}_n\, \hat{\chi}_n(b) = \hat{\chi}(b)$。引入记号$\mathcal{J}_n = \text{ran}\big(\hat{\chi}_n(\mathbb{R})\big)$很方便。最后，我们定义 $\mathcal{J}$中的自伴线性算子 Q 如下：

$$\begin{aligned} \text{dom}(Q) &= \left\{ f \in \mathcal{J},\ \int_M \lambda^2 \sum_{j=1}^{2} \big|P_j f(\lambda)\big|^2 d\lambda < \infty \right\}, \\ P_j Q f(\lambda) &= \lambda P_j f(\lambda), \quad j = 1, 2, \quad \lambda \in M, \quad f \in \text{dom}(Q). \end{aligned} \tag{70}$$

显然，$\sigma(Q) = M$ and $\hat{\chi}$ 是 Q的单位分解。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 Q_n 表示 Q 在 $\mathcal{J}_n \cap \text{dom}(Q)$上的限制。显然，$\sigma(Q_n) = M_n$。

对于 $f \in \mathcal{S}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，由 $\chi_{M_n}T_j f$ 和 $\chi_{M_n}S_j f (j = 1, 2)$给出的定义在 M 上的函数属于 $L^2(M)$。因此，这些函数各自定义了从 $\mathcal{S}$ 到 $L^2(M)$的线性变换。我们将证明这些变换是有界的，因此可以从 $\mathcal{S}$连续延拓到 $\mathcal{H}$。这一事实使我们能够定义下文定理 11 中从$\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{J}$ 的有界线性映射 U_n 和 V_n，这是本文的关键要点之一。

定理 11. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在两个有界线性映射 U_n：$\mathcal{H} \to \mathcal{J}$ 和 V_n：$\mathcal{H} \to \mathcal{J}$，使得对于任意 $f \in \mathcal{S}$

$$P_j U_n f = \chi_{M_n} T_j f, \quad P_j V_n f = \chi_{M_n} S_j f, \quad j = 1, 2. \tag{71}$$

证明。我们证明关于 V_n 的结论。关于 U_n 的结论证明类似。在证明过程中，我们使用指标 j、k、l 和 m，它们取值为

$1 \le j \le 2$、 $2 \le k \le 4$、 $1 \le l \le 3$ 和 $2 \le m \le 3$。我们用 $\|\cdot\|_{L^2_n}$ 表示 $L^2(M_n)$ 中的范数。

令 $f \in \mathcal{S}$。根据 $S_j f$ 的定义和引理 6、方程（39），我们有

$$S_j f = \sum_{k=2}^{4} \beta_{jk}\big(g_k + u_k\big) + \sum_{l=1}^{3} \alpha_{jl}\big(h_l + v_l\big), \tag{72}$$

其中，对于 $\lambda \in M$,

$$g_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\overline{\exp(\mathrm{i}\mu_k x)}dx, \;\; u_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\overline{\exp(\mathrm{i}\mu_k x)\,s_k(x,\lambda)}\,dx, \tag{73}$$

and,

$$h_l(\lambda) = \int_{0}^{\infty} f(x)\,\overline{\exp(\mathrm{i}\mu_l x)}dx, \quad v_l(\lambda) = \int_{0}^{\infty} f(x)\,\overline{\exp(\mathrm{i}\mu_l x)\,r_l(x,\lambda)}\,dx. \tag{74}$$

回忆 $\mu_1 = -\mu_4 = \mathrm{i}\theta$ 和 $\mu_2 = -\mu_3 = \nu$，其中 θ 和 ν 是方程（27）给出的定义在 $[h_{\mathrm{p}}, \infty$ 上的函数（在前述表达式中关于 λ ）。对于固定的 $\lambda \in M$，函数 $\exp(\mathrm{i}\mu_l x) r_l(x,\ \lambda)$ 在 x 上关于 $(0,\ \infty)$ 平方可积，而函数 $\exp(\mathrm{i}\mu_k x) s_k(x,\ \lambda)$ 在 x 上关于 $(-\infty,\ 0)$ 平方可积。施瓦茨不等式给出

$$|u_k(\lambda)| \le c\lambda^{-1/4}\|f\|, \quad |v_l(\lambda)| \le c\lambda^{-1/4}\|f\|, \quad \lambda \in M_n, \tag{75}$$

这里我们使用了定理 4 中关于 r_k 和 s_k 的界，必要时可取更大的 c_n。考虑到引理 6 中关于 β_{jk} 和 α_{jl} 的界，$\beta_{jk}u_k$ 和 $\alpha_{jl}v_l$ 在 M_n 上的限制是平方可积函数，并满足以下估计

$$\|\beta^*_{jk}u_k\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|, \quad \|\alpha^*_{jl}v_l\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|. \tag{76}$$

施瓦茨不等式还表明，$|g_4|$ 和 $|h_1|$ 均有界于 $(2\theta)^{-1/2}\|f\|$。关于 β_{j4} 和 α_{j1} 的界表明，$\beta_{j4}g_4$ 和 $\alpha_{j1}h_1$ 在 M_n 上的限制是平方可积函数，并满足以下估计

$$\|\beta_{j4}g_4\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|, \quad \|\alpha_{j1}h_1\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|. \tag{77}$$

为了分析 g_m 和 h_m（回想一下 $2 \le m \le 3$），我们将 $f = f_+ + f_-$拆分，其中 $f_+ = f(x)$ 当 $x \ge 0$ 时，以及 $f_+(x) = 0$ 当 $x < 0$时。于是 $g_m(\lambda) = \tilde{f}_-\big(\mu_m(\lambda)\big)$ 并且

$h_m(\lambda) = \tilde{f}_+\big(\mu_m(\lambda)\big)$，其中 $\tilde{f}_+$ 和 $\tilde{f}_-$ 分别是 f_+ 和f_-的傅里叶变换。对于将 $\alpha_{jm}h_m$ 限制到 M_n ，我们有：

$$\|\alpha_{jm}h_m\|_{L^2_n}^2 = \int_{M_n} \big|\alpha_{jm}(\lambda)\big|^2 \big|\tilde{f}_+\big(\mu_m(\lambda)\big)\big|^2 d\lambda. \tag{78}$$

进行变量替换 $\lambda = p_{\mathrm{c}}(\xi)$，得到

$$\|\alpha_{jm}h_m\|_{L^2_n}^2 = \int_{\widehat{M}_n} \big|\alpha_{jm}\big(p_{\mathrm{c}}(\xi)\big)\big|^2 \big|\tilde{f}_+\big((-1)^m\xi\big)\big|^2 p_{\mathrm{c}}'(\xi) d\xi, \tag{79}$$

其中， M_n 是 M_n 在 p_{c}的逆映射下的像。 α_{jm}上的界（引理 6）表明， $p_{\mathrm{c}}'(\xi)|\alpha_{jm}\big(p_{\mathrm{c}}(\xi)\big)|^2$ 在 $\widehat{M}_n$上有界，因此

$$\|\alpha_{jm}h_m\|_{L^2_n}^2 \le c_n \int_{\widehat{M}_n} \big|\tilde{f}_+\big((-1)^m\xi\big)\big|^2 d\xi \le c_n\|f_+\|^2 \le c_n\|f\|^2, \tag{80}$$

这里用到了真正的帕塞瓦尔等式。因此，我们得到估计 $\|\alpha_{jm}h_m\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|$。类似地，我们得到 $\|\beta_{jm}g_m\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|$。综合所有结果可知， S_jf 到 M_n的限制满足 $\|S_jf\|_{L^2_n} \le c_n\|f\|$。

因此，我们可以通过令 $P_jV_nf = \chi_{M_n}S_jf$ （ $f \in \mathcal{S}$时），定义有界线性变换 $V_n : \mathcal{H} \to \mathcal{J}$；上述证明的结果给出了界 $\|V_nf\|_{\mathcal{J}} \le c_n\|f\|$。由连续性可得 $\mathcal{H} \setminus \mathcal{S}$ 在 V_n 下的像。 □

帕塞瓦尔等式的类似形式，即方程 (67) 和 (68)，可通过连续性推广到任意两个函数 f， $g \in \mathcal{H}$，并可简洁地写成

$$(f,g) = \big(B_L(N_n)f, g\big) + \big(U_nf, V_ng\big)_{\mathcal{J}} = \big(B_L^*(N_n)f, g\big) + \big(V_nf, U_ng\big)_{\mathcal{J}}. \tag{81}$$

接下来的目标是证明 ran(U_n) 和 ran(V_n) 在 $\mathcal{J}_n$ 中稠密。这是一个直接推论，我们将在推论 16 中陈述；它源于引理 12、13、14 和 15 中汇集的技术结果。

引理 12. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 f_1、 $f_2 \in L^1(M_n) \cap L^2(M_n)$，并在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 g 和 h 如下

$$g(x) = \int_{M_n} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda) f_j(\lambda)\, d\lambda, \quad h(x) = \int_{M_n} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j^*(x,\lambda) f_j(\lambda)\, d\lambda, \tag{82}$$

对于 $x \in \mathbb{R}$。那么 $g, h \in \mathcal{H}$。

证明。由于 φ_j 和 φ_j^* 在 $\mathbb{R}\times M_n$ 上连续且有界，并且在 M_n 上可积，因此函数 g 和 h 在 $\mathbb{R}$ 上有良好定义（且连续）。我们证明 $g\in\mathcal{H}$。$h\in\mathcal{H}$ 的证明类似。

我们将 $g=g_+ + g_-$ 拆分，其中当 $x\geq 0$ 时，$g_+(x)=g(x)$；当 $x<0$ 时，$g_+(x)=0$。我们将证明 g_+，$g_-\in\mathcal{H}$。利用关于 φ_j 的方程（39），我们写成 $g_+=u_1+u_2+u_3$，其中，对于 $1\leq k\leq 3$，

$$u_k(x)=\int_{M_n}\exp(\mathrm{i}\mu_k x)\Big(1+r_k(x,\lambda)\Big)\sum_{j=1}^{2}\alpha_{jk}(\lambda)f_j(\lambda)\,d\lambda,\quad x\geq 0, \tag{83}$$

并且当 $x<0$ 时，$u_k(x)=0$。由引理 6，函数 α_{jk} 在 M_n 上有界。由于对所有 $\lambda\in M$，$\theta(\lambda)\geq\theta_0>0$，显然 $|u_1(x)|$ 由某个常数乘以 $\exp(-\theta_0|x|)$ 所界定，因此 $u_1\in\mathcal{H}$。为了分析 u_2，我们注意到它有两部分贡献：一部分涉及函数 r_2，另一部分则不涉及。根据 r_2 的界（定理 4），显然涉及 r_2 的贡献由某个常数乘以 $1/(1+|x|)$ 所界定，因此属于 $\mathcal{H}$。在积分中作变量替换 $\lambda=p_{\mathrm{c}}(\xi)$ 后，不涉及 r_2 的项对 u_2 的贡献为

$$\int_{\widehat{M}_n}\exp(\mathrm{i}\xi x)\sum_{j=1}^{2}\alpha_{j2}\big(p_{\mathrm{c}}(\xi)\big)f_j\big(p_{\mathrm{c}}(\xi)\big)p_{\mathrm{c}}'(\xi)\,d\xi,\quad x\geq 0, \tag{84}$$

其中，$\widehat{M}_n$ 是 M_n 在 p_{c} 的逆映射下的像。我们将在下文证明，上述积分是 $\mathbb{R}$ 上的一个平方可积函数的傅里叶变换，因此它属于 $\mathcal{H}$，这意味着 $u_2\in\mathcal{H}$。要看出（84）是 $\mathbb{R}$ 上的一个平方可积函数的傅里叶变换，请注意，对于 $j=1,2$，

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{M}_n}\big|\alpha_{j2}\big(p_{\mathrm{c}}(\xi)\big)f_j\big(p_{\mathrm{c}}(\xi)\big)\big|^2 p_{\mathrm{c}}'^2(\xi)\,d\xi&=\int_{M_n}p_{\mathrm{c}}'\big(\nu(\lambda)\big)\big|\alpha_{j2}(\lambda)\big|^2\big|f_j(\lambda)\big|^2\,d\lambda\\&\leq c\int_{M_n}\big|f_j(\lambda)\big|^2\,d\lambda<\infty,\end{aligned} \tag{85}$$

这里我们用到了界 (41) 蕴含 $p_{\mathrm{c}}'(\nu)|\alpha_{jk}|^2$ 在 M_n 上有界。证明 $u_3\in\mathcal{H}$ 的过程类似。因此，$g_+\in\mathcal{H}$。同理，我们可以证明 $g_-\in\mathcal{H}$，从而得到 $g\in\mathcal{H}$。□

引理 13. 设 n、 f_1、 f_2、 g 和 h如引理 *12* 中所述，且 G 是 $\mathbb{R}$的一个有界开子集。那么：

$$B_L(N_n)g = 0, \quad B_L^*(N_n)h = 0, \tag{86}$$

$$B_L(G)g(x) = \int_{M_n \cap G} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda) f_j(\lambda)\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{87}$$

$$B_L^*(G)h(x) = \int_{M_n \cap G} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j^*(x,\lambda) f_j(\lambda)\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{88}$$

证明。 我们证明关于 g的陈述。关于 h 的陈述可类似证明。我们先证明方程（87），这依赖于 Stone公式（方程（19）的类似形式）。对于 $z \in \rho(L)$，显然$R_L(z)g$ 可通过在定义 g 的表达式中用 $f_j(\lambda)/(\lambda - z)$ 替换 $f_j(\lambda)$ 得到。因此，对于 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$，我们有

$$R_L(\xi + \mathrm{i}\epsilon)g(x) - R_L(\xi - \mathrm{i}\epsilon)g(x) = \int_{M_n} \frac{2\mathrm{i}\epsilon}{(\lambda - \xi)^2 + \epsilon^2} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda) f_j(\lambda)\, d\lambda. \tag{89}$$

设 (a, b) 是一个有界开区间。将上述方程代入方程（19），交换迭代积分的积分次序（显然可应用富比尼定理），并以标准方式整理所得表达式，我们得到

$$\frac{1}{2}\Big(B_L\big((a,b)\big) + B_L\big([a,b]\big)\Big)g(x) = \int_{M_n \cap (a,b)} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda) f_j(\lambda)\, d\lambda\, d\xi. \tag{90}$$

关系式（90）表明，若 λ_e 是 L 的特征值，则 $B_L\big(\{\lambda_e\}\big)g = 0$，因为 λ_e 包含于开区间 $(\alpha, \beta) \subset N_n$ 中，且随后

$$B_L\big(\{\lambda_e\}\big)g = B_L\big(\{\lambda_e\}\big)\frac{1}{2}\Big(B_L\big((\alpha,\beta)\big) + B_L\big([\alpha,\beta]\big)\Big)g = 0, \tag{91}$$

因为 $(\alpha, \beta) \cap M_n = \emptyset$。因此，方程（90）的左侧可替换为 $B_L\big((a, b)\big)g(x)$，于是当 G 为有界开区间时，方程（87）成立。由于任意有界开集都是至多可数个互不相交的有界开区间之并，故方程（87）对任意有界开集 G 都成立。

现在，由于 $N_n \subset \lambda_0\ \lambda_s$ $B_L\ N_n\ g = B_L(\ \lambda_0\ \lambda_s\ )g - B_L(\ \lambda_0\ \lambda_s \cap (,\ ),$ 我们有 ( ) $N_n^c)g$ 87 (,) (,) 。将方程 ( ) 应用于该方程的右侧，得到 $B_L(N_n)g = 0,$ 这就是方程（ 86 ）的第一个方程。 □

若 $f \in \mathcal{S}$ 和 G是 M_n的有界开子集，则由谱分解(65)和(66)、U_n 和 V_n的定义以及引理 13 可得

$$B_L(G)f(x) = \int_G \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda) P_j U_n f(\lambda)\, d\lambda, \tag{92}$$

$$B_L^*(G)f(x) = \int_G \sum_{j=1}^{2} \varphi_j^*(x,\lambda) P_j V_n f(\lambda)\, d\lambda. \tag{93}$$

引理14。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f_1, f_2 \in C(M_n) \cap L^1(M_n) \cap L^2(M_n)$，并按引理 *12* 定义$g$和 h。则 $U_n g = V_n h = f$，其中，对于 $j = 1,\ 2,\ P_j f(\lambda) = f_j(\lambda)$若 $\lambda \in M_n$且 $P_j f(\lambda) = 0$若 $\lambda \in M \setminus M_n$。

证明。 考虑一个序列 $g_m \in \mathcal{S}, m \in \mathbb{N},$ 它在 $\mathcal{H}$中收敛于 g。则$U_n g = \lim_m U_n g_m$。利用 g_m 的谱分解 (65)，并注意到 $B_L(N_n)g = 0$ （引理 12），可得 $\lim_m v_m = 0,$ 其中

$$v_m(x) = \int_{M_n} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda)\Big(f_j(\lambda) - P_j U_n g_m(\lambda)\Big)\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{94}$$

取一个有界区间 $(a,b) \subset M_n$。 $B_L\big((a,b)\big)$ 的连续性以及引理 12 表明

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda)\Big(f_j(\lambda) - P_j U_n g_m(\lambda)\Big)\, d\lambda = 0, \quad a.a.\ x \in \mathbb{R}. \tag{95}$$

由于对每个固定的 x ， 函数 $\varphi_j(x,\cdot)$ 在 (a,b) 上平方可积，因此 $U_n g_m$ 在 $L^2(M_n)$ 中收敛到 $U_n g$ ， 从而

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda)\Big(f_j(\lambda) - P_j U_n g(\lambda)\Big)\, d\lambda = 0, \quad a.a.\ x \in \mathbb{R}. \tag{96}$$

注意，由于 $P_j U_n g$ 平方可积，因此它在 (a,b) 上可积。因此，上述方程的左端定义了一个连续函数

x 的连续函数，它必须对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都为零，因为它在几乎处处 $x \in \mathbb{R}$为零。由于方程 (96) 对开集 M_n 中包含的每个有界区间都成立，因此对每个固定的 $x \in \mathbb{R}$，被积函数必须在 M_n 几乎处处为零:

$$\sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x,\lambda)\Big(f_j(\lambda) - P_j U_n g(\lambda)\Big) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a.a.\ \lambda \in M_n. \tag{97}$$

$\varphi_1(\cdot,\ \lambda)$ 和 $\varphi_2(\cdot,\ \lambda)$ 的线性无关性要求对几乎处处 $\lambda \in M_n$，$P_j U_n g(\lambda) = f_j(\lambda)$，也就是说，$U_n g = f$。

$U_n g = f$ 的证明基本相同，但要求 $\varphi_1^*(\cdot,\ \lambda)$ 和 $\varphi_2^*(\cdot,\ \lambda)$ 对几乎处处 $\lambda \in M_n$ 线性无关。这正是引理 15 的论断，其证明用到了本引理中已经证明的部分。

□

引理15。 函数 $\varphi_1^*(\cdot,\lambda)$ 和 $\varphi_2^*(\cdot,\lambda)$ 对几乎处处的 $\lambda \in M$线性无关。

证明。在本证明中，指标 j 取值为1和2。我们用反证法。若论断不成立，则存在定义在 M上的函数 c_j ，它们同时为零的集合至多是一个勒贝格测度为零的集合，并且满足对几乎处处的 $\lambda \in M$，$\sum_j c_j(\lambda)\varphi_j^*(\cdot,\lambda) = 0$。因此，对任意 $n \in \mathbb{N}$和任意 $h \in \mathcal{S}$，都有对几乎处处的 $\lambda \in M$，$\sum_j c_j(\lambda) P_j U_n h(\lambda) = 0$。取引理14中的函数$f_j$ ，于是存在一个函数序列 $U_n g_m$, $m \in \mathbb{N}$，其中 $g_m \in \mathcal{S}$，使得对几乎处处的 $\lambda \in M_N$，$P_j U_n g_m(\lambda) \to f_j(\lambda)$。我们有$\sum_j c_j(\lambda) P_j U_n g_m(\lambda) = 0$，因此对几乎处处的 $\lambda \in M_n$，$\sum_j c_j(\lambda) f_j(\lambda) = 0$。对于 M_n 上属于 $L^1(M_n) \cap L^2(M_n)$的所有连续函数 f_1 和 f_2 ，这一性质都必须成立；而这只有在 c_1 和 c_2 在 M_n上几乎处处为零时才有可能。由于 n 是任意的，c_1 和 c_2 确实在 M上几乎处处为零，这与我们的初始假设矛盾。因此，对几乎处处的 $\lambda \in M$，$\varphi_1^*(\cdot,\lambda)$和 $\varphi_2^*(\cdot,\lambda)$必定线性无关。

□

下面的推论是引理14的直接结果，因为$C(M_n) \cap L^1(M_n) \cap L^2(M_n)$在 $L^2(M_n)$中稠密。

推论 16. 值域(U_n) 和值域(V_n) 在 $\mathcal{J}_n$中稠密。

下一个定理汇集了 U_n 和 V_n 的一些重要性质，这些性质将在后文中用到。

定理 17。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，线性映射 U_n 和 V_n 满足：
1. $\ker(U_n) = \operatorname{ran}\big(B_L(N_n)\big)$ 和$\ker(V_n) = \operatorname{ran}\big(B_L^*(N_n)\big)$。2. $U_n R_L(z) = R_{Q_n}(z)U_n$ 和 $V_n R_{L^*}(z) = R_{Q_n}(z)V_n$ 对所有 $z \in \rho(L)$。3. $U_n L f = Q_n U_n f$ 若 $f \in \operatorname{dom}(L)$，且 $V_n L^* f = Q_n V_n f$ 若 $f \in \operatorname{dom}(L^*)$。

证明。第1点几乎可直接由帕塞瓦尔等式 (81) 的类似形式，以及 $\operatorname{ran}(V_n)$ 在 $\mathcal{J}_n$ 中的稠密性推出。为证明第2点的第一个关系，我们注意到，根据引理 9 的方程 (58)、方程 (20)、本引理的第1点以及引理14，该关系对 $f \in \mathcal{S}$ 成立。随后，由连续性可将该关系推广至 $\mathcal{H}$ 。第2点的第二个关系可用类似方法推出。第3点的第一个关系可由第2点轻易得到。 □

投影 $B_L(N_n)$和 $B_L^*(N_n)$将 $\mathcal{H}$ 分解为两个闭子空间的直和：

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran}\big(B_L(N_n)\big) \oplus \mathcal{U}_n = \operatorname{ran}\big(B_L^*(N_n)\big) \oplus \mathcal{V}_n, \tag{98}$$

这里引入记号 $\mathcal{U}_n = \ker\big(B_L(N_n)\big)$ 和 $\mathcal{V}_n = \ker\big(B_L^*(N_n)\big)$。令 $\mathbb{U}_n$ 为 U_n 在 $\mathcal{U}_n$ 上的限制， $\mathbb{V}_n$ 为 V_n 在 $\mathcal{V}_n$上的限制。

定理 18. 对每个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathbb{U}_n$ 都是从$\mathcal{U}_n$ 到 $\mathcal{J}_n$ 的连续线性双射，且其逆映射连续； $\mathbb{V}_n$ 是从 $\mathcal{V}_n$ 到 $\mathcal{J}_n$ 的连续线性双射，且其逆映射连续。

证明。 显然， $\mathbb{U}_n$ 是单射且有界，并且 $\operatorname{ran}(\mathbb{U}_n) = \operatorname{ran}(U_n)$。下面证明 $\mathbb{U}_n$ 的逆映射有界。若 $f \in \operatorname{ran}(U_n)$，则存在唯一的$g \in \mathcal{U}_n$使得 $U_n g = f$，且 $g = \mathbb{U}_n^{-1} f$。由于 $g \in \mathcal{U}_n$蕴含 $B_L(N_n)g = 0$，由帕塞瓦尔等式（81）得 $\|g\|^2 = (V_n g,\ U_n g)_{\mathcal{J}}$；又由于 V_n 有界，我们得到 $\|g\| \le \|V_n\|\|U_n g\|_{\mathcal{J}}$，即 $\|\mathbb{U}_n^{-1} f\| \le \|V_n\|\|f\|_{\mathcal{J}}$。由于 $\mathbb{U}_n$ 有有界逆，其值域是闭的，进而 $\operatorname{ran}(\mathbb{U}_n) = \mathcal{J}_n$，因为根据推论 16，$\operatorname{ran}(\mathbb{U}_n)$在 $\mathcal{J}_n$中稠密。这就证明了 $\mathbb{U}_n$ 是从 $\mathcal{U}_n$ 到 $\mathcal{J}_n$ 的有界双射，且具有有界逆。关于 $\mathbb{V}_n$ 的结论可类似证明。 □

定理 18 的一项重要推论在以下推论中得到强调。

推论 19. 值域(U_n) =值域(V_n) $= \mathcal{J}_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。

谱展开 (65) 和 (66) 对 $\mathcal{H}$ 的推广可以简洁地写为

$$I_{\mathrm{d}} = B_L(N_n) + \mathbb{U}_n^{-1} U_n = B_L^*(N_n) + \mathbb{V}_n^{-1} V_n. \tag{99}$$

8. L的恒等算子的谱分解

前几节的结果使我们能够证明， L 和 L^* 存在恒等算子的谱分解，并且 L 和 L^* 都是标量型谱算子。首先注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b \in \mathcal{B}$，线性算子 $\mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)U_n$ 和 $\mathbb{V}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)V_n$ 是 $\mathcal{H}$ 上的有界投影。由引理 13 可得

$$\mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)U_nf(x) = \int_{M_n\cap b}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(x,\lambda)P_jU_nf(\lambda)\,d\lambda, \tag{100}$$

$$\mathbb{V}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)V_nf(x) = \int_{M_n\cap b}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^*(x,\lambda)P_jV_nf(\lambda)\,d\lambda, \tag{101}$$

对任意 $f \in \mathcal{S}$ 和 $x \in \mathbb{R}$。

引理 20。 若 $n \in \mathbb{N}$、 $b_1 \in \mathcal{B}_b$和 $b_2 \in \mathcal{B}$，则

$$B_L(b_1)\mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_2)U_n = \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_1\cap b_2)U_n, \tag{102}$$

$$B_L^*(b_1)\mathbb{V}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_2)V_n = \mathbb{V}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_1\cap b_2)V_n. \tag{103}$$

证明。 我们只证明等式（102）。另一个等式的证明类似。若 b_1 是开集，则由方程（100）和引理 13 可知，等式（102）在 $\mathcal{S}$ 中成立，进而由连续性可知其在 $\mathcal{H}$ 中也成立。现在考虑一般的有界博雷尔集 b_1，并取一个有界开集 G_1，使得 $b_1 \subset G_1$。所有投影 $B_L(b)$（其中 b 是包含于 G_1中的博雷尔集）均一致有界：存在 $c>0$，使得 $\|B_L(b)\| < c$ （第 4 节）。令 μ_ℓ 为 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。存在一个开集 G_2，使得 $b_1 \subseteq G_2 \subset G_1$，且 $\mu_\ell(G_2\setminus b_1)$可任意小。令 $f \in \mathcal{H}$ 且 $g = \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_2)U_nf$。由于 G_2 是有界开集，我们有 $B_L(G_2)g = \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(G_2\cap b_2)U_nf$，因此

$$B_L(b_1)g - \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_1\cap b_2)U_nf = \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n\big((G_2\setminus b_1)\cap b_2\big)U_nf - B_L(G_2\setminus b_1)g. \tag{104}$$

还有一个开集 G_3，使得 $G_2\setminus b_1 \subseteq G_3$ 和 $\mu_\ell(G_3)-\mu_\ell(G_2\setminus b_1)$ 可以任意小。我们有

$$\begin{aligned}\|B_L(G_2\setminus b_1)g\| &= \|B_L(G_2\setminus b_1)B_L(G_3)g\| \le c\|B_L(G_3)g\| \\ &\le c\|\mathbb{U}_n^{-1}\|\|\hat{\chi}_n(G_3\cap b_2)U_nf\|_{J_n},\end{aligned} \tag{105}$$

这里我们对 G_3使用了等式（102），它是开且有界的。任取$\epsilon > 0$。适当选择 G_2 和 G_3，即可得到

$$\|\hat{\chi}_n\big((G_2 \setminus b_1) \cap b_2\big)U_n f\|_{J_n} \leq \frac{\epsilon}{2\|\mathbb{U}_n^{-1}\|}, \tag{106}$$

$$\|\hat{\chi}_n(G_3 \cap b_2)U_n f\|_{J_n} \leq \frac{\epsilon}{2c\|\mathbb{U}_n^{-1}\|}. \tag{107}$$

于是，由方程（104）可得 $\|B_L(b_1)g - \mathbb{U}_n^{-1}\hat{}\chi(b_1 \cap b_2)U_n f\| \leq \epsilon$，对任意 $\epsilon > 0$ 均成立，这就证明了等式（102）。 □

我们通过定义映射 $E_L : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$，将 B_L 扩展为一个有界代数同态 E_L，使其从 $\mathcal{B}$ 映射到 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的一个子集上，其中

$$E_L(b) = B_L(N_n \cap b) + \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)U_n, \quad b \in \mathcal{B}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{108}$$

上述方程右端与 n 无关，这一点可利用以下对 $n \geq m$ 成立的等式轻易证明：首先，根据定义，显然有 $U_m = \hat{}\chi_n(M_m)U_n$ 和 $V_m = \hat{}\chi_n(M_m)V_n$；其次，$\mathbb{U}_n^{-1}\hat{}\chi_n(M_m)\hat{}\chi_n(b)U_n = \mathbb{U}_m^{-1}\hat{}\chi_m(b)U_m$（这也相当显然，但可利用帕塞瓦尔等式的类似形式证明）；第三，$N_n \cup (M_n \setminus M_m) = N_m$。由这些事实，并利用引理 20，可得

$$\begin{aligned} B_L(N_n \cap b) + \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)U_n &= B_L(N_n \cap b) + \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(M_1)\hat{\chi}_n(b)U_n \\ +\mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(M_n \setminus M_1)\hat{\chi}_n(b)U_n &= B_L(N_n \cap b) + \mathbb{U}_1^{-1}\hat{\chi}_1(b)U_1 \\ +B_L\big((M_n \setminus M_1) \cap b\big)\mathbb{U}_n^{-1}U_n &= B_L(N_1 \cap b) + \mathbb{U}_1^{-1}\hat{\chi}_1(b)U_1. \end{aligned} \tag{109}$$

当 $n \to \infty$ 退出时，$\mathbb{U}_n^{-1}\hat{}\chi_n(b)U_n$ 的强极限，

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)U_n = B_L\big((M \setminus M_1) \cap b\big) + \mathbb{U}_1^{-1}\hat{\chi}_1(b)U_1, \tag{110}$$

且是一个有界投影，其界与 b 无关。然后，为了充分利用方程（65）和（100）中的谱展开，或许值得将 E_L 表示为

$$E_L(b) = B_L(N \cap b) + \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b)U_n, \quad b \in \mathcal{B}. \tag{111}$$

现在我们可以讨论这项工作的结论了，结论汇集在下面两个定理中。

定理 21. 映射 E_L 将 B_L 从 $\mathcal{B}_b$ 扩展到 $\mathcal{B}$，并且是 L的恒等算子的谱分解。也就是说：

1. $E_L(b) = B_L(b)$ 对每个有界博雷尔集 b 都成立。*2.* 存在 $c > 0$，使得对所有 $b \in \mathcal{B}$，$\|E_L(b)\| \leq c$。*3.* $E_L(\emptyset) = 0$ 且 $E_L(\mathbb{R}) = E_L\big(\sigma(L)\big) = I_{\mathrm{d}}$。*4.* 对于 b_1、$b_2 \in \mathcal{B}$，$E_L(b_1 \cap b_2) = E_L(b_1)E_L(b_2)$。*5.* 对于 b_1、$b_2 \in \mathcal{B}$，$E_L(b_1 \cup b_2) = E_L(b_1) + E_L(b_2) - E_L(b_1)E_L(b_2)$。*6.* 若 $\{b_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是两两不交的博雷尔集的一个序列，且 $f \in \mathcal{H}$，则 $E_L\big(\cup_i b_i\big)f = \sum_{i=1}^{\infty} E_L(b_i)f$。*7.* 若 $\{b_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是博雷尔集的一个递增序列，且 $f \in \mathcal{H}$，则$E_L\big(\cup_i b_i\big)f = \lim_i E_L(b_i)f$。若该序列递减，则有 $E_L\big(\cap_i b_i\big)f = \lim_i E_L(b_i)f$。*8.* 若 $b \in \mathcal{B}$ 且 $z \in \rho(L)$，则 $E_L(b)R_L(z) = R_L(z)E_L(b)$。*9.* 若 $b \in \mathcal{B}$ 有界，则 $ran\big(E_L(b)\big) \subset dom(L)$。*10.* 若 $b \in \mathcal{B}$ 且 $f \in dom(L)$，则 $E_L(b)f \in dom(L)$，并且

$$E_L(b)Lf = LE_L(b)f. \tag{112}$$

11. 若 $b \in \mathcal{B}$ 且 L_b 是 L 在 值域$\big(E_L(b)\big)$上的限制，则 $\sigma(L_b) \subseteq \bar{b}$。

证明。由引理 20（取 $b_1 = b$ 且 $b_2 = \mathbb{R}$）和等式（99）可轻易推出第 1 点，因为对于任意 $b \in \mathcal{B}_b$，我们有

$$E_L(b) = B_L(b)\Big(B_L(N_n) + \mathbb{U}_n^{-1}U_n\Big) = B_L(b). \tag{113}$$

第 2 点由以下事实推出：与包含于有界集 N_1 中的博雷尔集 b 相对应的投影 $B_L(b)$ 一致有界，并且对于所有 $b \in \mathcal{B}$，$\|\hat{\chi}_1(b)\| \leq 1$。第 3 点由 $B_L(\emptyset) = 0$ 和 $\hat{\chi}(\emptyset) = 0$、$\sigma(L) = M_n \cup N_n$以及关系（99）推出。第 4、5、6 点由投影 B_L 和 $\hat{\chi}_n$的相应性质，以及对于任意 b_1，$b_2 \in \mathcal{B}$，$B_L(N_n \cap b_1)\mathbb{U}_n^{-1}\hat{\chi}_n(b_2)U_n = 0$ 推出。第 7 点由第 6 点和简单的标准论证推出。第 8 点由 B_L的相应性质、方程（20）以及定理 17 的第 2 点推出。第 9 点由等式（22）推出，因为对于 $b \in \mathcal{B}_b$，$E_L(b) = B_L(b)$。第 10 点可由本定理的第 9 点轻易推出。

为证明第11点，我们通过考虑 $(L_b - zI_{\mathrm{d}})f = g$ 对$g \in$ 值域$\big(E_L(b)\big)$ 和 $z \in \mathbb{C}$，确定 $\rho(L_b)$。将 $B_L(N_n \cap b)$ 和 $\hat{\chi}_n(b)U_n$ 应用于等式两边

并利用定理 17 的第3点，我们得到

$$E_\Lambda(N_n \cap b)(\Lambda - zI_{\rm d})D_2^{-1/2} f = E_\Lambda(N_n \cap b) D_2^{-1/2} g, \tag{114}$$

$$\big(Q_n - zI_{\rm d})\hat{\chi}_n(b) U_n f = \hat{\chi}_n(b) U_n g. \tag{115}$$

当且仅当上述方程对每个 $g \in \mathsf{ran}\big(E_L(b)\big)$ 都有唯一的有界解时，我们才有 $z \in \rho(L_b)$。如果 $h \in \mathsf{ran}\big(E_\Lambda(N_n \cap b)\big)$，那么 $h \in \mathsf{dom}(\Lambda) \subset \mathsf{dom}(D_2^{1/2})$ 且 $h = D_2^{-1/2} E_L(N_n \cap b) D_2^{1/2} h$。因此，方程 (114) 有唯一的有界解，当且仅当 $z \in \rho(\Lambda_{N_n \cap b})$，其中 $\Lambda_{N_n \cap b}$ 是 Λ 在 $\mathsf{ran}\big(E_\Lambda(N_n \cap b)\big)$ 上的限制。由于 $\mathsf{ran}\big(E_L(b)\big)$ 在 $\hat{\chi}_n(b) U_n$ 下的像等于 $\mathsf{ran}\big(\hat{\chi}_n(b)\big)$，方程 (115) 有唯一的有界解，当且仅当$z \in \rho(Q_{M_n \cap b})$，其中 $Q_{M_n \cap b}$ 是 Q_n 在 $\mathsf{ran}\big(\hat{\chi}(M_n \cap b)\big)$ 上的限制。因此，$\rho(L_b) = \rho(\Lambda_{N_n \cap b}) \cap \rho(Q_{M_n \cap b})$，进而 $\sigma(L_b) = \sigma(\Lambda_{N_n \cap b}) \cup \sigma(Q_{M_n \cap b}) \subseteq (N_n \cap b) \cup (M_n \cap b) \subseteq b$，这里用到了自伴算子 Λ 和 Q 的谱性质。 □

对于投影值测度（如 E_L 或E_Λ）的积分将在下一个定理中出现；有关其定义和研究，例如可参见 Dunford 和 Schwartz，第 XI 章 [6]。

定理 22。 如果 $\{b_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ 是有界博雷尔集的递增序列，满足 $\sigma(L) \subseteq \cup_n b_n$，那么，对于 $f \in$ 定义域(L)，

$$Lf = \lim_{n\to\infty} \int_{b_n} \lambda\, E_L(d\lambda)\, f. \tag{116}$$

证明。 注意到 $E_L(b_n) = B_L(b_n)$，因为 b_n 对所有 $n \in \mathbb{N}$都是有界的。对于任意 $b \subseteq b_n$，我们可以将方程 (22) 写成

$$B_L(b) = (D_1 + P_0)^{-1} D_2^{-1/2} \Lambda E_\Lambda(b_n) E_\Lambda(b) D_2^{-1/2} + P_0 D_2^{1/2} E_\Lambda(b) D_2^{-1/2}. \tag{117}$$

那么，由于 $\Lambda E_\Lambda(b_n)$是一个有界算子，我们有

$$\begin{aligned} \int_{b_n} \lambda\, E_L(d\lambda) &= (D_1 + P_0)^{-1} D_2^{-1/2} \Lambda E_\Lambda(b_n) \int_{b_n} \lambda\, E_\Lambda(d\lambda)\, D_2^{-1/2} \\ &+ P_0 D_2^{1/2} \int_{b_n} \lambda\, E_\Lambda(d\lambda)\, D_2^{-1/2} = L B_L(b_n) = L E_L(b_n), \end{aligned} \tag{118}$$

其中，最后一个等式中我们使用了 $\int_{b_n} \lambda E_\Lambda(d\lambda) = \Lambda E_\Lambda(b_n)$。对于 $f \in \mathrm{dom}(L)$，我们有 $LE_L(b_n)f = E_L(b_n)Lf$（定理 21 的第 10 点）。利用方程（118）并取极限 $n \to \infty$（利用定理 21 的第 7 点和第 3 点），我们得到方程（116）。 □

定理 22 表明，按照 Bade [1] 的意义，L 是一个无界标量型谱算子。此外，定理 21 和 22 保证，可以像对自伴算子那样，为 L 建立运算演算。显然，L^* 也是一个无界标量型谱算子，其恒等算子的谱分解为 $E_{L^*}(b) = E_L(b)^*$，其中 $b \in \mathcal{B}$。

9. 最后说明

如果我们要求函数 q_i满足 $\int_{\mathbb{R}} \exp(\gamma|x|)|q_i^{(k)}(x)|dx < \infty$，其中 $\gamma > 0$、$i = 1, 2$ 和 $0 \le k \le 2$，而不要求 $\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^3)|q_i^{(k)}(x)|dx < \infty$，就像磁孤子存在时的自旋波动力学那样，那么可以证明，定理 3 的基本矩阵具有如下性质：对于固定的 x，$\Phi_+(x, \cdot)$ 和 $\Phi_-(x, \cdot)$ 均可从上、下半平面解析延拓到包含 $\mathbb{R} \setminus \{h_\mathrm{m}, h_\mathrm{p}\}$的开集。这意味着 W_+ 和 W_- 的零点是孤立的，且只能在h_m 和 h_p处聚集。因此，在这种情况下，$N = \sigma_p(L) \cup \{h_\mathrm{p}\}$ 和 $M = (h_\mathrm{p}, \infty) \setminus \sigma_p(L)$，并且对于任意 $f \in \mathcal{H}$,——

$$B_L(N)f = \sum_n \sum_{\alpha=1}^{d_n} (f, \xi_{n\alpha}^*)\xi_{n\alpha}, \tag{119}$$

其中，n 遍历 L 的特征值，$d_n \le 2$ 是与第 n个特征值 λ_n对应的基本子空间的维数。对于每个 n，函数 $\xi_{n\alpha}$ 张成 L中与 λ_n对应的基本子空间，而函数$\xi_{n\alpha}^*$ 张成 L^* 中与 λ_n对应的基本子空间，并满足条件 $(\xi_{n\alpha}, \xi_{m\beta}^*) = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$。若 $\psi_{n\alpha}$ 构成 Λ 中与 λ_n对应的基本子空间的正交基，则可取 $\xi_{n\alpha} = D_2^{1/2}\psi_{n\alpha}$ 和 $\xi_{n\alpha}^* = D_2^{-1/2}\psi_{n\alpha}$。

证明某个算子是谱算子的主要障碍，在于证明它没有谱奇异性（也就是说，谱投影是一致有界的）。例如，Huige 证明了 [8] 某一类常微分算子（包括 L 和 L^*）在满足某些假设时，存在与闭包

不包含有限个例外点的博雷尔集相关联的谱投影。然而，这些投影未必一致有界。此外，这些假设中有一条蕴含了如下假定：唯一的谱奇异性属于例外点集。

Mackey 证明（ [12], 另见 [18]中的定理 55），任何有界谱测度，例如 E_L，都与某个自伴谱测度相似；也就是说，存在 $\mathcal{H}$上的连续线性双射 A，其逆映射也连续，并且对每个 $b \in \mathcal{B}$， $A^{-1}E_L(b)A$ 都是自伴的。这意味着，任何标量型谱算子都与某个自伴算子相似。在我们的情形下，存在一个自伴算子 H，使得 $A^{-1}LA = H$。对 L^*也有类似的结论。显然， A 不等于 $D_2^{1/2}$，因此H 不等于 Λ。文献中有时将与自伴算子相似的非自伴算子称为拟自伴算子[2]。实际上，拟自伴算子被定义为与其伴随算子相似的算子，但很容易证明（ [2]中的命题 5.5.2），拟自伴性等价于与某个自伴算子相似。因此，用这一术语来说，本文的结论可以简要概括为： L 和 L^* 是拟自伴算子。

致谢

本研究获得了编号为 PID2022-138492NB- I00-XM4 的资助，该资助由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 提供；此外，还获得了编号为 E11_23 R/M4 的资助，该资助由阿拉贡自治区政府提供。

附录 A. 定理 4 的证明

为证明定理 4，我们分别分析 $Lu = \lambda u$ 在 $\lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$以及在 $\lambda \in [\lambda_s, \infty)$ 时的解。回顾一下， $\lambda_s > h_{\mathrm{p}}$ 是一个充分大的正数。这个四阶微分方程等价于一阶线性系统（23）。还要回顾的是，对于 $\lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \infty)$, $p_{\mathrm{c}}(\mu) - \lambda$ 的根为 $\mu_1 = \mathrm{i}\theta$、 $\mu_2 = \nu$、 $\mu_3 = -\nu$、 $\mu_4 = -\mathrm{i}\theta$，其中 θ 和 ν 是由方程（27）给出的 λ 的函数。我们用 e_j $(1 \le j \le 4)$ 表示 $\mathbb{C}^4$的标准基向量。对于 $1 \le k \le 4$，方程（23）中出现的矩阵 A的特征值为 $\mathrm{i}\mu_k$，对应于 $\mathrm{i}\mu_k$ 的特征向量为 $p_k = \sum_j (\mathrm{i}\mu_k)^{j-1} e_j$。其第 k列为 p_k 的 4×4 矩阵记为 Π。如果 A 的所有特征值都互不相同，那么 Π 是一个

非奇异范德蒙德矩阵，并且我们有

$$\left(\Pi^{-1}\right)_{k4}=\frac{\mathrm{i}}{p_{\mathrm{c}}'(\mu_k)}=\frac{\mathrm{i}}{\mu_k(\mu_k^2+h_{\mathrm{a}})}. \tag{A.1}$$

令 $D(x)$ 为对角矩阵，其矩阵元为 $D(x)_{jk}=\exp(\mathrm{i}\mu_j x)\delta_{jk}$。注意，若 $\lambda>h_{\mathrm{p}}$，则 $\Pi D(x)$ 是系统 $y'=Ay$ 的基本矩阵。为避免表达式繁复，通常不显式写出 μ_k、p_k、Π 和 $D(x)$ 对 λ 的依赖关系。

定理 4 是以下两个关于线性系统（23）的解的定理的推论。

定理 23。若 $\lambda_s>h_{\mathrm{p}}$ 足够大，则存在函数 y_k^+ 和 y_k^-、$1\le k\le 4$，其定义域为 $\mathbb{R}\times[\lambda_s,\infty)$，像属于 $\mathbb{C}^4$，它们可写成如下形式

$$\begin{aligned} y_k^+(x,\lambda)&=\exp(\mathrm{i}\mu_k x)\Pi\big(e_k+v_k^+(x,\lambda)\big),\\ y_k^-(x,\lambda)&=\exp(\mathrm{i}\mu_k x)\Pi\big(e_k+v_k^-(x,\lambda)\big),\end{aligned} \tag{A.2}$$

对于 $(x,\lambda)\in\mathbb{R}\times[\lambda_s,\infty)$，使得

1. $\left\{y_k^+(\cdot,\lambda)\ \ 1\le k\le 4\right\}$ 和 $\left\{y_k^-(\cdot,\lambda)\ \ 1\le k\le 4\right\}$ 对每个 $\lambda\in[\lambda_s,\infty)$ 都是系统（23）的两个基本解组。2. 函数 v_k^+ 和 v_k^- 在 $\mathbb{R}\times[\lambda_s,\infty)$ 上连续，并满足

$$|v_k^+(x,\lambda)|\le c\,\nu(\lambda)^{-1}\big(1+x^3\big)^{-1},\quad x\ge 0,\quad \lambda\in[\lambda_s,\infty), \tag{A.3}$$

$$|v_k^-(x,\lambda)|\le c\,\nu(\lambda)^{-1}\big(1-x^3\big)^{-1},\quad x\le 0,\quad \lambda\in[\lambda_s,\infty), \tag{A.4}$$

其中，c是一个常数。

3. 对于每个固定的 $x\in\mathbb{R}$，$v_k^+(x,\cdot)$ 和 $v_k^-(x,\cdot)$ 在 $[\lambda_s,\infty)$ 中解析。

证明。对于 $1\le k\le 4$，我们得到 y_k^+ 如下。对于 $1\le j\le 4$，若 $\operatorname{Im}\mu_j-\operatorname{Im}\mu_k>0$，则定义$s_{1j}=1$；否则定义为 $s_{1j}=0$，并且 $s_{2j}=1-s_{1j}$。对于 $l=1,2$，令 $D_l(x)$ 为 4×4 对角矩阵，其矩阵元为 $D_l(x)_{ij}=s_{lj}\exp(\mathrm{i}\mu_j x)\delta_{ij}$。注意，$\Pi D_l(x)$是系统（23）的解矩阵，并且 $D(x)=D_1(x)+D_2(x)$。对于 $(x,\lambda)\in[0,\infty)\times[\lambda_s,\infty)$，考虑积分方程

$$\begin{aligned} y(x,\lambda)=\exp(\mathrm{i}\mu_k x)p_k&+\int_0^x \Pi D_1(x)D(-\tau)\Pi^{-1}B(\tau)y(\tau,\lambda)d\tau\\ &-\int_x^\infty \Pi D_2(x)D(-\tau)\Pi^{-1}B(\tau)y(\tau,\lambda)d\tau.\end{aligned} \tag{A.5}$$

若该方程有解，则此解是系统（23）的一个解。函数 $\tilde{y}(x,\lambda) = \Pi^{-1}(\lambda)y(x,\lambda)$，对于 $(x,\lambda) \in [0,\infty) \times [\lambda_s,\infty)$，满足方程

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x,\lambda) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)e_k + \int_0^x D_1(x)D(-\tau)\tilde{B}(\tau)\tilde{y}(\tau,\lambda)d\tau \\ - \int_x^\infty D_2(x)D(-\tau)\tilde{B}(\tau)\tilde{y}(\tau,\lambda)d\tau,\end{aligned} \tag{A.6}$$

其中 $\tilde{B}(\tau) = \Pi B(\tau)\Pi^{-1}$。我们需要得到 $\tilde{B}$ 的范数界。由方程 (24) 和 (A.1)，对于 $1 \le i,\ j \le 4$，可得：

$$\tilde{B}_{ij}(\tau) = \frac{\mathrm{i}}{p_{\mathrm{c}}'(\mu_i)} \sum_{l=1}^{3} \left(\mathrm{i}\mu_j\right)^{l-1} B_{4l}(\tau). \tag{A.7}$$

由于 $|\mu_j|^{l-1}/p_{\mathrm{c}}'(\mu_i) \le \theta^{l-1}/\left(2\nu(\theta^2+\nu^2)\right) \le \theta^{l-3}/(2\nu)$ 且 $\theta \ge \theta_0 > 0$，我们~得到 $|B(\tau)| \le (c_0/\nu)|B(\tau)|$，其中 c_0 是一个常数。让我们尝试对方程 (A.6) 的解进行逐次逼近：$\tilde{y}^{(0)}(x,\ \lambda) = 0$，且对于 $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\tilde{y}^{(j)}(x,\lambda) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)e_k + \int_0^x D_1(x)D(-\tau)\tilde{B}(\tau)\,\tilde{y}^{(j-1)}(\tau,\lambda)d\tau \\ - \int_x^\infty D_2(x)D(-\tau)\tilde{B}(\tau)\,\tilde{y}^{(j-1)}(\tau,\lambda)d\tau.\end{aligned} \tag{A.8}$$

我们有 $\tilde{y}^{(1)}(x,\ \lambda) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)e_k$，且 $|\tilde{y}^{(1)}(x,\ \lambda)| = \exp(-\operatorname{Im}\mu_k x)$。函数 $\tilde{y}^{(j)}$ 在 $[0,\infty) \times [\lambda_s,\infty$ 上连续，并且对于固定的 x，$\tilde{y}^{(j)}(x,\ \cdot)$ 在 $[\lambda_s,\infty)$ 上解析。现在我们证明，若 $x \ge 0$ 且 $\lambda \ge \lambda_s$，并且 λ_s 足够大，则

$$\left|\tilde{y}^{(j+1)}(x,\lambda) - \tilde{y}^{(j)}(x,\lambda)\right| \le (1/2)^j \exp\left(-\operatorname{Im}\mu_k x\right) \tag{A.9}$$

对于 $j \in \mathbb{N}$。我们通过归纳法进行证明。对于 $j = 0$，不等式成立。假设它对某个 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 成立，则方程 (A.8) 表明

$$\left|\tilde{y}^{(j+2)}(x,\lambda) - \tilde{y}^{(j+1)}(x,\lambda)\right| \le (1/2)^j \exp(-\operatorname{Im}\mu_k x)\frac{c_0}{\nu(\lambda)}\int_0^\infty |B(\tau)|d\tau. \tag{A.10}$$

如果 λ_s 足够大，使得 $c_0\,\nu(\lambda_s)^{-1}\int_0^\infty |B(\tau)|d\tau \le 1/2$，那么不等式 (A.9) 就得到了证明（回想一下，ν 是 λ 的递增函数）。因此，

序列 $\tilde{y}^{(j)}$ 在每个紧集 $[0,x_1]\times[\lambda_s,\lambda_1]$ 上一致收敛，其中 $x_1\in\mathbb{R}^+$ 且 $\lambda_1>\lambda_s$，收敛到函数 $\tilde{y}_k^+$；因此，该函数在 $[0,\infty)\times[\lambda_s,\infty)$ 上连续。此外，对固定的 $x\in[0,\infty)$，函数 $\tilde{y}_k^+(x,\cdot)$ 在 $[\lambda_s,\infty)$ 的某个邻域内解析。通过对不等式求和，可以轻易得到界 $|\tilde{y}_k^+(x,\lambda)|\le 2\exp(-\mathrm{Im}\,\mu_k x)$

$$|\tilde{y}^{(j+1)}(x,\lambda)|-|\tilde{y}^{(j)}(x,\lambda)|\le(1/2)^j\exp(-\mathrm{Im}\,\mu_k x),\tag{A.11}$$

从 $j=0$ 到 l 并取极限 $l\to\infty$。由 $\tilde{y}_k^+(x,\lambda)$ 可得$y_k^+(x,\lambda)=\Pi\tilde{y}_k^+(x,\lambda)$，且 $v_k^+(x,\lambda)=\exp(-\mathrm{i}\mu_k x)\tilde{y}_k^+(x,\lambda)$，因此

$$\begin{aligned}v_k^+(x,\lambda)=\exp(-\mathrm{i}\mu_k x)\Bigg(&\int_0^x D_1(x)D(-\tau)\tilde{B}(\tau)\tilde{y}_k^+(\tau,\lambda)d\tau\\&-\int_x^\infty D_2(x)D(-\tau)\tilde{B}(\tau)\tilde{y}_k^+(\tau,\lambda)d\tau\Bigg).\end{aligned}\tag{A.12}$$

由此方程可得 $|v_k^+(x,\lambda)|\le(2c_0/\nu)\big(I_1(x)+I_2(x)\big)$，其中

$$I_1(x)=\int_0^x\sum_{j=1}^4 s_{1j}\exp\Big(-(\mathrm{Im}\mu_j-\mathrm{Im}\mu_k)(x-\tau)\Big)|B(\tau)|d\tau,\tag{A.13}$$

$$I_2(x)=\int_x^\infty\sum_{j=1}^4 s_{2j}\exp\Big(-(\mathrm{Im}\mu_j-\mathrm{Im}\mu_k)(x-\tau)\Big)|B(\tau)|d\tau.\tag{A.14}$$

我们有

$$I_2(x)\le 4\int_x^\infty|B(\tau)|d\tau\le 4\int_x^\infty\frac{1+\tau^3}{1+x^3}|B(\tau)|d\tau\le\frac{c_2}{1+x^3},\tag{A.15}$$

其中 c_2 是一个常数，与 λ无关。我们还有

$$\begin{aligned}&I_1(x)\le 4\int_0^x\exp\big(-\theta_0(x-\tau)\big)|B(\tau)|d\tau\le\\&4\left(\int_0^{x/2}\exp\big(-\theta_0(x-\tau)\big)|B(\tau)|d\tau+\int_{x/2}^x|B(\tau)|d\tau\right)\le\\&4\left(\exp(-\theta_0x/2)\int_0^{x/2}|B(\tau)|d\tau+\int_{x/2}^x\frac{1+8\tau^3}{1+x^3}|B(\tau)|d\tau\right)\le\frac{c_1}{1+x^3},\end{aligned}\tag{A.16}$$

其中 c_1 是另一个常数。这样，我们就得到了方程（A.3）中 $|v_k^+(x,\lambda)|$ 的界。通过求解系统（23），并采用 $x=0$ 处由 $y(0)=\Pi(\lambda)\big(e_k+v_k^+(0,\lambda)\big)$ 给出的初始条件，可得到扩展到 $\mathbb{R}\times[\lambda_s,\infty)$且具有所需性质的函数 y_k^+。

具有所需性质的函数y_k^- 的存在性可用类似的方法证明。

□

矩阵 $\Pi(\lambda)$ 在 $\lambda=h_{\rm p}$ 处是奇异的，因为在这种情况下 $\nu=0$和 $p_2=p_3$。必须用另一种方式构造系统 $y'=Ay$ 的基本矩阵，使其逆映射在 $[h_{\rm p},\lambda_s]$ 中有界。令 $\Psi(x)$ 为 4×4矩阵，其第一、第二和第四列分别为 p_1、p_2 和 p_4，第三列为

$$\frac{1}{\nu}\big(p_3-\exp(-{\rm i}2\nu x)p_2\big)\ \text{ if }\ \lambda\in(h_{\rm p},\lambda_s],\quad xe_1+e_2\ \text{ if }\ \lambda=h_{\rm p}. \tag{A.17}$$

同样，为避免表达式过于繁杂，这里没有明确写出 $\Psi(x)$ 对 λ 的依赖关系。显然，$\Psi(x)D(x)$ 是 $y'=Ay$ 的基本矩阵。我们注意到

$$\det\Psi(x)=\frac{1}{\nu}\det\Pi=2\theta(\theta^2+\nu^2)\ge2\theta_0^3>0,\quad \lambda\ge h_{\rm p}. \tag{A.18}$$

由此容易看出，存在与 x 和 λ 无关的 c_0，使得对于（x，λ）$\in\mathbb{R}\times[h_{\rm p},\lambda_s]$，$|\Psi(x)|\le c_0(1+|x|)$ 和 $|\Psi^{-1}(x)|\le c_0(1+|x|)$ 成立。

定理 24. 对于任意 $\lambda_s>h_{\rm p}$，存在函数 z_k^+ 和 z_k^-，$1\le k\le4$，其定义域为 $\mathbb{R}\times[h_{\rm p},\lambda_s]$，像包含于 $\mathbb{C}^4$，并可写成如下形式

$$\begin{aligned} z_k^+(x,\lambda)&=\exp({\rm i}\mu_k x)\big(p_k+w_k^+(x,\lambda)\big),\\ z_k^-(x,\lambda)&=\exp({\rm i}\mu_k x)\big(p_k+w_k^-(x,\lambda)\big),\end{aligned} \tag{A.19}$$

使得

1. $\big\{z_k^+(\cdot,\lambda)\ \ 1\le k\le4\big\}$ 和 $\big\{z_k^-(\cdot,\lambda)\ \ 1\le k\le4\big\}$ 对于每个 $\lambda\in(h_{\rm p},\lambda_s]$，都是系统（23）的两组基本解组。2. 函数 w_k^+ 和 w_k^- 在 $\mathbb{R}\times[h_{\rm p},\lambda_s]$上连续，并满足

$$|w_k^+(x,\lambda)|\le c\,(1+x)^{-1},\quad x\ge0,\quad \lambda\in[h_{\rm p},\lambda_s], \tag{A.20}$$

$$|w_k^-(x,\lambda)|\le c\,(1-x)^{-1},\quad x\le0,\quad \lambda\in[h_{\rm p},\lambda_s], \tag{A.21}$$

其中 c 是一个常数（与 x 和 λ无关，但可能依赖于 λ_s）。

3. 对于固定的 $x \in \mathbb{R}$, $w_k^+(x,\cdot)$， $w_k^-(x,\cdot)$ 在$(h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$内解析。

证明。对于 $1 \le k \le 4$，我们得到 z_k^+ 如下。对于 $l = 1, 2$ 和 $1 \le j \le 4$，按定理 24 的证明定义 s_{lj} 和 $D_l(x)$。注意，$D(x) = D_1(x) + D_2(x)$，并且 $\Psi(x)D_l(x)$、$l = 1, 2$ 是系统（23）的解矩阵。设 $x_0 \ge 0$ 为待定常数，对于 $(x, \lambda) \in [x_0, \infty) \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$，考虑积分方程

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)p_k + \int_{x_0}^{x} \Psi(x)D_1(x)D(-\tau)\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)y(\tau,\lambda)d\tau \\ - \int_{x}^{\infty} \Psi(x)D_2(x)D(-\tau)\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)y(\tau,\lambda)d\tau. \end{aligned} \tag{A.22}$$

如果该方程有解，那么它也是系统（23）的解。考虑逐次逼近 $y^{(0)}(x, \lambda) = 0$，并且对于 $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} y^{(j)}(x,\lambda) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)p_k + \int_{x_0}^{x} \Psi(x)D_1(x)D(-\tau)\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\, y^{(j-1)}(\tau,\lambda)d\tau \\ - \int_{x}^{\infty} \Psi(x)D_2(x)D(-\tau)\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\, y^{(j-1)}(\tau,\lambda)d\tau. \end{aligned} \tag{A.23}$$

我们有 $y^{(1)}(x, \lambda) = \exp(\mathrm{i}\mu_k x)p_k$ 以及 $|y^{(1)}(x, \lambda)| = \exp(-\mathrm{Im}\,\mu_k x)|p_k|$。函数 $y^{(j)}$ 在 $[x_0, \infty) \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$ 上连续，并且对于固定的 $x \ge x_0$，$y^{(j)}(x, \cdot)$ 在 $(h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$ 内解析。定义 $c_1 = \max\{|p_k|, 1 \le k \le 4, h_{\mathrm{p}} \le \lambda \le \lambda_s\}$。下面证明，若 x_0 足够大，则

$$\left|y^{(j+1)}(x,\lambda) - y^{(j)}(x,\lambda)\right| \le c_1(1/2)^j \exp(-\mathrm{Im}\,\mu_k x) \tag{A.24}$$

对于 $x \ge x_0$, $\lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$ 和 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。我们用归纳法进行证明。对于$j = 0$，该不等式成立。假设它对某个 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 成立。由此假设、方程 (A.23) 以及关于 $\Psi(x)$ 和 $\Psi^{-1}(x)$ 的界可得

$$\left|y^{(j+2)}(x,\lambda) - y^{(j+1)}(x,\lambda)\right| \le c_2(1+x)(1/2)^j \exp(-\mathrm{Im}\,\mu_k x)J(x), \tag{A.25}$$

其中 c_2 是一个常数，$J(x) = I_1(x) + I_2(x)$，并且

$$I_1(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{4} s_{1j} \exp\Big(-(\mathrm{Im}\mu_j - \mathrm{Im}\mu_k)(x-\tau)\Big)(1+\tau)|B(\tau)|d\tau, \tag{A.26}$$

$$I_2(x) = \int_{x}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} s_{2j} \exp\Big(-(\mathrm{Im}\mu_j - \mathrm{Im}\mu_k)(x-\tau)\Big)(1+\tau)|B(\tau)|d\tau. \tag{A.27}$$

与定理 23 的证明中不等式 (A.13) 和 (A.14) 一样，我们得到，若 $x \geq x_0$，则$I_1(x)$和 $I_2(x)$ 由 $c_3/(1+x)^2$ 有界。然后，选择 x_0 使得 $2c_3c_2/(1+x_0) \leq 1/2$，我们得到

$$\left|y^{(j+2)}(x,\lambda) - y^{(j+1)}(x,\lambda)\right| \leq c_1(1/2)^{j+1}\exp(-\operatorname{Im}\mu_k x), \tag{A.28}$$

对所有 $x \geq x_0$ 和 $\lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$，不等式 (A.24) 得证。因此，序列 $y^{(j)}$ 在每个集合 $[x_0, x_1] \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$上均一致收敛，其中 $x_1 > x_0$，收敛到函数 z_k^+；因此，该函数在 $[x_0, \infty) \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$上连续。此外，对于固定的 $x \in [x_0, \infty)$，函数 $z_k^+(x, \cdot)$ 在 $(h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$ 上解析。对于 $x \geq x_0$，界 $|z_k^+(x, \lambda)| \leq 2c_1$ $\exp(-\operatorname{Im}\mu_k x)$ 可通过对不等式求和轻易得到

$$|y^{(j+1)}(x,\lambda)| - |y^{(j)}(x,\lambda)| \leq c_1(1/2)^j \exp(-\operatorname{Im}\mu_k x), \tag{A.29}$$

从 $j = 0$ 到 l 并取极限 $l \to \infty$。由 $z_k^+(x, \lambda)$ 得到$w_k^+(x, \lambda) = \exp(-\mathrm{i}\mu_k x) z_k^+(x, \lambda) - p_k$，因此

$$\begin{aligned} w_k^+(x,\lambda) = \exp(-\mathrm{i}\mu_k x)\Bigg(& \int_{x_0}^{x} \Psi(x) D_1(x) D(-\tau) \Psi^{-1}(\tau) B(\tau) z_k^+(\tau,\lambda) d\tau \\ & - \int_{x}^{\infty} \Psi(x) D_2(x) D(-\tau) \Psi^{-1}(\tau) B(\tau) z_k^+(\tau,\lambda) d\tau \Bigg). \end{aligned} \tag{A.30}$$

由此方程以及被积函数各因子的界，我们得到 $|w_k^+(x,\lambda)| \leq 2c_1c_0^2(1+x)$ $\exp(-\operatorname{Im}\mu_k x)\big(I_1(x) + I_2(x)\big)$，其中 $x \geq x_0$，而 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$ 分别由方程 (A.26) 和 (A.27) 给出。由上文得到的 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$ 的界，我们得到估计 $|w_k^+(x,\lambda)| \leq c/(1+x)$，其中 $(x,\lambda) \in [x_0, \infty) \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$。函数 z_k^+ 通过求解系统（23）并采用在 $x = x_0$ 处由 $y(x_0) = p_k + w_k^+(x_0, \lambda)$ 给出的初始条件，可延拓至 $\mathbb{R} \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$，并具有所需性质。由此得到的函数 z_k^+ 在 $\mathbb{R} \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$ 上连续，因此在$[0, x_0] \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$上有界。于是，通过在必要时增大 c，可将 w_k^+ 上的界延拓至 $[0, \infty) \times [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s]$。

同理可证明，具有所需性质的函数 z_k^- 存在。

□

对于 $1 \leq k \leq 4$，定理 4 中的函数 ϕ_k 和 χ_k 由

定理 23 和 24 中的函数 y_k^+、y_k^-、z_k^+ 和 z_k^- 按如下方式得到。对于 $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\phi_k(x,\lambda) &= \begin{cases} e_1 \cdot z_k^+(x,\lambda), & \lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s], \\ e_1 \cdot y_k^+(x,\lambda), & \lambda \in (\lambda_s, \infty), \end{cases} \\ \chi_k(x,\lambda) &= \begin{cases} e_1 \cdot z_k^-(x,\lambda), & \lambda \in [h_{\mathrm{p}}, \lambda_s], \\ e_1 \cdot y_k^-(x,\lambda), & \lambda \in (\lambda_s, \infty). \end{cases}\end{aligned} \tag{A.31}$$

附录 B. 辅助结果的证明

下一个引理将用于引理 6 的证明。

引理 25. 设 n 是一个自然数，I 和 M 是 $\mathbb{R}$的子集，其中 I 是开集，且 $f_j : I \times M \to \mathbb{C}$, $1 \le j \le n$ 是连续有界函数。假设对于每个 $\lambda \in M$，函数 $f_j(\cdot, \lambda)$ 线性无关，考虑函数 $c_j : M \to \mathbb{C}$，并定义 $f : I \times M \to \mathbb{C}$ 如下

$$f(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\lambda) f_j(x,\lambda), \quad (x,\lambda) \in I \times M. \tag{B.1}$$

如果 f 连续且有界，那么函数 c_j 连续。

证明. 函数 c_j 在任意紧子集 $J \subseteq M$上有界。否则，存在一个序列 $\lambda_m \in J$，使得 $\lim_m a_m = \infty$，其中 $a_m = \max\{|c_j(\lambda_m)|, \ 1 \le j \le n\}$。由于 J 是紧的，该序列可以取为收敛序列，因此 $\lambda_m \to \lambda_0 \in J$。显然，我们有 $|c_j(\lambda_m)|/a_m \le 1$，且 $\max\{|c_j(\lambda_m)|/a_m, \ 1 \le j \le n\} = 1$，因此可以选取序列 λ_m，使得 $|c_j(\lambda_m)|/a_m$ 对 $1 \le j \le n$收敛。令 α_j 表示相应的极限。我们有

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|c_j(\lambda_m)|}{a_m} f_j(x,\lambda_m) = \frac{1}{a_m} f(x,\lambda_m). \tag{B.2}$$

在上述等式中取极限 $m \to \infty$，得到 $\sum_j \alpha_j f_j(x,\lambda_0) = 0$，而函数 $f_j(\cdot,\lambda_0)$ 的线性无关性意味着，对于 $1 \le j \le n$，有 $\alpha_j = 0$。然而，这是不可能的，因为对所有 $m \in \mathbb{N}$，$\max\{|c_j(\lambda_m)|/a_m, 1 \le j \le n\} = 1$。因此，函数 c_j 在包含于 M 的每个紧集 J 上都有界。

现在取一个收敛到 $\lambda \in M$ 的序列 $\lambda_m \in M$。集合 $\{\big(c_1(\lambda_m)\dots,c_n(\lambda_m)\big), m\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中有界。令 $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ 为其一个聚点。存在一个子序列 λ'_m，使得对于 $1\le j\le n$，$c_j(\lambda'_m)$ 收敛到 a_j。在表达式中取极限 $m\to\infty$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\big(c_j(\lambda)-c_j(\lambda'_m)\big)f_j(x,\lambda) &= f(x,\lambda)-f(x,\lambda'_m)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}c_j(\lambda'_m)\big(f_j(x,\lambda)-f_j(x,\lambda'_m)\big)\end{aligned} \tag{B.3}$$

我们对所有 $x\in\mathbb{R}$得到 $\sum_{j=1}^{n}\big(c_j(\lambda)-a_j\big)f_j(x,\ \lambda)=0$。函数 $f_j(\cdot,\ \lambda)$ 的线性无关性意味着 $a_j=c_j(\lambda)$。因此，序列 $c_j(\lambda_m)$的聚点唯一，且对所有收敛到 λ 的序列 λ_m 都相同，其值为 $c_j(\lambda)$。因此，函数 c_j 在 M 上连续。

□

参考文献

[1] Bade, W. G.（1954）。无界谱算子。《太平洋数学杂志》，4：373–392。

[2] Bagarello, F.、Gazeau, J.-P.、Szafraniec, F. H. 和 Znojil, M. 编（2015）。《量子物理中的非自伴算子：数学方面》约翰·威立父子出版公司。

[3] Coddington, E. A. 和 Levinson, N.（1972）。《常微分方程理论》。塔塔麦格劳-希尔。

[4] Dunford, N.（1954）。谱算子。《太平洋数学杂志》，4:321–354。

[5] Dunford, N.（1958）。谱算子理论综述。《美国数学会通报》，64:217–274。

[6] Dunford, N. 和 Schwartz, J. T.（1971）。线性算子，第三部分：谱算子。约翰·威立父子出版公司。[7] Edmunds, D. 和 Evans, W.（2018）。谱理论与微分算子。牛津大学出版社。

[8] Huige, G. E.（1971）。某些谱算子的微扰理论。《纯粹与应用数学通讯》，24(6):741 – 757。[9] Kemp, R. R. D.（1960）。论一类非自伴微分算子。《加拿大数学杂志》，12:641–659。[10] Kramer, H. P.（1957）。微分算子的微扰。《太平洋数学杂志》，7:1405–1435。[11] Laliena, V. 和 Campo, J.（2021）。一维孤子诱导的磁振子古斯–汉欣效应。《先进电子材料》，2100782。[12] Mackey, G. W.（1952）。交换巴拿赫代数。马萨诸塞州剑桥：哈佛大学。[13] McGarvey, D. C.（1965）。与平移一相交换的算子。第三部分：周期微分算子的微扰结果。《数学分析及其应用杂志》，12:187–234。[14] Schwartz, J.（1960）。一些非自伴算子。《纯粹与应用数学通讯》，13(4):609 – 639。[15] Schwartz, J. T.（1954）。谱算子的微扰及其应用。I. 有界微扰。《太平洋数学杂志》，4:415–458。[16] Teschl, G.（2009）。量子力学的数学方法。美国数学学会。[17] Turner, R. E. L.（1966）。常微分算子的微扰。《数学分析及其应用杂志》，13:447–457。[18] Wermer, J.（1954）。希尔伯特空间上可交换的谱测度。《太平洋数学杂志》，4:355–361。